GERAÇÃO DE UM SINAL ALEATÓRIO CONTÍNUO NORMALMENTE DISTRIBUÍDO

Ralf Gielow

Instituto de Pesquisas Espaciais-LPA/INPE-MCT
C.P.515 - 12201 - São José dos Campos - SP

INTRODUÇÃO

Sinais aleatórios contínuos normalmente distribuídos e estacionários no tempo representam, por exemplo, as flutuações de velocidade num escoamento turbulento isotrópico, e sua geração é útil para a simulação deste escoamento.

MODELO

Para a geração destes sinais V(t), t tempo, considere-se seu desenvolvimento em série de Taylor em torno de um instante t_k, desprezando os termos de ordem superior, o.s.

$$V(t) = V(t_k) + (t - t_k)\,\dot{V}(t_k)\ ,\ \dot{V}(t) = \frac{d}{dt}\,V(t)\Big|_{t_k} \tag{1}$$

onde $\dot{V}(t_k)$ é considerada constante entre os tempos de mudança dos fatores estocásticos que a alteram. Como V(t) é estacionário no tempo, i.e., sua variância σ^2_V é constante, $\dot{V}(t)$ deve ser escolhida de modo a satisfazer esta condição. Para tal, amostra-se aleatoriamente o valor de $\dot{V}(t)$ da metade positiva de uma distribuição normal de variância $\sigma^2_{\dot{V}}$ obtendo-se a seguir o seu valor positivo ou negativo de uma distribuição condicional que depende de V (t) de modo a mantê-lo sempre finito. O valor $\dot{V}(t)$ resultante é válido enquanto não houver mudança dos fatores estocásticos citados, os quais são supostos atuarem sem memória, razão pela qual seus tempos de duração têm distribuição probabilística exponencial com parâmetro (média) $\bar{\lambda}$ (Aczel, 1969 - equação funcional exponencial de Cauchy [1]);destarte, estes tempos de validade são amos trados aleatoriamente desta distribuição. Para a determinação de $\bar{\lambda}$, Kirmse (1964)[5] observando o tempo médio entre os zeros de uma função estocástica normal estacionária (Rici, 1944[7]; Liepmann, 1949[6]), conclui $\bar{\lambda} = K\ \sigma_V/\sigma_{\dot{V}}$, K constante positiva menor que π. O valor de K, por utilização do algoritmo para geração de V(t) mostrado abaixo, foi determinado por tentativa e erro: para todos os valores de K testados, com $\sigma_V/\sigma_{\dot{V}}$ variando de 0,01 a 100, resultaram V(t) normalmente distribuídos com média zero, mas apenas com K=0,5 obteve-se a variância σ_V^2 esperada, bem como os demais momentos centrais até o décimo. Desta forma, conclui-se que *o tempo médio entre as mudanças da derivada temporal de uma função estocástica estacionária normalmente distribuída é igual a* $\frac{1}{2\pi}$ *do tempo médio entre os zeros da função*, fato que constitui uma conjetura cuja prova como teorema o autor não conhece.

ALGORITMO

O algoritmo para geração de V(t) é o seguinte: a) Escolher o valor $V(t_0) \frown N(0,\sigma_V)$, fazendo $t_K = t_0$ e $V=V(t_0)$; b) Escolher $|\dot{V}| \frown N\ (0,\sigma_{\dot{V}})$ positiva; c) Escolher $S \frown N\ (0,\sigma_V)$; se $S > V$ fazer $\dot{V} > 0$ ou, se não, fazer $\dot{V} < 0$; d) Escolher o tempo $T \frown EXP\ (\bar{\lambda})$ de atuação de $\dot{V}$; e) calcular $V(t) = V(t_K) + (t-t_K)\ \dot{V}$, $t \in (t_K,\ t_K + T]$ e fazer $V = V(t+T)$ e repetir o procedimento a partir de (b) até alcançar o tempo requerido de geração. Este algoritmo pode ser caracterizado com um médoto de Monte Carlo, pois envolve o uso de técnicas de amostragem estatística para a solução de um problema. No caso, para uma máquina de 32 bits, os números aleatórios necessários foram obtidos pela relação recursiva multiplicativa congruencial $R_{K+1} = 65539\ R_K\ (\mathrm{mod}\ 2^{31})$ (IBM, 1970[3]), cuja aleatoriedade local foi provada pelos testes usuais como os de Kendall e Babington-Smith (1938)[4].

CONCLUSÕES

Dois sinais V(t) gerados pelo algoritmo, assim como a função distribuição probabilística de 120 destes sinais de 102.4 unidades de tempo cada são apresentados na figura anexa, mostrando a boa qualidade do modelo utilizado. Finalmente, deve-se frisar que o presente algoritmo pode ser estendido para situações bi e tridimensionais anisotrópicas não-homogêneas no espaço, com campos em escoamento turbulento, onde $V_i(t)$, $i = 1,2,3$ são os componentes da velocidade e $\dot{V}_i(t)$ as respectivas acelerações Lagrangeanas e $X_i(t)$, as integrais de $V_i(t)$, constituem as trajetórias de partículas de fluido em escoamento. O caso bidimensional cartesiano é tratado em [2].

REFERÊNCIAS

[1] Aczél, J. *On Applications and Theory of Functional Equations*. New York, Academic Press, 1969.

[2] Gielow, R. *Stochastic Modeling of Turbulent Heat and Mass Transport in Anisotropic Shear Flow*. Doctoral Dissertation. Gainesville, FL, Univ. of Florida, 1972.

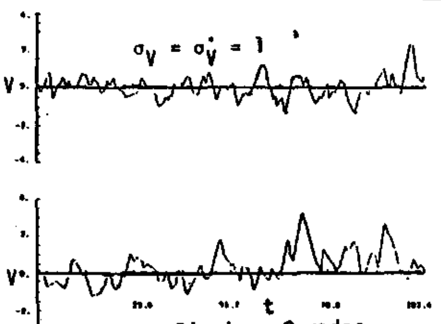
[3] IBM *Random Number Generation and Testing*. White Plains, NY, 1959. IBM Ref. Man. C20-8011.

[4] Kendall,M.G.;Babington-Smith, B. *Roy. Stat. Soc. J.* 101:147, 1938.

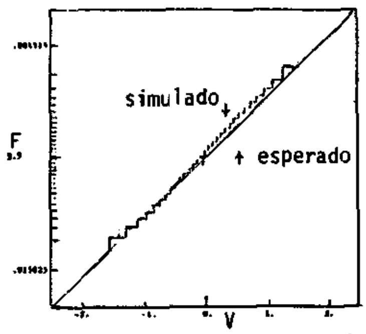
[5] Kirmse, D. W. *A Monte Carlo Study of Turbulent Diffusion*. Doctoral Dissertation. Ames, IO, Iowa State Univ., 1964.

[6] Liepmann,H. W. *Helvetica Phys. Acta*, 22, 119, 1949

[7] Rice, S. O. *Bell Syst. Tech. J.* 23, 82, 1944.



Sinais Gerados



Função Distribuição - 120 Sinais