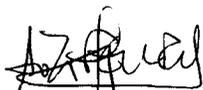


1. Publicação nº <i>INPE-3638-RPI/138</i>	2. Versão	3. Data <i>Set., 1985</i>	5. Distribuição <input checked="" type="checkbox"/> Interna <input type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DMC/DGC</i>	Programa <i>CONTAT</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>CONTROLE DE ATITUDE BOCAIS GÁS FRIO</i> <i>OTIMIZAÇÃO SISTEMA DE CONTROLE DE ATITUDE</i> <i>ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL JATOS DE GÁS</i>			
7. C.D.U.: <i>629.7.062.2</i>			
8. Título <i>MODELAGEM MATEMÁTICA, OTIMIZAÇÃO E ANÁLISE DE SISTEMAS DE JATOS DE GÁS FRIO PARA CONTROLE DE ATITUDE DE SATÉLITES</i>		10. Páginas: <i>122</i>	
		11. Última página: <i>D.5</i>	
9. Autoria <i>Ismael Emílio de Oliveira Júnior</i>		12. Revisada por  <i>Agenor de T. Fleury</i>	
Assinatura responsável <i>Ismael E. de Oliveira Jr.</i>		13. Autorizada por  <i>Marco Antonio Raupp</i> Diretor Geral	
14. Resumo/Notas <i>Um satélite que orbita a Terra está sujeito a uma série de perturbações que tendem a alterar seu apontamento (atitude) em relação ao planeta. Para corrigir estes efeitos o satélite é equipado com um sistema de controle de atitude. Entre os tipos existentes, um dos mais utilizados é o sistema de jatos de gás. Este trabalho faz uma análise de um sistema de jatos de gás frio para controle de atitude de de satélites. Esta análise compõe-se de uma verificação do desempenho de sistemas já existentes e de um dimensionamento otimizado de um sistema para um determinado satélite, cujas características e missão são conhecidas. Ao final, determina-se o melhor sistema para um satélite hipotético de sensoriamento remoto.</i>			
15. Observações			

ABSTRACT

An Earth orbiting satellite is subjected to many perturbations which have the effect of altering its appointment (attitude) related to the planet. To correct these effects, the satellite is equipped with an attitude control system. Among the existing types, one of the most common ones is the gas jets. This paper analyses a satellite control cold gas jet system. This analysis is composed of a performance and design check of existing systems and of an optimized dimensioning of a system for a determined satellite, whose characteristics and mission are known. At the end, one determines the best system for a remote sensing hypothetical satellite.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	v
LISTA DE TABELAS	vii
LISTA DE SÍMBOLOS	ix
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO 2 - EQUACIONAMENTO BÁSICO</u>	5
2.1 - Análise dinâmica e cinemática de uma manobra	7
2.2 - Análise do comportamento do gás no reservatório	15
2.3 - Análise da tubulação	25
2.4 - Análise do bocal	27
2.5 - Equações de aplicação geral	28
<u>CAPÍTULO 3 - EQUAÇÕES DE OTIMIZAÇÃO</u>	31
3.1 - Aceleração angular	31
3.2 - Custos	38
<u>CAPÍTULO 4 - EQUACIONAMENTO FINAL E CRITÉRIOS DE SELEÇÃO DO SISTEMA MAIS ADEQUADO</u>	45
<u>CAPÍTULO 5 - EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DE UM CASO</u>	61
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	69
BIBLIOGRAFIA	71
APÊNDICE A - ANÁLISE DO EMPUXO FORNECIDO PELO BOCAL	
APÊNDICE B - RELAÇÕES GEOMÉTRICAS NO BOCAL	
APÊNDICE C - INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS REGENTES DO ESCOAMENTO DE FANNO	
APÊNDICE D - CÁLCULO DO FATOR λ	

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Esquema do sistema de controle de atitude	5
2.2 - Gráficos $T \times t$, $\alpha \times t$, $\omega \times t$, $\psi \times t$	8
2.3 - Esquema dos micromotores	9
2.4 - Fluxo de massa do reservatório	15
2.5 - Diagramas $T \times s$ e $p \times v$ para o gás no reservatório	16
3.1 - Representação esquemática do satélite	32
3.2 - Dimensões básicas em um bocal tipo De Laval	35
B.1 - Grandezas geométricas no bocal	B.1
D.1 - Grandezas envolvidas no cálculo do fator λ	D.1

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
4.1 - Relação das incôgnitas do problema	45
4.2 - Seqüência de resolução das cinco primeiras equações em função das variáveis fornecidas	57
5.1 - Principais características dos casos analisados	65
5.2 - Equivalência de símbolos	67
5.3 - Resultados obtidos na simulação	69

m_r	- massa do reservatório, kg
m_s	- massa de gás liberada pelo conjunto de bocais em uma correção de atitude, kg
m_T	- soma da massa do reservatório com a massa inicial do gás, kg
\dot{m}	- fluxo de massa de gás, kg/s
N_b	- número de bocais que atuam no eixo considerado
N_c	- número total de correções de atitude efetuadas durante uma missão
p	- pressão, daN/cm ²
p_a	- pressão atmosférica, daN/cm ²
R	- constante do gás, J/kg K
R_a	- distância dos bocais ao eixo principal de inércia do satélite considerado, m
s	- coeficiente de segurança
T	- temperatura, K
T	- torque, Nm
t	- tempo, s
t_1	- tempo de acionamento dos motores, s
t_d	- tempo de descanso dos motores entre os dois jatos da mesma correção, s
t_f	- tempo total para uma correção, s
V	- volume, m ³
V_v	- volume de material da parte divergente do bocal, m ³
v	- velocidade, m/s
x	- comprimento de um trecho da tubulação, m
x_m	- fator de massa residual, %
α	- aceleração angular, s ⁻²
ϵ	- altura média da rugosidade, mm

LISTA DE SÍMBOLOS

A	- área de secção transversal, m ²
c	- velocidade do som, m/s
C	- custo, ORTN
c _p	- calor específico a pressão constante, J/kg K
c _v	- calor específico a volume constante, J/kg K
D	- diâmetro, m
D _T	- diâmetro da tubulação, mm
E	- Módulo de elasticidade longitudinal, N/m ²
e	- variável auxiliar
e _b	- espessura da parede do divergente do bocal, mm
e _p	- espessura da parede do reservatório, mm
F _e	- empuxo, N
f	- fator de atrito
I	- momento de inércia, kg m ²
J ₁ , J ₂	- variáveis auxiliares
k	- relação entre os calores específicos, c _p /c _v
\hat{k}	- versor na direção z
K ₁ , K ₂	- variáveis auxiliares
L	- comprimento do divergente do bocal, mm
L _o	- quantidade de movimento angular em relação a o, kgm ² s ⁻¹
L _T	- comprimento da tubulação, m
M	- número de Mach, v/c
M _o	- momento de forças em relação a o, kgm ² s ⁻¹
m _{bo}	- massa do convergente do bocal, kg
m _i	- massa de gás no reservatório no início da missão, kg

Índices Especiais

- $(\dot{\quad})$ - derivada em relação ao tempo de ()
- $d(\quad)$ - derivada de ()
- $(\vec{\quad})$ - indica que () é vetor
- $(\quad)'$ - derivada de () em relação a M_S
- $m(\quad)_i$ - início da correção m ($m=1,2,\dots$)
- $m(\quad)_f$ - fim da correção m ($m=1,2,\dots$)
- $\Delta(\quad)$ - indica variação de ()
- $\frac{\partial(\quad)}{\partial[\quad]}$ - indica derivada parcial de () em relação a []

θ	- semi-ângulo do divergente do bocal, graus
λ	- coeficiente de empuxo do bocal
ρ	- densidade, kg/m ³
σ_{ad}	- tensão admissível do material, N/m ²
σ_e	- tensão de escoamento do material, N/m ²
Ψ	- deslocamento angular do satélite, graus
Ψ_n	- posição angular nominal, graus
Ψ_o	- posição angular inicial, graus
ω	- velocidade angular do satélite, s ⁻¹

Índices Inferiores

b	- referente ao bocal
e	- referente à entrada do bocal
f	- referente ao último instante do último jato
g	- referente à garganta do bocal
g	- referente ao gás
i	- referente ao início da missão
m	- referente à missão
r	- referente ao reservatório
s	- referente à saída do bocal
sr	- referente à saída do reservatório
T	- dá a idéia de total
z	- referente à direção z
∞	- condição de estagnação
1	- referente à fase 1 da correção
2	- referente à fase 2 da correção
3	- referente à fase 3 da correção

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A atitude de um satélite posicionado em órbita da Terra pode ser definida como a posição angular do vetor Satélite-Terra com relação a um sistema de referência fixo no satélite.

Há vários tipos de perturbações que tendem a alterar a órbita e a atitude de um satélite: arrasto aerodinâmico, pressão de radiação solar, gradiente de gravidade, etc. Além destes fatores, os próprios movimentos de rotação e translação da Terra podem provocar alterações naqueles parâmetros.

Para compensar estes efeitos sobre sua atitude, o satélite possui um "sistema de controle de atitude" que visa deixá-lo dentro de uma determinada faixa de apontamento em relação aos pontos de interesse. Existe atualmente uma grande variedade destes sistemas, que se baseiam em princípios e conceitos diferentes.

Basicamente, os sistemas de controle de atitude dividem-se em dois tipos: os passivos e os ativos.

Os sistemas passivos são aqueles que continuamente fazem o satélite tender para um posicionamento estável, sem necessidade de atuação e sem consumir energia, como, por exemplo, os mastros para aproveitamento do gradiente de gravidade, ou as barras para amortecimento magnético. Nestes tipos, o meio age sobre o satélite forçando-o a estabilizar-se.

Os sistemas ativos, como o próprio nome diz, são os que provocam uma atuação do satélite sobre o meio. Estes sistemas somente atuam quando solicitados e consomem energia de algum tipo. Como exemplo podem ser citados as rodas de reação e os jatos de gás.

Dentro deste grupo podem ser destacados dois subgrupos: o primeiro, dos sistemas que conservam a energia e a quantidade de movimento angular do satélite, como as rodas de reação; o segundo, dos sistemas que alteram essas grandezas, como os jatos de gás.

Verifica-se, entretanto, que um satélite não pode ser equipado somente com um sistema desse primeiro subgrupo, porque se o satélite for submetido a perturbações que tenham efeito acumulativo (torque aerodinâmico, por exemplo), o sistema somente poderá fazer a compensação destes efeitos até certo ponto. Por exemplo, no caso de uma roda de reação, ela pode ser acelerada em um sentido até que sua velocidade atinja um certo valor limite, a partir do qual não é possível acelerá-la mais (neste ponto diz-se que a roda está "saturada"), o que faria com que as perturbações alterassem a atitude do satélite. Para dessaturar a roda de reação, é necessário que haja um sistema que "segure" o satélite enquanto ela se desacelera, ou, em outras palavras, é preciso um sistema que altere a energia e a quantidade de movimento do satélite. O melhor meio conhecido para isto é o jato de gás.

Além de ser utilizado como auxiliar para outros meios, o sistema de jatos de gás também é largamente empregado como meio principal de controle de atitude por sua independência em relação a outros meios e pela sua rapidez de atuação. Neste caso o grande inconveniente destes sistemas é a falta de precisão no controle para obter um determinado apontamento. Entretanto, o maior inconveniente dos sistemas de jatos de gás é a necessidade de haver embarcada no satélite uma determinada massa de gás. Isto limita a vida do sistema e, conseqüentemente, do satélite, à quantidade de gás que, por isso mesmo, deve ser muito bem dimensionada.

Os sistemas de jatos de gás, por sua vez, dividem-se em dois tipos: os de gás quente e os de gás frio. Ao contrário do que possam sugerir, seus nomes não derivam das temperaturas atingidas pelo gás, mas sim do fato de no primeiro tipo ocorrer uma reação química e no segundo não.

Este trabalho estuda os sistemas de jatos de gás frio que, embora tenham a desvantagem de produzir empuxos significativamente menores que os de gás quente, para a mesma massa consumida, têm como vantagens maior simplicidade, menor custo e maior confiabilidade que aqueles.

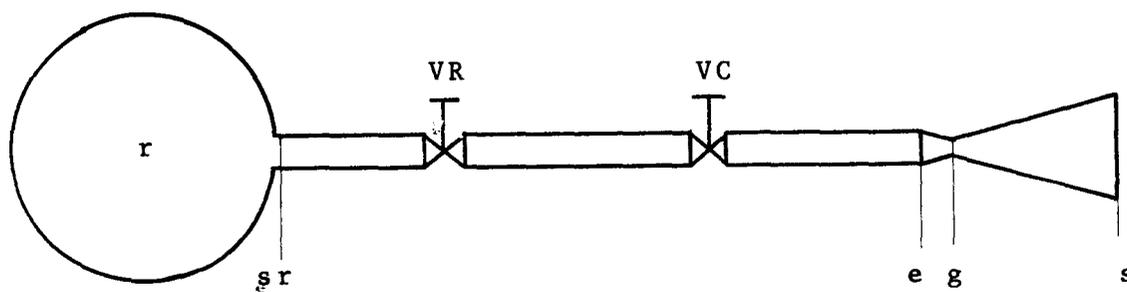
Desenvolve-se um modelo matemático que descreve o comportamento de um sistema de jatos de gás frio, que é implementado por meio de um programa de computador. Este programa, entretanto, por sua complexidade, não será detalhado aqui, estando em vias de conclusão um relatório específico sobre este programa e a maneira de utilizá-lo.

CAPÍTULO 2

EQUACIONAMENTO BÁSICO

Neste capítulo serão apresentadas as equações que serão empregadas e os pontos em que elas se aplicam, pois várias equações podem ser utilizadas em mais de um ponto.

Todos os cálculos efetuados neste trabalho pressupõem que as manobras de correção de atitude verificam-se apenas ao redor de um dos eixos principais de inércia do satélite (o longitudinal). Faz-se isto porque manobras ao redor dos demais eixos principais são análogas e manobras ao redor de eixos genéricos são combinações das anteriores.



- r - reservatório
- sr - saída do reservatório
- VR - válvula reguladora de pressão
- VC - válvula de controle
- e - entrada do bocal
- g - garganta do bocal
- s - saída do bocal

Fig. 2.1 - Esquema do sistema de controle de atitude.

Os cálculos básicos referentes às propriedades do gás são relativos ao último instante da última correção de atitude. Isto é feito imaginando uma situação ideal, na qual após esse instante o sistema de controle de atitude ficaria inoperante e, instantes após, quando o satélite perdesse seu apontamento, ele próprio ficaria inoperante. Desta forma o sistema de controle de atitude estaria otimizado em relação à vida do satélite.

Calculadas todas as grandezas possíveis neste último instante, faz-se uma regressão ao início da vida do sistema para obtenção das grandezas cujos valores neste instante se deseja conhecer.

Para proceder ao equacionamento, é preciso estabelecer uma série de hipóteses, listadas a seguir:

- o gás empregado é perfeito;
- o reservatório de gás é esférico, por ser esta a forma que permite as menores tensões em suas paredes (portanto, menores espessuras de parede), bem como maior uniformização em sua distribuição;
- a resposta do sistema ao acionamento ou desligamento da válvula de controle é instantânea; o empuxo atinge o seu valor nominal instantaneamente, permanecendo com este valor até o desligamento, quando cai a zero, também instantaneamente;
- a válvula de controle é ideal, ou seja, quando acionada produz perda de pressão nula e quando desligada produz perda infinita; em outras palavras, ela não dosa a vazão;
- a válvula reguladora de pressão é ideal, ou seja, a pressão a juzante é constante independentemente das variações a montante;
- a utilização do gás não altera o momento de inércia do satélite;
- o processo no reservatório é isoentrópico durante o escoamento, adiabático entre o fim do primeiro jato e o início do segundo da mesma correção e isométrico entre o fim de uma correção e o início da próxima;

- o tempo decorrente do fim de uma correção para o início de outro é suficientemente grande para que o sistema entre em equilíbrio térmico;
- o processo de entrada do gás na tubulação é isoentrópico;
- o escoamento na tubulação é adiabático com atrito;
- o escoamento no bocal é isoentrópico;
- a variação na pressão de estagnação do bocal é desprezada por ser este valor muito pequeno em comparação com o valor da pressão de estagnação.

2.1 - ANÁLISE DINÂMICA E CINEMÁTICA DE UMA MANOBRA

A fim de simplificar este estudo, admite-se que o sistema de jatos de gás frio seja o único sistema de controle de atitude do satélite.

Com base nisto, admite-se também que, durante toda a vida do satélite, seja necessário efetuar um determinado número de correções de atitude (N_c), e que em cada uma o ângulo total médio de correção seja fixo ($\Delta\psi$). Também admite-se que, no início de uma manobra, a velocidade angular do satélite seja nula.

A Figura 2.2, a seguir, mostra qualitativamente os gráficos em função do tempo, do torque aplicado pelo micromotor (T), da aceleração angular (α), da velocidade angular (ω) e da posição angular (ψ) do satélite. Note-se que o torque é constante ao longo de uma manobra. Isto é provado no Apêndice A.

Verifica-se pelos gráficos que uma correção de atitude compõe-se de três fases: uma aceleração, um movimento uniforme e uma desaceleração.

A Figura 2.3 mostra um esquema do posicionamento dos micromotores de gás frio para o eixo considerado.

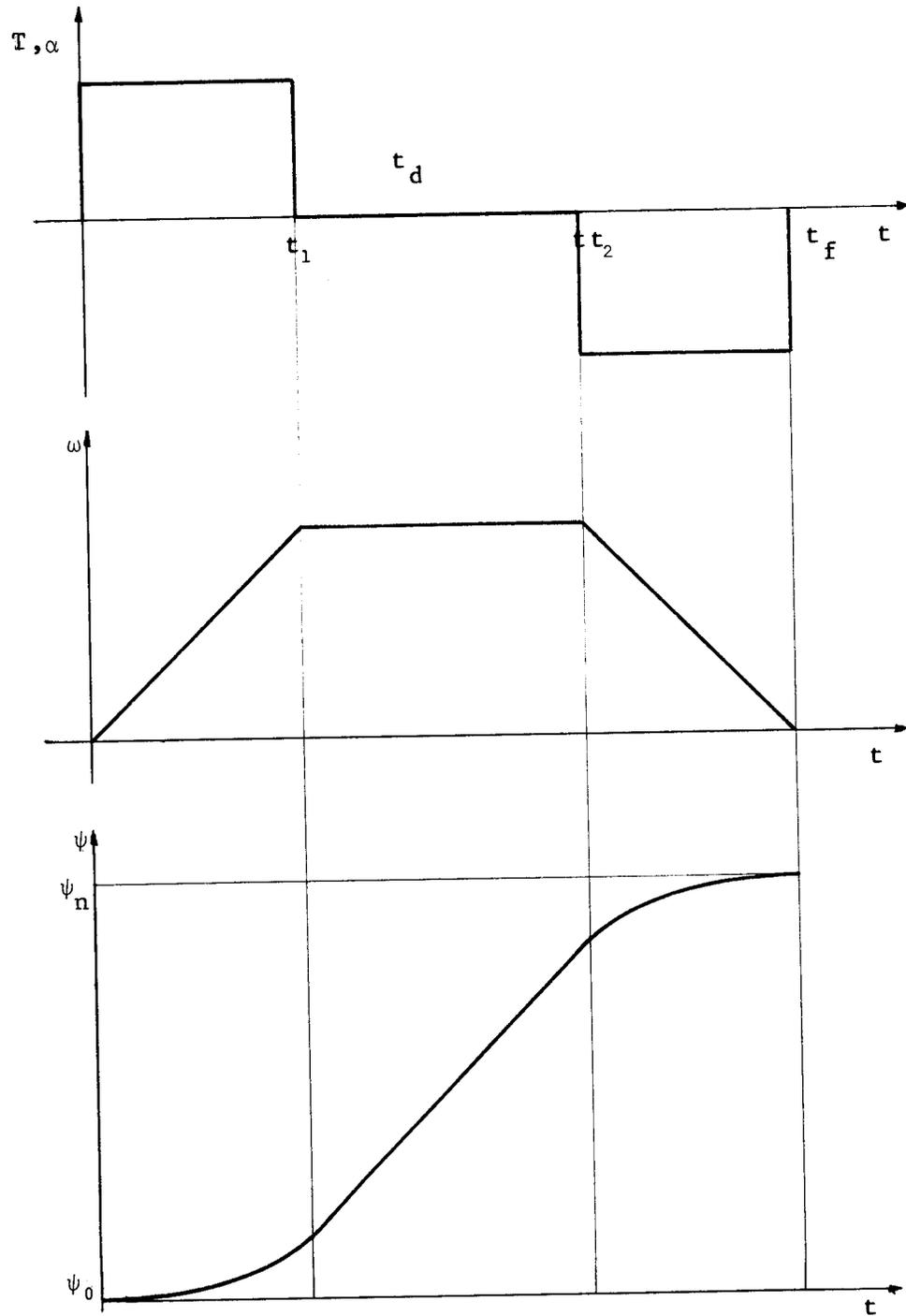


Fig. 2.2 - Gráficos $T \times t$, $\alpha \times t$, $\omega \times t$, $\psi \times t$.

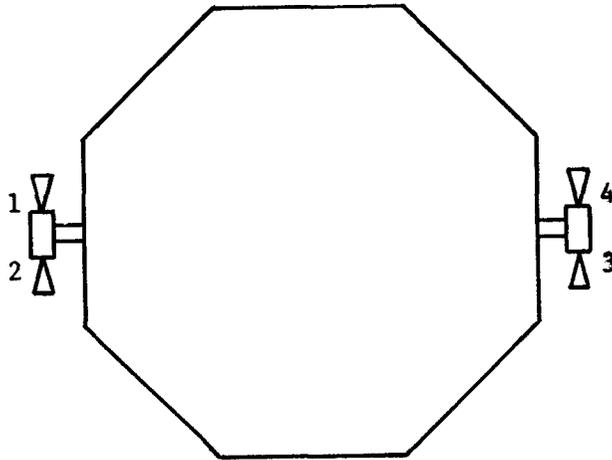


Fig. 2.3 - Esquema dos micromotores.

Para que se consiga apenas corrigir a atitude do satélite, sem interferir na sua órbita, é necessário que seja gerado um binário de forma que os motores 1 e 3 trabalhem simultaneamente, bem como 2 e 4. Assim, a correção da Figura 2.1 poderia ser obtida da seguinte forma:

- ligam-se os motores 1 e 3 durante t_1 ;
- desligam-se estes motores e o satélite permanece em rotação uniforme durante t_d ;
- ligam-se os motores 2 e 4 até completar t_f ;
- desligam-se estes motores e a correção está completa.

Neste exemplo foram representados apenas 4 micromotores (2 para cada sentido) somente para simplicidade de compreensão; é possível colocar mais, se necessário.

A análise será feita individualmente para cada uma das três fases mencionadas, incluindo as condições de contorno (continuidade) entre elas.

Nesta análise, os símbolos α , ω e ψ representam, respectivamente, a aceleração, a velocidade e o posicionamento angulares do satélite. Os índices 1, 2 e 3 nestes símbolos indicam a fase a que se referem:

1ª fase: aceleração

Nesta fase tem-se uma aceleração angular constante. Como o eixo considerado é principal de inércia, a Dinâmica dos Sólidos permite escrever, através de seu "Teorema do Momento Angular" (Giacaglia, 1982), aplicado em relação ao centro de massa do satélite:

$$I_t \alpha_1 = \frac{Nb}{2} F_e R_a, \quad (2.1)$$

onde I_t é o momento de inércia total do satélite segundo aquele eixo, Nb é o número de micromotores (bocais) que atuam no eixo considerado, F_e é o empuxo fornecido por cada micromotor e R_a é a distância dos micromotores ao eixo de rotação (Ver a Figura 2.3). Assim,

$$\alpha_1 = \frac{Nb F_e R_a}{2 I_t} \quad (2.1a)$$

Integrando esta equação duas vezes obtêm-se:

$$\omega_1 = \frac{Nb F_e R_a}{2 I_t} t + \omega_0 \quad e$$

$$\psi_1 = \frac{Nb F_e R_a t^2}{4 I_t} + \omega_0 t + \psi_0 .$$

onde ω_0 e ψ_0 representam a velocidade e a posição angulares do satélite no instante do início da correção (em $t=0$). Por hipótese, $\omega_0 = 0$, o que simplifica as equações acima para:

$$\omega_1 = \frac{Nb Fe Ra}{2 I_t} t \quad e \quad (2.2)$$

$$\psi_1 = \frac{Nb Fe Ra}{4 I_t} t^2 + \psi_0. \quad (2.3)$$

Em $t = t_1$ tem-se:

$$\omega_1(t_1) = \frac{Nb Fe Ra}{2 I_t} t_1 \quad e$$

$$\psi_1(t_1) = \frac{Nb Fe Ra}{4 I_t} t_1^2 + \psi_0.$$

2ª fase: movimento uniforme

$$\alpha_2 = 0. \quad (2.4)$$

Integrando esta equação 2 vezes obtêm-se:

$$\omega_2 = C_1 \quad e$$

$$\psi_2 = C_1 t + C_2.$$

$$\text{Em } t = t_1 \rightarrow \omega_2(t_1) = \omega_1(t_1) \quad e \quad \psi_2(t_1) = \psi_1(t_1),$$

ou seja:

$$C_1 = \frac{Nb Fe Ra}{2 I_t} t_1 \quad e$$

$$C_1 t_1 + C_2 = \frac{Nb Fe Ra}{4 I_t} t_1^2 + \psi_0 ,$$

esta última gerando:

$$\frac{Nb Fe Ra t_1^2}{2 I_t} + C_2 = \frac{Nb Fe Ra t_1^2}{4 I_t} + \psi_0, \text{ ou}$$

$$C_2 = \psi_0 - \frac{Nb Fe Ra t_1^2}{4 I_t}$$

Portanto,

$$\omega_2 = \frac{Nb Fe Ra t_1}{2 I_t} \quad \text{e} \quad (2.5)$$

$$\psi_2 = \frac{Nb Fe Ra t_1}{4 I_t} (2t - t_1) + \psi_0. \quad (2.6)$$

Em $t = t_2$ têm-se:

$$\omega_2(t_2) = \frac{Nb Fe Ra t_1}{2 I_t}$$

$$\psi_2(t_2) = \frac{Nb Fe Ra t_1}{4 I_t} (2t_2 - t_1) + \psi_0 .$$

3ª fase: desaceleração

Analogamente ao que foi calculado para a 1ª fase, fica-se com:

$$I_t \alpha_3 = - \frac{Nb}{2} Fe Ra, \quad (2.7)$$

equação esta que reorganizada produz:

$$\alpha_3 = - \frac{Nb Fe Ra}{2 I_t} . \quad (2.7a)$$

Integra-se esta equação 2 vezes:

$$\omega_3 = - \frac{Nb Fe Ra}{2 I_t} t + C_3 \quad e$$

$$\Psi_3 = - \frac{Nb Fe Ra}{4 I_t} t^2 + C_3 t + C_4.$$

$$\text{Em } t = t_2 \rightarrow \omega_3(t_2) = \omega_2(t_2) \quad e \quad \psi_3(t_2) = \psi_2(t_2),$$

ou seja:

$$- \frac{Nb Fe Ra t_2}{2 I_t} + C_3 = \frac{Nb Fe Ra t_1}{2 I_t} \quad e$$

$$- \frac{Nb Fe Ra t_2^2}{4 I_t} + C_3 t_2 + C_4 = \frac{Nb Fe Ra t_1}{4 I_t} (2t_2 - t_1) + \psi_0.$$

A primeira destas equações fornece:

$$C_3 = \frac{Nb Fe Ra}{2 I_t} (t_1 + t_2),$$

e a segunda:

$$C_4 = \psi_0 - \frac{Nb Fe Ra}{4 I_t} (t_1^2 + t_2^2).$$

Assim,

$$\omega_3 = \frac{Nb Fe Ra}{2 I_t} (t_1 + t_2 - t) \quad e \tag{2.8}$$

$$\Psi_3 = \Psi_0 - \frac{Nb F_e Ra}{4 I_t} [t^2 - 2(t_1 + t_2)t + (t_1^2 + t_2^2)] . \quad (2.9)$$

No instante final (t_f) a velocidade deve ser nula e a posição angular do satélite deve ser a nominal, ou seja, $\omega_3(t_f) = 0$ e $\Psi_3(t_f) = \Psi_n$. Estas condições de contorno fornecem:

$$t_1 + t_2 - t_p = 0 \rightarrow t_p = t_1 + t_2; \quad (2.10)$$

$$\Psi_n - \Psi_0 = \Delta\Psi = - \frac{Nb F_e Ra}{4 I_t} [(t_1+t_2)^2 - 2(t_1+t_2)t + (t_1^2+t_2^2)];$$

$$\Delta\Psi = \frac{Nb F_e Ra}{2 I_t} t_1 t_2. \quad (2.11)$$

Sabendo que $t_2 = t_1 + t_d$, a equação 2.10 fica:

$$t_f = 2t_1 + t_d, \quad (2.12)$$

ou seja, o gráfico de velocidade angular, Figura 2.1, é simétrico, tendo o ramo ascendente o mesmo comprimento e a mesma inclinação do ramo descendente. Os outros dois gráficos são anti-simétricos.

Substituindo a Equação 2.11 na 2.10, chega-se a:

$$t_f = t_1 + \frac{2I_t \Delta\Psi}{Nb F_e Ra t_1} . \quad (2.13)$$

Através das Equações 2.12 e 2.13 é possível relacionar os tempos t_1 , t_d e t_f ; dado um deles, os demais saem destas equações.

2.2 - ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DO GÁS NO RESERVATÓRIO

Para obter o equacionamento do sistema, é preciso conhecer o estado do gás no reservatório durante a vida do satélite.

O fluxo de massa (\dot{m}) que deixa o reservatório em uma correção de atitude é dado pela Figura 2.4.

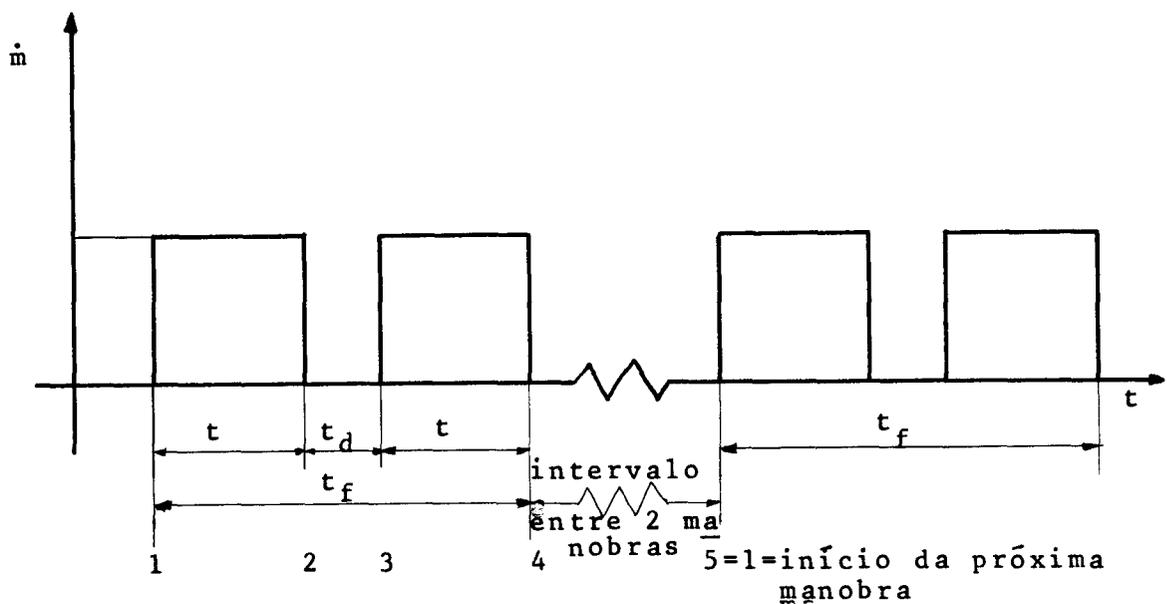


Fig. 2.4 - Fluxo de massa do reservatório.

Assim, verifica-se que durante os tempos indicados com duração t_1 há um fluxo de massa constante que deixa o reservatório; durante os tempos indicados por t_d , não há fluxo, bem como entre duas correções.

Levando em conta estes fatos, as transformações sofridas pelo gás no reservatório são as seguintes, considerando uma correção genérica (Ver Figura 2.4):

- 1-2: expansão isoentrópica da massa de ar restante no reservatório no ponto 2, e escoamento isoentrópico na entrada da tubulação;
- 2-3: como t_d é pequeno, admite-se que não haja mudança no estado da massa de gás;
- 3-4: idem 1-2, mas partindo das condições ao final de 1-2;
- 4-5: este intervalo de tempo (entre dois jatos consecutivos) é considerado grande o suficiente para que o gás no reservatório alcance o equilíbrio térmico, o que fará com que a sua temperatura em 5 seja igual à temperatura em 1.

O comportamento do gás do reservatório durante uma correção de atitude do satélite é mostrado a seguir nos diagramas $p \times v$ e $T \times s$, sendo v o volume específico do gás (Van Wylen, Sonntag, 1976).

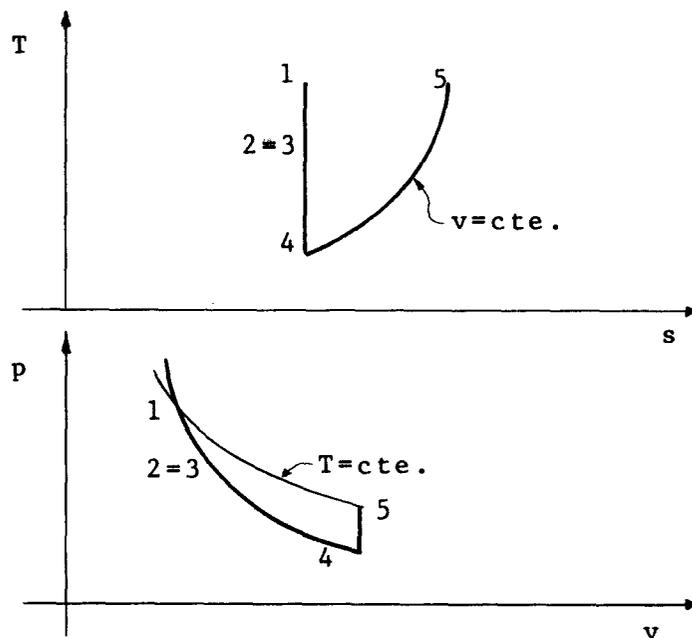


Fig. 2.5 - Diagramas $T \times s$ e $p \times v$ para o gás no reservatório.

O equacionamento destas fases é mostrado a seguir. Nestas equações, p é a pressão do gás, ρ sua densidade, T a temperatura e R sua constante; k é a relação entre os calores específicos a pressão constante e a volume constante ($k = c_p/c_v$) e V é o volume ocupado pelo gás (volume do reservatório). Os índices de 1 a 5 indicam a fase (o ponto, nos gráficos da Figura 2.5) em que a grandeza é medida:

$$\frac{p}{\rho k} = \text{até} \quad \frac{P_1}{\rho_1 k} = \frac{P_2}{\rho_2 k} ;$$

$$\rho = \frac{m}{V} ,$$

ou seja,

$$\frac{p_1}{P_2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^k . \quad (2.14)$$

Utilizando a lei dos gases perfeitos,

$$pV = m RT ,$$

deduz-se da Equação 2.14:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{(p_1)^{(k-1)/k}}{p_2} ,$$

ou

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{(k-1)} . \quad (2.15)$$

Tem-se, também

$$m_2 = m_1 - \frac{m_s}{2} , \quad (2.16)$$

sendo m_s a massa de gás total expelida em uma manobra.

2-3: devido às hipóteses, nada muda entre 2 e 3, ou seja:

$$p_3 = p_2, \quad (2.17)$$

$$T_3 = T_2 \quad e \quad (2.18)$$

$$m_3 = m_2. \quad (2.19)$$

3-4: as transformações são análogas às de 1-2.

$$\frac{p_3}{p_4} = \left(\frac{m_3}{m_4}\right)^k, \quad (2.20)$$

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{m_3}{m_4}\right)^{(k-1)} \quad e \quad (2.21)$$

$$m_4 = m_3 - \frac{m_s}{2}. \quad (2.22)$$

4.5: transformação isométrica:

$$\frac{p_4}{T_4} = \frac{p_5}{T_5},$$

mas, tem-se:

$$T_5 = T_1;$$

portanto:

$$\frac{p_5}{p_4} = \frac{T_1}{T_4}. \quad (2.23)$$

Além disto, tem-se:

$$m_5 = m_4. \quad (2.24)$$

Agora, deseja-se relacionar as grandezas em 4 e 5 com seus valores em 1. Começando com a pressão, pode-se escrever:

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_4}{p_3} \cdot \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1},$$

ou seja:

$$\frac{p_4}{p_1} = \left(\frac{m_4}{m_3}\right)^k \cdot 1 \cdot \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^k.$$

Com a ajuda da Equação 2.19, chega-se a:

$$\frac{p_4}{p_1} = \left(\frac{m_4}{m_1}\right)^k. \quad (2.25)$$

Para a temperatura:

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_4}{T_3} \cdot \frac{T_3}{T_2} \cdot \frac{T_2}{T_1},$$

ou seja:

$$\frac{T_4}{T_1} = \left(\frac{m_4}{m_3}\right)^{k-1} \cdot 1 \cdot \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{k-1}.$$

Após a introdução de 2.19, fica-se com:

$$\frac{T_4}{T_1} = \left(\frac{m_4}{m_1}\right)^{k-1}. \quad (2.26)$$

Juntando as Equações 2.16, 2.19 e 2.22, obtêm-se:

$$m_4 = m_1 - m_s. \quad (2.27)$$

Para grandezas no ponto 5, que é o ponto de início da próxima correção de atitude, tem-se, começando pela pressão:

$$\frac{p_5}{p_1} = \frac{p_5}{p_4} \cdot \frac{p_4}{p_1}.$$

As Equações 2.23, 2.25 e 2.26 levam ao resultado:

$$\frac{p_5}{p_1} = \left(\frac{m_1}{m_4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{m_4}{m_1}\right)^k, \text{ ou}$$

$$\frac{p_5}{p_1} = \frac{m_4}{m_1} \quad (2.28)$$

Além disto:

$$T_5 = t_1 \text{ e}$$

$$m_5 = m_4. \quad (2.29)$$

As equações obtidas até aqui relacionam as grandezas em questão para as diversas fases de uma única correção genérica.

Deseja-se, agora, relacionar estas grandezas de uma correção genérica com as da condição inicial. Para isto, torna-se necessário adotar um índice inferior esquerdo, que indicará o número da correção considerada. Assim, por exemplo, a Equação 2.28 toma a forma:

$$\frac{n_i^{P_i}}{n_{-1}^{P_i}} = \frac{n_{-1}^{m_f}}{n_{-1}^{m_i}}.$$

onde os índices i e f indicam início e fim de uma correção. Com a Equação 2.29, tem-se:

$$\frac{n^{p_i}}{n-1^{p_i}} = \frac{n^{p_i}}{n-1^{m_i}} . \quad (2.30)$$

Escrevendo esta equação para as correções $1, 2, 3, \dots, n$ e multiplicando-as membro a membro, obtêm-se:

$$\frac{2^{p_i}}{1^{p_i}} \cdot \frac{3^{p_i}}{2^{p_i}} \cdot \dots \cdot \frac{n^{p_i}}{n-1^{p_i}} = \frac{2^{m_i}}{1^{m_i}} \cdot \frac{3^{m_i}}{2^{m_i}} \cdot \dots \cdot \frac{n^{m_i}}{n-1^{m_i}} ,$$

ou seja:

$$\frac{n^{p_i}}{1^{p_i}} = \frac{n^{m_i}}{1^{m_i}} \quad (2.31)$$

A Equação 2.26 torna-se:

$$\frac{n^{T_f}}{T_i} = \left(\frac{n^{m_f}}{n^{m_i}} \right)^{k-1} , \quad (2.32)$$

e a Equação 2.27 fica:

$$n^{m_f} = n^{m_i} - m_s . \quad (2.33)$$

Esta última relação, combinada com a Equação 2.29, toma a forma seguinte:

$$n^{m_i} = n-1^{m_i} - m_s . \quad (2.34)$$

Escrevendo esta relação para as correções $1, 2, \dots, n-1$, somando-as e isolando ${}_n m_i$, fica-se com:

$${}_n m_i = m_i - (n-1) m_s, \quad (2.35)$$

onde m_i , sem o índice esquerdo, representa a massa inicial no reservatório.

A partir deste ponto, todas as grandezas do gás antes do início da utilização do sistema, receberão índice direito "i", não possuindo índice esquerdo.

Assim, substituindo a Equação 2.35 em 2.31, obtêm-se:

$$\frac{{}_n p_i}{p_i} = \frac{m_i - (n-1) m_s}{m_i} \quad (2.36)$$

Para obter a pressão no final do jato n usam-se também as Equações 2.25 e 2.27, cuja combinação com 2.36 conduz a:

$$\frac{{}_n p_f}{p_i} = \frac{(m_i - n m_s)^k}{m_i [m_i - (n-1) m_s]^{k-1}} \quad (2.37)$$

As Equações 2.33 e 2.34 substituídas em 2.32 geram a seguinte relação:

$$\frac{{}_n T_f}{T_i} \left[\frac{m_i - n m_s}{m_i - (n-1) m_s} \right]^{k-1} \quad (2.38)$$

Para a massa de gás, tem-se, com as Equações 2.33 e 2.35:

$${}_n m_f = m_i - n m_s \quad (2.39)$$

Sendo N_C o número total de correções de atitude a ser efetuado pelo sistema, no último instante do último jato, têm-se:

$$\frac{p_f}{p_i} = \frac{(m_i - N_C m_s)^k}{m_i [m_i - (N_C - 1) m_s]^{k-1}}, \quad (2.40)$$

$$\frac{T_f}{T_i} = \left[\frac{m_i - N_C m_s}{m_i - (N_C - 1) m_s} \right]^{k-1} e \quad (2.41)$$

$$m_f = m_i - N_C m_s. \quad (2.41)$$

O valor de m_f nesta última equação representa a quantidade de gás não aproveitada, chamada "massa residual".

Define-se o "fator de massa residual", x_m , como o número que indica a proporção de massa residual em relação à massa inicial em barcada. Matematicamente:

$$x_m = \frac{m_f}{m_i}. \quad (2.43)$$

A massa de gás expelida pelo sistema em uma correção completa pode ser calculada de (Ver Figura 2.4):

$$m_s = N_b \cdot \dot{m} \cdot t_1. \quad (2.44)$$

A massa inicial de gás, ou seja, aquela que deve ser em barcada no satélite, deve ser a soma da massa total expelida com a massa residual.

$$m_i = N_C m_s + m_f = N_C m_s + x_m m_i,$$

$$m_i - x_m m_i = N_c m_s, \text{ ou}$$

$$m_i = \frac{N_c m_s}{1 - x_m}. \quad (2.45)$$

Neste ponto é possível calcular a soma das massas de gás e do reservatório, chamada m_T , que será de grande valia:

$$m_T = m_i + m_r, \quad (2.46)$$

com

$$m_r = \rho_r V_r, \quad (2.47)$$

onde V_r é o volume do material do reservatório, que, sendo esférico, fornece:

$$V_r = \frac{\pi}{6} \left[(D_r + 2e_p)^3 - D_r^3 \right],$$

sendo e_p a espessura da parede do reservatório e D_r seu diâmetro interno. Desprezando os termos de ordem superior, esta equação reduz-se a (Ver seção 3.2):

$$V_r = \pi e_p D_r (D_r + 2e_p). \quad (2.48)$$

Com as Equações 2.48 e 2.47, a Equação 2.46 torna-se:

$$m_T = m_i + \pi e_p D_r (D_r + 2e_p). \quad (2.49)$$

Verifica-se que m_T é fator bastante importante em um sistema de controle de atitude, porque influencia o projeto do satélite (estrutura, por exemplo), além de influenciar a massa de combustível necessária ao foguete lançador.

2.3 - ANÁLISE DA TUBULAÇÃO

Apesar da alta compressibilidade dos gases, a literatura especializada em seus escoamentos (Shapiro, 1953, por exemplo) afirma que se a velocidade dos gás for inferior a 30% da velocidade do som (número de Mach inferior a 0,3; ver definição na Seção 2.5), o escoamento em questão poderá ser tratado como incompressível, por serem desprezíveis os efeitos de compressibilidade. A maioria dos casos passíveis de análise por este estudo provavelmente terão número de Mach na tubulação inferior a este valor; a despeito disto, para melhorar a precisão dos resultados, será considerado escoamento compressível na tubulação. Admite-se que este escoamento tenha atrito, mas que seja sem troca de calor.

As equações que regem este tipo de escoamento, segundo Shapiro (1953), são:

$$\frac{dM^2}{M^2} = kM^2 \frac{1 + (k-1)/2 M^2}{1-M^2} f \frac{dx}{D_t}, \quad (2.50)$$

$$\frac{dp}{p} = -kM^2 \frac{1 + (k-1) M^2}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{D_t}. \quad (2.51)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{kM^2}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{D_t}, \quad (2.52)$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{kM^2}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{D_t}, \quad (2.53)$$

$$\frac{dT}{T} = - \frac{k(k-1)M^4}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{D_t}, \quad (2.54)$$

$$\frac{dp_0}{\rho_0} = - \frac{kM^2}{2} f \frac{dx}{D_t}, \quad (2.55)$$

$$\frac{d\rho}{\rho_0} = \frac{dp_0}{p_0} = - \frac{kM^2}{2} f \frac{dx}{D_t}. \quad (2.56)$$

Os símbolos p , T e ρ representam, respectivamente, pressão, temperatura e densidade do gás; acrescidos do índice $_0$ representam estas propriedades na condição de estagnação. M é o número de Mach (ver Equação 2.64), v é a velocidade do escoamento, D_t é o diâmetro da tubulação, dx é um incremento infinitesimal na distância ao longo da tubulação e f é o fator de atrito que pode ser obtido facilmente de tabelas ou a partir do diagrama de Moody.

A integração destas equações fornece o valor das grandezas envolvidas para cada ponto da tubulação, e pode ser encontrada no Apêndice C.

As válvulas existentes na tubulação não interferem nos cálculos porque, conforme as hipóteses, a válvula de controle, quando acionada, não produz perdas e a válvula reguladora de pressão, no último instante do último jato, não atua, pois, na situação ideal, a pressão a montante e a jusante da válvula tornam-se iguais neste instante. Assim, para o instante considerado, é como se não existissem as válvulas.

As equações integradas são aplicadas nos dois extremos da tubulação: na saída do reservatório e na entrada do bocal.

No Capítulo 4 estas equações aparecerão em sua forma final.

2.4 - ANÁLISE DO BOCAL

Sendo isoentrópico o escoamento no bocal, são válidas as seguintes relações, segundo Shapiro (1953), para qualquer secção do bocal:

$$\frac{T_{0b}}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2, \quad (2.57)$$

$$\frac{p_{0b}}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{k/(k-1)}, \quad (2.58)$$

$$\frac{\rho_{0b}}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{1/(k-1)}, \quad (2.59)$$

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_{0b}}{\sqrt{T_{0b}}} \frac{M}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{(k+1)/2(k-1)}}, \quad (2.60)$$

$$\frac{A}{A_g} = \frac{1}{M} \left[\left(\frac{2}{k+1}\right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \right]^{(k+1)/2(k-1)}, \quad (2.61)$$

$$F_e = \lambda \dot{m} v_{sb} + (p_{sb} - p_a) A_{sb}. \quad (2.62)$$

Nestas equações o índice "0b" indica propriedade de estagnação e "sb" significa grandeza calculada na secção de saída do bocal. A é a área da secção onde o número de Mach tem valor M e A_g é a área da garganta do bocal (onde $M=1$); p_a é pressão ambiente e λ é o "fator de empuxo" do bocal, definido e calculado no Apêndice D.

Cada uma das três primeiras equações (2.57 a 2.59) é aplicada em três pontos: na entrada, na garganta e na saída do bocal; assim,

as três equações básicas geram nove equações específicas (ver Capítulo 4). A Equação 2.61, como relaciona a área de uma secção do bocal com a área da garganta, é aplicada em dois pontos: na entrada e na saída do bocal, gerando duas equações específicas. A Equação 2.60 só é aplicada em uma secção e a Equação 2.62 já está em sua forma final.

Deve ser lembrado que, como o escoamento é isoentrópico, os valores de T_{0b} , p_{0b} e ρ_{0b} não mudam nos diversos pontos do bocal.

2.5 - EQUAÇÕES DE APLICAÇÃO GERAL

Além das equações consideradas até o momento, há outras, de uso geral, que são listadas a seguir:

- lei dos gases perfeitos:

$$pV = mRT; \quad (2.63)$$

- definição do número de Mach:

$$M = \frac{V}{c}; \quad (2.64)$$

- equação da continuidade:

$$\dot{m} = \rho Av; \quad (2.65)$$

- definição da velocidade do som:

$$c = \sqrt{kRT}; \quad (2.66)$$

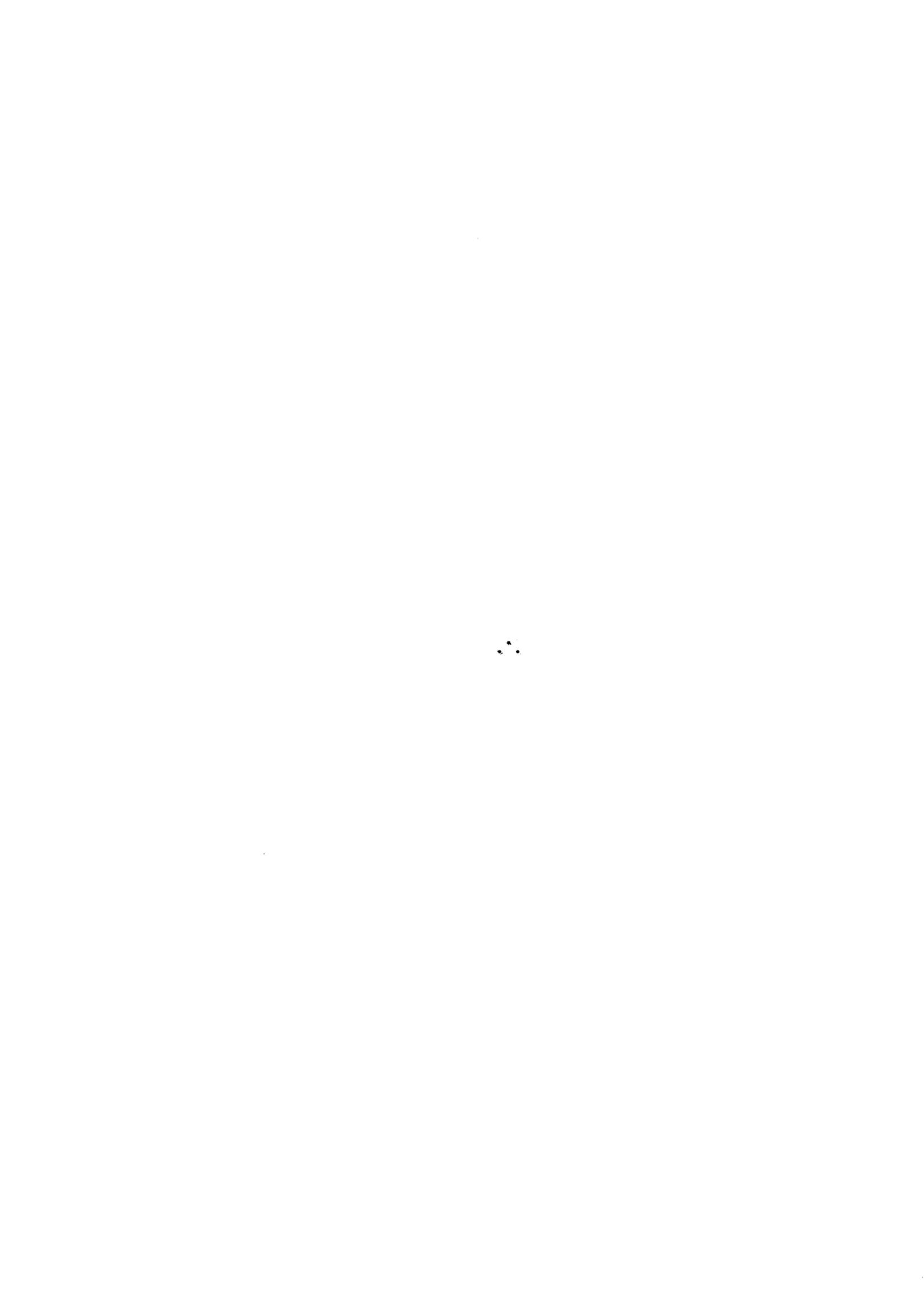
- definição da área de um círculo:

$$A = \frac{\pi D^2}{4}; \quad (2.67)$$

- definição do volume de uma esfera:

$$V = \frac{\pi D^3}{6} . \quad (2.68)$$

Todas estas equações são aplicadas em vários pontos do escoamento, mas com critério suficiente para que não se produzam redundâncias.



CAPÍTULO 3

EQUAÇÕES DE OTIMIZAÇÃO

Com as equações do capítulo anterior, verifica-se que o número de variáveis livres é muito grande. Para diminuir este número, o melhor procedimento é incluir critérios de otimização. Para este trabalho, verificou-se que havia dois critérios que poderiam ser facilmente considerados, a saber, a otimização da aceleração angular do satélite em função das dimensões do bocal e a otimização (de uma maneira genérica) dos custos de partes do sistema de controle de atitude, em função do tempo de utilização do jato de gás.

3.1 - ACELERAÇÃO ANGULAR

A aceleração angular do satélite pode ser obtida através do Teorema do Momento Angular, que afirma que "o momento das forças externas aplicadas a um corpo em relação a seu baricentro é igual à variação de sua quantidade de movimento angular" (Giacaglia, 1982); sob a forma de equação tem-se:

$$\dot{\vec{L}}_0 = \vec{M}_0, \quad (3.1)$$

onde \vec{L} é o vetor quantidade de movimento angular, \vec{M} é o vetor momento das forças externas e o é um ponto fixo ou o baricentro do corpo. Todo o equacionamento será desenvolvido, levando em conta apenas um dos eixos, z .

A Figura 3.1 esquematiza o satélite e as grandezas dimensionais envolvidas.

Assim, tomando a Equação 3.1 apenas para o eixo z , cujo versor é \hat{k} , fica-se com:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_0 \cdot \hat{k} &= \vec{M}_0 \cdot \hat{k}, \text{ ou} \\ \dot{L}_{0z} &= M_{0z}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

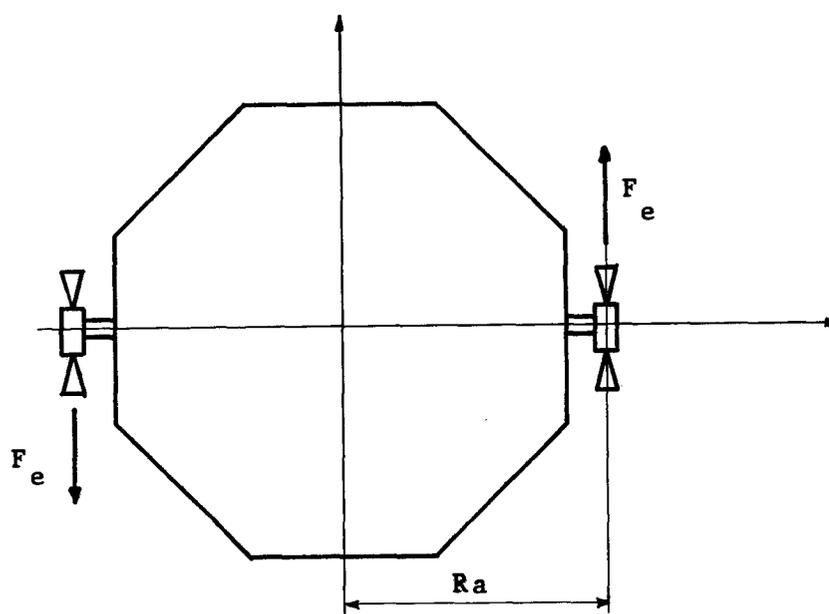


Fig. 3.1 - Representação esquemática do satélite.

Sendo z um eixo principal de inércia (por hipótese), a seguinte relação é válida:

$$\dot{L}_{0z} = I_{tz} \dot{\omega}_z = I_{tz} \alpha_z.$$

Como todo o trabalho versará apenas sobre o eixo z , eliminar-se-á, a partir daqui, este índice:

$$\dot{L}_0 = I_t \alpha. \quad (3.3)$$

O momento das forças externas é dado por:

$$M_0 = \frac{N_b}{2} F_e R_a, \quad (3.4)$$

onde N_b é o número total de micromotores (bocais) que atuam segundo este eixo, sendo metade em cada sentido. Desta forma, a Equação 3.2 toma o seguinte aspecto:

$$I_t \alpha = \frac{N_b}{2} F_e Ra.$$

Esta equação rearranjada para fornecer α fica:

$$\alpha = \frac{N_b F_e Ra}{2 I_t}. \quad (3.5)$$

Neste ponto serão utilizadas relações de escoamento em bocais isoentrópicos para transformar α em uma função de uma única variável. Todas as grandezas que tiverem índice s referir-se-ão à superfície de saída do bocal.

As relações utilizadas são as seguintes, segundo Shapiro (1953):

$$F_e = \lambda \dot{m} v_s + (p_s - p_a) A_s, \quad (3.6)$$

$$\dot{m} = A_g \frac{P_{0b}}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{k}{R} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/(k-1)}}, \quad (3.7)$$

$$v_s = M_s \sqrt{\frac{k R T_0}{1 + \frac{k-1}{2} M_s^2}}, \quad (3.8)$$

$$p_s = p_{0b} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_s^2\right)^{k/(1-k)}, \quad (3.9)$$

$$A_s = \frac{A_g}{M_s} \left[\frac{2 + (k-1) M_s^2}{k+1} \right]^{(k+1)/2(k-1)} \quad (3.10)$$

Inserindo as Equações 3.7 a 3.10 na 3.6, obtêm-se:

$$F_e = A_g \cdot \left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/2(k-1)} \cdot \left\{ \lambda k p_{0b} M_s \left(1 + \frac{k-1}{2} M_s^2\right)^{-1/2} + \frac{1}{M_s} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_s^2\right)^{(k+1)/2(k-1)} \left[p_{0b} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_s^2\right)^{k/(1-k)} - p_a \right] \right\} \quad (3.11)$$

Para simplificar a forma desta equação, sejam:

$$e = \frac{k+1}{2(k-1)},$$

$$J_1 = \left(\frac{2}{k+1}\right)^e \quad (3.12)$$

$$J_2 = 1 + \frac{k-1}{2} M_s^2$$

Com estas definições, a Equação 3.11 toma a seguinte forma:

$$F_e = \frac{A_g J_1 J_2^{-1/2}}{M_s} (\lambda k p_{0b} M_s^2 + p_{0b} - p_a J_2^{k/(k-1)}). \quad (3.13)$$

O momento de inércia do satélite, I_t , pode ser escrito como:

$$I_t = I_s + N_b I_b, \quad (3.14)$$

onde I_s é o momento de inércia do satélite menos os bocais e I_b é o momento de inércia de um bocal. Tem-se também:

$$I_b = m_b R_a^2 \quad e \quad (3.15)$$

$$m_b = m_{b0} + \rho_b \cdot V_v, \quad (3.16)$$

sendo m_b a massa do bocal, m_{b_0} a massa do bocal menos a da parte divergente cônica (Ver Figura 3.2), ρ_b a densidade do material do bocal

e V_v o volume da parte variável, a ser otimizada. A Figura 3.2 mostra as principais dimensões no bocal.

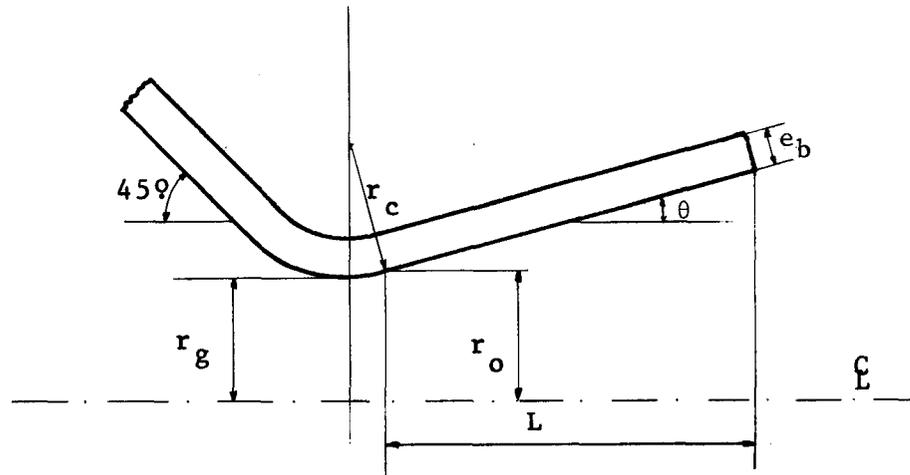


Fig. 3.2 - Dimensões básicas em um bocal tipo De Laval.

De acordo com o Apêndice B, o volume de material, V_v , é dado por:

$$V_v = \frac{e_p A_g}{\text{tg } \theta} \left[\frac{J_1 J_2 e}{M_s} - (1,625 - 0,625 \cos \theta)^2 \right].$$

Com este valor volta-se à Equação 3.16 e depois à 3.15, resultando em:

$$I_b = m_{b_0} Ra^2 + \frac{\rho_b e_p A_g Ra^2}{\text{tg } \theta} \left[\frac{J_1 J_2 e}{M_s} - (1,625 - 0,625 \cos \theta)^2 \right]. \quad (3.17)$$

Sejam:

$$K_1 = \frac{\rho_b e_p Ra^2}{\text{tg } \theta} e \quad (3.18)$$

$$K_2 = m_{b_0} Ra^2 - K_1 A_g (1,625 - 0,625 \cos \theta)^2 .$$

Com estas definições, a Equação 3.17 torna-se:

$$I_b = \frac{K_1 A_g}{M_s} J_1 J_2 e + K_2, \quad (3.19)$$

e a Equação 3.14:

$$I_t = I_s + N_b K_2 + \frac{N_b K_1 A_g}{M_s} J_1 J_2 e \quad (3.20)$$

De posse das Equações 3.13 e 3.20, pode-se transformar a Equação 3.15 em uma função de definição de α de uma só variável (M_s). Esta equação torna-se, então:

$$\alpha = \frac{N_b A_g J_1 Ra (\lambda k p_{0b} M_s^2 + p_{0b} - p_a J_2^{k/(k-1)})}{2J_2^{1/2} (I_s M_s + N_b K_2 M_s + N_b K_1 A_g J_1 J_2 e)} . \quad (3.21)$$

Uma análise da Equação 3.10 mostra que, aumentando a área de saída A_s , M_s também aumenta. Isto acontecendo, a Equação 3.11 mostra que o empuxo F_e aumenta. De acordo com a Figura 3.2, mantendo θ constante, para aumentar A_s é necessário aumentar o comprimento L , o que causa um aumento do momento de inércia total, I_t .

Resumindo o raciocínio, verifica-se que para aumentar o empuxo é necessário aumentar o momento de inércia do satélite, devido ao bocal. Assim sendo, segundo a Equação 3.5, pode-se supor que há um ponto de máximo para α , a partir do qual o aumento de momento de inércia supera o aumento de empuxo.

O ponto ideal de trabalho \bar{e} , portanto, este de máxima aceleração angular.

Para localizar este ponto de máximo deriva-se a Equação 3.21 e iguala-se o resultado a zero. O número de Mach que a satisfazer será o M_s procurado.

Para maior facilidade de compreensão definem-se:

$$A = \lambda k p_{ob} M_s^2 + p_{ob} - p_a J_2^{k/(k-1)} \quad e$$

$$B = J_2^{1/2} (I_s M_s + N_b K_2 M_s + N_b K_1 A_g J_1 J_2^e) .$$

Com isto, a Equação 3.21 torna-se:

$$\alpha = \frac{N_b A_g J_1 Ra}{2} = \frac{A}{B} \quad e$$

$$\frac{d\alpha}{dM_s} = \frac{N_b A_g J_1 Ra}{2} \left(\frac{A'B - AB'}{B^2} \right) ,$$

onde a linha como índice superior indica derivação em relação a M_s .

Como $d\alpha/dM_s = 0$, então deve-se ter:

$$A'B - AB' = 0. \quad (3.22)$$

Tendo em mente que $J_2' = dJ_2/dM_s = (k-1)M_s$, têm-se:

$$A' = \frac{dA}{dM_s} = 2 \lambda k p_{ob} M_s - k p_a M_s J_2^{1/(k-1)}$$

$$B' = \frac{dB}{dM_S} = \frac{k-1}{2} M_S J_2^{-1/2} (I_S M_S + N_b K_2 M_S + N_b \cdot K_1 \cdot A_g J_1 J_2^e) +$$

$$+ J_2^{1/2} \left[I_S - N_b K_2 + \frac{k-1}{2} N_b K_1 A_g \cdot J_1 J_2^{(e-1)} M_S \right]$$

Com estas derivadas definidas, volta-se à Equação 3.22. Após manipulações algébricas chega-se à forma final:

$$(I_S + N_b K_2) \left[p_{0b} (\lambda k M_S^2 + M_S^2 - k M_S^2 - 1) + p_a J_2^{k/(k-1)} (1 - M_S^2) \right] +$$

$$+ k N_b K_1 A_g p_{0b} M_S J_1 J_2^e \cdot (2\lambda - \lambda M_S^2 - 1) = 0 \quad (3.23)$$

Definidos alguns dados do satélite, esta equação pode fornecer o valor de M_S ótimo. Verifica-se, entretanto, que não é possível explicitar M_S , o que força que a Equação 3.23 seja resolvida por processos iterativos.

3.2 - CUSTOS

O critério de otimização de custos leva em conta apenas os custos do gás empregado, do reservatório e do tempo de correção. Os demais custos envolvidos no sistema de controle de atitude não são considerados por serem fixos e não poderem ser otimizados.

Deve-se levar em conta que este é apenas um critério possível, havendo muitos outros, talvez melhores que este. Foi considerada esta otimização por ser simples na sua forma, de fácil adaptação ao conjunto de equações e por conduzir a resultados considerados aceitáveis.

Assim, definem-se:

C_g - custo do gás,

C_r - custo do reservatório,

C_{tp} - custo do tempo de manobra,

C_T - custo total envolvido.

Estes custos relacionam-se da seguinte forma:

$$C_T = C_g + C_r + C_{tp}. \quad (3.23)$$

Neste ponto é necessário fazer uma análise de cada um destes custos.

O custo do gás (C_g) é proporcional à massa de gás embarcada (m_i), ou seja:

$$C_g = C_{g_1} m_i, \quad (3.24)$$

sendo C_{g_1} uma constante.

Com as Equações 2.45 e 2.44 escreve-se:

$$m_i = \frac{N_c N_b \dot{m} t_1}{1 - x_m} \quad (3.25)$$

Esta equação, substituída na 3.24 gera:

$$C_g = \frac{C_{g_1} N_c N_b \dot{m} t_1}{1 - x_m}. \quad (3.26)$$

O custo do reservatório (supondo que ele venha a ser feito no INPE) compõe-se de duas parcelas: uma fixa, referente a dispositivos, equipamentos, pesquisas de preço, mão-de-obra para certas tarefas, etc., que não varia em função do tamanho do reservatório; outra, que é proporcional à quantidade de material usado na fabricação do reservatório, ou seja, é função do seu diâmetro interno e de sua espessura de parede.

Assim,

$$C_r = C_{r_1} + C_{r_2} m_r, \quad (3.27)$$

sendo m_r a massa do reservatório e C_{r_1} e C_{r_2} constantes. Tem-se:

$$m_r = \rho_r V_r, \quad (3.28)$$

onde V_r é o volume de material do reservatório e definido, devido a sua forma esférica, por:

$$V_r = \frac{\pi}{6} \left[(D_r + 2 e_p)^3 - D_r^3 \right] = \frac{\pi}{6} e_p (6D_r^2 + 12 e_p D_r + 8e_p^2),$$

sendo D_r o diâmetro do reservatório e e_p sua espessura de parede.

Nesta última relação verifica-se que o primeiro fator é o predominante, podendo o segundo ser considerado termo da 2ª ordem e o terceiro, de 3ª ordem ($D_r \gg e_p$).

Como se deseja ter uma precisão de cálculo boa, despreza-se o termo em e_p^2 , mas conserva-se o termo de 2ª ordem. Com isto, o volume de material do reservatório torna-se:

$$V_r \cong \pi e_p D_r (D_r + 2e_p). \quad (3.29)$$

Para um vaso de pressão esférico é válida a seguinte relação, obtida de Hartog (1952):

$$\sigma_{ad} = \frac{p_i \cdot D_r}{4 e_p},$$

onde p_i é a pressão inicial de enchimento do reservatório e

$$\sigma_{ad} = \frac{\sigma_e}{s}$$

sendo σ_e a tensão de escoamento do material e s o fator de segurança adotado. Assim tem-se:

$$e_p = \left(\frac{s}{4\sigma_e}\right) \cdot p_i D_r \quad (3.31)$$

Substituindo na Equação 3.27 as Relações 3.28, 3.29 e 3.31, chega-se a:

$$C_r = C_{r1} + C_{r2} \rho_r \pi D_r^3 p_i \frac{s}{4\sigma_e} \cdot \left(1 + 2p_i \frac{s}{4\sigma_e}\right) \quad (3.32)$$

Têm-se também:

$$\pi D_r^3 = 6V,$$

$$p_i V = m_i RT_i,$$

e da substituição da Equação 2.45 na 2.40:

$$p_i = \frac{p_f}{N_c^{(k-1)}} \frac{[(N_c-1)x_m + 1]^{(k-1)}}{x_m^k}.$$

Com estas três relações e mais a Equação 3.25, a Equação 3.32 torna-se:

$$C_r = C_{r1} + 6C_{r2} \rho_r RT_i N_c N_b \dot{m} \frac{s}{4\sigma_e} \frac{t_1}{1-x_m} \left\{ 1 + \frac{2p_f}{N_c^{k-1}} \frac{s}{4\sigma_e} \cdot \frac{[(N_c-1)x_m + 1]^{k-1}}{x_m^k} \right\} \quad (3.33)$$

O custo do tempo baseia-se na hipótese de que o satélite fique não-operacional durante a manobra, ou que sua operacionalidade f_i que comprometida. Tem-se então:

$$C_{tp} = \frac{N_c C_m}{T_m} t_f, \quad (3.34)$$

onde C_m e T_m são o custo e a duração da missão e

$$t_f = t_1 + \frac{I_t d\psi}{2F_e Ra t_1},$$

ou seja:

$$C_{tp} = \frac{N_c C_m}{T_m} \left(t_1 + \frac{I_t d\psi}{2F_e Ra t_1} \right). \quad (3.35)$$

Como já estão definidos os três custos parciais, pode-se retornar à Equação 3.23:

$$C_T = \frac{C_{g1} N_c N_b \dot{m} t_1}{1 - x_m} + C_{r1} + 6C_{r2} \rho_r RT_i N_c N_b \dot{m} \cdot \frac{s}{4\sigma_e} \frac{t_1}{1-x_m} \left\{ 1 + \frac{2p_f}{N_c^{k-1}} \frac{s}{4\sigma_e} \frac{[(N_c-1)x_m+1]^{(k-1)}}{x_m^k} \right\} + \frac{N_c C_m}{T_m} \left(t_1 + \frac{I_t d\psi}{2F_e Ra t_1} \right). \quad (3.36)$$

Analisando esta equação, verifica-se que C_T é uma função apenas de t_1 e x_m , pois todos os demais parâmetros estão definidos.

Para que este custo seja mínimo, matematicamente é preciso que suas derivadas em relação a cada variável sejam nulas e seus valores, imediatamente antes e depois dos pontos onde elas se anulam, sejam respectivamente negativos e positivos. Assim,

$$\frac{\partial C_T}{\partial x_m} = 0 \quad e \quad \frac{\partial C_T}{\partial t_1} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_T}{\partial t_1} &= \frac{C_{g1} N_c N_b \dot{m}}{1 - x_m} + \frac{6C_{r2} \rho_r RT_i N_c N_b \dot{m}}{1 - x_m} \cdot \frac{s}{4\sigma_e} \\ &\cdot \left\{ 1 + \frac{2p_f}{N_c^{(k-1)}} \frac{s}{4\sigma_e} \frac{[(N_c - 1)x_m + 1]^{(k-1)}}{x_m^k} \right\} + \\ &+ \frac{N_c C_m}{T_m} \left(1 - \frac{I_s d\psi}{2F_e Ra t_1^2} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_T}{\partial x_m} &= \frac{C_{g1} N_c N_b \dot{m} t_1}{(1 - x_m)^2} + 6C_{r2} \rho_r RT_i N_c N_b \dot{m} t_1 \cdot \frac{s}{4\sigma_e} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{(1 - x_m)^2} \left[1 + \frac{2p_f}{N_c^{(k-1)}} \frac{s}{4\sigma_e} \frac{[(N_c - 1)x_m + 1]^{(k-1)}}{x_m^k} \right] + \right. \\ &+ \frac{1}{1 - x_m} \frac{2p_f}{N_c^{(k-1)} x_m^{2k}} \frac{s}{4\sigma_e} \left[(k-1)[(N_c - 1)x_m + 1]^{(k-2)} (N_c - 1) \cdot \right. \\ &\left. \left. x_m^k - k[(N_c - 1)x_m + 1]^{(k-1)} x_m^{(k-1)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

ou, rearranjando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_T}{\partial x_m} &= \frac{N_c N_b \dot{m} t_1}{(1 - x_m)^2} \left(C_{g1} + 6C_{r2} \rho_r RT_i \frac{s}{4\sigma_e} \right) + \\ &+ 6C_{r2} \rho_r RT_i N_c N_b \dot{m} t_1 \left(\frac{s}{4\sigma_e} \right)^2 \cdot \frac{2p_f}{N_c^{(k-1)}} \cdot \\ &\cdot \frac{[(N_c - 1)x_m + 1]^{(k-2)}}{x_m^{(k+1)} (1 - x_m)^2} \cdot \left[(2N_c - 2)x_m^2 + (2 + k - N_c)x_m - k \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

As Equações 3.37 e 3.38 igualadas a zero fornecem os valores de t e x_m ideais para minimizar o custo considerado.

Assim, a Equação 3.38 igualada a zero, simplificada e reorganizadas torna-se:

$$6C_{r2} \rho_r RT_i \frac{s}{4\sigma_e} \left\{ 1 + \frac{2p_f}{N_c^{(k-1)}} \frac{s}{4\sigma_e} \frac{[(N_c - 1)x_m + 1]^{(k-2)}}{x_m^{(k+1)}} \right. \\ \left. \cdot \left[(2N_c - 2)x_m^2 + (2+k-N_c)x_m - k \right] \right\} + C_{g1} = 0 \quad (3.39)$$

Como esta equação não possui a variável t_1 , pode-se obter de o valor de x_m , por meio de processos iterativos.

De posse do valor x_m tira-se t_1 da Equação 3.37 que, reorganizada, torna-se:

$$t_1 = \sqrt{\frac{I_s d\psi C_m (1-x_m)}{2F_e Ra}} \left\{ T_m C_g N_b \dot{m} + C_m (1-x_m) + \right. \\ \left. + 6T_m C_{r2} \rho_r RT_i N_b \dot{m} \frac{s}{4\sigma_e} \cdot \left[1 + \frac{2p_f}{N_c^{(k-1)}} \frac{s}{4\sigma_e} \frac{[(N_c - 1)x_m + 1]^{(k-1)}}{x_m^k} \right] \right\}^{-1/2} \quad (3.40)$$

CAPÍTULO 4

EQUACIONAMENTO FINAL E CRITÉRIOS DE SELEÇÃO DO SISTEMA MAIS ADEQUADO

Neste capítulo será montado um sistema de equações com as relações desenvolvidas nos dois capítulos precedentes, de forma que, fornecidas basicamente as características do satélite e da missão, se ja possível obter o sistema de controle de atitude mais adequado às condições.

O número total de incógnitas é 58 e a tabela 4.1 apresenta uma lista com todas elas.

TABELA 4.1

RELAÇÃO DAS INCÓGNITAS DO PROBLEMA

p_{0b}	F_e	D_g	D_s	M_s	A_g	A_s	M_e	A_e	M_{sr}
L	p_{0sr}	p_{0r}	p_f	p_e	p_g	p_s	p_{sr}	x_m	p_i
T_f	T_{0r}	T_{0sr}	T_{0e}	T_{0b}	T_e	T_{sr}	T_g	T_s	C_r
c_{sr}	c_e	c_g	c_s	v_{sr}	v_e	v_g	v_s	p_f	p_{0r}
p_{0sr}	p_{0b}	p_e	p_g	p_s	p_{sr}	\dot{m}	t_1	t_f	t_d
C_T	m_s	m_i	m_f	V	D_r	e_p	m_T		

Todas as grandezas que não aparecem nesta lista não são incógnitas, mas dados iniciais do problema.

O número de equações é 53, mais três relações oriundas das otimizações. Portanto, se não se desejar utilizar as otimizações, o número de variáveis livres será 5.

Deve-se optar, na escolha das variáveis livres, por aquelas que sejam consideradas mais importantes e sobre as quais recaiam limitações. Assim procedendo, as variáveis livres escolhidas são: F_e , p_{0b} , D_g (ou D_s), x_m e t_1 (ou t_d).

Quando se usam as equações de otimização, três destas variáveis deixam de ser livres. As variáveis que continuam livres são escolhidas em função do problema analisado.

Felizmente, as 56 equações estão, praticamente todas, de sacopladas, o que facilita consideravelmente sua solução. Assim, a ordem de apresentação das equações é a ordem natural de solução. Obviamente, mudando as variáveis livres escolhidas, muda a ordem de resolução, porém esta mudança só se verifica nas primeiras equações. Desta forma, quando uma equação pode ser usada para fornecer uma variável em um caso, ou outra em outro caso, todas as formas em que ela pode ser usada são mostradas e a numeração a partir da 2ª forma será a mesma, sendo-lhe acrescida uma letra apenas.

A seguir são apresentadas as equações e ao final será comentada a ordem de resolução em função das variáveis livres escolhidas. A Equação 3.23 é a primeira:

$$\begin{aligned} & (I_s + N_b K_2) [p_{0b} (\lambda k M_s^2 + M_s^2 - k M_s^2 - 1) + p_a J_2^{k/(k-1)} (1-M_s^2)] + \\ & + k N_b K_1 A_g p_{0b} M_s J_1 J_2^e. (2\lambda - \lambda M_s^2 - 1) = 0 . \end{aligned} \quad (4.1)$$

Deve-se recordar que J_1 , J_2 , K_1 , K_2 e e são variáveis auxiliares e estão definidas pelas Equações 3.12 e 3.18.

A Equação 4.1 é empregada nesta forma para fornecer iterativamente o valor de M_S . Entretanto, esta equação pode ser rearranjada para fornecer p_{0b} de forma explícita:

$$p_{0b} = p_a J_2^{k/(k-1)} (M_S^2 - 1) (I_S + N_b K_2) \left[(I_S + N_b K_2) \cdot (\lambda k M_S^2 + M_S^2 - k M_S - 1) + k N_b K_1 A_g M_S^2 J_1 J_2^e \cdot (2\lambda - \lambda M_S^2 - 1) \right]^{-1}. \quad (4.1a)$$

A próxima equação é a de número 3.13 que fornece o empuxo ou, rearranjada de duas formas diferentes, pode fornecer a pressão de estagnação do bocal ou a área de sua garganta:

$$F_e = \frac{A_g J_1 J_2^{-1/2}}{M_S} (\lambda k p_{0b} M_S^2 + p_{0b} - p_a J_2^{k/(k-1)}), \quad (4.2)$$

$$p_{0b} = \frac{J_2^{1/2}}{\lambda k M_S^2 + 1} \left(\frac{F_e M_S}{A_g J_1} + p_a J_2^e \right), \quad (4.2a)$$

$$A_g = \frac{F_e \cdot M_S}{J_1 [p_{0b} J_2^{-1/2} (\lambda k M_S^2 + 1) - p_a J_2^e]}. \quad (4.2b)$$

A seguir coloca-se a Equação 2.61 que fornece a área de saída do bocal; em sua primeira forma alternativa, esta equação permite obter a área da garganta do bocal, e na segunda, o número de Mach em sua saída, iterativamente:

$$A_S = \frac{A_g J_1 J_2^e}{M_S}, \quad (4.3)$$

$$A_g = \frac{A_S M_S}{J_1 J_2^e}, \quad (4.3a)$$

$$\frac{J_2^e}{M_s} = \frac{1}{J_1} \frac{A_s}{A_g} . \quad (4.3b)$$

Aplica-se, agora, a Equação 2.67 à garganta e à saída do bocal para que se obtenham os diâmetros destas seções ou, em sua forma alternativa, suas áreas:

$$D_g = \sqrt{\frac{4A_g}{\pi}} , \quad (4.4)$$

$$A_g = \frac{\pi D_g^2}{4} , \quad (4.4a)$$

$$D_s = \sqrt{\frac{4A_s}{\pi}} , \quad (4.5)$$

$$A_s = \frac{\pi D_s^2}{4} . \quad (4.5a)$$

Admite-se que o diâmetro de entrada no bocal seja igual ao diâmetro da tubulação. Com isto, além da área da garganta do bocal e sabendo que neste ponto $M=1$, pode-se calcular o número de Mach na entrada do bocal iterativamente através da Equação 2.61:

$$\frac{J_1}{M_e} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_e^2 \right)^e = \frac{A_e}{A_g} . \quad (4.6)$$

Caso, entre a tubulação e a entrada do bocal haja uma variação de diâmetro, deve-se colocar em A_e a área efetiva de entrada.

O próximo passo é o cálculo do número de Mach na saída do reservatório (entrada da tubulação), através da Equação C.9:

$$\frac{1}{M_{sr}^2} - \frac{1}{M_e^2} + \frac{k+1}{2} \ln \frac{M_{sr}^2 [2+(k-1)M_e^2]}{M_e^2 [2+(k-1)M_{sr}^2]} = \frac{k f L_T}{D_T} . \quad (4.7)$$

O comprimento da parte divergente do bocal (L), que pode ser visualizado na Figura B.1, é dado pela Equação B.5:

$$L = \frac{D_s - (1,625 - 0,625 \cos \theta) D_g}{2 \operatorname{tg} \theta} . \quad (4.8)$$

No interior do reservatório a velocidade do gás é praticamente nula, o que faz com que os valores de pressão, temperatura e densidade sejam iguais aos valores de estagnação. Como a transformação que o fluido sofre na passagem do reservatório à secção de saída deste (entrada da tubulação) é isoentrópica, os valores de estagnação nestes dois pontos são iguais.

Assim pode-se obter a pressão de estagnação na saída do reservatório através da Equação C.20, pressão esta que também é a pressão final no interior do reservatório.

$$P_{osr} = p_{ob} \cdot \frac{M_e}{M_{sr}} \left[\frac{2+(k-1)M_{sr}^2}{2+(k-1)M_e^2} \right]^{k/(k-1)} , \quad (4.9)$$

$$P_{or} = P_{osr} , \quad (4.10)$$

$$P_f = P_{or} . \quad (4.11)$$

As pressões na entrada, na garganta e na saída do bocal, são dadas pela Equação 2.58:

$$P_e = p_{ob} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_e^2 \right)^{k/(1-k)} , \quad (4.12)$$

$$P_g = p_{ob} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} , \quad (4.13)$$

$$p_s = p_{ob} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_s^2 \right)^{k/(1-k)} \quad (4.14)$$

Na saída do reservatório a pressão é dada pela Equação C.12:

$$p_{sr} = \frac{p_e M_e}{M_{sr}} \left[\frac{2+(k-1)M_e^2}{2+(k-1)M_{sr}^2} \right]^{1/2} \quad (4.15)$$

Para saber a área de entrada do bocal utiliza-se a Equação 2.67:

$$A_e = \frac{\pi D_T^2}{4} \quad (4.16)$$

A próxima equação é a que determina a massa residual, Equação 3.39:

$$6C_{r_2} \rho_r RT_i \frac{s}{4\sigma_e} \left\{ 1 + \frac{2p_f}{N_c^{k-1}} \frac{s}{4\sigma_e} \frac{[(N_c - 1)x_m + 1]^{(k-2)}}{x_m^{(k+1)}} \right. \\ \left. \cdot [(2N_c - 2)x_m^2 + (2+k-N_c)x_m - k] \right\} + C_{g_1} = 0 \quad (4.17)$$

Como já foi obtida uma expressão para p_f , pode-se obter, da Equação 2.40, devidamente simplificada pela Equação 2.45, uma equação para a pressão inicial do reservatório:

$$p_i = \frac{p_f}{x_m} \left(\frac{N_c x_m}{N_c x_m + 1 - x_m} \right)^{(1-k)} \quad (4.18)$$

Para determinação da temperatura final no reservatório (ao final do último jato), utiliza-se a Equação 2.41, também simplificada pela introdução da Equação 2.45:

$$T_f = T_i \left(\frac{N_c x_m}{N_c x_m + 1 - x_m} \right)^{(k-1)} \quad (4.19)$$

Como já foi citado anteriormente, devido ao fato de a velocidade no interior do reservatório ser praticamente nula, a temperatura de estagnação coincide com a temperatura medida:

$$T_{or} = T_f .$$

No bocal, o processo que ocorre é isoentrópico, o que faz com que a temperatura de estagnação seja constante em todos os pontos (T_{ob}).

Na tubulação, como o processo é adiabático, a temperatura de estagnação também é constante.

A passagem do gás do reservatório para a tubulação é isoentrópica, o que faz com que a temperatura de estagnação nestes pontos não varie. Então tem-se:

$$T_{osr} = T_{or}, \quad (4.21)$$

$$T_{oe} = T_{osr}, \quad (4.22)$$

$$T_{ob} = T_{oe} . \quad (4.23)$$

A temperatura na entrada do bocal é obtida da Equação 2.57:

$$T_e = \frac{T_{ob}}{1 + \frac{k-1}{2} M_e^2} . \quad (4.24)$$

Deste resultado pode-se tirar a temperatura na saída do reservatório, com a Equação C.14:

$$T_{sr} = T_e \frac{2 + (k-1)M_s^2}{2 + (k-1)M_{sr}^2} . \quad (4.25)$$

As temperaturas na garganta e na saída do bocal também saem da Equação 2.57:

$$T_g = \frac{2 T_{ob}}{k+1} , \quad (4.26)$$

$$T_s = \frac{T_{ob}}{1 + \frac{k-1}{2} M_s^2} . \quad (4.27)$$

Para o cálculo da velocidade do som nos diversos pontos, basta aplicar a Equação 2.66:

$$c_r = \sqrt{k RT_f} , \quad (4.28)$$

$$c_{sr} = \sqrt{k RT_{sr}} , \quad (4.29)$$

$$c_e = \sqrt{k RT_e} , \quad (4.30)$$

$$c_g = \sqrt{k RT_g} , \quad (4.31)$$

$$c_s = \sqrt{k R T_s} . \quad (4.32)$$

A velocidade do escoamento é obtida da Equação 2.64:

$$v_{sr} = M_{sr} \cdot c_{sr} , \quad (4.33)$$

$$v_e = M_e \cdot c_e , \quad (4.34)$$

$$v_g = c_g , \quad (4.35)$$

$$v_s = M_s \cdot c_s . \quad (4.36)$$

A densidade do gás no reservatório é dada pela lei dos gases perfeitos, Equação 2.63:

$$\rho_f = \frac{p_f}{RT_f} , \quad (4.37)$$

e os valores da densidade de estagnação no reservatório e em sua saída são iguais ao valor obtido da Equação ^{4.37} como já explicado:

$$\rho_{or} = \rho_f , \quad (4.38)$$

$$\rho_{osr} = \rho_{or} . \quad (4.39)$$

A densidade de estagnação no bocal também é dada pela Equação 2.63:

$$\rho_{ob} = \frac{p_{ob}}{RT_{ob}} . \quad (4.40)$$

O cálculo da densidade do gás na entrada, na garganta e na saída do bocal é feito utilizando a Equação 2.59:

$$\rho_e = \rho_{ob} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_e^2 \right)^{1/(1-k)} , \quad (4.41)$$

$$\rho_g = \rho_{ob} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} , \quad (4.42)$$

$$\rho_s = \rho_{ob} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_s^2 \right)^{1/(1-k)} . \quad (4.43)$$

A densidade na saída do reservatório sai da Equação C.16:

$$\rho_{sr} = \frac{\rho_e M_e}{M_{sr}} \left[\frac{2 + (k-1) M_{sr}^2}{2 + (k-1) M_e^2} \right]^{1/2} \quad (4.44)$$

Agora pode-se calcular a vazão em massa por intermédio da Equação 2.65 aplicada, por exemplo, à garganta do bocal:

$$\dot{m} = \rho_g A_g v_g \quad (4.45)$$

O próximo passo é calcular o tempo otimizado de aplicação de um jato (t_1), através da Equação 3.40:

$$t_1 = \sqrt{\frac{I_s d \psi C_m (1-x_m)}{2F_e Ra}} \left\{ T_m C_{g1} N_b \dot{m} + C_m (1-x_m) + \right. \\ \left. + 6T_m C_{r2} \rho_r RT_i N_b \dot{m} \frac{s}{4\sigma_e} \cdot \left[1 + \frac{2p_f}{N_c (k-1)} \frac{s}{4\sigma_e} \right] \right. \\ \left. \frac{[(N_c-1)x_m+1]^{(k-1)}}{x_m^k} \right\}^{-1/2} \quad (4.46)$$

Com este valor é possível obter os outros dois tempos envolvidos na correção das equações 2.12 e 2.13:

$$t_f = t_1 + \frac{2I_s d \psi}{N_b F_e Ra t_1} \quad (4.47)$$

$$t_d = t_f - 2t_1 \quad (4.48)$$

Caso não se deseje aplicar a otimização de custos, é necessário fornecer o valor de t_d . Neste caso, os outros dois tempos saem das mesmas equações, combinadas adequadamente:

$$t_f = \sqrt{t_d^2 + \frac{2I_s d \psi}{F_e Ra}} \quad (4.47a)$$

$$t_1 = \frac{t_f - t_d}{2} . \quad (4.48a)$$

Neste ponto pode-se obter o valor dos custos, Equação 3.36 (Ver Seção 3.2):

$$C_T = \frac{C_{g1} N_c N_b \dot{m} t_1}{1 - x_m} + C_{r1} + 6C_{r2} \rho_r R T_i N_c N_b \dot{m} \frac{s}{4\sigma_e} \frac{t_1}{1 - x_m}$$

$$\left\{ 1 + \frac{2p_f}{N_c^{(k-1)}} \frac{s}{4\sigma_e} \frac{[(N_c - 1)x_m + 1]^{(k-1)}}{x_m^k} \right\} + \frac{N_c C_m}{T_m} .$$

$$\left(t_1 + \frac{I_s d \psi}{2F_e Ra t_1} \right) . \quad (4.49)$$

Através das Equações 2.43, 2.44 e 2.45 pode-se obter a massa expelida durante uma correção de atitude, a massa inicial de gás e a massa residual ao final da vida do satélite:

$$m_s = N_b \dot{m} t_1 , \quad (4.50)$$

$$m_i = \frac{N_c m_s}{1 - x_m} , \quad (4.51)$$

$$m_f = x_m m_i . \quad (4.52)$$

Com os valores calculados até aqui, é possível obter, agora, o volume do reservatório de gás através da Equação 2.63 e seu diâmetro a partir da Equação 2.68:

$$V = \frac{m_i R T_i}{P_i} , \quad (4.53)$$

$$D_r = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} . \quad (4.54)$$

Os últimos itens a serem calculados dizem respeito ao reservatório e são sua espessura e a soma de sua massa com a massa de gás inicial. A espessura vem da Equação 3.31:

$$e_p = \frac{s}{4\sigma_e} p_i D_r , \quad (4.55)$$

e a soma das massas, da Equação 2.49:

$$m_t = m_i + \pi e_p D_r \rho_r (D_r + 2e_p) . \quad (4.56)$$

Esta é a última equação e encerra o sistema. Será comentada agora a ordem de resolução do sistema.

Como já mencionado, estas equações incluem três que provêm de otimizações, que podem ou não ser empregadas.

Dentre as variáveis p_{ob} , F_e , D_g e D_s devem ser fornecidas apenas duas, se se pretende usar a Equação 4.1 (4.1a), de otimização; caso contrário, fornecem-se três destas variáveis.

Como já mencionado, apenas as primeiras cinco equações podem ter sua ordem de resolução alterada; daí o fato de terem formas alternativas (ex.: Equações 4.1 e 4.1a). Sendo esta ordem função das variáveis fornecidas, será apresentada a Tabela 4.2 que mostra a seqüência destas cinco primeiras equações em função das variáveis livres. Nesta tabela, quando aparecem duas ou três equações entre parênteses ligadas por sinais de soma, isto significa que estas equações formam um sistema, não sendo possível explicitar, através delas, as variáveis envolvidas (p. ex.: (4.2 + 4.3a)).

Independentemente de qual caso (de acordo com a Tabela 4.2) esteja sendo considerado, após as cinco primeiras equações, a seqüência de resolução é a ordem de apresentação desde 4.6 até 4.16.

TABELA 4.2

SEQÜÊNCIA DE RESOLUÇÃO DAS CINCO PRIMEIRAS EQUAÇÕES
EM FUNÇÃO DAS VARIÁVEIS FORNECIDAS

CASO	VARIÁVEIS FORNECIDAS	SEQÜÊNCIA
1	p_{ob}, D_g	4.1 → 4.3 → 4.2 → 4.5 → 4.4a
2	F_e, D_g	4.4a → (4.1+4.2a) → 4.3 → 4.5
3	D_g, D_s	4.4a → 4.5a → 4.3b → 4.1a → 4.2 (*)
4	F_e, p_{ob}	(4.1+4.2b) → 4.3 → 4.4 → 4.5
5	F_e, D_s	4.5a → (4.1+4.2a+4.3a) → 4.4
6	p_{ob}, D_s	4.5a → (4.1+4.3a) → 4.2 → 4.4
7	F_e, p_{ob}, D_g	4.4a → 4.2 → 4.3 → 4.5 (**)
8	F_e, p_{ob}, D_s	4.5a → (4.2+4.3a) → 4.4 (**)
9	F_e, D_g, D_s	4.4a → 4.5a → (4.3b+4.1a)
10	p_{ob}, D_g, D_s	4.4a → 4.5a → 4.3b → 4.2

Obs.: (*) este caso não pode ser resolvido se $p_a=0$, pois da Equação 4.1a obter-se-ia $p_{ob}=0$, o que é um absurdo;

(**) nestes casos a Equação 4.2 é utilizada para obter iterativamente o número de Mach na secção de saída do bocal (M_s).

A Equação 4.17 provém do critério de otimização de custos.

Caso se deseje adotar este critério, esta equação deverá ser usada para fornecer o fator de massa residual (x_m); caso contrário, este valor deve ser fornecido neste ponto.

A seqüência de cálculos reinicia-se na Equação 4.18 e continua até a Equação 4.45.

A Equação 4.46 também provém do critério de otimização de custos. Sendo adotado este critério, esta equação fornecerá o valor t_1 ; em seguida as Equações 4.47 e 4.48 permitirão calcular os tempos t_f e t_d respectivamente.

Não se adotando o critério de otimização de custos deve-se fornecer o valor de t_d ; as Equações 4.47 e 4.48a darão os valores de t_f e t_1 , respectivamente.

Em qualquer dos casos, a Equação 4.49 reinicia a seqüência, que continua até a Equação 4.56, última.

De acordo com as variáveis fornecidas, vários sistemas diferentes (a rigor, infinitos) podem ser obtidos. Para que se possa optar pelo mais adequado à situação, foram adotados alguns critérios de projeto que deverão ser observados:

- 19 A pressão inicial no reservatório não deve ser superior a 190 daN/cm^2 , por questões de segurança e facilidade de carga, pois o gás adquirido vem em recipientes com a pressão de cerca de 200 daN/cm^2 ; seria possível obter recipientes com pressões maiores, mas seu custo seria muito mais alto.
- 20 O tempo de aplicação de um jato (t_1) não deve ser inferior a $0,4\text{s}$ porque do contrário os transitórios existentes começariam a influenciar o resultado.

- 39 Devido à limitação do espaço disponível no interior do satélite, o diâmetro do reservatório não poderá ser maior do que um determinado valor limite; este valor limite depende do satélite em estudo.
- 40 Um estudo da estabilidade estrutural de reservatórios esféricos desenvolvidos por Mukhanov (1980) demonstrou que há uma relação entre seu diâmetro interno e sua espessura de parede que deve ser observada:

$$\frac{D_r}{e_p} \leq 0,2 \frac{E}{\sigma_{ad}},$$

onde E é o módulo de elasticidade do material.

- 50 Por problemas construtivos, o diâmetro da garganta do bocal não pode ser muito pequeno; como seu valor influencia diretamente a vazão de gás, este não pode ser muito grande, pois isto dificultaria o controle; assim verificou-se que D_g deve ter os limites:

$$0,8 \leq D_g \leq 2,0 \text{ mm.}$$

Imaginando que sejam utilizados os critérios de otimização, duas variáveis poderiam ser escolhidas livremente. De posse destes cinco critérios de projeto, novas limitações impõem-se, conduzindo a resultados mais adequados para o sistema de controle de atitude desejado. O Capítulo 5 ilustra o procedimento descrito neste capítulo.

CAPÍTULO 5

EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DE UM CASO

Para comprovar a efetividade do equacionamento obtido, será feita a análise de um sistema de controle de atitude para um satélite de sensoriamento remoto, com características semelhantes às dos satélites S3 e S4 da MECB.

Este satélite é projetado para uma vida útil de 2 anos. Sua órbita deve ser circular, polar e heliossíncrona, com altitude de 700 a 800 km. Seu formato é o de um paralelepípedo de base octogonal, cuja circunferência circunscrita tem 1 m de diâmetro e com altura de 0,7m; a energia elétrica necessária para seu funcionamento é fornecida por células solares fixadas na superfície de painéis externos.

O custo total da missão é estimado em 13 milhões de ORTNs.

Devido às características da órbita, o satélite deve ter sua órbita e sua atitude corrigidas constantemente, esta última em cerca de 1° por dia (360° em 365 dias).

Além desta correção obrigatória de atitude (não será considerada neste estudo a correção de órbita), há também as correções devidas a perturbações, tais como arrasto aerodinâmico, pressão de radiação solar, momentos magnéticos, etc.; estima-se que os torques devidos a estas perturbações não sejam superiores a 10^{-7} N.m.

Verifica-se, então, que o uso predominante do sistema será para manter o satélite voltado para o Sol. Desta forma, para simplificação, adota-se que o satélite fará uma correção de atitude de 1° por dia, resultando em 730 correções durante sua vida. A favor de segurança, adota-se o número de 1000 correções de atitude de 1° cada para toda vida útil do satélite.

Deve ser fornecido também o gás empregado e suas características (k , R , c_p), bem como o diâmetro da tubulação e seu comprimento. Para este caso o gás é nitrogênio, com pureza de 99,995%, que possui:

$$\begin{aligned}k &= 1,4, \\R &= 296,76 \text{ J/kg K}, \\c_p &= 1038,66 \text{ J/kg K}.\end{aligned}$$

O diâmetro da tubulação é 4 mm e seu comprimento equivalente é de 2 m.

O fator de atrito na tubulação (f) pode ser facilmente calculado como segue. Para obter este valor no diagrama de Moody, precisa-se da relação ϵ/D . Para o tipo de tubo empregado (aço ou similar bem acabado) tem-se:

$$\epsilon = 0,00003 \text{ ft} = 0,00914 \text{ mm}.$$

Então:

$$\frac{\epsilon}{D} = 0,00229.$$

Para simplificar os cálculos admite-se escoamento turbulento. Utilizando, p. ex., Streeter (1974) obtém-se:

$$f = 0,025.$$

O momento de inércia do satélite é estimado em $9,7 \text{ kgm}^2$, segundo INPE (1979) e a distância do eixo do satélite ao ponto de atuação dos motores (R_a) é de 0,5 m.

A pressão externa ao satélite, para fins destes cálculos, é admitida nula.

O satélite possui um sistema de homogeneização da temperatura interna (T_i) que é suposta constante em 0°C (273 K).

O bocal empregado é do tipo "De Laval", como já mencionado, e o semi-ângulo de seu divergente (θ) é de 15° .

Na confecção do bocal e do reservatório, o aço empregado é inoxidável, classificação AISI 302, que é não-magnético e tem boa soldabilidade (para reservatório). Sua tensão de escoamento, sem considerar um possível encruamento, e sua densidade são:

$$\sigma_e = 5,20 \times 10^8 \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 7920 \text{ kg/m}^3$$

Para o custo do reservatório consideram-se 2 partes: a primeira, proporcional ao volume de material empregado, envolve o preço do material e o custo da mão-de-obra; a segunda, fixa, envolve dispositivos de fabricação, custo de materiais para construção destes dispositivos, ensaios e testes, tratamentos térmicos e mão-de-obra específica, cujos valores independem do tamanho do reservatório a ser construído.

De acordo com consultas feitas a possíveis fabricantes, foram obtidos os seguintes custos aproximados, já convertidos em ORTN:

- custo proporcional ao volume de material:

$$C_{r_2} = 13,566 \text{ ORTNs/kg};$$

- custo fixo:

$$C_{r_1} = 43,785 \text{ ORTNs}.$$

O preço do gás foi obtido da firma Oxigênio do Brasil S.A. e seu valor, já incluído o transporte e convertido em ORTNs, é:

$$C_{g_1} = 1,728 \text{ ORTNs/kg.}$$

Os cálculos necessários são efetuados por meio de um programa de computador digital, o qual, como já foi mencionado, não será detalhado neste relatório. De outra forma, um relatório específico para a utilização deste programa será editado em breve.

Neste exemplo deseja-se obter as características otimizadas do sistema, sendo adotados os dois critérios de otimização.

Desta forma, apenas duas grandezas, entre p_{ob} , F_e , D_g e D_s devem ser fornecidas ao programa.

Foram analisados, ao todo, 10 casos, cujas principais características são mostradas na Tabela 5.1. No final deste capítulo serão apresentadas fotocópias das listagens de computador com a totalidade dos dados e resultados de cada caso.

Os cinco critérios de seleção do sistema são citados sucintamente em seguida:

19) $p_i \leq 190 \text{ daN/cm}^2$;

29) $t_1 \leq 0,4\text{s}$;

39) $D_r \leq 280 \text{ mm}$;

49) $\frac{D_r}{e_p} \leq 102$;

59) $0,8 \leq D_g \leq 2,0 \text{ mm}$.

TABELA 5.1

PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DOS CASOS ANALISADOS

CASO	F_e	D_g	p_{ob}	P_i	D_r	D_r/ep	t_1	C_T
1	1,00	1,00	(7,23)	246,10	241,6	60,37	0,396	387,00
2	0,50	(1,10)	3,00	157,30	251,2	94,45	0,572	466,23
3	1,00	(1,55)	3,00	161,07	278,4	92,25	0,398	385,71
4	1,00	(1,20)	5,00	204,96	256,8	72,51	0,397	386,33
5	1,50	1,50	(4,83)	204,64	273,5	72,61	0,319	378,88
6	2,00	1,50	(6,44)	237,22	271,6	62,65	0,270	345,25
7	(1,242)	1,50	4,00	185,5	274,5	79,99	0,354	369,30
8	0,80	(1,39)	3,00	159,28	269,8	93,31	0,448	406,89
9	0,70	1,00	(5,05)	204,89	242,8	72,54	0,480	422,25
10	0,60	1,00	(4,34)	189,34	243,2	78,49	0,520	441,09

Obs.: entre as grandezas F_e , D_g e P_{ob} , aquela que se apresenta entre parênteses não foi fornecida.

Dos dez casos analisados, verifica-se o seguinte:

- os casos de números 1, 4, 5, 6 e 9 não atendem ao primeiro critério;
- os casos de números 1, 3, 4, 5, 6 e 7 não atendem aos segundo critério;
- todos os casos atendem ao terceiro critério;
- todos os casos atendem ao quarto critério;
- todos os casos atendem ao quinto critério.

Assim, restam apenas os casos de números 2, 8 e 10. Um último critério de seleção pode ser o valor de C_T , que deve ser o mais baixo possível. Estabelecido este requisito, conclui-se que o sistema mais adequado é o de número 8.

Este sistema, portanto, está otimizado e atende a todos os requisitos impostos para seu funcionamento.

A seguir estão listados, na Tabela 5.3, os dez casos analisados, com todos os dados e resultados de cada um.

Para melhor compreensão, é preciso mostrar a equivalência entre os símbolos do computador e os utilizados ao longo do relatório, o que é feito na Tabela 5.2.

TABELA 5.2

EQUIVALÊNCIA DE SÍMBOLOS

COMPUTADOR	RELATÓRIO	COMPUTADOR	RELATÓRIO
K	k	EP	e_p
R	R	CT	C_T
CP	c_p	XM	x_m
IS	I_s	MI	m_i
RA	Ra	MF	m_f
CM	C_m	MS	m_s
TM	T_m	DM	\dot{m}
LT	L_T	T1	t_1
DT	D_T	TD	t_d
TETA	θ	TF	t_f
NC	N_c	FE	F_e
DPSI	$\Delta\psi$	PØB	p_{0b}
PA	P_a	DG	D_g
TI	T_i	DS	D_s
VOL	V	L	L
PI	p_i	M	M
MT	m_T	V	v
C	c	RO	ρ
D	D	PØ	p_0
P	p	TØ	T_0
T	T	ROØ	ρ_0

Além destes símbolos, nas tabelas de título "VALORES CALCULADOS", cada linha representa uma grandeza diferente (temperatura, velocidade, densidade de estagnação, etc.), enquanto as colunas representam os pontos onde as grandezas são medidas (reservatório, garganta do bocal, etc.). Os significados das letras das colunas são:

- R - reservatório;
- SR - saída do reservatório;

E - entrada do bocal;
G - garganta do bocal;
S - saída do bocal.

Assim, por exemplo tomando a linha C e a coluna E tem-se o valor de c_e , ou seja, a velocidade do som na entrada do bocal.

TABELA 5.3

RESULTADOS OBTIDOS NA SIMULAÇÃO

CASO 1

<u>DAOS DO GAS</u>	<u>VALORES GLOBAIS CALCULADOS</u>
NUME = NITROGENIO	VUL = 10.28 L
K = 1.400	PI = 159.284 DAN/CM ²
M = 296.76 J/(KG.K)	MT = 7.258 KG
CP = 1038.86 J/(KG.K)	EP = 2.891 MM
	CT = 406.89 DRTN
<u>DAOS DO SATELITE</u>	XH = 2.00 %
IS = 9.70 KU.M ²	MI = 2.0207 KG
KA = 0.50 M	MF = 0.0404 KU
CM = 13.00 .10 ¹⁶ DRTN	MS = 1.49803 G
IM = 730. DIAS	OM = 1.1050 G/S
<u>DAOS DO SCA</u>	<u>TEMPOS DE MANDORA</u>
LI = 2.00 M	TI = 0.448 S
UI = 4.000 MM	TU = 0.024 S
TEIA = 15.00 GRAUS	TF = 0.420 S
<u>DAOS DA UTILIZACAO</u>	<u>VALORES FUNDAMENTAIS</u>
NC = 1000	FE = 0.800 N
DPSI = 1.00 GRAUS	POB = 3.00 DAN/CM ²
PA = 0.00000 DAN/CM ²	DG = 1.39 MM
PI = 273.00 K	DS = 46.61 MM
	L = 04.336 MM

FURNECIDOS = FE PUB

TEMPOS E MASSA RESIDUAL OTIMIZADOS

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 1)

VALORES CALCULADOS

VAL / PTU	M	DR	E	G	S
M	0.0000	0.0072	0.0700	1.0000	11.0891
V M/S	0.0	22.4	23.4	304.5	732.6
C M/S	333.6	333.4	333.4	304.5	62.7
D MM	209.75	4.00	4.00	1.29	40.61
P DAN/CM*2	3.1256	3.1150	2.9897	1.5048	0.0000
T K	267.83	207.50	267.56	223.19	9.45
RJ K _U /4*3	3.9325	3.9230	3.7653	2.3720	0.0000
PJ DAN/CM*2	3.1256	3.1250	3.0000	3.0000	3.0000
TJ K	267.8	207.8	267.8	267.8	267.8
RDJ K _U /4*3	3.9325	3.9325	3.7745	3.7745	3.7745

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 2)

<u>DADOS DO GAS</u>	<u>VALORES GLOBAIS CALCULADOS</u>
NUME = NITROGENIO	VUL = 7.44 L
K = 1.400	PI = 224.800 DAN/CM ²
R = 296.76 J/(KG.K)	MT = 0.006 KG
CP = 1038.66 J/(KG.K)	EP = 3.347 MM
	CT = 422.25 ORTN
<u>DADOS DO SATELITE</u>	XM = 2.53 %
IS = 9.70 KG.M ²	MI = 1.8949 KG
KA = 0.50 M	MF = 0.0480 KG
LM = 13.00 .10 ¹⁰ ORTN	MS = 1.0469 G
TM = 730. DIAS	DM = 0.9625 G/S
<u>DADOS DO SCA</u>	<u>TEMPOS DE MANEIRA</u>
LT = 2.00 M	TI = 0.460 S
UI = 4.000 MM	TD = 0.025 S
TEIA = 15.00 GRAUS	TF = 0.964 S
<u>DADOS DA UTILIZACAO</u>	<u>VALORES FUNDAMENTAIS</u>
NC = 1000	FE = 0.700 N
OPSI = 1.00 GRAUS	PUB = 5.06 DAN/CM ²
PA = 0.00000 DAN/CM ²	UG = 1.00 MM
PI = 273.00 K	US = 42.32 MM
	L = 77.064 MM

FURNELIMOS = FE OG

TEMPOS E MASSA RESIDUAL UTILIZADOS

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 2)

VALORES CALCULADOS

VAL / PTUI	R	SR	E	u	S
M	0.0000	0.0358	0.0362	1.0000	12.0755
V M/S	0.0	12.0	12.1	305.1	736.4
C M/S	334.2	334.2	334.2	305.1	57.2
D MM	242.78	4.00	4.00	1.00	42.32
P DAN/CM*2	5.1152	5.1106	5.0531	2.6719	0.0000
T K	268.91	268.84	268.84	224.09	7.87
RJ KL/M*3	6.4099	6.4056	6.3337	4.0176	0.0000
PJ DAN/CM*2	5.1152	5.1152	5.0577	5.0577	5.0577
TJ K	268.9	268.9	268.9	268.9	268.9
RDJ KL/M*3	6.4099	6.4099	6.3370	6.3370	6.3370

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 3)

<u>DADOS DO GAS</u>	<u>VALORES GLOBAIS CALCULADOS</u>
NUME = NITROGENIO	VUL = 7.53 L
K = 1.400	PI = 109.335 DAN/CM ²
H = 296.76 J/(KG.K)	MT = 0.314 KG
CP = 1038.66 J/(KG.K)	EP = 3.098 MM
	CT = 441.09 URTN
<u>DADOS DO SATELITE</u>	XM = 2.35 X
IS = 9.70 KG.M ²	MI = 1.7594 KG
KA = 0.50 M	MF = 0.0414 KG
LM = 13.00 .10 ¹⁰ DMTN	MS = 1.7180 G
IM = 730. DIAS	DM = 0.6258 G/S
<u>DADOS DO SCA</u>	<u>TEMPOS DE MANOBRAS</u>
LI = 2.00 M	T1 = 0.520 S
UI = 4.000 MM	TD = 0.022 S
TEIA = 15.00 GRAUS	TF = 1.063 S
<u>DADOS DA UTILIZACAO</u>	<u>VALORES FUNDAMENTAIS</u>
NC = 1000	FE = 0.600 N
DPSI = 1.00 GRAUS	POB = 4.34 DAN/CM ²
PA = 0.00000 DAN/CM ²	DG = 1.00 MM
IL = 273.00 K	DS = 42.32 MM
	L = 77.064 MM

FURNECIDOS : FE DG

TEMPOS E MASSA RESIDUAL OTIMIZADOS

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 3)

VALORES CALCULADOS

VAL / PTU	R	SR	E	u	S
M	0.0000	0.0350	0.0362	1.0000	12.0755
V	0.00	12.00	12.01	304.9	730.0
M/S					
C	334.1	334.0	334.0	304.9	57.2
M/S					
D	243.16	4.00	4.00	1.00	42.32
MM					
P	4.3845	4.3805	4.3312	2.2702	0.0000
DAN/CM ²					
T	268.60	268.53	268.53	223.83	7.86
K					
RJ	5.5006	5.4971	5.4352	3.4478	0.0000
KG/4*3					
PJ	4.3845	4.3845	4.3352	4.3352	4.3352
DAN/CM ²					
TJ	268.6	268.6	268.6	268.6	268.6
K					
RDJ	5.5006	5.5006	5.4388	5.4388	5.4300
KG/4*3					

(continua)

(continuação da Tabela 5.3 - Caso 4)

<u>DADOS DO GAS</u>	<u>VALORES GLOBAIS CALCULADOS</u>
NUME = NITROGENIO	VUL = 7.39 L
K = 1.400	PI = 246.101 DAN/CM ²
M = 296.76 J/(KG.K)	MT = 8.059 KG
CP = 1038.66 J/(KG.K)	EP = 4.002 MM
	CT = 367.00 URIN
<u>DADOS DO SATELITE</u>	XM = 3.01 %
IS = 9.70 KW.M ²	MI = 2.2437 KG
KA = 0.50 M	MF = 0.0675 KG
LM = 13.00 *10 ⁶ DTM	MS = 2.1763 G
IM = 730. DIAS	DM = 1.3739 G/S
<u>DADOS DO SCA</u>	<u>TEMPOS DE MANOBR</u>
LI = 2.00 M	TI = 0.396 S
DI = 4.000 MM	TD = 0.031 S
TEIA = 15.00 GRAUS	TF = 0.824 S
<u>DADOS DA UTILIZACAO</u>	<u>VALORES FUNDAMENTAIS</u>
NC = 1000	FE = 1.000 N
DPSI = 1.00 GRAUS	PQB = 7.23 DAN/CM ²
PA = 0.00000 DAN/CM ²	UG = 1.00 MM
LI = 273.00 K	US = 42.32 MM
	L = 77.064 MM

FURNECIDOS = FE DG

TEMPOS E MASSA RESIDUAL OTIMIZADOS

(continua)

(continuação da Tabela 5.3 - Caso 4)

VALORES CALCULADOS

VAL / PTU	R	SR	E	G	S
v	0.0000	0.0358	0.0362	1.0000	12.0755
V M/S	0.0	12.0	12.1	305.5	737.3
C M/S	334.6	334.6	334.6	305.5	57.3
D MM	241.63	4.00	4.00	1.00	42.32
P DAN/CM²	7.3074	7.3009	7.2187	3.8170	0.0000
T K	269.56	269.49	269.48	224.63	7.89

RJ KG/M+S	9.1351	9.1292	9.0265	5.7260	0.0043
PD DAN/CM²	7.3074	7.3074	7.2253	7.2253	7.2253
TJ K	269.6	269.6	269.6	269.6	269.6
ROJ KG/M+S	9.1351	9.1351	9.0324	9.0324	9.0324

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 5)

<u>DADOS DO GAS</u>	<u>VALORES GLOBAIS CALCULADOS</u>
NUME = NITROGENIO	VOL = 8.30 L
K = 1.400	PI = 157.295 DAN/CM*2
H = 296.76 J/(KG*K)	MT = 5.785 KG
CP = 1038.66 J/(KG*K)	EP = 2.659 MM
	CT = 466.23 URIN
<u>DADOS DO SATELITE</u>	XM = 1.98 %
IS = 9.70 KG*CM*2	MI = 1.6105 KG
MA = 0.50 M	MF = 0.0318 KG
LM = 13.00 *1000 OMTN	MS = 1.5787 G
TM = 730. DIAS	DM = 0.6896 G/S
<u>DADOS DO SCA</u>	<u>TEMPO DE MANOBR</u>
LI = 2.00 M	T1 = 0.572 S
DI = 4.000 MM	TD = 0.019 S
TEIA = 15.00 GRAUS	TF = 1.164 S
<u>DADOS DA UTILIZACAO</u>	<u>VALORES FUNDAMENTAIS</u>
NC = 1000	FE = 0.500 N
DPSI = 1.00 GRAUS	POB = 3.00 DAN/CM*2
PA = 0.00000 DAN/CM*2	UG = 1.10 MM
TI = 273.00 K	DS = 43.49 MM
	L = 79.065 MM

FORNECIDOS = FE POB

TEMPO E MASSA RESIDUAL OTIMIZADOS

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 5)

VALORES CALCULADOS

VAL / PTU	R	SR	E	G	S
M	0.0000	0.0429	0.0436	1.0000	12.0283
V M/S	0.0	14.3	14.5	304.5	734.2
C M/S	333.5	333.5	333.5	304.5	56.6
D MM	251.15	4.00	4.00	1.10	43.49
P DAN/CM*2	3.0495	3.0456	2.9960	1.5046	0.0000
T K	267.77	267.67	267.66	223.14	6.27
RJ KG/M*3	3.8376	3.8341	3.7718	2.3934	0.0006
PJ DAN/CM*2	3.0495	3.0495	3.0000	3.0000	3.0000
TJ K	267.8	267.8	267.8	267.8	267.8
RDJ KG/M*3	3.8376	3.8376	3.7754	3.7754	3.7754

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 6)

<u>DAOS DO GAS</u>	<u>VALORES GLOBAIS CALCULADOS</u>
NUME = NITROGENIO	VOL = 11.30 L
K = 1.400	PI = 161.064 DAN/CM*2
M = 296.76 J/(KG.K)	MT = 8.069 KG
CP = 1038.66 J/(KG.K)	EP = 3.018 MM
	CT = 385.71 DRTN
<u>DAOS DO SATELITE</u>	XM = 2.02 %
IS = 9.70 KG.M*2	MI = 2.2467 KG
KA = 0.50 M	MF = 0.0454 KG
CM = 13.00 *10 ⁶ DRTN	MS = 2.2013 G
JM = 730. DIAS	DM = 1.3823 G/S
<u>DAOS DO SCA</u>	<u>TEMPOS DE MANEIRA</u>
LI = 2.00 M	TI = 0.398 S
UI = 4.000 MM	TO = 0.027 S
TEIA = 15.00 GRAUS	TF = 0.823 S
<u>DAOS DA UTILIZACAO</u>	<u>VALORES FUNDAMENTAIS</u>
NC = 1000	FE = 1.000 N
DPSI = 1.00 GRAUS	PDB = 3.00 DAN/CM*2
PA = 0.00000 DAN/CM*2	DG = 1.55 MM
JL = 273.00 K	DS = 48.18 MM
	L = 86.943 MP

FORNECIDOS = FE PDB

TEMPOS E MASSA RESIDUAL UTILIZADOS

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 6)

VALORES CALCULADOS

VAL / PTU	R	SR	E	G	S
M	0.0000	0.0824	0.0878	1.0000	11.3093
V M/S	0.0	27.5	29.3	304.5	731.8
C M/S	333.6	333.4	333.4	304.5	64.7
D MM	278.42	4.00	4.00	1.25	48.10
P DAN/CM ²	3.1945	3.1797	2.9839	1.5048	0.0000
T K	267.88	267.52	267.47	223.23	1.00
RJ K ₀ /M+S	4.0185	4.0052	3.7593	2.3723	0.0040
PJ DAN/CM ²	3.1945	3.1945	3.0000	3.0000	3.0000
TJ K	267.9	267.9	267.9	267.9	267.9
RDJ K ₀ /M+S	4.0185	4.0185	3.7738	3.7738	3.7738

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 7)

<u>DADOS DO GAS</u>	<u>VALORES GLOBAIS CALCULADOS</u>
NUME 1 NITROGENIO	VUL = 8.87 L
K = 1.400	PI = 224.954 DAN/CM ²
M = 296.76 J/(KG.K)	MT = 8.060 KG
CP = 1038.66 J/(KG.K)	EP = 3.542 MM
	CT = 386.33 ORTN
<u>DADOS DO SATELITE</u>	XM = 2.54 %
IS = 9.70 KG.M ²	MI = 2.2439 KG
KA = 0.50 M	MF = 0.0569 KG
CM = 13.00 .10 ⁶ ORTN	MS = 2.1870 G
IM = 730. DIAS	DM = 1.3771 G/S
<u>DADOS DO SCA</u>	<u>TEMPOS DE MANOBRAS</u>
LI = 2.00 M	T1 = 0.397 S
UI = 4.000 MM	TD = 0.029 S
TEIA = 15.00 GRAUS	TF = 0.823 S
<u>DADOS DA UTILIZACAO</u>	<u>VALORES FUNDAMENTAIS</u>
NC = 1000	FE = 1.000 N
DPS1 = 1.00 GRAUS	POB = 5.00 DAN/CM ²
PA = 0.00000 DAN/CM ²	UG = 1.20 MM
LI = 273.00 N	DS = 44.68 MM
	L = 81.075 MM

FORNECIDOS 1 FE POB

TEMPOS E MASSA RESIDUAL OTIMIZADOS

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 7)

VALORES CALCULADOS

VAL / PTU	R	SR	E	G	S
M	0.0000	0.0512	0.0524	1.0000	12.1963
V M/S	0.0	17.1	17.5	305.1	735.2
C M/S	334.3	334.2	334.2	305.1	60.3
D MM	256.83	4.00	4.00	1.20	44.60
P DAN/CM*2	5.1185	5.1092	4.9904	2.6414	0.0000
T K	268.91	268.77	268.76	224.09	8.75
RJ KG/M*3	6.4140	6.4057	6.2569	3.9719	0.0012
PJ DAN/CM*2	5.1185	5.1185	5.0000	5.0000	5.0000
TJ K	268.9	268.9	268.9	268.9	268.9
RJ KG/M*3	6.4140	6.4140	6.2655	6.2655	6.2655

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 8)

<u>DAOS DO GAS</u>	<u>VALORES GLOBAIS CALCULADOS</u>
NUME = NITROGENIO	VOL = 10.71 L
K = 1.400	PI = 204.632 DAN/CM ²
H = 296.76 J/(KG.K)	MT = 9.720 KG
CP = 1038.66 J/(KG.K)	EP = 3.766 MM
	CT = 357.86 CRTN
<u>DAOS DO SATELITE</u>	XM = 2.53 g
IS = 9.70 KG.M ²	MI = 2.7062 KG
KA = 0.50 M	MF = 0.0685 KG
LM = 13.00 .10 ¹⁰ DMTN	MS = 2.6377 g
IM = 730. DIAS	DM = 2.0690 G/S
<u>DAOS DO SCA</u>	<u>TEMPOS DE MANOBRAS</u>
LI = 2.00 M	TI = 0.319 S
UI = 4.000 MM	TD = 0.035 S
TEJA = 15.00 GRAUS	TF = 0.673 S
<u>DAOS DA UTILIZACAO</u>	<u>VALORES FUNDAMENTAIS</u>
NC = 1000	FE = 1.500 N
DPSI = 1.00 GRAUS	POB = 4.83 DAN/CM ²
PA = 0.00000 DAN/CM ²	DG = 1.50 MM
II = 273.00 K	DS = 47.68 MM
	L = 86.107 MM

FORNECIDOS : FE DG

TEMPOS E MASSA RESIDUAL OTIMIZADOS

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 8)

VALORES CALCULADOS

VAL / MTU	R	SR	E	G	S
V	0.0000	0.0773	0.0817	1.0000	11.4285
M/S	0.0	25.8	27.3	305.1	733.5
C	334.2	334.0	334.0	305.1	64.2
M/S					
D	273.52	4.00	4.00	1.50	47.68
MM					
P	5.1028	5.0819	4.8076	2.5017	0.0000
DAN/CM*2					
T	268.91	268.58	268.55	224.09	9.91
K					
RJ	6.3945	6.3754	6.0326	3.8071	0.0016
KG/M*3					
PJ	5.1028	5.1028	4.8301	4.8301	4.8301
DAN/CM*2					
TJ	268.9	268.9	268.9	268.9	268.9
K					
RDJ	6.3945	6.3945	6.0528	6.0528	6.0528
KG/M*3					

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 9)

<u>DADOS DO GAS</u>	<u>VALORES GLOBAIS CALCULADOS</u>
NUME I NITROGENIO	VOL = 10.49 L
K = 1.400	PI = 237.214 DAN/CM*2
H = 296.76 J/(KG.K)	MT = 11.030 KG
LP = 1038.66 J/(KG.K)	EP = 4.335 MM
	CT = 345.25 URTN
<u>DADOS DO SATELITE</u>	XM = 2.91 %
IS = 9.70 KG.M*2	MI = 3.0709 KG
KA = 0.50 M	MF = 0.0892 KG
CM = 13.00 .1UM0 DNTN	MS = 2.9817 G
IM = 730. DIAS	DM = 2.7559 G/S
<u>DADOS DO SCA</u>	<u>TEMPOS DE MANOBRA</u>
LI = 2.00 M	T1 = 0.270 S
UI = 4.000 MM	TD = 0.042 S
TEJA = 15.00 GRAUS	TF = 0.583 S
<u>DADOS DA UTILIZACAO</u>	<u>VALORES FUNDAMENTAIS</u>
NC = 1000	FE = 2.000 N
DPSI = 1.00 GRAUS	POB = 6.44 DAN/CM*2
PA = 0.00000 DAN/CM*2	DG = 1.50 MM
JI = 273.00 K	DS = 47.68 MM
	L = 86.107 MM

FORNECIDOS I FE DG

TEMPOS E MASSA RESIDUAL OTIMIZADOS

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 9)

VALORES CALCULADOS

VAL / PTU	R	SR	E	U	S
W	0.0000	0.0773	0.0817	1.0000	11.4285
V	0.0	25.8	27.3	305.4	734.2
M/S					
C	334.6	334.4	334.4	305.4	64.2
M/S					
D	271.58	4.00	4.00	1.00	47.68
MM					
P	6.8038	6.7759	6.4102	3.4022	0.001
DAN/CM*2					
T	269.43	269.11	269.08	224.53	9.93
K					
RJ	8.5092	8.4845	8.0277	5.1061	0.021
KG/MS					
PJ	6.8038	6.8038	6.4402	6.4402	6.4402
DAN/CM*2					
TJ	269.4	269.4	269.4	269.4	269.4
K					
RDJ	8.5092	8.5092	8.0545	8.0545	8.0545
KG/MS					

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 10)

<u>DADOS DO GAS</u>	<u>VALORES GLOBAIS CALCULADOS</u>
NUME = NITROGENIO	VOL = 10.83 L
K = 1.400	PI = 185.799 DAN/CM*2
H = 296.76 J/(KG*K)	MT = 8.921 KG
CP = 1038.66 J/(KG*K)	EP = 3.432 MM
	CT = 369.30 UR/N
<u>DADOS DO SATELITE</u>	XM = 2.31 %
IS = 9.70 KG.M*2	MI = 2.4839 KG
KA = 0.50 M	MF = 0.0574 KG
CM = 13.00 *1000 D*TN	MS = 2.4265 G
IM = 730. DIAS	UM = 1.7146 G/S
<u>DADOS DO SCA</u>	<u>TEMPO DE MANOBRAS</u>
LT = 2.00 M	T1 = 0.354 S
UI = 4.000 MM	TO = 0.031 S
TEIA = 15.00 GRAUS	TF = 0.739 S
<u>DADOS DA UTILIZACAO</u>	<u>VALORES FUNDAMENTAIS</u>
NC = 1000	FE = 1.242 N
DPSI = 1.00 GRAUS	POB = 4.00 DAN/CM*2
PA = 0.00000 DAN/CM*2	DG = 1.50 MM
PI = 273.00 K	US = 47.68 MM
	L = 86.107 MM

FURNELIDOS = POB DG

TEMPO E MASSA RESIDUAL UTILIZADOS

(continua)

(continuação Tabela 5.3 - Caso 10)

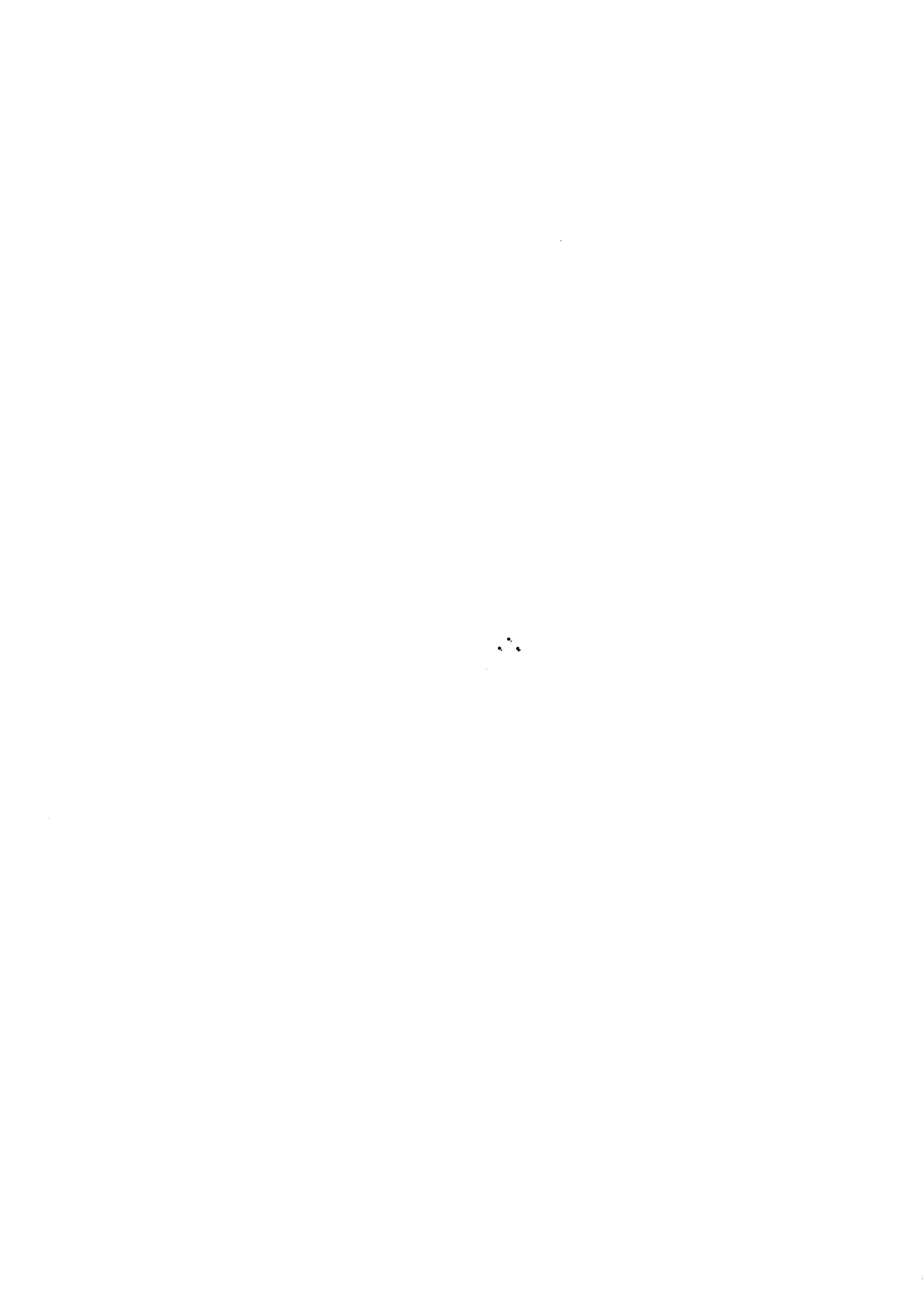
VALORES CALCULADOS

VAL / PTU	R	SR	E	G	S
M	0.0000	0.0773	0.0817	1.0.00	11.4285
V M/S	0.0	25.8	27.3	304.9	735.0
C M/S	334.0	333.8	333.8	304.9	64.1
D MM	274.51	4.00	4.00	1.00	47.68
P DAN/CM*2	4.2258	4.2085	3.9814	2.1431	0.0000
T K	268.52	268.20	268.16	223.77	9.90
RJ KG/M*3	5.3031	5.2877	5.0030	3.1022	0.0013
PJ DAN/CM*2	4.2258	4.2258	4.0000	4.0000	4.0000
TJ K	268.5	268.5	268.5	268.5	268.5
RDJ KG/M*3	5.3031	5.3031	5.0197	5.0197	5.0197

(continua)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). Requisitos de Segurança para Projeto de Sistemas Pressurizados para Atividade Espacial. Brasil. 1983. (ABNT, NBR-8168).
- GIACAGLIA, G.E.O. Mecânica Geral. Rio de Janeiro, Editora Campus, 1982.
- HARTOG, J.P.D. Advanced Strength of Materials. New York, Mc Graw-Hill Book Co., 1952.
- INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS (INPE). Missão Espacial Completa. Estudo de Viabilidade do Satélite Brasileiro, Anexo 2 - Ante-projeto do Satélite. São José dos Campos, 1979.
- MUKHANOV, K. Estruturas Metálicas. Moscou, Editora MIR, 1980.
- RIZK, M. et alii. Semi-Elliptic Computation of an Axi-symmetric Transonic Nozzle Flow. Applied Mathematical Modelling, 7(2):123-127, Apr. 1983.
- SHAPIRO, A.H. The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow. Nova York, John Wiley and Sons, 1953, V.1.
- STREETER, V.L. Mecânica dos Fluidos. São Paulo, McGraw Hill do Brasil, 1974.
- VAN WYLEN, G.J.; SONNTAG, R.E. Fundamentos da Termodinâmica Clássica. 2.ed. São Paulo, Editora Edgard Blücher, 1976.



BIBLIOGRAFIA

- BARRÈRE, M.; JAUMOTTE, A.; VEUBEKE, B.F.; VANDENKERCKHOVE, J. Rocket Propulsion. Amsterdã, Elsevier Publishing Company, 1960.
- INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS (INPE). Missão Espacial Brasileira em Cooperação com a França. Fase de Estudo Preliminar, Documento 11-Custos do Programa. São José dos Campos, 1979.
- INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS (INPE). Missão Espacial Completa. Documento de Síntese. São José dos Campos, 1979.
- KLAUSNER, L. Vasos de Pressão para Sistemas de Controle de Atitude de Cargas Úteis. São Paulo, Sociedade Brasileira de Automática, 1976.
- MILITARY SPECIFICATION. Reservoirs, Air, Nonshatterable steel. EUA, 1957. Amendment 6, 1980. (MIL-R-8573A).
- SUTTON, G.P. Rocket Propulsion Elements. 3. ed. New York, John Wiley and Sons, 1967.

..

APÊNDICE A

ANÁLISE DO EMPUXO FORNECIDO PELO BOCAL

Neste apêndice faz-se uma análise do empuxo fornecido pelo bocal ao longo da vida do sistema de controle de atitude.

A expressão do empuxo em função do número de Mach na área de saída do bocal e da pressão de estagnação do bocal é dada pela Equação 3.11, transcrita a seguir:

$$F_e = A_g \left(\frac{2}{k+1} \right)^{(k+1)/2(k-1)} \left\{ \lambda k p_{0b} M_s \left(1 + \frac{k-1}{2} M_s^2 \right)^{-1/2} + \frac{1}{M_s} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_s^2 \right)^{(k+1)/2(k-1)} \left[p_{0b} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_s^2 \right)^{k/(1-k)} - p_a \right] \right\}. \quad (A.1)$$

De acordo com Shapiro (1953), é válida a expressão:

$$\frac{A}{A_g} = \frac{1}{M} \left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{(k+1)/2(k-1)}, \quad (A.2)$$

sendo A a área de uma secção qualquer do bocal e M o número de Mach nesta secção.

Através desta equação pode-se verificar que para um determinado bocal, com velocidade de escoamento na garganta igual à do som ($M=1$), cada secção tem um número de Mach bem definido, invariável.

Assim, tanto na secção de entrada quanto na de saída do bocal, tem-se:

$$M_e = \text{constante};$$

$$M_s = \text{constante}.$$

Uma válvula reguladora de pressão real trabalha dentro de uma faixa, ou seja, se a pressão regulada desejada é p , a pressão real de saída será $p_{-\ell_i}^{+\ell_s}$, onde ℓ_s é o limite superior e ℓ_i é o limite inferior. Quando a pressão a juzante da válvula cai ao valor $p-\ell_i$, então ela permite a entrada de gás em seu interior até que a pressão na saída seja $p+\ell_s$, quando então ela interrompe esta entrada de gás. Após esta interrupção, a pressão na saída começa a cair e o ciclo reinicia-se. Verifica-se, portanto, que a pressão na saída da válvula não é constante, mas oscilante em torno de um valor. Quanto melhor a válvula, menores os valores ℓ_i e ℓ_s . Uma válvula ideal (que foi a adotada neste trabalho) tem $\ell_i=\ell_s=0$, o que faz com que a pressão a juzante da válvula seja constante.

Para este caso, de válvula ideal, é válido:

$$p_e = \text{constante.}$$

Também de Shapiro (1953) obtêm-se a expressão:

$$\frac{p_{0b}}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{k/(k-1)}. \quad (\text{A.3})$$

Aplicando esta relação à entrada do bocal, onde se têm p_e e M_e , verifica-se que, sendo estes dois últimos parâmetros constantes, então p_{0b} também o é.

De volta à Equação A.1 conclui-se que, sendo todos os parâmetros envolvidos constantes, então o empuxo não variará ao longo do tempo.

APÊNDICE B

RELAÇÕES GEOMÉTRICAS NO BOCAL

O bocal ideal para utilização nestes sistemas tem sua superfície interna definida por uma equação bastante complicada. Além disso, a confecção deste tipo de bocal é muito complexa e extremamente cara.

Com vistas nisto, adota-se um outro tipo de bocal que, embora não tenha o perfil ideal, apresenta bons resultados. Este bocal, conhecido como De Laval, é composto de dois troncos de cone, ligados pelo vértice por meio de uma superfície toroidal. A Figura B.1 esquematiza esta peça e indica as grandezas geométricas envolvidas.

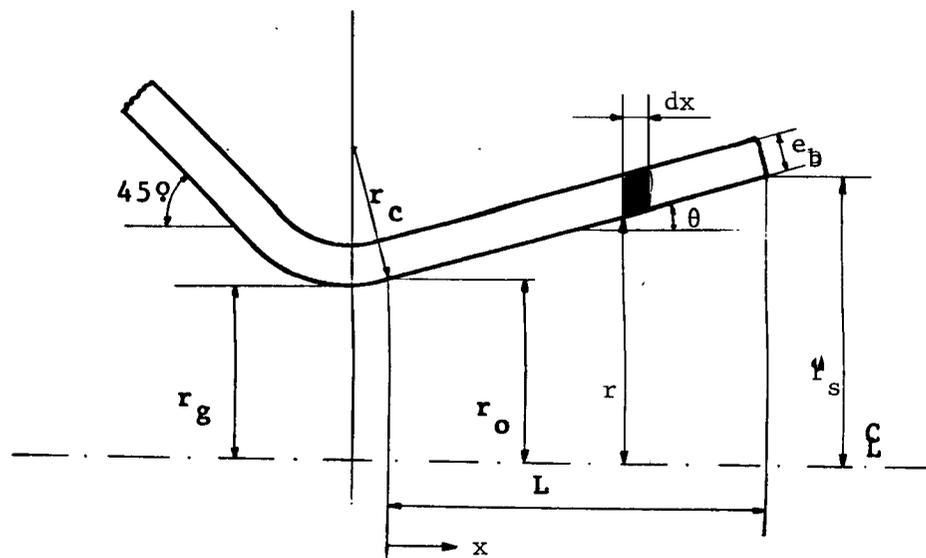


Fig. B.1 - Grandezas geométricas no bocal.

De acordo com Rizk et alii (1983), a melhor relação entre r_c e r_g , que são respectivamente o raio de concordância entre os dois cones (raio do toróide) e o raio da garganta, é:

$$\frac{r_c}{r_g} = 0,625 . \quad (B.1)$$

O raio r_o é o raio da secção de concordância entre o cone divergente e o toróide que define o raio da garganta. Através de relações geométricas, obtém-se:

$$\begin{aligned} r_o &= r_g + r_c (1 - \cos\theta); \\ r_o &= r_g \left[1 + 0,625(1 - \cos\theta) \right]; \\ r_o &= r_g (1,625 - 0,625 \cos\theta). \end{aligned} \quad (B.2)$$

Conseqüentemente:

$$\begin{aligned} \pi r_o^2 &= \pi r_g^2 (1,625 - 0,625 \cos\theta)^2, \text{ ou seja:} \\ A_{ob} &= A_g (1,625 - 0,625 \cos\theta)^2 , \end{aligned} \quad (B.3)$$

sendo A_{ob} a área da secção no ponto onde o raio é r_o , e A_g a área da garganta.

O volume de material do bocal que pode variar, dependendo do resultado da otimização, é o da parte divergente a partir do ponto onde o raio é r_o .

Utilizando a Figura B.1, tem-se, sendo e_b a espessura da parede:

$$dV \cong 2\pi r e_b dx \quad e$$

$$r = r_o + x \operatorname{tg}\theta .$$

Portanto:

$$dV = 2\pi e_b \operatorname{tg}\theta \, dx + 2\pi e_b r_o \, dx,$$

equação esta que integrada (V, de 0 a V_v e x, de 0 a L) fornece:

$$V_v = \pi e_b \operatorname{tg}\theta L^2 + 2\pi e_b r_o L, \quad \text{ou}$$

$$V_v = \pi e_b L (L \operatorname{tg}\theta + 2r_o). \quad (\text{B.4})$$

O valor de L pode ser obtido da Figura B.1:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r_s - r_o}{L}, \quad \text{ou}$$

$$L = \frac{r_s - r_o}{\operatorname{tg}\theta}.$$

Substitui-se, agora, r_o pela Equação B.2:

$$L = \frac{r_s - (1,625 - 0,625 \cos\theta) r_g}{\operatorname{tg}\theta}, \quad \text{ou}$$

$$L = \frac{D_s - (1,625 - 0,625 \cos\theta) D_g}{2 \operatorname{tg}\theta}. \quad (\text{B.5})$$

Esta equação também pode ser dada em função das áreas da garganta e da saída do bocal, ao invés de seus diâmetros:

$$L = \frac{\sqrt{A_s} - (1,625 - 0,625 \cos\theta) \sqrt{A_g}}{\sqrt{\pi} \operatorname{tg}\theta}. \quad (\text{B.5a})$$

APÊNDICE C

INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS REGENTES DO ESCOAMENTO DE FANNO

O escoamento de Fanno (adiabático com atrito) é regido pelas seguintes equações, segundo Shapiro (1953):

$$\frac{dM^2}{M^2} = kM^2 \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{1 - M^2} f \frac{dx}{D}; \quad (C.1)$$

$$\frac{dp}{p} = - kM^2 \frac{1 + (k-1) M^2}{2 (1-M^2)} f \frac{dx}{D}, \quad (C.2)$$

$$\frac{dT}{T} = - \frac{k(k-1)M^4}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{D}, \quad (C.3)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{kM^2}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{D}; \quad (C.4)$$

$$\frac{dV}{V} = - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{kM^2}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{D}, \quad (C.5)$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = - \frac{kM^2}{2} f \frac{dx}{D}, \quad (C.6)$$

$$\frac{d\rho_0}{\rho_0} = \frac{dp_0}{p_0} = - \frac{kM^2}{2} f \frac{dx}{D}. \quad (C.7)$$

A primeira equação (C.1), que vai fornecer o número de Mach do escoamento em função da posição na tubulação, é resolvida como mostrado a seguir:

$$\frac{(1-M^2) dM^2}{M^4 [2+(k-1)M^2]} = \frac{kf}{2D} dx.$$

Fazendo $y = M^2$, fica-se com:

$$\frac{(1-y) dy}{y^2[2+(k-1)y]} - \frac{kf}{y[2+(k-1)y]} = \frac{kf}{2D} dx \quad (C.8)$$

Agora pode-se proceder a uma integração destas equações, ou simplesmente procurar suas soluções em uma tabela de integrais. Assim, integrando y de y_1 a y_2 e x de 0 a L , fica-se com:

$$\frac{1}{2y_1} - \frac{1}{2y_2} + \frac{k-1}{4} \ln \frac{y_1[2+(k-1)y_2]}{y_2[2+(k-1)y_1]} - \frac{1}{2} \ln \frac{y_2[2+(k-1)y_1]}{y_1[2+(k-1)y_2]} = \frac{kfL}{2D}$$

Utilizando as propriedades dos logaritmos e fazendo algumas simplificações, chega-se à solução final, já substituindo y por M^2 :

$$\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} + \frac{k+1}{2} \ln \frac{M_1^2[2+(k-1)M_2^2]}{M_2^2[2+(k-1)M_1^2]} = \frac{kfL}{D} \quad (C.9)$$

sendo M_1 o número de Mach no início da tubulação ($x=0$) e M_2 no final ($x=L$).

Embora a Equação C.1 tenha permitido uma solução direta para o número de Mach em função de x , as Equações C.2 e C.7 não o permitem em relação a suas variáveis por dependerem explicitamente do número de Mach. Nota-se, entretanto, que todas as equações apresentam o termo $f \frac{dx}{D}$, o que sugere que uma divisão entre duas delas fará desaparecer este fator. Assim, serão obtidas equações diferenciais que relacionarão as diversas grandezas apenas com o número de Mach. Uma integração destas equações fornecerá cada grandeza em função unicamente do número de Mach; como este último é função apenas da posição na tubulação (Equação C.9), têm-se também as variáveis das Equações C.2 a C.7 como função da posição.

Assim, dividindo a Equação C.2 pela C.1 e rearranjando-a, obtêm-se:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{[1+(k-1)M^2]dM^2}{[2+(k-1)M^2] M^2}, \quad (C.10)$$

ou, integrando esta equação:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = - \int_{M_1^2}^{M_2^2} \frac{dM^2}{[2+(k-1)M^2] M^2} - \int_{M_1^2}^{M_2^2} \frac{(k-1)dM^2}{2+(k-1)M^2}. \quad (C.11)$$

Os resultados de cada integral são os seguintes:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right),$$

$$\int_{M_1^2}^{M_2^2} \frac{dM^2}{[2+(k-1)M^2] M^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{M_2^2 [2+(k-1)M_1^2]}{M_1^2 [2+(k-1)M_2^2]},$$

$$\int_{M_1^2}^{M_2^2} \frac{(k-1) dM^2}{2+(k-1)M^2} = \ln \frac{2+(k-1)M_2^2}{2+(k-1)M_1^2}.$$

Substituindo estes valores na Equação C.10 e melhorando sua forma, chega-se a:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2+(k-1)M_1^2}{2+(k-1)M_2^2} \right]^{1/2}. \quad (C.12)$$

Dividindo a Equação C.3 pela C.1 obtêm-se:

$$\frac{dT}{T} = - \frac{(k-1) dM^2}{2+(k-1)M^2} . \quad (C.13)$$

Após a integração, o resultado final é:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2+(k-1)M_1^2}{2+(k-1)M_2^2} . \quad (C.14)$$

A divisão da Equação C,4 pela C.1 fornece:

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{dM^2}{[2+(k-1)M^2]M^2} , \quad (C.15)$$

equação esta que, após integrada, resulta em:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2+(k-1)M_2^2}{2+(k-1)M_1^2} \right]^{1/2} . \quad (C.16)$$

A primeira igualdade da Equação C.5 simplifica o trabalho. A divisão desta equação pela C.1 fornece:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dM^2}{[2+(k-1)M^2]M^2} . \quad (C.17)$$

Portanto, sua integral resulta em:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{M_2}{M_1} \left[\frac{2+(k-1)M_1^2}{2+(k-1)M_2^2} \right]^{1/2} . \quad (C.18)$$

Da divisão da Equação C.6 pela C.1 resulta

$$\frac{dp_0}{p_0} = - \frac{(1-M^2)dM^2}{[2+(k-1)M^2]M^2}, \quad (C.19)$$

que, após a integração, fica:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2+(k-1)M_2^2}{2+(k-1)M_1^2} \right]^{k/(k-1)}. \quad (C.20)$$

A última equação a ser integrada, C.7, é idêntica à anterior; assim, seu resultado será o mesmo, ou seja:

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2+(k-1)M_2^2}{2+(k-1)M_1^2} \right]^{k/(k-1)}. \quad (C.21)$$

...

APÊNDICE D

CÁLCULO DO FATOR λ

O empuxo fornecido por um bocal compõe-se de duas parcelas, sendo uma devida à vazão de massa e a outra devida à diferença de pressão entre o interior e o exterior deste bocal.

O fator λ indica a perda de empuxo de vazão devida ao fato de o escoamento não ser exatamente paralelo ao eixo do bocal. A Figura D.1 ilustra esta situação:

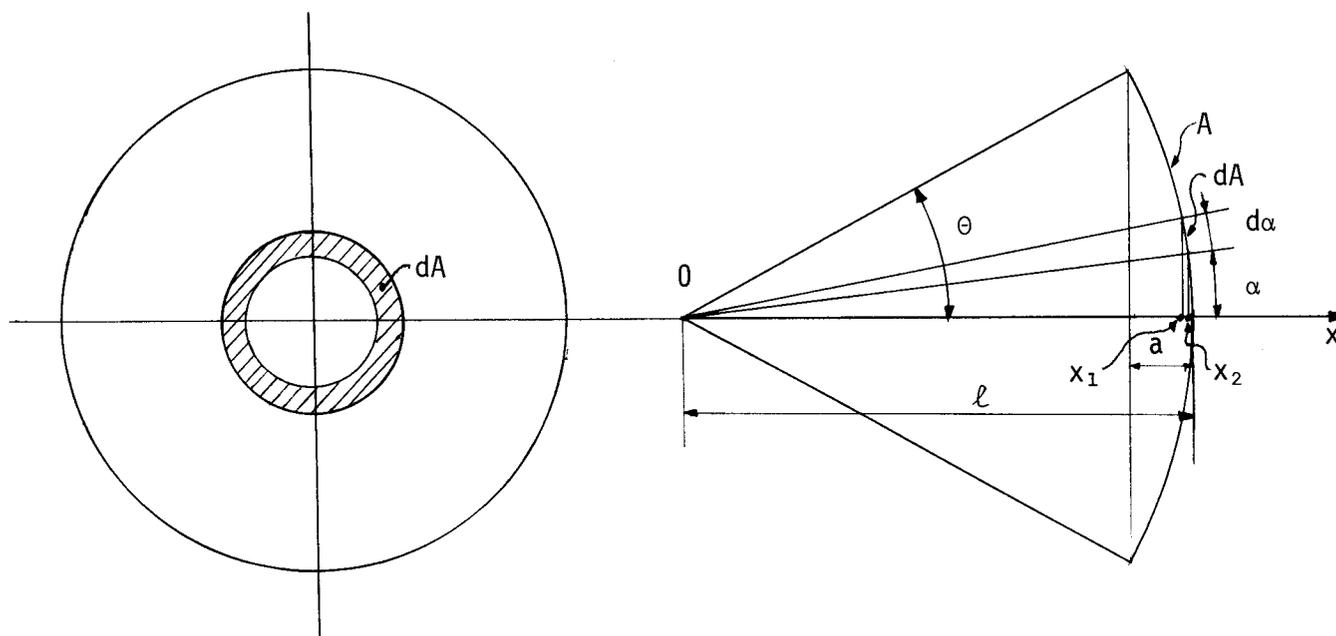


Fig. D.1 - Grandezas envolvidas no cálculo do fator λ .

O escoamento cruza a área A perpendicularmente a ela. A projeção em x deste fluxo de massa é que fornece a parte útil do empuxo de vazão.

Considerando a área dA , determinada em A pelo ângulo dx , verifica-se que o fluxo de massa que a cruza produz o empuxo:

$$dF_m = v_x d\dot{m} , \quad (D.1)$$

onde v_x é a velocidade do escoamento em x.

Sendo \dot{m} a vazão total, definem-se:

$$\dot{m}'' = \frac{\dot{m}}{A} \quad e \quad (D.2)$$

$$A = 2\pi\ell a , \quad (D.3)$$

onde a é a apótema do arco definido por ℓ e 2θ .

Da Figura D.1 observa-se:

$$a = \ell - \ell\cos\theta = \ell(1-\cos\theta) ,$$

que conduz a:

$$A = 2\pi\ell^2(1-\cos\theta) . \quad (D.3a)$$

A Equação D.2 fornece:

$$d\dot{m} = \dot{m}'' dA.$$

A Figura D.1 mostra que:

$$dA = 2\pi\ell (x_2 - x_1) ,$$

$$x_1 = \ell\cos(\alpha+d\alpha) \quad e$$

$$x_2 = \ell\cos\alpha ,$$

ou seja:

$$dA = 2\pi \ell^2 \left[\cos\alpha - \cos(\alpha+d\alpha) \right] . \quad (D.5)$$

Da trigonometria tem-se:

$$\cos(\alpha+d\alpha) = \cos\alpha \cos d\alpha - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} d\alpha .$$

Como $d\alpha$ é infinitesimal, é válido admitir:

$$\cos d\alpha \cong 1 \quad \text{e}$$

$$\operatorname{sen} d\alpha \cong d\alpha ,$$

resultando em:

$$\cos(\alpha+d\alpha) = \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha d\alpha . \quad (D.6)$$

Se a Equação D.6 for substituída na D.5, o resultado será:

$$dA = 2\pi \ell^2 [\cos\alpha - (\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha d\alpha)], \quad \text{ou}$$

$$dA = 2\pi \ell^2 \operatorname{sen}\alpha d\alpha . \quad (D.7)$$

Verifica-se que esta equação integrada conduz à Relação D.3a.

Assim, juntando as Equações D.4, D.2, D.3a e D.7, chega-se a:

$$d\dot{m} = \frac{\dot{m}}{2\pi \ell^2 (1-\cos\theta)} 2\pi \ell^2 \operatorname{sen}\alpha d\alpha , \quad \text{ou}$$

$$d\dot{m} = \frac{\dot{m} \operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\theta} d\alpha , \quad (D.8)$$

A velocidade do escoamento projetada em x é dada por:

$$v_x = \vec{v} \cdot \vec{i} \quad , \quad \text{ou}$$

$$v_x = v \cos \alpha \quad . \quad (D.9)$$

As Equações D.8 e D.9 substituídas em D.1 conduzem a:

$$dF_m = \frac{\dot{m} v}{1 - \cos \theta} \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha \quad , \quad (D.10)$$

equação esta que integrada fornece:

$$F_m = \frac{\dot{m} v}{1 - \cos \theta} \int_0^\theta \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha \quad , \quad \text{ou}$$

$$F_m = \frac{\dot{m} v}{1 - \cos \theta} \frac{1 - \cos 2\theta}{4} \quad .$$

Da matemática tem-se:

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{1 - \cos \theta} = \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \quad ,$$

que permitem escrever:

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{\dot{m} v}{4} (1 - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \\ &= \frac{\dot{m} v}{4} \frac{2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} (1 + \cos \theta) = \dot{m} v \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad . \end{aligned}$$

Então tem-se:

$$F_m = \dot{m} v \left(\frac{1+\cos\theta}{2} \right) . \quad (D.11)$$

O empuxo de vazão ideal, ou seja, aquele que se teria se o escoamento fosse paralelo ao eixo do bocal, é dado por:

$$F_{mi} = \dot{m} v . \quad (D.12)$$

Define-se λ como a relação entre os empuxos de vazão real (D.11) e ideal (D.12):

$$\lambda \triangleq \frac{F_m}{F_{mi}} ,$$

ou seja:

$$\lambda = \frac{1+\cos\theta}{2} \quad (D.13)$$