MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS

AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO
AUTHORIZATION FOR PUBLICATION

PALAVRAS CHAVES/KEY WORDS

AUTORES
AUTHORS

P-MEDIANAS; RELAXAÇÃO LAGRANGEANA; MÉTODO DE SUBGRADIENTES; BRANCH AND BOUND

AUTORIZADA POR/AUTHORIZED BY

Emanuel Fernandes
EMANUEL FERNANDES
SUPERINTENDENTE DE PLANEJ. SISTEMAS E MÉTODOS

AUTOR RESPONSÁVEL
RESPONSIBLE AUTHOR

Hilcéa Ferreira Marengoni
HILCÉA FERREIRA MARENGONI

DISTRIBUIÇÃO/DISTRIBUTION

☐ INTERNA / INTERNAL
☒ EXTERNA / EXTERNAL
☐ RESTRITA / RESTRICTED

REVISADA POR / REVISED BY

LUIZ ANTÔNIO N. LORENA

CDU/UDC

519.688

DATA / DATE

Agosto 1989

PUBLICAÇÃO Nº
PUBLICATION NO

INPE-4914-PRE/1515

ORIGEM
ORIGIN

CPD

PROJETO
PROJECT

TÍTULO/TITLE

UM ALGORITMO EXATO PARA O PROBLEMA DAS P-MEDIANAS

Nº DE PAG.
NO OF PAGES

6

ULTIMA PAG.
LAST PAGE

5

VERSÃO
VERSION

Nº DE MAPAS
NO OF MAPS

AUTORES/AUTHORSHIP

HILCÉA FERREIRA MARENGONI
EDSON LUIZ FRANÇA SENNE
LUIZ ANTONIO NOGUEIRA LORENA

RESUMO - NOTAS / ABSTRACT - NOTES

Este trabalho enfoca um algoritmo exato para resolução do problema das p-medianas baseado em uma formulação de programação inteira do problema. Um algoritmo do tipo "branch and bound" é utilizado e os limitantes são obtidos através da Relaxação Lagrangeana do problema usando um método de otimização por subgradientes. A implementação é feita em micro-computadores do tipo IBM-PC.

OBSERVAÇÕES / REMARKS

Trabalho submetido para apresentação no XXII Congresso SBPO - Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional, Fortaleza - CE, 18-20 de Outubro de 1989.

UM ALGORITMO EXATO PARA O PROBLEMA DAS P-MEDIANAS

*Hilcéa Ferreira Marengoni
**Edson Luiz França Senne
*Luiz Antônio Nogueira Lorena
*INPE - São José dos Campos - SP
**UNESP - Campus de Guaratinguetá - SP

Resumo

Este trabalho enfoca um algoritmo exato para resolução do problema das p-medianas baseado em uma formulação de programação inteira do problema. Um algoritmo do tipo "branch and bound" é utilizado e os limitantes são obtidos através da Relaxação Lagrangeana do problema usando um método de otimização por subgradientes. A implementação é feita em micro-computadores do tipo IBM-PC.

Abstract

This work reports an exact algorithm for solving the p-median problem based on an integer programming formulation of the problem. A "branch and bound" algorithm is presented and the bounds are obtained by solving the lagrangean relaxation using the subgradient optimization method. The algorithm is implemented to run on a IBM-PC micro-computer.

1. INTRODUÇÃO

A determinação das p-medianas de uma rede é um problema clássico de localização. Seu objetivo é encontrar p nós - medianas da rede - que minimizem a soma das distâncias entre cada nó e sua mediana mais próxima. Um grande número de algoritmos (heurísticos e exatos) tem sido propostos para solução do chamado problema das p-medianas (PPM). Hakimi [4,5] foi o primeiro no exame da determinação de uma única facilidade em uma rede, generalizando posteriormente o conceito para multi-medianas e apresentando um procedimento simples de enumeração. Maranzana [8], Teitz e Bart [11] entre outros usaram heurísticas para aproximar a solução do PPM. Algoritmos tipo "branch and bound" foram propostos por Efroymson e Ray [3], Jarvinen, Rajala e Sinervo [7], Neebe [10] e Christofides e Beasley [2]. Mais recentes são as abordagens usando Relaxação Lagrangeana. Beasley [1], usando a abordagem de Christofides e Beasley resolveu problemas com até 900 nós, graças ao emprego do super-computador de processamento vetorial CRAY-1S. O objetivo deste trabalho é usar a abordagem de Christofides e Beasley, adaptando-a para micro-computadores tipo IBM-PC e compatíveis, respondendo questões como o número máximo de nós possível, a aceleração do método de subgradientes e uma implementação do processo de busca binária ("branch and bound"), Marengoni [9].

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O PPM pode ser definido como :

$$Z = \text{MIN} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\, x_{ij} \right)$$

$$\text{Sujeito à} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots n; \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = P; \qquad (2)$$

$$x_{ij} \leqslant x_{ij}; \qquad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \; ; \quad i,j = 1,2,\ldots,n \qquad (4)$$

Onde : (d_{ij}) é uma matriz simétrica não-negativa, onde $d_{ii} = 0$, $\forall i$; (x_{ij}) é a matriz de alocações, $x_{ij} = 1$ se o nó i está alocado ao nó j, $x_{ij} = 0$ caso contrário; $x_{ii} = 1$ se o nó i é mediano e $x_{ii} = 0$ caso contrário; p é o número de facilidades (medianas) a serem localizadas, n é o número total de nós da rede.

As restrições (1) e (3) garantem que cada nó j é alocado somente a um único nó mediano i. A restrição (2) determina o número exato de medianas a serem localizadas e (4) impõe a integralidade.

3. ALGORITMO

O algoritmo baseia-se na abordagem de Christofides e Beasley [2] e envolve os seguintes passos : (i) Uso de Relaxação Lagrangeana para determinação de um limitante inferior (Zd_max) de Z e solução de uma formulação do dual de PPM pelo método de subgradientes ; (ii) Uso de Zd_max e de um limitante superior (LS) de Z, solução viável do PPM, para um procedimento de busca em profundidade em árvore binária. O seguinte problema lagrangeano (PL) é resolvido a cada iteração do método de subradientes, para um dado vetor não-negativo :

$$Zd(\lambda) = \text{MIN} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} (d_{ij} - \lambda_j)\, x_{ij} \right] + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$$

Sujeito à (2), (3) e (4)

Decomposto sobre o índice i, tal problema pode ser resolvido por inspeção. Seja

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} [\text{MIN}\,(d_{ij} - \lambda_j,\, 0)]$$

I = conjunto dos p menores α_i's

Então a solução de (PL) é dada por :

$$xii^* = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in I \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad xij^* = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in I \text{ e } dij - j < 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Encontra-se o melhor limitante inferior (Zd_max) de Z através do dual, $Zd\_max = MAX\ Zd(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, resolvido pelo seguinte método de subgradientes :

ALGORITMO DE SUBGRADIENTES : Dados λ, LS, Zd_art $\leftarrow$ 0, Zd $\leftarrow$ 0;

<u>ENQUANTO</u> $\Pi > 0.005$ ou
- $Sj \neq 0$ para algum j, ou
- LS - Zd_max $\geq$ 0.05 , <u>FAÇA</u> :
- RESOLVA (PL) obtendo :
  - xij^* , $Zd(\lambda)$, Z^* ;
- $Sj \leftarrow \sum_{i \in I} x_{ij}^* - 1$;
- <u>SE</u> $Zd(\lambda) >$ Zd_max <u>ENTÃO</u> Zd_max $\leftarrow Zd(\lambda)$;
- <u>SE</u> $Z^* <$ LS <u>ENTÃO</u> LS $\leftarrow Z^*$, Zd_art $\leftarrow$ Zd_max;
- <u>CASO</u> <u>CONTRÁRIO</u> Zd_art $\leftarrow$ Zd_art + 0.2(LS - Zd_art);
- <u>SE</u> Zd_art $>$ LS <u>ENTÃO</u> Zd_art $\leftarrow$ Zd_max;
- $t \leftarrow \dfrac{\Pi\ (LS - Zd\text{-}art)}{\|S\|^2}$
- $\lambda_j \leftarrow MAX\ \{0,\ \lambda_j + t S_j\}$ j= 1,2,...,n;

<u>FIM</u> <u>ENQUANTO</u>

Seja Zd_art uma heurística usada quando não há melhora no LS, naquela iteração, servindo assim, para acelerar a convergência do algoritmo. Na escolha dos valores para Π seguiu-se a abordagem de Held, Wolfe e Crowder [6] fazendo Π = 2 para 2n iterações e dividindo Π ao meio a cada 5 iterações seguidas em que não houver melhora no Zd_max. Se $\Pi \leq 0.005$ o algoritmo pára e não se pode concluir sobre a otimalidade do dual. Se $Sj = 0$, $\forall$ j ou LS = Zd_max, então a solução ótima foi encontrada para o primal e dual.
Caso a otimalidade do primal (PPM) não tenha sido atingida, uma árvore binária é construida, passo a passo, cujo percurso é feito em profundidade.

Tem-se : LS (solução viável inicial), chamada aqui solução incumbente e Zd_max (limitante inferior de Z).

Os nós são fixados como medianas e não-medianas usando a seguinte estratégia de ramificação : a variável xii escolhida corresponde ao menor α_i, $j \in I$. Em qualquer ponto da árvore uma variável é selecionada e dois subproblemas são gerados, correspondentes a xii fixado em 1 e xii fixado em 0. O algoritmo de subgradientes é então aplicado, limitado a 30 iterações, com $\Pi = 1$ no início.

O nó atual da árvore deve ser podado quando : (1) Sj = 0, ou (2) Zd_max = LS, ou (3) o número de nós ativos é igual a p.

4. TESTES COMPUTACIONAIS

O algoritmo proposto está implementado em Pascal para processamento em micro-computador do tipo IBM-PC.

Um dos objetivos deste trabalho foi a implementação de um algoritmo exato para o PPM em micro-computador. Procurou-se economizar ao máximo o número de variáveis e tamanhos de matrizes. Assim, obteve-se um programa que consegue suportar problemas com até 205 nós.

O algoritmo foi testado com problemas gerados aleatoriamente com dij no intervalo [5,100]. Os resultados encontram-se na tabela a seguir. Os tempos indicados excluem o tempo necessário para gerar a matriz de distâncias e correspondem ao tempo total gasto para obtenção da solução final. A tabela contem ainda o número de nós, número de medianas, limitante superior (LS), limitante inferior (Zd_max), tipo de solução, número de iterações e "gap" de dualidade calculado por : "gap" = (LS - Zd_max)/LS .

TABELA

ROTINA DE SUBGRADIENTES							ROTINA DE SUBGRADIENTES COM BRANCH AND BOUND					
NUM. NOS	NUM. MED.	LS	ZD_MAX	SOLUCAO	N.ITER	GAP INICIAL %	LS	ZD_MAX	SOLUCAO	N.ITER	TEMPO (seg)	GAP FINAL %
15	4	162	72.00	N.OTIMA	71	55.56	141	140.96	OTIMA	177	100	48.94
25	5	191	155.77	N.OTIMA	97	18.45	191	191.00	OTIMA	619	260	18.45
25	10	146	87.00	OTIMA	40	40.41					23	
50	5	615	531.71	N.OTIMA	206	13.54	613	614.98	INCUMB.	1030	1315	13.26
50	10	386	222.00	N.OTIMA	141	42.49	360	222.00	INCUMB.	1007	1386	38.33
75	5	942	781.10	N.OTIMA	278	17.08	921	920.99	INCUMB.	1012	2787	15.19
75	10	561	464.44	N.OTIMA	366	17.21	538	537.98	INCUMB.	1005	2885	13.67
100	5	1440	1147.70	N.OTIMA	336	20.30	1431	1430.99	INCUMB.	1005	4598	19.79
100	10	914	710.29	N.OTIMA	368	22.29	808	710.29	INCUMB.	1028	5120	12.09
125	5	1811	1462.52	N.OTIMA	358	19.24	1811	1462.52	N.OTIMA	1009	7057	19.24
125	10	1130	895.58	N.OTIMA	599	20.75	1089	1088.99	INCUMB.	1029	7309	17.76
150	5	2162	1370.87	N.OTIMA	342	19.94	2162	2162.00	N.OTIMA	2020	19615	19.94

OBS : Considerou-se a solução INCUMBENTE quando houve melhora no "gap" de dualidade.
O tempo indicado inclui as duas rotinas (Subgradientes e Subgradientes com "branch and bound").

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho procurou-se estudar o PPM e os métodos existentes (heurísticos e exatos) para sua solução. Desenvolveu-se um algoritmo para resolução exata do problema, utilizando uma formulação de programação inteira e um método de subgradientes associado à Relaxação Lagrangeana. De acordo com os resultados computacionais pode-se concluir que, embora em muitos casos a árvore de busca não tenha sido esgotada, houve uma redução nos "gaps" de dualidade com o emprego deste algoritmo.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BEASLEY, J.E. A note on solving large P-MEDIAN problems. **European Journal of Operational Research, 21**:270 273, 1985.

[2] CHRISTOFIDES, N.; BEASLEY J.E. A tree search algorithm for the p-median problem. **European Journal of Operational Research, 10**:196-204, 1982.

[3] EFROYMSON, M.A.; RAY, T.L. A branch-bound algorithm for plant location. **Operations Research, 14**:361-368, 1966.

[4] HAKIMI, S.L. Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. **Operations Research 12**:450-459, 1964.

[5] HAKIMI, S.L. Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems. **Operations Research 13**:462-475, 1965.

[6] HELD M.; WOLFE P.; CROWDER H.P. Validation of subgradient optimization. **Mathematical Programming, 6**:62-88, 1974.

[7] JARVINEN P.J.; RAJALA J. A branch and bound algorithm for seeking the p-median. **Operations Research, 20**:173-178, 1972.

[8] MARANZANA F.E. On the location of supply points to minimize transport costs. **Operational Research Quarterly, 15**:261-270, 1964.

[9] MARENGONI H.M. Um algoritmo exato para o problema das p-medianas. Dissertação de Mestrado em Análise de Sistemas e Aplicações. INPE, São José dos Campos. No prelo.

[10] NEEBE A.W. A branch and bound algorithm for the p-median transportation problem. **Journal of the Operational Research Society, 29(10)**:989-995, 1978.

[11] TEITZ M.B.; BART P. Heuristic methods for estimating the vertex median of a weighted graph. **Operations Research, 16**:955-961, 1968.

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS

PROPOSTA PARA PUBLICAÇÃO

☐ DISSERTAÇÃO
☐ TESE
☐ RELATÓRIO
☒ OUTROS

IDENTIFICAÇÃO

TÍTULO

UM ALGORITMO EXATO PARA O PROBLEMA DAS P-MEDIANAS

AUTOR(ES)

Hilcéa Ferreira Marengoni
Edson Luiz França Senne
Luiz Antonio Nogueira Lorena

DISS. OU TESE: ORIENTADOR / CO-ORIENTADOR

LIMITE: __/__/__ DEFESA: __/__/__ CURSO: ORGÃO: SPM/CPD

DIVULGAÇÃO: ☒ EXTERNA ☐ INTERNA ☐ RESTRITA

EVENTO/MEIO: ☒ CONGRESSO ☐ REVISTA ☐ OUTROS

REV. TÉCNICA: NOME DO REVISOR / RECEBIDO __/__/__ DEVOLVIDO __/__/__ ASSINATURA

APROVAÇÃO: NOME DO RESPONSÁVEL: Hilcéa Ferreira Marengoni

APROVADO: ☐ SIM ☐ NÃO DATA: __/__/__ ASSINATURA: ANTONIO MARIANO GOMES Chefe do Centro de Processamento de Dados

REV. LINGUAGEM: Nº PRIOR. RECEBIDO __/__/__ NOME DO REVISOR / PÁG. DEVOLVIDO __/__/__ ASSINATURA

DATILOGRAFIA: OS AUTORES DEVEM MENCIONAR NO VERSO INSTRUÇÕES ESPECÍFICAS, ANEXANDO NORMAS, SE HOUVER

RECEBIDO __/__/__ DEVOLVIDO __/__/__ NOME DA DATILÓGRAFA

Nº DA PUBLICAÇÃO: PÁG.:
CÓPIAS: Nº DISCO: LOCAL:

DIRETORIA: AUTORIZO A PUBLICAÇÃO

☒ SIM ☐ NÃO 27/06/89 Emanuel Fernandes

EMANUEL FERNANDES
Planejamento, Sistemas e Métodos

OBSERVAÇÕES E NOTAS

OBS.: Não pertence a nenhum projeto.