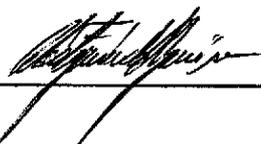
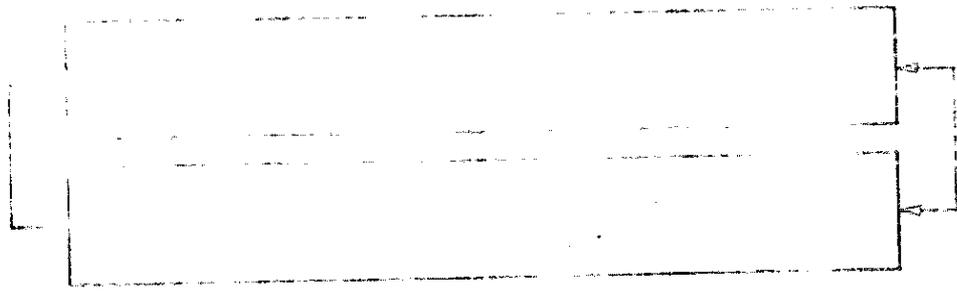


1. Publicação nº <i>INPE-4219-PRE/1099</i>	2. Versão	3. Data <i>Julho, 1987</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DMC</i>	Programa <i>201219</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>ELEMENTOS FINITOS REFINAMENTO CAMPO DE TENSÕES</i>			
7. C.D.U.: <i>517.962</i>			
8. Título <i>UMA TÉCNICA PARA REFINAMENTO LOCAL DO CAMPO DE TENSÕES NO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS</i>		10. Páginas: <i>5</i>	
		11. Última página: <i>4</i>	
		12. Revisada por	
9. Autoria <i>Celso F. Nogueira A.T. Fleury José A. Aranha</i>		<i>Edo F.P.A.</i> <i>Eduardo F. R. Araújo</i>	
Assinatura responsável 		13. Autorizada por  <i>Mareo Antonio Raupp</i> <i>Diretor Geral</i>	
14. Resumo/Notas <i>Apresenta-se neste trabalho uma técnica de refinamento do Cálculo de Tensões, no Método de Elementos Finitos. Nesta técnica utiliza-se um princípio variacional para aproveitar a melhor precisão dos deslocamentos nodais. A técnica foi desenvolvida para elementos de membrana e os resultados comparados aos obtidos através de uma técnica semelhante desenvolvida por Gibert & Gorge (1981) e aos obtidos através de uma malha mais refinada. Os resultados obtidos são excelentes tanto do ponto de vista de precisão como de economia de tempo computacional.</i>			
15. Observações <i>Este trabalho será submetido no IX Congresso Brasileiro de Eng^o Mecânica - COBEM/87, de 07 à 11 de Dezembro em Florianópolis, Santa Catarina.</i>			



SUMÁRIO

Apresenta-se neste trabalho uma técnica de refinamento do Cálculo de Tensões, no Método de Elementos Finitos. Nesta técnica utiliza-se um princípio variacional para aproveitar a melhor precisão dos deslocamentos nodais. A técnica foi desenvolvida para elementos de membrana e os resultados comparados aos obtidos através de uma técnica semelhante desenvolvida por Gibert & Gorge (1981) e aos obtidos através de uma malha mais refinada. Os resultados obtidos são excelentes tanto do ponto de vista de precisão como de economia de tempo computacional.

1. INTRODUÇÃO

Com o objetivo de diminuir o erro envolvido na aproximação por elementos finitos de problemas do contínuo, alguns métodos foram e têm sido desenvolvidos. Esses métodos têm como idéia básica a obtenção de uma determinada discretização que favoreça a redução do erro, compatibilizando-a com um determinado custo, o que não é possível através da aplicação de métodos que poderiam ser ditos "clássicos", como a simples utilização de uma discretização mais fina, polinômios interpoladores de maior grau e variáveis de dupla precisão. Entre tais métodos, os adaptativos têm recebido grande consideração. Esses métodos partem sempre de uma solução inicial, adaptando o modelo de forma a diminuir o erro numa iteração posterior (daí a denominação "adaptativos"); exemplos podem ser encontrados em [1] e [2]. A eficiência desses métodos em termos de custo é, no entanto, dependente da utilização de pré e pós-processadores integrados, de forma a automatizar o processo iterativo.

Métodos diretos de otimização de malhas também têm recebido consideração [3] e [4], porém esbarram na não-linearidade das equações e acabam por convergir para critérios quase-ótimos.

Embora a aplicação de qualquer desses métodos redunda numa melhor aproximação do campo de deslocamentos (no método dos deslocamentos) e, por consequência do campo de tensões (sua derivada), poucas referências explícitas são feitas quanto à melhoria obtida na aproximação das tensões. E, em geral, as preocupações voltam-se para as tensões, no cálculo de estruturas, uma vez que são frequentemente os principais parâmetros de projeto. Entre as técnicas desenvolvidas para a melhoria do cálculo de campos de tensões destacam-se os métodos de alisamento do campo de tensões [5], [6] e [7] e os estudos de localização de pontos ótimos para cálculo de tensões [8].

Alinham-se a esses últimos o trabalho aqui apresentado, no sentido de que mostra uma técnica simples de refinamento da aproximação obtida para o campo de tensões, desvinculada de uma melhoria no campo de deslocamentos. Tal técnica tem por base a melhor precisão obtida na aproximação dos deslocamentos nodais, em relação a outros pontos do domínio, que será denominada "extraprecisão". Portanto, esta técnica aproveita a extraprecisão dos deslocamentos nodais para obter tensões refinadas com erro da mesma ordem que obtido nos deslocamentos em outros pontos do domínio. Para tanto, faz-se uso de um método variacional, seguindo em tese técnica similar à apresentada em [9]. A aplicação da técnica a elementos de membrana traz resultados excelentes, como serão apresentados nas seções a seguir.

A FORMULAÇÃO PARA OS ELEMENTOS DE MEMBRANA

A técnica foi desenvolvida e aplicada a um problema em duas dimensões, a equação de Poisson no plano. Tal escolha é motivada pela oportunidade de verificar a técnica para um problema simples, com um grau de liberdade por nó, que enseja a previsão de resultados similares para problemas de "plane-stress e plane-strain", já que estes também envolvem operadores de segunda ordem [11].

O problema da equação de Poisson no plano pode ser descrito da seguinte forma:

$$\nabla^2 \phi = -q(x,y)$$

com

$$\phi = 0 \text{ em } \partial_{A_0}$$

$$\phi_n = \nabla \phi \cdot \vec{n} = b(s) \text{ em } \partial_{A_c} = \partial_A - \partial_{A_0}$$

onde ∂_{A_0} , ∂_{A_c} e ∂_A são definidos na Figura 1.

e

- q = carregamento,
- b(s) = carregamento no contorno,
- φ = deslocamento.

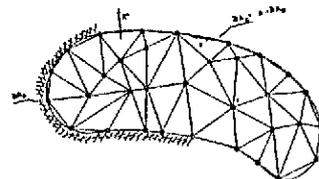


Fig. 1 - Domínio A de área unitária.

sendo

h_i - função característica do nó i, contínua e linear por partes,

$\phi(x,y)$ - solução exata,

$$\phi_I(x,y) - \text{interpolada nodal de } \phi = \sum \phi(x_i, y_i) \cdot h_i(x,y),$$

e

$$\phi_{EF} = \text{solução por elementos finitos} = \sum \phi_i \cdot h_i(x,y)$$

é possível verificar que o erro esperado na aproximação para as tensões é da ordem Δx , onde Δx é a dimensão característica do elemento integrante de um domínio de área unitária. Ainda pode-se verificar que o erro na aproximação dos deslocamentos nodais é:

$$|\delta\phi_i| = |\phi(x_i, y_i) - \phi_i| \leq \mathcal{O}(\Delta x)^2,$$

em geral (pois não é possível concluir que a relação é válida em todos os elementos).

Assim observa-se que os valores nodais de deslocamentos são bastante precisos (resultado conhecido na prática), o mesmo não acontecendo com as tensões.

A técnica a ser apresentada modifica qualitativamente o erro das tensões, fornecendo erro de ordem menor que Δx , quando a precisão dos deslocamentos nodais é menor que $\mathcal{O}(\Delta x)^2$.

A TÉCNICA DE REFINAMENTO

O objetivo é melhorar o erro da aproximação das tensões utilizando a extrapolação dos deslocamentos nodais. Assim, utilizam-se elementos lineares (triangulares) a partir dos quais podem-se obter os deslocamentos nodais $\{\phi_i^{(0)}\}$ e a aproximação:

$$\phi^{(0)}(x, y) = \sum_{i=1}^n \phi_i h_i(x, y).$$

Supõe-se que o campo de deslocamentos seja quadrático localmente, o que significa escrever:

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^3 \phi_i^{(0)} h_i(x, y) + \sum_{j=4}^6 \bar{\phi}_j \bar{h}_j(x, y),$$

e o campo de tensões linear: $\vec{P}(x, y) = \sum_{i=1}^3 \vec{P}_i h_i(x, y)$

onde

$h_i(x, y)$ = função de forma do elemento linear,

$\bar{h}_{i+3}(x, y)$ = função de forma do elemento quadrático.

Como $\bar{h}_{i+3}(x, y)$ não é identicamente nulo nas bordas do elemento, a influência dos elementos adjacentes sobre o elemento em análise (ver Figura 2) é dada por:

$$\bar{P}_n = \nabla\phi \cdot \vec{n}$$

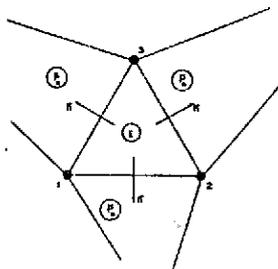


Fig. 2 - Elemento sob análise (esquema).

Utilizando o funcional de Hellinger-Reissner [10], vem:

$$J(\vec{P}, \phi) = \frac{1}{2} \left[\iint_E \vec{P} \cdot \vec{P} \, dE + \int_{\partial E} \bar{P}_n \phi \, d\partial E - \int_{\partial E} P_n \phi \, d\partial E + \iint_E (\text{div } \vec{P} - q) \phi \, dE \right]$$

Tomando a variação de $J(\vec{P}, \phi)$, tem-se:

$$\delta J = \iint_E \vec{P} \cdot \delta \vec{P} - \int_{\partial E} \delta P_n \phi \, d\partial E + \iint_E \text{div } \delta \vec{P} \phi \, dE + \iint_E (\text{div } \vec{P} - q) \delta \phi \, dE - \int_{\partial E} P_n \delta \phi \, d\partial E + \int_{\partial E} \bar{P}_n \delta \phi \, d\partial E \equiv 0$$

O termo $\int_{\partial E} \bar{P}_n \delta \phi \, d\partial E$ apresenta-se como uma dificuldade para obtenção do refinamento. É possível obter $P^{(0)}$, através de $P = \nabla\phi \cdot n$ (da solução tradicional), porém com erro da ordem Δx , o que não é desejado. Utilizando no lugar de \bar{P}_n seu valor médio $\langle \bar{P}_n \rangle_j$ de modo que:

$$\bar{P}_n^{(0)}(s) = \langle \bar{P}_n \rangle_j + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

pode-se evitar esse problema.

Calcular $\langle \bar{P}_n \rangle_j$ com erro da ordem de $(\Delta x)^2$ é de particular importância para o refinamento. Esse valor pode ser calculado através de:

$$\langle \bar{P}_n \rangle_j = \bar{Q}_j / l_j,$$

onde l_j = lado do triângulo,

\bar{Q}_j = fluxo ao longo do lado, satisfazendo o equilíbrio global do elemento.

O cálculo de \bar{Q}_j não é direto, uma vez que o fluxo obtido através de $\int_{\partial E} \vec{P}^{(0)} \cdot \vec{n} \, ds$ não satisfaz o equilíbrio global do elemento. Assim a determinação de \bar{Q}_j passa a ser o aspecto relevante da técnica apresentada, sendo inclusive esse o aspecto que a diferencia, essencialmente, da técnica proposta em [9].

Em [9] o cálculo de \bar{Q}_j é feito a partir dos elementos adjacentes onde:

$$\bar{Q}_j = -Q_{Nj}$$

$$e \quad \bar{Q}_{Nj} = (\nabla\phi^{(0)} \cdot \vec{n})_{Nj} \cdot l_j \quad j = 1, 2, 3,$$

Note-se que \bar{Q}_{Nj} é calculado nos elementos vizinhos, e, portanto tem erro da ordem de Δx .

Na técnica aqui apresentada, utiliza-se um procedimento que tira partido da extraconvergência nodal para fornecer melhores valores para \bar{Q}_j . Utilizando o esquema da Figura 3 e uma expansão em Taylor para os deslocamentos e admitindo que a malha seja quase-regular (e assim o ponto 0 está muito próximo de 0'), pode-se obter:

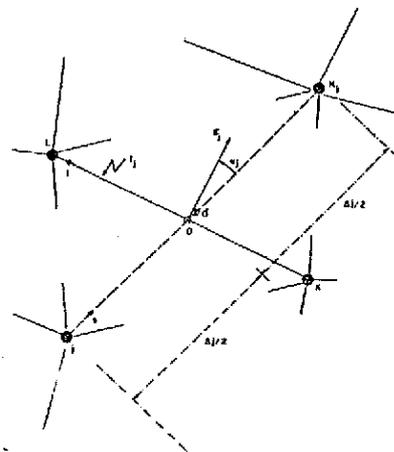


Fig. 3 - Esquema com vértices de elementos vizinhos.

$$Q_j^{(e)} = \left[\frac{1}{\cos \alpha_j} \frac{1}{\Delta_j} (\phi_{N_j}^{(o)} - \phi_j^{(o)}) + (\phi_L^{(o)} - \phi_k^{(o)}) \tan \alpha_j \right] \cdot [1 + \text{erro}]$$

onde

$$\text{erro} = \text{MAX} \left\{ \frac{\phi_j^{(e)} - \phi_j^{(o)}}{\Delta}; \Delta^2 \right\}$$

Analisando o resultado acima, observa-se:

- se o erro em $\phi_j^{(o)}$ (resultado de E.F.) for da ordem de Δ^2 , o erro em Q_j seria da ordem Δ , recuperando o resultado de [9];

- se o erro em $\phi_j^{(o)}$ for menor que Δ^2 (o que em geral acontece), o erro em Q_j será menor que Δ , o que contribui para o refinamento (de qualquer forma a aproximação utilizada não piora os resultados obtidos pelo método tradicional).

Retornando à expressão do funcional, com os valores de \bar{P}_N e desenvolvendo-a pode-se obter o sistema:

$$\begin{bmatrix} C & 0 & X \\ 0 & C & Y \\ X^T & Y^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ \bar{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Gamma(x) \\ \Gamma(y) \\ \Lambda \end{Bmatrix}$$

onde:

$$C_{ij} = \int_E h_i h_j dE$$

$$X_{ij} = \int_E \bar{h}_{j+3} \frac{\partial h_i}{\partial x} dE - \int_{\partial E} \bar{h}_{j+3} \cdot h_i \cdot n_x d\partial E$$

$$Y_{ij} = \int_E \bar{h}_{j+3} \frac{\partial h_i}{\partial y} dE - \int_{\partial E} \bar{h}_{j+3} \cdot h_i \cdot n_y d\partial E$$

$$\Gamma(x, y) = - \int_E \left(\phi^{(o)} - \frac{h_j}{\partial x, y} \right) dE + \int_{\partial E} \phi^{(o)} \cdot h_i \cdot n_{x, y} d\partial E$$

$$\Lambda = \int_E q(x, y) \cdot h_{i+3}(x, y) dE - \sum_{j=1}^3 \frac{Q_j}{l_j} \int_0^{l_j} \bar{h}_{i+3} | ds, \quad s \in l_j$$

P_x - vetor de tensões nodais em x,

P_y - vetor de tensões nodais em y,

$\bar{\phi}$ - deslocamentos no meio do lado.

A existência de inversa da matriz é demonstrável e assim pode-se obter um refinamento local pela adição a um programa de elementos finitos de uma rotina que calcule X , Y , C , $\Gamma(x)$, $\Gamma(y)$ e Λ e resolva o sistema.

RESULTADOS

A técnica apresentada foi aplicada a dois problemas, para os quais é possível obter a solução analítica (Figuras 4).

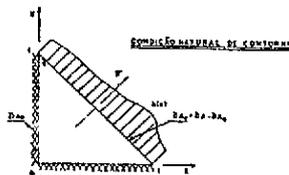
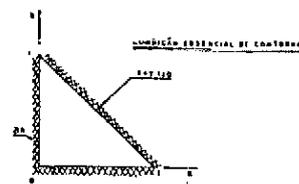


Fig. 4 - Modelo dos problemas.

Tais problemas foram resolvidos utilizando uma malha de 16 elementos (Figura 5), pelo método tradicional, pela técnica de refinamento de [9] e pela técnica aqui apresentada. Os resultados de tensões para o C.G. do elemento e para os nós são comparados aos resultados obtidos utilizando uma malha com 256 elementos (Figura 6).

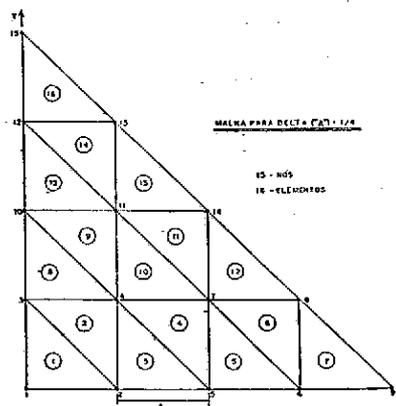


Fig. 5 - Malha para $\Delta = "1/4"$.

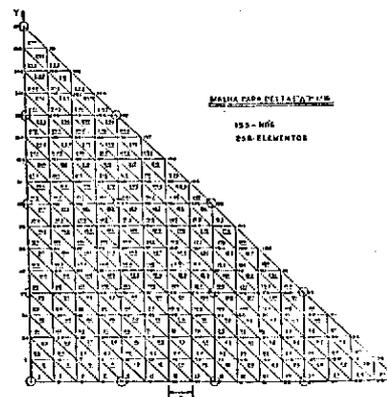


Fig. 6 - Malha para $\Delta = "1/16"$.

A comparação é feita a partir da porcentagem de erro em cada solução, calculada a partir de:

$$\% \text{ERRO} = \frac{\sqrt{(P_x^{\text{exato}} - P_x^{\text{aprox}})^2 + (P_y^{\text{exato}} - P_y^{\text{aprox}})^2}}{P_{\text{max exata}}} \cdot 100$$

Os resultados são apresentados na Tabela 1. Uma visão gráfica do comportamento das duas técnicas pode ser vista nas Figuras 7 e 8.

Tabela 1 - Resultados de erro nas tensões.

Tipo de Problema	ERRO DAS TENSÕES			Tempo de CPU (s)
		C.C.	NODALS	
Malha 1/4 - s/ref. (cond. essencial)	MAX MED	25% 12%	75% 48%	7,27
Malha 1/4 - Gibert (cond. essencial)	MAX MED	23% 12%	125% 41%	7,02
Malha 1/4 - Prec. Nodal (cond. essencial)	MAX MED	6% 4%	25% 17%	7,60
Malha 1/16 - s/ref. (cond. essencial)	MAX MED	6% 3%	29% 13%	62,71
Malha 1/4 - s/ref. (cond. natural)	MAX MED	12% 12%	25% 25%	6,99
Malha 1/4 - Gibert (cond. natural)	MAX MED	12% 9%	35% 25%	7,70
Malha 1/4 - Prec. Nodal (cond. natural)	MAX MED	0% 0%	0% 0%	7,91
Malha 1/16 - s. ref. (cond. natural)	MAX MED	3% 3%	6% 6%	61,97

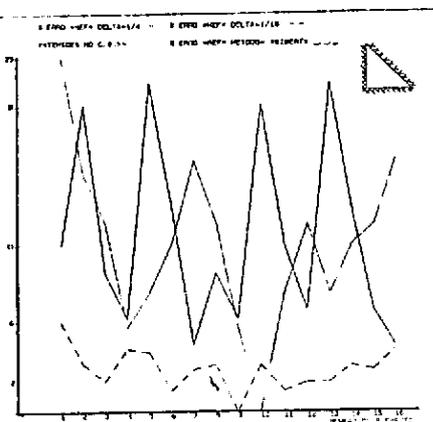


Fig. 7 - Porcentagem de erro - tensões no C.C. - Gibert.

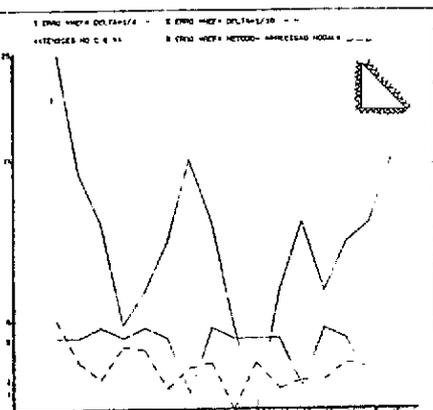


Fig. 8 - Porcentagem de erro - tensões no C.C. - Prec. Nodal

Uma comparação entre os tempos de CPU utilizados (VAX-11/780) também é apresentada na Tabela 1, onde se pode verificar uma substancial economia de tempo em favor da técnica de refinamento apresentada [11], quando comparada à solução com a malha de 256 elementos, que prevê a mesma ordem de erro para o cálculo das tensões.

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos com a técnica de refinamento proposta são excelentes e justificam sua utilização, em contrapartida ao uso de uma malha mais refinada.

O estudo realizado com elementos lineares (elementos de membrana) deve ser estendido a outros tipos de elementos de forma a prover melhor abrangência para aplicações práticas.

REFERÊNCIAS

- [1] Babuska, I.; Rheinboldt, W.C. Reliable error estimation and mesh adaptation for the finite element method, Oden, J.T., ed. Computational methods in nonlinear mechanics. Amsterdam. North-Holland, 1980, p. 67-108.
- [2] Cairailet, R. Dulikravich, G.S.; Kennon, S.R. Generation of solution-adaptive computational grids using optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 57:279-295, 1986.
- [3] Turcke, D.J.; Mcneice, G.M. Guidelines for selecting finite element grids based on an optimization study. Computer & Structures, 4:499-519, 1974.
- [4] Diaz, A.R.; Kikuchi, N.; Papalambros, P.; Taylor, J.E. Design of an optimal grid in finite element methods. Journal of Structural Mechanics, 11(2): 215-230, 1983
- [5] Moyer Jr., E.T. A brief note on the local least squares stress smoothing technique. Computer & Structures, 18(1):185-187, 1984.
- [6] Oden, J.T.; Brauchli, H.J. On the calculation of consistent stress distributions in finite element approximations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 3:317-325, 1971.
- [7] Oden, J.T.; Reddy, J.N. Note on an approximate method for computing consistent conjugate stresses in elastic finite elements. International Journal Numerical Methods in Engineering, 6:55-61, 1973.
- [8] Barlow, J. Optimal stress locations in finite element models. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10(sf):243-251, 1976.
- [9] Gibert, Ph.; Gorge, Y. Une méthode économique de calcul de contraintes précises - localisation des erreurs de modélisation. La Recherche Aérospatiale (1):23-42, 1981.
- [10] Washizu, K. Variational methods in elasticity and plasticity, Oxford, UK, Pergamon Press, 1975.
- [11] Nogueira, C.F. Refinamento local do Campo de Tensões no Método de Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado (INPE/SJC) (no prelo).

ABSTRACT

In this work a stress refinement technique for the Finite Element Method is presented. This technique uses a principle of the Variational Calculus to profit on the better precision obtained for the nodal displacements via finite elements (Displacement Method). The results obtained are excellent compared both to a similar technique by Gibert & Gorge (1981) and to a simple, but more expensive, technique of adding more nodes to the mesh.



PROPOSTA PARA
PUBLICAÇÃO

- DISSERTAÇÃO
- TESE
- RELATÓRIO
- OUTROS

TÍTULO

Uma Técnica para Refinamento Local do Campo de Tensões no Método de Elementos Finitos ⁴¹

IDENTIFICAÇÃO

AUTOR(ES)

Celso F. Nogueira
A.T. Fleury
José A. Aranha

ORIENTADOR

CO-ORIENTADOR

DIVULGAÇÃO

- EXTERNA INTERNA RESTRITA
- EVENTO/MEIO COBEM
- CONGRESSO REVISTA OUTROS

LIMITE

DEFESA

CURSO

ORGÃO

— / — / —

— / — / —

NOME DO REVISOR

Eduardo Francisco R. Araújo

NOME DO RESPONSÁVEL

REV. TÉCNICA

RECEBIDO

DEVOLVIDO

ASSINATURA

— / — / —

— / — / —

Eduardo F. R. Araújo

APROVADO

DATA

ASSINATURA

- SIM
- NÃO

— / — / —

REV. LINGUAGEM

Nº

PRIOR.

RECEBIDO

NOME DO REVISOR

114

1

19/05/87

Gloria C. Bertini

PÁG.

DEVOLVIDO

ASSINATURA

—

19/05/87

Gloria C. Bertini

OS AUTORES DEVEM MENCIONAR NO VERSO INSTRUÇÕES ESPECÍFICAS, ANEXANDO NORMAS, SE HOUVER

RECEBIDO

DEVOLVIDO

NOME DA DATILÓGRAFA

— / — / —

Nº DA PUBLICAÇÃO

4219/028/1093

CÓPIAS

Nº DISCO

LOCAL

AUTORIZO A PUBLICAÇÃO

SIM

NÃO

— / — / —

OBSERVAÇÕES E NOTAS