3.3 A importância do estudo da Ionosfera

A ionosfera representa um laboratório natural de física de plasmas, onde são estudados diversos fenômenos como o crescimento de instabilidades, a propagação de ondas de gravidade, a geração e evolução de bolhas de plasma, etc. Em suma, a importância do estudo da Ionosfera dá-se pelas seguintes razões:

- Para melhor se entender a climatologia espacial (conjunto de fenômenos que ocorrem no sistema Ionosfera/Termosfera/Magnetosfera e também a interação desse sistema com o meio interplanetário, durante a passagem de nuvens magnéticas de alta energia de origem solar), cuja variabilidade nas vizinhanças da Terra, afeta de forma direta ou indireta a vida do dia a dia.
- Para melhor se entender os seus fortes efeitos nas Telecomunicações inclusive nas telecomunicações via satélite nas faixas de freqüência na ordem de GigaHertz.
- Para se estudar a física de plasmas e em particular os fenômenos das instabilidades de plasma (através dos estudos dos fenômenos de spread-F, bolhas ionosféricas, eletrojato, etc.), permitindo a verificação das teorias.
- Aplicações tecnológicas, na área de Engenharia. Os satélites artificiais podem ser parcialmente ou totalmente danificados pelo bombardeio de elétrons relativísticos ou por campos elétricos de alta intensidade. Pode acontecer da danificação dos instrumentos de bordo dos satélites causada pela ação da intempérie do meio interplanetário ser confundida com defeito de natureza técnica.
- Para se estudar os processos quânticos que ocorrem em átomos e moléculas atmosféricas excitadas, permitindo a verificação das teorias.
- Para se estudar a espectroscopia óptica (emissões atmosféricas atômicas ou moleculares resultantes das diversas transições eletrônicas fotoemissivas), permitindo a verificação das teorias.

ANÁLISE DA ESTABILIDADE ABSOLUTA DE REGULADORES LQ MULTIVARIÁVEIS ATRAVÉS DO CRITÉRIO DE POPOV

José Jaime da Cruz
INPE/DCG - C.P. 515 - São José dos Campos - SP - CEP 12201

José Cláudio Geromel
FEE/UNICAMP - C.P. 6101 - Campinas - SP - CEP 13081

Resumo

A estabilidade absoluta de reguladores lineares quadráticos multivariáveis invariantes no tempo discretos é estudada no domínio da frequência. Uma forma generalizada de uma igualdade fundamental relacionando as matrizes de funções de transferência diferença de retorno e em malha aberta do regulador é o elemento básico para a aplicação do Critério de Popov à análise. Essa forma generalizada também estabelece uma condição necessária para que uma matriz de funções de transferência em malha fechada seja resultante de um problema LQ.

Abstract

A frequency-domain approach to the absolute stability analysis of multivariable time invariant discrete-time linear quadratic regulators is accomplished. An imbedding form of a fundamental equality relating the return-difference and the open-loop matrix transfer functions is the key for the application of the Popov Criterion in the analysis. This imbedding form also establishes a necessary condition on a closed-loop matrix transfer function to have been obtained through a LQ design.

Keywords: Absolute Stability; Multivariable LQ Regulators; Popov Criterion; Robustness; Frequency Domain.

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar a robustez de reguladores lineares quadráticos multivariáveis invariantes no tempo discretos (RLQMITD) no domínio da frequência. A robustez é entendida no sentido da estabilidade assintótica do RLQMITD após a inserção de não linearidades na malha de realimentação. Embora os setores de estabilidade absoluta já tenham sido obtidos (Safonov, 1980), acredita-se que a forma com que eles são determinados a seguir, com base no Critério de Popov, seja original. Além disso, a análise da estabilidade pode ser realizada por meio de uma função de Lyapunov não puramente quadrática. Esta é uma característica importante para a estimação de domínios de estabilidade no caso em que as não linearidades não estão contidas completamente no setor pré-especificado.

O ponto de partida para a análise que se segue é uma identidade fundamental no domínio da frequência relacionando as matrizes de funções de transferência diferença de retorno e em malha aberta (Arcasoy, 1971). Obtem-se uma forma generalizada dessa igualdade que conduz à caracterização de hiper-esferas específicas em um espaço complexo multidimensional onde matrizes de funções de transferência em malha fechada devem estar contidas. Estas regiões de confinamento constituem o elemento básico para a aplicação do Critério de Popov na análise da estabilidade absoluta dos RLQMITD's.

2. REVISÃO DO CRITÉRIO DE POPOV

Seja o sistema a tempo discreto dado por:

$$x(t+1) = Ax(t) - B\Phi(F(x(t))) \qquad (1)$$

onde $A \in R^{nxn}$ é assintóticamente estável, $B \in R^{nxr}$, (A,B) é completamente controlável $F \in R^{rxn}$ e (F,A) é completamente observável. Admita-se que a função não linear $\Phi: R^r \to R^r$ seja desacoplada, isto é:

$$\Phi(y) = [\phi_1(y_1)\ \phi_2(y_2)\ \dots\ \phi_r(y_r)]' \qquad (2)$$

sendo as ϕ_i, $i = 1,2, \dots, r$, funções reais restritas aos setores abertos $(0; k_i)$, isto é:

$$0 < \phi_i(y_i)\, y_i < k_i y_i^2 \quad (y_i \neq 0)$$
$$\phi_i(0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, r) \qquad (3)$$

onde cada $k_i > 0$ é constante. Definindo a matriz $K = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ e a matriz complexa:

$$W(z) = K^{-1} + F(zI - A)^{-1}B \qquad (4)$$

então vale o seguinte teorema (Hitz & Anderson, 1969).

TEOREMA 1 (Critério de Popov): Se $W(z)$ é real positiva discreta, então o sistema (1) é globalmente assintóticamente estável.

Como A foi suposta assintóticamente estável, a propriedade de real positividade de $W(z)$ pode ser testada de maneira simples como (Hitz & Anderson, 1969):

$$W(z) + W(z^{-1})' \geq 0, \ \forall z \in Z \qquad (5)$$

onde $Z = \{z | z = e^{jw}, \ \forall w \in R\}$. Note-se que no caso de uma entrada e uma saída, a condição acima se reduz a $Re[W(e^{jw})] \geq 0, \forall w \in R$.

3. RELAÇÕES NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Seja o RLQMITD expresso por:

$$\min_{u(.)} \sum_{t=0}^{\infty} x'(t)C'Cx(t) + u'(t)R\,u(t) \qquad (6)$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

onde $A \in R^{nxn}$ (não necessariamente assintoticamente estável), $B \in R^{nxr}$ e $C \in R^{pxn}$. Os pares (A,B) e (C,A) são supostos completamente controlável e completamente observavel, respectivamente e $R = R' > 0$. Sob essas condições, sabe-se que a lei de controle ótimo é dada por (Kwakernaak & Sivan, 1972):

$$u(t) = -(R+B'PB)^{-1}B'PA\,x(t) = -Fx(t) \qquad (7)$$

onde $P \in R^{nxn}$ é a única solução simétrica definida positiva da Equação Algébrica de Riccati Discreta(EARD):

$$P = A'PA + C'C - A'PB(R+B'PB)^{-1}B'PA \qquad (8)$$

Definindo para todo o número real e as seguintes matrizes de funções de transferência:

$$H(z,e) = C(zI - A + eBF)^{-1}B$$
$$G(z,e) = F(zI - A + eBF)^{-1}B \qquad (9)$$

a seguinte igualdade fundamental, relacionando as matrizes de funções de transferência diferença de retorno $I + G(z,0)$ e em malha aberta $H(z,0)$, se verifica (Arcasoy, 1971):

$$[I + G(z^{-1},0)]'(R+B'PB)[I + G(z,0)] =$$
$$R + H(z^{-1},0)'\,H(z,0) \qquad (10)$$

Esta identidade é a motivação principal deste trabalho. Uma de suas aplicações é na determinação das margens de estabilidade garantidas do RLQMITD. Considerando um parâmetro $\alpha \in R+$ tal que $\alpha R \geq B'PB$, então da equação (10) segue-se que:

$$\sigma_m[I + R^{1/2}\,G(z,0)R^{-1/2}] \geq$$
$$1/\sqrt{1+\alpha} \quad (\forall z \in Z) \qquad (11)$$

onde $\sigma_m[.]$ representa o mínimo valor singular de [.]. Um teorema provado por Lehtomaki (1981) conduz imediatamente às margens de ganho (MG) e fase quando R é diagonal. Em particular, $MG \supset (k_m;k_M)$ onde:

$$k_m = (1 + \alpha - \sqrt{1+\alpha}) \,/\, \alpha$$
$$k_M = (1 + \alpha + \sqrt{1+\alpha}) \,/\, \alpha \qquad (12)$$

As margens de ganho mais amplas neste contexto correspondem assim ao mínimo valor de $\alpha \in R+$ tal que $\alpha R \geq B'PB$, o qual é dado por:

$$\alpha = \max\{\lambda | \det(B'PB - \lambda R) = 0\} \qquad (13)$$

Note-se que as margens de ganho obtidas por Safonov (1980), usando argumentos de análise funcional, coincidem com aquelas apresentadas acima quando $R = I$; contudo, no caso mais geral de R diagonal, os resultados anteriores são menos conservadores que os de Safonov.

Os resultados apresentados a seguir são preliminares para a obtenção da igualdade generalizada relacionando as matrizes de funções de transferência definidas em (9).

LEMA 1: A seguinte igualdade vale para todo $e \in R$:

$$H(z,0) = H(z,e)[I - eG(z,e)]^{-1} \qquad (14)$$

Demonstração: Aplicando o Lema de Inversão de Matrizes a $H(z,e)$ e $G(z,e)$ e rearranjando os termos obtém-se:

$$H(z,e) = H(z,0)[I + eG(z,0)]^{-1}$$
$$G(z,e) = G(z,0)[I + eG(z,0)]^{-1} \qquad (15)$$

Da segunda equação segue-se facilmente que:

$$I - eG(z,e) = [I + eG(z,0)]^{-1} \qquad (16)$$

que, em conjunto com a primeira das equações (15), fornece (14), concluindo a demonstração.

LEMA 2: A seguinte igualdade vale para todo $e \in R$:

$$I + G(z,0) =$$
$$[I - (e-1)G(z,e)][I - eG(z,e)]^{-1} \qquad (17)$$

Demonstração: De (15) e (16) tem-se:

$$I + G(z,0) = I + G(z,e)[I - eG(z,e)]^{-1} \qquad (18)$$

Rearranjando os termos resulta (17) e a prova se completa.

Neste ponto o resultado principal desta seção é enunciado. Ele relaciona as matrizes de funções de transferência definidas em (9) numa forma semelhante a (10).

TEOREMA 2: A seguinte igualdade vale para todo $e \in R$:

$$[I - (e-1)G(z^{-1},e)]'(R+B'PB)[I - (e-1)G(z,e)] =$$
$$[I - eG(z^{-1},e)]'R[I - eG(z,e)] +$$
$$+ H(z^{-1},e)'H(z,e) \qquad (19)$$

Demonstração: A igualdade acima é obtida após a substituição dos resultados dos Lemas 1 e 2 em (10).

Obviamente, para $e=0$ a equação (19) se reduz a (10), enquanto que para $e=1$ ela fornece:

$$[I - G(z^{-1},1)]'R[I - G(z,1)] =$$
$$(R+B'PB) - H(z^{-1},1)'H(z,1) \qquad (20)$$

que é uma espécie de versão em malha fechada da identidade fundamental (10). Graças ao sinal negativo do lado direito da equação(20), uma região de confinamento para $G(z,1)$ é dada por:

$$\sigma_M[I - R^{1/2}G(z,1)R^{-1/2}] \leq \sqrt{1+\alpha} \quad (\forall z \in Z) \qquad (21)$$

O objetivo a seguir é generalizar este resultado. Definindo os setores abertos $S = (k_m;k_M)$ e $S^* = (k_m,k^*)$, $k^* = (k_m+k_M)/2$ e os parâmetros reais:

$$c_e=(k^*-e)/[(e-k_m)(k_M-e)]$$
$$r_e^2=c_e^2+1/[(e-k_m)(k_M-e)],\ r_e > 0 \qquad (22)$$

vale o teorema abaixo.

TEOREMA 3: Para $e \in S$ a matriz de funções de transferência $G(z,e)$ é tal que:

$$\sigma_M[c_eI-R^{1/2}G(z,e)R^{-1/2}] \leq r_e \quad (\forall z \in Z) \qquad (23)$$

Demonstração: Embora simples, a demonstração envolve manipulações algébricas longas e cansativas. Por isso, apresenta-se aqui apenas um esboço. O fato crucial é que para $z \in Z$, a equação (19) acarreta que:

$$[I-eG(z^{-1},e)]'R[I-eG(z,e)] \leq$$
$$(1+\alpha)[I-(e-1)G(z^{-1},e)]'R[I-(e-1)G(z,e)] \qquad (24)$$

Considerando que $\alpha R \geq B'PB$ e usando (22), levando em conta que $e \in S$ e completando os quadrados, obtém-se para todo $z \in Z$:

$$[c_eI-G(z^{-1},e)]'R[c_eI-G(z,e)] \leq r_e^2R \qquad (25)$$

que conduz a (23), uma vez que ambos os membros de (25) sejam pré e pós-multiplicados por $R^{-1/2}$.

Dessa forma a matriz $\overline{G}(e^{jw},e) = R^{1/2}G(e^{jw},e)R^{-1/2}$, que de certa maneira representa uma mudança de escala de $G(e^{jw},e)$, restringe-se a pertencer à hiperesfera de C^{rxr} com centro em c_eI e raio r_e. Note-se que para $e=1$ a condição (23) representa assim uma condição necessária para que uma dada matriz de funções de transferência em malha fechada tenha tido origem num problema LQ.

O resultado do Teorema 3 será essencial para a análise da estabilidade absoluta do RLQMITD através do Critério de Popov.

4. ANÁLISE DA ESTABILIDADE ABSOLUTA

Seja o sistema descrito pela equação (1), onde F é a matriz ótima de ganhos de realimentação (7). É simples ver que, para todo $e \in R$ ela é equivalente a:

$$x(t+1)=(A-eBF)x(t)-BR^{-1/2}\ \phi_e[R^{1/2}Fx(t)] \qquad (26)$$

onde:

$$\phi_e(\overline{y}) = R^{1/2}\phi(R^{-1/2}\overline{y}) - e\overline{y} \quad (\overline{y} \in R^r) \qquad (27)$$

Note-se que a manipulação acima é necessária uma vez que o Critério de Popov não se aplica para $e=0$ a menos que A seja suposta assintoticamente estável. Mesmo neste caso a dificuldade permanece, pois $e = 0 \notin S$ e o Teorema 3 não pode ser usado. De fato, a Equação (19) se reduz à identidade fundamental (10), através da qual é impossível estabelecer uma região de confinamento para $G(z,0)$, $z \in Z$.

O valor de e será determinado de maneira que se obtenham os setores de estabilidade absoluta mais amplos.

Daqui em diante admite-se que R seja uma matriz diagonal.

Tendo em vista os resultados da seção 2, o objetivo a seguir é determinar uma matriz K diagonal tal que:

$$\overline{W}(z) = K^{-1} + \overline{G}(z,e) \qquad (28)$$

seja real positiva discreta.

LEMA 3: Para todo $e \in S^*$ e $K = 2(k^*-e)I$, a matriz $\overline{W}(z)$ é real positiva discreta.

Demonstração: Em primeiro lugar deve-se notar que a estabilidade assintótica de $(A-eBF)$, $e \in S^* \subset S$ é uma consequência imediata do fato de que $MG \supset S$. Como para todo $e \in S^*$ tem-se que $c_e > 0$, a desigualdade (25) conduz a:

$$\overline{W}(z)+\overline{W}(z^{-1})' = 2K^{-1}+\overline{G}(z,e) + \overline{G}(z^{-1},e)' \geq$$
$$\geq 2K^{-1}+[(c_e^2-r_e^2)/c_e]I = 0$$
$$(\forall z \in Z) \qquad (29)$$

Este resultado permite aplicar o Critério de Popov a (26). Assim, o sistema (26) é absolutamente estável uma vez que ϕ_e satisfaça a condição:

$$0 < \phi_{ei}(y_i)y_i < 2(k^*-e)y_i^2 \qquad (30)$$

Definido $y=R^{-1/2}\overline{y}$, a condição acima pode ser expressa em termos da função ϕ original como:

$$ey_i^2 < \phi_i(y_i)y_i < (2k^* - e)y_i^2 \qquad (31)$$

De (31) fica evidente que o setor mais amplo é obtido para $e \to k_m^+$, obtendo-se assim o resultado a seguir.

TEOREMA 4: O RLQMITD é absolutamente estável no setor S.

Este resultado coincide com aquele obtido por Safonov (1980) quando $R = I$, sendo contudo menos conservador nos casos mais gerais em que R é diagonal, $R \neq I$.

Este fato é consequência de que o valor de α da equação (13) é sempre menor ou igual àquele usado por Safonov (1980). Note-se que, ainda que R possa ser transformada na matriz identidade através de um reescalonamento das variáveis de controle, não seria mais possível garantir a estabilidade absoluta do sistema face a não linearidades na entrada da planta.

Em Geromel & Cruz (1987) há uma análise do problema no domínio do tempo através de funções de Lyapunov.

Os resultados desta seção tem uma motivação clara no caso de reguladores de uma entrada e uma saída. Para $r=1$, a condição (23) reduz-se a:

$$|c_e-g(e^{jw},e)| \leq r_e,\ (e \in S) \qquad (32)$$

e portanto:

$$Re[g(e^{jw},k_m)] \geq -1/(k_M-k_m) \qquad (33)$$

Das definições (22) nota-se que tanto c_e como r_e tendem a $+\infty$ quando $e \to k_m^+$. Neste caso, a condição (33) significa que o círculo tende a degenerar-se e confundir-se com o semi-plano à direita da reta vertical que passa pelo ponto $-1/(k_M-k_m) + j0$. Fica garantida assim a estabilidade absoluta no Setor S.

Quando $\alpha<<1$, o semi-plano mencionado tende a coincidir com o semi-plano direito fechado. Neste caso, o RLQMITD tende a ser absolutamente estável no setor $(1/2;\ +\infty)$.

5. REFERÊNCIAS

Arcasoy, C.C., (1971). "Return-Difference Matrix Properties for Optimal Stationary Discrete Kalman Filter". Proc. IEE, Vol. 118, nº 12: 1831-1834.

Geromel, J.C. & Cruz, J.J., (1987). "On the Robustness of Optimal Regulators for Nonlinear Discrete-Time Systems". IEEE Trans. on Aut. Control, Vol. AC-32, nº 8: 703-710.

Hitz, L. & Anderson, B.D.O., (1969). "Discrete Positive-Real Functions and Their Application to System Stability". Proc. IEE, Vol. 116, nº 1: 153-155.

Kwakernaak, H. & Sivan, R., (1972). Linear Optimal Control Systems, New York, Wiley, capítulo 6.

Lehtomaki, N.A., (1981). Practical Robustness Measures in Multivariable Control System Analysis, Ph.D. Thesis, MIT, Cambridge, capítulo 3.

Safonov, M.G., (1980). Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems, Cambridge, MIT Press, capítulo 4.

6. AGRADECIMENTO

Esta pesquisa foi desenvolvida com o apoio parcial da FAPESP, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.