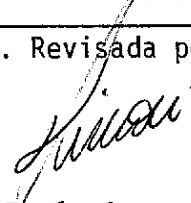
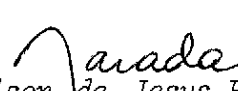


1. Publicação nº <i>INPE-2224-PRE/020</i>	2. Versão	3. Data <i>Set., 1981</i>	5. Distribuição ☐ Interna ☒ Externa ☐ Restrita
4. Origem <i>DSE</i>	Programa <i>DIN</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>FUZZY SETS</i> <i>LÓGICA DE MULTIVALORES</i> <i>INFERÊNCIA NEBULOSA</i>			
7. C.D.U.: <i>681.3.019</i>			
8. Título <i>INFERÊNCIA NEBULOSA UTILIZANDO</i> <i>O "MODUS PONENS" MODIFICADO</i>		10. Páginas: <i>33</i>	
		11. Última página: <i>28</i>	
9. Autoria <i>Orion de Oliveira Silva</i> <i>Celso de Renna e Souza</i>		12. Revisada por  <i>Paulo Ouverá Simoni</i>	
Assinatura responsável 		13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor	
14. Resumo/Notas A regra de inferência — denominada "modus ponens" — para premissas e conclusões nebulosas pode ser definida da seguinte maneira: "Se x é P então y é Q" (representado por "(x,y) é $(\bar{P}' \oplus \bar{Q})$"); "$x$ é R", então "y é R ou $(\bar{P}' \oplus \bar{Q})$", onde P' é o complemento de P, $\bar{P}'$ é a extensão cilíndrica de P' em relação ao universo de Q, $\bar{Q}$ é a extensão cilíndrica de Q em relação ao universo de P, e "$\oplus$" é a soma limitada. Desta definição, se $R=P$, segue que todos os valores da distribuição P ou $(\bar{P}' \oplus \bar{Q})$ são maiores que ou iguais aos valores da distribuição de Q correspondentemente. O ideal lógico seria que P ou $(\bar{P}' \oplus \bar{Q}) = Q$. O resultado de P ou $(\bar{P}' \oplus \bar{Q}) \geq Q$ é devido à perda de informação quando se aplica a operação $\oplus$. O que se apresenta neste trabalho é a proposta de uma outra operação binária que melhora a aproximação do resultado quando se faz $R=P$. Além disso, permite-se que o grau de certeza da implicação ("então") seja um número no intervalo $[0,1]$, generalizando assim o "modus ponens" nebuloso. Convém adicionar que métodos de raciocínio nebuloso, que se supõe aproximarem mais do raciocínio humano em situações de incerteza, têm inúmeras aplicações em sistemas automáticos de decisão por computador, baseados em conhecimento empírico de especialistas.			
15. Observações <i>Trabalho submetido para apresentação na 33a. Reunião Anual da SBPC, 8 a 15 de julho de 1981, Salvador BA.</i>			

ABSTRACT

The "modus ponens" inference rule for fuzzy premises and conclusion can be described as follows: "If x is P , then y is Q " (represented by " (x, y) is $(\bar{P}' \oplus \bar{Q})$ "); " x is R "; therefore, " y is $R \circ (\bar{P}' \oplus \bar{Q})$ "; where P' is the complement of P , $\bar{P}'$ is the cylindrical extension of P' over the universe of Q , $\bar{Q}$ is the cylindrical extension of Q over the universe of P , and $\oplus$ is the bounded sum operation. It follows that if $R = P$, all values of the distribution $P \circ (\bar{P}' \oplus \bar{Q})$ are greater than or equal to the corresponding ones from Q . Logically, it would be ideal that $P \circ (\bar{P}' \oplus \bar{Q}) = Q$. The result $P \circ (\bar{P}' \oplus \bar{Q}) \geq Q$ is due to a certain "information loss" in the application of $\oplus$. In this paper, another binary operation is proposed, improving the result obtained when $R = P$. Moreover, the association of a degree of belief in the interval $[0, 1]$ to the implication is allowed, thus generalizing the fuzzy "modus ponens" rule. It must be added that fuzzy reasoning methods, which supposedly are a better approximation to human reasoning under uncertainty, have numerous applications in automatic computer decision systems, based on stored empirical expert knowledge.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO 2 - LÓGICA DE MUITOS VALORES</u>	3
2.1 - Definição da álgebra de de Morgan	4
2.2 - Definição da álgebra de Kleene	5
2.3 - Definição da álgebra de Lukasiewicz	5
<u>CAPÍTULO 3 - LÓGICA NEBULOSA</u>	9
3.1 - Definição de reticulado completo	10
3.2 - Definição de reticulado brauweriano	10
3.3 - Definição de conjunto nebuloso	10
3.4 - Definição de conjunto nebuloso normal	11
3.5 - Definição de "contido em"	11
3.6 - Definição de igualdade	11
3.7 - Definição de complemento	11
3.8 - Definição de união	12
3.9 - Definição de interseção	12
3.10 - Definição de produto	12
3.11 - Definição de produto cartesiano	14
3.12 - Definição de relações nebulosas	15
3.13 - Definição de composição	15
3.14 - Definição de projeção	16
3.15 - Definição de extensão cilíndrica	17
3.16 - Definição de modus ponens composicional (nebuloso)	18
<u>CAPÍTULO 4 - MODIFICAÇÃO DA DEFINIÇÃO DE IMPLICAÇÃO NO MODUS PONENS</u>	19
4.1 - Definição do operador F	22
4.2 - Definição da função g	23
<u>CAPÍTULO 5 - CONCLUSÃO</u>	25
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	27

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Uma das principais tônicas da moderna ciência é a de que um fenômeno não pode ser bem entendido, enquanto não for caracterizado em termos quantitativos.

O computador tem provado ser altamente efetivo em trabalhar com sistemas mecânicos, isto é, com sistemas inanimados cujo desempenho é governado por leis mecânicas, físicas, químicas e eletromagnéticas. Infelizmente o mesmo não se pode dizer sobre os sistemas sociais, tais como sistemas econômicos, sistemas educacionais, etc., aos quais tem-se aplicado análise matemática e simulação. O uso dos computadores em filosofia, literatura, leis políticas, sociologia e outros campos orientados para o homem tem sido também almejado.

O presente trabalho tem como finalidade descrever resultados obtidos pelos autores no tratamento do problema de inferência nebulosa (Modus ponens composicional (Nebuloso)); ou seja: Sejam P e R distribuições nebulosas (conjuntos nebulosos) sobre o universo U , e Q uma distribuição nebulosa sobre o universo W . "Se x é P então y é Q ", interpretado como $(x,y) \in (\bar{P}' \oplus \bar{Q})$. "Se x é R " então " y é $R \circ (P' \oplus \bar{Q})$ ", onde P' é o complemento de P ; $\bar{P}'$ é a extensão cilíndrica de P' sobre W ; $\bar{Q}$ é a extensão cilíndrica de Q sobre U ; $\mu_{P \oplus Q}(u) = \min(1, \mu_P(u) + \mu_Q(u))$ "soma limitada", e " $\circ$ " é a operação de composição.

CAPÍTULO 2

LÓGICA DE MUITOS VALORES

Lukasiewicz e Post em 1920 introduziram a lógica de muitos valores de uma maneira sistemática. O interesse na lógica de muitos valores originou-se dos problemas filosóficos resultantes de declarações verbais, que não são inteiramente falsas nem inteiramente verdadeiras. Desde 1931, observou-se um crescente uso dessas teorias em várias áreas, como a teoria dos conjuntos, a teoria de chaveamento (Kandel, 1973, 1974 e 1977), a mecânica quântica, a economia, etc.. Uma motivação completamente diferente foi dada por Zadeh (1965), com a noção de conjuntos nebulosos, que será vista mais adiante.

Há uma forte razão para apresentar a família de sistemas de Lukasiewicz, com alguns detalhes: o sistema infinito não-enumerável de Lukasiewicz é usado como base para a lógica nebulosa de Zadeh (1965).

As Tabelas 2.1a e 2.1b mostram as "tabelas verdade" da lógica de Lukasiewicz para três valores. Tem-se nelas ($\neg$) para negação e ($\rightarrow$) para implicação.

TABELA 2.1

TABELAS VERDADE DA "LÓGICA DE LUKASIEWICZ"

q	$\neg q$
1	0
1/2	1/2
0	1

(a)

p \ q	1	1/2	0
	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

(b)

Por simplicidade, têm-se as seguintes abreviações:

$$p \vee q \text{ para } (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

$$p \wedge q \text{ para } \neg (\neg p \vee \neg q)$$

$$p \Leftrightarrow q \text{ para } (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Wajsberg, em 1931, propôs uma axiomatização desta lógica, usando o seguinte esquema:

$$(1) \ p \rightarrow (q \rightarrow p),$$

$$(2) \ (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)),$$

$$(3) \ (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p),$$

$$(4) \ ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow p) \rightarrow p,$$

juntamente com o "modus ponens" e a regra de substituição como regras de inferência.

2.1 - DEFINIÇÃO DA ÁLGEBRA DE DE MORGAN

Se $\langle A, 1, \vee, \wedge \rangle$ é um reticulado de distribuição de Birkhoff (1967 e 1970), com um maior elemento "1", e " $\neg$ " é uma operação unária definida em A tal que:

$$(1) \ \neg \neg x = x \quad e$$

$$(2) \ \neg (x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$$

então $\langle A, 1, \neg, \vee, \wedge \rangle$ é denominada Álgebra de De Morgan ($\neg 1 = 0$ é o primeiro elemento de A).

2.2 - DEFINIÇÃO DA ÁLGEBRA DE KLEENE

Uma "Álgebra de Kleene" é uma Álgebra de De Morgan, mais a desigualdade:

$$(3) \quad x \wedge \neg x \leq y \vee \neg y, \text{ onde } "\leq" \text{ significa menor ou igual.}$$

2.3 - DEFINIÇÃO DA ÁLGEBRA DE LUKASIEWICZ

Se $\langle A, \wedge, \neg, \vee, 1 \rangle$ é uma "Álgebra de Kleene" e μ é um operador unário ou operador possibilidade, definido com valores em A, tal que:

$$(4) \quad \neg x \vee \mu x = 1$$

$$(5) \quad x \wedge \neg x = \neg x \wedge \mu x$$

$$(6) \quad \mu(x \wedge y) \leq \mu x \wedge \mu y, \text{ então } \langle A, \wedge, \neg, \mu, \vee, 1 \rangle \text{ é denominada uma "Álgebra de Lukasiewicz" de três valores.}$$

Têm-se as seguintes propriedades mais conhecidas da Álgebra de Lukasiewicz de três valores:

$$(1) \quad \mu \mu x = \mu x$$

$$(2) \quad \mu(x \vee y) = \mu x \vee \mu y$$

$$(3) \quad \mu(x \wedge y) = \mu x \wedge \mu y$$

$$(4) \quad x \leq \mu x$$

$$(5) \quad \mu 0 = 0$$

$$(6) \quad \mu x = x \text{ se, e somente se, } x \text{ é um elemento booleano de } A \text{ (i.e., se existe um elemento } \neg x \in A, \text{ tal que } x \wedge \neg x = 0 \text{ e } x \vee \neg x = 1).$$

Se for denotada por B a subálgebra de todos os elementos booleanos de A , então para todo $x \in A$ têm-se:

$$(7) \mu x = \wedge \{b \in B: x \leq b\} \text{ e dualmente}$$

$$(8) \nu x = \vee \{b \in B: x \geq b\}$$

ν tem sido denominado "operador necessidade" por Moisil (1940, 1941 e 1963). Ele deu o seguinte princípio de determinação:

$$(9) x \leq y \Leftrightarrow \mu x \leq \mu y \text{ e } \nu x \leq \nu y$$

A matriz para a lógica de Lukasiewicz de três valores é uma Álgebra de Lukasiewicz com três elementos. Os conectivos modais de possibilidade e de necessidade podem ser dados pela Tabela 2.2, definindo-se $\mu p = \neg p \rightarrow p$ e $\nu p = \neg \mu(\neg p)$.

TABELA 2.2

CONECTIVOS DE POSSIBILIDADE E DE NECESSIDADE

p	μp	νp
1	1	1
1/2	1	0
0	0	0

Ver-se-á agora a mais importante regra de inferência, i.e., o "modus ponens".

Por conveniência, será adotada a seguinte notação:

$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{q}$$

Sejam as seguintes regras de inferência probabilísticas:

$$\frac{P(p) \geq \alpha}{P(q|p) \geq \beta} \\ P(q) \geq \alpha \beta \quad (2.1)$$

Analogamente, têm-se:

$$\frac{P(p) \geq \alpha}{P(p \rightarrow q) \geq \beta} \\ P(q) \geq \alpha + \beta - 1 \quad (2.2)$$

Comparando-se (2.1) e (2.2) com $\alpha = \beta = 1 - E$, $E > 0$, têm-se:

$$\frac{P(p) \geq 1 - E}{P(q|p) \geq 1 - E} \\ P(q) \geq (1 - E)^2 \quad (2.3a)$$

$$\frac{P(p) \geq 1 - E}{P(p \rightarrow q) \geq 1 - E} \\ P(q) \geq 1 - 2E \quad (2.3b)$$

obviamente $(1 - E)^2 > 1 - 2E$ para $E > 0$.

Do caso probabilístico acima, pode-se resumir o sistema de inferência de Lukasiewicz, discutido com os valores verdades em $[0,1]$, por:

$$\begin{array}{l} \text{se: } [p] \geq 1 - E \quad (\text{onde } [p] \text{ é o valor verdade de } p) \\ \text{e } [p \rightarrow q] = 1 \\ \hline \text{então: } [q] \geq 1 - E \end{array}$$

CAPÍTULO 3

LÓGICA NEBULOSA

Neste capítulo expõem-se algumas idéias e ferramentas matemáticas que também serão necessárias para este trabalho, que tenta cobrir alguns tópicos fundamentais da teoria de "Fuzzy Sets".

Ciências como a Física e Química, por exemplo, constroem modelos matemáticos exatos de fenômenos empíricos; o ideal seria construir e estruturar modelos para as ciências sociais, de maneira que se usassem palavras, frases, etc. da linguagem natural tratadas matematicamente.

A lógica comum é muito usada na Matemática, mas, em aplicações da vida diária, tem sido criticada pelo fato de não se adequar às linguagens naturais. A lógica aristoteliana e o cálculo dos predicados são exemplos de tal lógica, em que as regras são dadas para distinguir manipulações válidas das inválidas. As mais importantes manipulações válidas são as deduções e demonstrações. Outra representação é a semântica, como na teoria de conjuntos ortodoxa de Cantor. Nela se considera a coleção ou conjunto de elementos que exemplificam o conceito, estudando-se então as manipulações válidas. As leis da teoria de conjuntos descrevem propriedades gerais dessas manipulações.

Sem uma representação semântica de conceitos inexatos, é difícil saber quais são os mais satisfatórios que outros. Tal representação foi avaliada no artigo de Zadeh (1965), que descreveu um certo tipo de conhecimento exato de conceitos inexatos. A teoria de Zadeh (1965) é particularmente apropriada para aplicações em linguagem natural, embora não pretenda fornecer uma teoria sistemática de semântica.

Para se obter uma descrição mais precisa dos conjuntos que são encontrados na vida real — como por exemplo: "O conjunto dos homens velhos", que não tem fronteiras bem definidas — Zadeh (1965) estendeu o conceito de conjunto de uma maneira simples e elegante, que deno

minou "conjuntos nebulosos". Esta extensão foi feita atribuindo-se um grau de pertinência a cada elemento do conjunto. A pertinência (grau de certeza) de que um homem com 35 anos é velho pode ser 0,7, por exemplo.

3.1 - DEFINIÇÃO DE RETICULADO COMPLETO

Um reticulado L é "completo" quando cada um dos subconjuntos X tem um supremo denotado por " $\sup X$ " ou " $\vee X$ ", e um ínfimo denotado por " $\inf X$ " ou " $\wedge X$ ", em L .

3.2 - DEFINIÇÃO DE RETICULADO BRAUWERIANO

Um "reticulado brauweriano" é um reticulado completo L em que, para quaisquer elementos a e b dados, o conjunto de todos os $x \in L$, tais que $a \wedge x \leq b$, contém um "maior elemento" denotado por $a \alpha b$ o "pseudo complemento" de a em b .

3.3 - DEFINIÇÃO DE CONJUNTO NEBULOSO

Se L é um reticulado "brauweriano" completo, e E é um conjunto não-vazio, um subconjunto nebuloso A de E é uma função $A: E \rightarrow L$. A classe de todos os subconjuntos nebulosos de E é denotada por $L(E)$.

Fazendo-se $L = [0,1]$ na Seção 3.3, e definindo-se nele as seguintes operações:

$$a) \forall x, y \in [0,1] , \quad x \wedge y = \text{menor}(x,y)$$

$$b) \forall x, y \in [0,1] , \quad x \vee y = \text{maior}(x,y)$$

$$c) \forall a, b \in [0,1] , \quad c = a \alpha b = \begin{cases} 1 & \text{se } a \leq b \\ b & \text{se } a \geq b \end{cases}$$

onde c é o pseudocomplemento relativo de a em b , então L torna-se um reticulado brauweriano.

Um subconjunto nebuloso A de U será exprimível por $A = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n$ ou $\sum_{i=1}^n \mu_i u_i$, onde μ_i ($i = \overline{1, n}$) é o grau de pertinência de μ_i em A . No caso de u_i ser número, usar-se-á a seguinte notação:

$$A = \mu_1/u_1 + \dots + \mu_n/u_n \quad \text{ou} \quad A = \sum_{i=1}^n \mu_i/u_i$$

Exemplo:

a) Seja $U = \{a, b, c, d\}$ ou $U = a+b+c+d$, então $A = 0,3a+b+0,9c+0,5d$ é um subconjunto nebuloso de U .

b) Se $U = 1+2+\dots+100$, então pode-se escrever, por exemplo, $A = 0,3/25+0,9/30$.

3.4 - DEFINIÇÃO DE CONJUNTO NEBULOSO NORMAL

Um conjunto nebuloso A é normal se e somente se, $\sup \mu_A(u) = 1$; caso contrário, A é subnormal.

3.5 - DEFINIÇÃO DE "CONTIDO EM"

Um conjunto nebuloso A está contido no conjunto nebuloso B se, e somente se, $\forall u \in U, \mu_A(u) \leq \mu_B(u)$.

3.6 - DEFINIÇÃO DE IGUALDADE

Os conjuntos A e B são iguais ($A = B$) se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.

3.7 - DEFINIÇÃO DE COMPLEMENTO

O complemento de A é denotado por $\neg A$ (ou, às vezes, por A') e é definido por:

$$\neg A = \int_U [1 - \mu_A(u)] / u$$

3.8 - DEFINIÇÃO DE UNIÃO

A união de conjuntos nebulosos A e B é representada por $A + B$ ou $A \cup B$, e é definida por

$$A + B = \int_U [\mu_A(u) \vee \mu_B(u)] / u ,$$

onde:

$$\mu_A(u) \vee \mu_B(u) = \max [\mu_A(u); \mu_B(u)]$$

3.9 - DEFINIÇÃO DE INTERSEÇÃO

A interseção de A e B é denotada por $A \cap B$, e é definida por:

$$A \cap B = \int_U [\mu_A(u) \wedge \mu_B(u)] / u ,$$

onde:

$$\mu_A(u) \wedge \mu_B(u) = \min [\mu_A(u); \mu_B(u)]$$

3.10 - DEFINIÇÃO DE PRODUTO

O produto de A e B é denotado por AB , e é definido por:

$$AB = \int_U \mu_A(u) \cdot \mu_B(u) / u$$

então

$$a) A^\alpha = \int_U [\mu_A(u)^\alpha] / u \quad \alpha \in [0,1]$$

$$b) \alpha A = \int_U \alpha \mu_A(u) / u$$

$$c) \text{Concentração: } \text{CON}(A) = A^2 = \int_U [\mu_A(u)^2] / u \quad (\text{"muito A"})$$

$$d) \text{Dilatação: } \text{DIL}(A) = A^{0,5} = \int_U [\sqrt{\mu_A(u)}] / u \quad (\text{"mais ou menos A"})$$

e) Intensificação de Contraste

$$\text{INT}(A) \triangleq \begin{cases} 2A^2 & \text{para } 0 \leq \mu_A(u) \leq 0,5 \\ \neg 2 (\neg A)^2 & \text{para } 0,5 \leq \mu_A(y) \leq 1 \end{cases}$$

Esta operação tem a propriedade de reduzir a nebulosidade de A (Zadeh, 1968b, 1975b).

$$f) \text{Mais: } A^{1,25} = \int_U [\mu_A(u)^{1,25}] / u \quad (\text{mais A})$$

$$g) \text{Menos: } A^{0,75} = \int_U [\mu_A(u)^{0,75}] / u \quad (\text{menos A})$$

Exemplo: Todas as operações

Sejam $U = 1 + 2 + \dots + 10$

$$e \quad A = 0,8/3 + 1/5 + 0,6/6$$

$$e \quad B = 0,7/3 + 1/4 + 0,5/6$$

$$a) \neg A = 1/1 + 1/2 + 0,2/3 + 1/4 + 0,3/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10$$

$$b) A + B = A \cup B = 0,8/3 + 1/4 + 1/5 + 0,6/6$$

$$c) A \cap B = 0,7/3 + 0,5/6$$

$$d) AB = 0,56/3 + 0,3/6$$

$$e) A^2 = 0,64/3 + 1/5 + 0,36/6$$

$$f) 0,4A = 0,32/3 + 0,4/5 + 0,24/6$$

$$g) \text{CON}(B) = 0,49/3 + 1/4 + 0,25/6$$

$$h) \text{DIL}(B) = 0,84/3 + 1/4 + 0,71/6 = \sqrt{0,7}/3 + \sqrt{1}/4 + \sqrt{0,5}/6$$

$$i) \text{MAIS}(A) = 0,8^{1,25}/3 + 1^{1,25}/5 + 0,6^{1,25}/6 = 0,76/3 + 1/5 + 0,53/6$$

$$j) \text{MENOS}(A) = 0,8^{0,75}/3 + 1^{0,75}/5 + 0,6^{0,75}/6 = 0,85/3 + 1/5 + 0,68/6$$

$$l) \text{INT}(A) = 0,92/3 + 1/4 + 0,68/6$$

Podem-se fazer combinações destas operações formando-se outras, como por exemplo,

$$\text{ALTAMENTE} = \text{MENOS MUITO MUITO} = \text{MAIS MAIS MUITO}$$

$$\text{MUITO MUITO MENOS} = [(\text{MUITO})^2]^{0,75}$$

3.11 - DEFINIÇÃO DE PRODUTO CARTESIANO

Se $A_1, \dots, A_n$ são subconjuntos nebulosos de $U_1, \dots, U_n$, respectivamente, o produto cartesiano de $A_1, \dots, A_n$, denotado por $A_1 \times \dots \times A_n$, é definido como um subconjunto nebuloso de $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, cuja função de pertinência é expressa por:

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(u_1, \dots, u_n) = \mu_{A_1}(u_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_n}(u_n),$$

então

$$A_1 \times \dots \times A_n = \int_{U_1 \times \dots \times U_n} [\mu_{A_1}(u_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_n}(u_n)] / (u_1, \dots, u_n)$$

3.12 - DEFINIÇÃO DE RELAÇÕES NEBULOSAS

Se U é o produto cartesiano de n universos, $U_1, \dots, U_n$, então uma relação nebulosa n -ária R em U é um subconjunto nebuloso de U . R pode ser expresso como a união de seus constituintes nebulosos.

$$\mu_R(u_1, \dots, u_n) / (u_1, \dots, u_n) ,$$

isto é,

$$R = \int_{U_1 \times \dots \times U_n} \mu_R(u_1, \dots, u_n) / (u_1, \dots, u_n)$$

onde μ_R é a função de pertinência de R .

3.13 - DEFINIÇÃO DE COMPOSIÇÃO

Se R é uma relação de U para V , ou $R(u,v)$, ou $(R \subseteq U \times V)$, e se S é uma relação de V para W , ou $S(v,w)$, ou $(S \subseteq V \times W)$, então a composição "max min" de R e S é uma relação nebulosa de U para W , denotada por $R \circ S$ e definida por:

$$R \circ S = \int_{U \times W} v_V [\mu_R(u,v) \wedge \mu_S(v,w)] / (u,w)$$

Exemplo: Sejam as relações R e S dadas por matrizes; neste caso, por exemplo,

$$\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ u_1 & \begin{bmatrix} 0,3 & 0,8 \end{bmatrix} \\ u_2 & \begin{bmatrix} 0,6 & 0,9 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} V_1 & V_2 \\ w_1 & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,9 \end{bmatrix} \\ w_2 & \begin{bmatrix} 0,4 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,8 \\ 0,5 & 0,9 \end{bmatrix}$$

obtida, por exemplo, como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(u_1, v_1) \wedge \mu(v_1, w_1) = 0,3 \wedge 0,5 = 0,3 \\ \mu(u_1, v_1) \wedge \mu(v_1, w_2) = 0,3 \wedge 0,4 = 0,4 \end{array} \right\} \Rightarrow 0,3 \vee 0,4 = 0,4$$

3.14 - DEFINIÇÃO DE PROJEÇÃO

Se R é uma relação n -ária em $U_1 \times \dots \times U_n$, então a sua projeção em $U_{i_1} \times \dots \times U_{i_K}$ é uma relação nebulosa K -ária R_q em U , que é definida por:

$$\begin{aligned} R_q &\triangleq \text{Proj. } R \text{ em } U_{i_1} \times \dots \times U_{i_K} \triangleq R_q R \\ &\triangleq \bigcup_{U_{i_1} \times \dots \times U_{i_K}} \left[v_u(q') \mu_R(u_1, \dots, u_n) \right] / (u_{i_1}, \dots, u_{i_K}) \end{aligned}$$

onde q é a sequência indexada $(i_1, \dots, i_K)$; $u_q = (u_{i_1}, \dots, u_{i_K})$; q' é o complemento de q ; e $v_u(q')$ é o supremo de $\mu_R(u_1, \dots, u_n)$ sobre os u 's que estão em $u(q')$.

Exemplo: Seja a relação $R(u,v)$ dada por

	1	2	3	4
1	0	0,3	0,8	1
2	0	0	0	0,8
3	0	0	0	0,3
4	0	0	0	0

A projeção de R em u é feita fixando-se um u genérico e encontrando-se o máximo de elementos daquela linha.

$$R_1 = 1/1 + 0,8/2 + 0,3/3$$

A projeção de R em v é feita fixando-se um v genérico e encontrando-se o máximo de elementos daquela coluna.

$$R_2 = 0,3/2 + 0,8/3 + 1/4$$

3.15 - DEFINIÇÃO DE EXTENSÃO CILÍNDRICA

Relações nebulosas distintas em $U_1 \times \dots \times U_n$ podem ter projeções cilíndricas em $U_{i_1} \times \dots \times U_{i_K}$.

Dada uma relação R_q em $U_{i_1} \times \dots \times U_{i_K}$, existe uma única relação maior que R_q , em $U_1 \times \dots \times U_n$ (isto é, uma relação que contém todas as outras relações desta projeção $U_{i_1} \times \dots \times U_{i_K}$), da qual a projeção em $U_{i_1} \times \dots \times U_{i_K}$ é R_q .

A relação R_q é a "extensão cilíndrica" de R_q , e a sua função de pertinência é dada por:

$$\mu_{R_q}(u_1, \dots, u_n) = \mu_{R_q}(u_{i_1}, \dots, u_{i_K})$$

Exemplo: Seja $U = 0,2/1 + 0,5/2 + 0,8/3$, e

		u	1	2	3
U x V =	v				
	1	0,1	0,5	0,8	
	2	0,2	0,2	0,2	

A extensão cilíndrica de U sobre U x V é dada por:

		1	2	3
u \ v				
1	0,2	0,5	0,8	
2	0,2	0,5	0,8	

Será vista agora uma possível generalização nebulosa do "modus ponens" convencional.

3.16 - DEFINIÇÃO DE MODUS PONENS COMPOSICIONAL (NEBULOSO)

Sejam P e R distribuições nebulosas (conjuntos nebulosos) sobre o universo U, e Q uma distribuição nebulosa sobre o universo W.

a) "Se x é P então y é Q", representado por " $(x,y) \in (\bar{P}' \oplus \bar{Q})$ ".

b) "Se x é R" então " $y \in R \circ (\bar{P}' \oplus \bar{Q})$ ",

onde $\bar{P}'$ é o complemento de P; $\bar{P}'$ é a extensão cilíndrica de $\bar{P}'$ sobre W; $\bar{Q}$ é a extensão cilíndrica de Q sobre U; $\mu_{\bar{P}' \oplus \bar{Q}}(u) = \min(1, \mu_{\bar{P}'}(u) + \mu_{\bar{Q}}(u))$ é a soma limitada; e "o" é a operação de composição.

Exemplo: Seja $U = 1+2+3+4$ e sejam $P = 0,6/2 + 1/3 + 0,5/4$ e $Q = 1/2 + 0,6/3 + 0,2/4$; então:

$$\bar{P}' \oplus \bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,4 & 1 & 1 & 0,6 \\ 0 & 1 & 0,6 & 0,2 \\ 0,5 & 1 & 1 & 0,7 \end{bmatrix}$$

e:

$$P \circ (\bar{P}' \oplus \bar{Q}) = 0,5/1 + 1/2 + 0,6/3 + 0,6/4$$

As definições e resultados apresentados neste capítulo foram retirados de Zadeh (1965, 1968a, 1968b, 1975a, 1975b, 1975c), com as devidas interpretações dos autores.

CAPÍTULO 4

MODIFICAÇÃO DA DEFINIÇÃO DE IMPLICAÇÃO NO MODUS PONENS

Ver-se-á neste capítulo uma possível generalização do "modus ponens" composicional (nebuloso), proposta pelos autores deste trabalho.

No Capítulo 3 viu-se a definição de modus ponens, com crença total na implicação:

$$a) \text{ Se } x \text{ é } P \text{ então } y \text{ é } Q \Rightarrow (x,y) \text{ é } \overline{P'} \oplus \overline{Q}$$

$$b) \text{ Se } x \text{ é } R \text{ então } y \text{ é } R \text{ o } (\overline{P'} \oplus \overline{Q})$$

onde P' é o complemento de P ; $\overline{P'}$ é a extensão cilíndrica de P' em relação ao universo de Q ; e $\overline{Q}$ é a extensão cilíndrica de Q em relação ao universo de P .

A parte (a) da definição pode ser vista como uma adaptação, para conjuntos nebulosos, da definição de implicação material na lógica de multivalores de Lukasiewicz. Nela, $v(r \rightarrow s) \triangleq \min(1, 1 - v(r) + v(s))$, onde $v(r)$ e $v(s)$ denotam os valores verdades de r e s , respectivamente, com $0 \leq v(r) \leq 1$, $0 \leq v(s) \leq 1$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{P'} \oplus \overline{Q}}(x,y) &= \min(1, 1 - \mu_P(x) + \mu_Q(y)) \\ &= \mu_{\overline{P'}}(x,y) \oplus \mu_{\overline{Q}}(x,y) \\ &= [1 - \mu_P(x,y) \oplus \mu_Q(x,y)] \\ &= [1 - \mu_P(x)] \oplus \mu_Q(y) \end{aligned}$$

Na definição de "modus ponens", com " $y \in R_o(P' \oplus Q)$ ", tem-se:

- a) Se $R = P$, todos os valores da distribuição $P_o(P' \oplus Q)$ são maiores que ou iguais aos valores da distribuição de Q correspondentemente. O ideal lógico seria que $P_o(P' \oplus Q) = Q$, para que se mantivesse o espírito do "modus ponens" clássico. O resultado $P_o(P' \oplus Q) \geq Q$ deve-se à perda de informação, quando se aplica a operação " $\oplus$ ". Então, o que se pretende fazer é conseguir uma outra operação binária que melhore a aproximação de Q quando se faz $R = P$, na fórmula $R_o(P' \oplus Q)$.
- b) Uma outra deficiência do "modus ponens", como definido anteriormente, é que em: "se $x \in P$ então $y \in Q \Rightarrow (x,y) \in P' \oplus Q$ ", o grau de certeza para o "então $y \in Q$ " é 1 (um), e o que se pretende fazer mais adiante, no modelo proposto, é permitir que o grau de certeza da implicação ("então") seja um número em $[0,1]$.

Deseja-se, portanto, modificar o "modus ponens":

- a) Se $x \in P$, ⁽¹⁾então $y \in Q \Rightarrow (x,y) \in (P' \oplus Q)$;
- b) Se $x \in R$, ⁽¹⁾então $y \in R_o(P' \oplus Q)$

para permitir graus de crença na implicação, da seguinte maneira:

- a) Se $x \in P$, ^(K)então $y \in Q \Rightarrow (x,y) \in F(K, x_{ij}, y_{ij})$, onde $x_{ij} \in P'$, $y_{ij} \in Q$ e $K \in [0,1]$ é o grau de crença da implicação.
- b) Se $x \in R$, então $y \in R_o F(K, x_{ij}, y_{ij})$, onde $x_{ij} \in P'$ e $y_{ij} \in Q$.

Ou seja, pretende-se propor uma outra operação F (composta de duas funções) que substitua a operação " $\oplus$ " e que reflita o grau de crença da implicação.

Proposição

Propõe-se modificar $\bar{P}' \oplus \bar{Q}$ substituindo-se " $\oplus$ " pelo operador F (composto de duas funções) aplicado a $\bar{P}'$ e $\bar{Q}$ com parâmetro $K \in [0,1]$, sendo $\bar{P}'$ dado pela matriz $[x_{ij}]$ e $\bar{Q}$ por $[y_{ij}]$ tal que:

1) Se $K = 0$, então $\forall x_{ij} \in \bar{P}'$ e $y_{ij} \in \bar{Q}$ $F(0, x_{ij}, y_{ij}) = 1$. Quando $K = 0$, não se tem nenhuma informação¹ sobre a implicação "x então y" do "modus ponens" e, por consequência, sobre $R_o(\bar{P}' \oplus \bar{Q})$. Isto acontece exatamente quando se faz $\forall x_{ij} \in \bar{P}'$ e $y_{ij} \in \bar{Q}$, $F(0, x_{ij}, y_{ij}) = 1$.

2) A extensão da definição é válida para a lógica convencional (2 valores), ou seja:

$$F(1,0,0) = 0; F(1,0,1) = 1; F(1,1,0) = 1 \text{ e } F(1,1,1) = 1.$$

3) Se $K = 1$, então $\forall x_{ij} \in \bar{P}'$ e $y_{ij} \in \bar{Q}$ $x_{ij} \oplus y_{ij} \geq F(1, x_{ij}, y_{ij}) \geq y_{ij}$, ou $R_o(\bar{P}' \oplus \bar{Q}) \geq R_o F(1, x_{ij}, y_{ij})$; e se $R = P$, tem-se $P_o(\bar{P}' \oplus \bar{Q}) \geq P_o F(1, x_{ij}, y_{ij}) \geq Q$. Quando $K = 1$, tem-se a informação máxima sobre a implicação "x então y" do "modus ponens", e por consequência, sobre $R_o(\bar{P}' \oplus \bar{Q})$. A distribuição proposta $R_o F(1, x_{ij}, y_{ij})$ contém mais informação do que a obtida por $R_o(\bar{P}' \oplus \bar{Q})$, porque $P_o(\bar{P}' \oplus \bar{Q}) \geq P_o F(1, x_{ij}, y_{ij}) \geq Q$, aproximando-se assim de Q .

4) Se $K_m \geq K_n$, onde $K_m, K_n \in [0,1]$, então $\forall x_{ij} \in \bar{P}'$ e $y_{ij} \in \bar{Q}$ $R_o F(K_n, x_{ij}, y_{ij}) \geq R_o F(K_m, x_{ij}, y_{ij})$. Se $R = P$, então $P_o F(K_n, x_{ij}, y_{ij}) \geq P_o F(K_m, x_{ij}, y_{ij})$. Quanto maior for o K , maior será a informação obtida sobre a implicação "x então y", e, por consequência, sobre $R_o(\bar{P}' \oplus \bar{Q})$, o que é refletido na expressão acima.

¹ O conceito de informação pode ser encontrado em Zadeh (1978).

- 5) $\forall x_{ij} \in \bar{P}$ e $y_{ij} \in \bar{Q}$ e $K \in [0,1]$ tem-se: $F(K, x_{ij}, y_{ij}) = g(K, F(1, x_{ij}, y_{ij}))$, onde g tem as seguintes propriedades:

Proposição: propõe-se modificar uma distribuição P em $[0,1]$, por meio da função $f: [0,1] \times P \rightarrow [0,1]$, tal que:

- 6) Se $K = 0$, então $\forall x \in P \quad g(0, x) = 1$; P é uma distribuição em $[0,1]$.
- 7) Se $K = 1$, então $\forall x \in P \quad g(1, x) = x$.
- 8) Monotonicidade em relação a K : $\forall K_i, K_j \in [0,1]$ e $x \in P$, se $K_i \geq K_j$, então $g(K_i, x) \leq g(K_j, x)$.
- 9) Monotonicidade em relação ao grau de crença: $\forall K_i, K_j \in [0,1]$ e $\forall P$ de $[0,1]$, se $K_i \geq K_j$ então $-\log(1-g(K_i, P)) \leq -\log(1-g(K_j, P))$, ou seja $-\log(1-x^{K_i}) \leq -\log(1-x^{K_j}) \quad \forall x \in P$.

As propriedades de g são desejáveis pelas mesmas razões expostas anteriormente para o operador F .

4.1 - DEFINIÇÃO DO OPERADOR F

Propõe-se a seguinte forma para F :

$$F(K, x, y) = \begin{cases} y^K & \text{se } x \leq y \\ x^{(1+x-y)K} & \text{se } x > y \end{cases} \quad \text{e } F(0,0,0) = 1$$

Esta forma foi obtida após estudos exaustivos das propriedades desejadas para a proposição logo acima.

Os autores não crêem que esta seja a única nem a mais elegante forma possível. Deve-se observar, no entanto, que o desenvolvimento teórico subsequente continuaria válido para outras formas, com as mesmas propriedades.

4.2 - DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO g

Propõe-se a seguinte função $g: g(K, x) = x^K$. Tanto o operador F como o g obedecem às propriedades das proposições acima, respectivamente. Prova:

1) Se $K = 0 \forall x \in \overline{P}'$ e $y \in \overline{Q}$, tem-se: se $x \leq y \Rightarrow y^0 = 1$; se $x > y$ $x^{(1+x-y) \cdot 0} = 1$, então $F(0, x, y) = 1 \forall x \in \overline{P}'$ e $y \in \overline{Q}$.

2) $F(1, 0, 0) = 0^1 = 0$; $F(1, 1, 0) = 1^{(1+1-0) \cdot 1} = 1$
 $F(1, 0, 1) = 1^1 = 1$; $F(1, 1, 1) = 1^{(1+1-1) \cdot 1} = 1$

3) Se $K = 1$, então $\forall x \in \overline{P}'$ e $y \in \overline{Q}$ $x \oplus y \geq F(1, x, y) \geq y$.

Verificação da continuidade de F :

Se $x = y + E$ e $K = 1$

$$\lim_{E \rightarrow 0} (y+E)^{1+(y+E)-y} = y^{1+y-y} = y^1 = y,$$

então F é contínua.

Se $x \leq y$, então $x \oplus y \geq y \geq y$ é trivial.

Se $x > y \Rightarrow x - y > 0 \Rightarrow 1 + x - y > 1 \Rightarrow x > x^{1+x-y} \Rightarrow x \oplus y > x^{1+x-y}$

Verificação de que $x^{1+x-y} \geq y$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x} (x^{1+x-y}) &= (1+x-y) x^{x-y} + x^{1+x-y} \log x = \\ &= x^{x-y} + x^{1+x-y} - y x^{x-y} + x^{1+x-y} \log x = \\ &= x^{x-y}(1-y) + x^{1+x-y} (1-\log x) > 0 \end{aligned}$$

Como a derivada é positiva, a função F é crescente em relação a x ; e como no limite inferior ela é igual a y , quando x aumenta ela será sempre maior do que y , então $x^{1+x-y} \geq y$. A propriedade $R \circ (\overline{P} \oplus \overline{Q}) \geq R \circ F(1, x_{ij}, y_{ij})$ e $P \circ (\overline{P}' \oplus \overline{Q}) \geq P \circ F(1, x_{ij}, y_{ij}) \geq Q$ é uma consequência direta do que foi provado acima.

- 4) Se $K_m \geq K_n$ onde $K_m, K_n \in [0,1]$, então $\forall x_{ij} \in \overline{P}$ e $y_{ij} \in \overline{Q}$ $R \circ F(K_n, x_{ij}, y_{ij}) \geq R \circ F(K_m, x_{ij}, y_{ij})$. Provar isto é o mesmo que provar que F é decrescente em relação a K . $F(K, x, y) = Z^K$, $Z \in [0,1]$ e esta função é decrescente em relação a K .
- 5) $\forall x \in \overline{P}$ e $y \in \overline{Q}$ e $K \in [0,1]$, tem-se:
 $F(K, x, y) = g(K, F(1, x, y))$; $F(K, x, y) = Z^K$ então $f(1, x, y) = Z^1$ e $g(K, Z^1) = Z^K$ com $Z \in [0,1]$.
- 6) Se $K = 0$, então $\forall x \in P$ $g(0, x) = 1$; $g(0, x) = x^0 = 1$.
- 7) Se $K = 1$, então $\forall x \in P$ $g(1, x) = x$; $g(1, x) = x^1 = x$.
- 8) Monotonicidade de g em relação a K .
 $\forall K_i, K_j \in [0,1]$ e $x \in P$, se $K_i \geq K_j$, então $g(K_i, x) \leq g(K_j, x)$;
 $x^{K_i} \leq x^{K_j}$. Esta função já é conhecida na literatura como monotônica.
- 9) Monotonicidade de g em relação à crença $\forall K_i, K_j \in [0,1]$,
 $\forall x \in [0,1]$ e $K_i \geq K_j$; $-\log(1-x^{K_i}) \leq -\log(1-x^{K_j})$. Sabe-se que $x^{K_i} \leq x^{K_j}$ (9) e $1-x^K \in [0,1]$ $\forall x \in [0,1]$. Como $x^{K_i} \leq x^{K_j} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 1-x^{K_i} \geq 1-x^{K_j}$ e $\log$ é uma função decrescente em $[0,1]$, tem-se que: $-\log(1-x^{K_i}) \leq -\log(1-x^{K_j})$.
 Quando g for considerado como uma função linguística, o K poderá assumir valores maiores do que 1. $K = 2$ (muito), $K = 0,5$ (mais ou menos), $K = 1,25$ (mais) e $K = 0,75$ (menos), o que está perfeitamente de acordo com a teoria de Zadeh (1965).

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

O estudo feito neste trabalho teve como finalidade descrever resultados, encontrados na literatura, nas áreas de lógica de muitos valores e da teoria dos conjuntos nebulosos, bem como descrever resultados obtidos pelos autores, no tratamento do problema de inferência nebulosa, aplicando-a ao "modus ponens nebuloso modificado". Este tratamento pode ser usado no problema de inferência de regras de decisão, como proposto por Michalski (1972, 1977), quando as premissas e conclusões das regras são nebulosas.

O paradigma desenvolvido está sendo testado em diagnóstico de previsão de safras e diagnóstico de chuvas no Nordeste, podendo ser testado também em diagnóstico de erros em linguagem de programação, prospecção geológica, falhas em sistemas espaciais, reconhecimento de padrões e outras áreas de interesse do INPE.

Como os autores acreditam que a forma proposta não é a única possível, nem necessariamente a mais elegante, o problema de modificação do "modus ponens nebuloso" continua em aberto, e deverá ser alvo de novos estudos e refinamentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BIRKOFF, G. *Lattice theory*. 3 ed. Providence, American Mathematical Society, 1967. V. 25.
- BIRKHOFF, G.; BARTEE, T.C. *Modern applied algebra*. Saint Louis, McGraw-Hill, 1970.
- KANDEL, A. On minimization of fuzzy function. *IEEE Transactions on Computer*, C22(9): 826-832, Sept. 1973.
- . On the minimization of incompletely specified fuzzy functions. *Information and Control*, 26: 141-153, 1974.
- . A note on the simplification of fuzzy switching function. *Information Sciences*, 13(2): 91-94, 1977.
- MICHALSKI, R.S. *A variable-valued logic system as applied to picture description and recognition*. Urbana, Department of Computer Science, University of Illinois, 1972.
- . Variable-valued logic and its application to pattern recognition and machine learning. In: RINE, D.C., ed. *Computer science and multiple valued logic*. Amsterdam, North-Holland, c1977. Cap. 18, p. 507-534.
- MOISIL, G.C. Les logics non-chrysippiennes et leurs applications. *Acta Philosophique Fernie a XVI*, 1963.
- . Notes sur les logiques non-chrysippiennes. *Analyse Science Université Jassy*, 27: 86-98, 1941.
- . Recherches sur les logiques non-chrysippiennes. *Analyse Science Université Jassy*, 26: 431-466, 1940.
- ZADEH, L.A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8: 338-353, 1965.
- . Communication fuzzy algorithms. *Information and Control*, 12: 94-102, 1968a.
- . Probability measures of fuzzy events. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 23(2): 421-427, 1968b.

- . The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I. *Information Science*, 8(3): 199-249, 1975a.
- . The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning II. *Information Science*, 8(4): 301-357, 1975b.
- . The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning III. *Information Science*, 9(1): 43-80, 1975c.
- . Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*. V.1. No. 1. 1978.