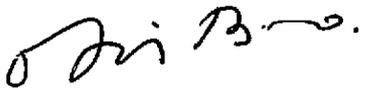
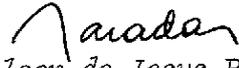


1. Publicação nº <i>INPE-2265-PRE/046</i>	2. Versão	3. Data <i>Nov. 1981.</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DEE</i>	Programa <i>ESTER</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>AERODINÂMICA ELETROSTÁTICA</i> <i>ELEMENTOS FINITOS SATÉLITE</i>			
7. C.D.U.: <i>533.69:629,783</i>			
8. Título <i>SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA ESTRUTURA ELETROSTÁTICA DA ESTEIRA DEIXADA POR SATÉLITES, ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS</i>		10. Páginas: <i>14</i>	
		11. Última página: <i>11</i>	
9. Autoria <i>Nellore Srinivasan Venkataraman</i> <i>Santiago Alves Tavares</i>		12. Revisada por  <i>Atair Rios Neto</i>	
Assinatura responsável 		13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor	
14. Resumo/Notas <p><i>Neste trabalho discute-se, de um modo resumido, o cálculo do potencial eletrostático da esteira de um satélite, assim como o aspecto físico e as aproximações apropriadas. Uma solução numérica está sendo desenvolvida pelo método de elementos finitos.</i></p>			
15. Observações <p><i>Para apresentação no Seminário INPE-LCC, Rio de Janeiro, Novembro de 1981.</i></p>			

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA ESTRUTURA ELETROSTÁTICA DA ESTEIRA DEIXADA  
POR SATÉLITES, ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Nellore Srinivasan Venkataraman  
Santiago Alves Tavares

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq  
12200 - São José dos Campos, SP - Brasil

RESUMO

Neste trabalho discute-se, de um modo resumido, o cálculo do potencial eletrostático da esteira de um satélite, assim como o aspecto físico e as aproximações apropriadas. Uma solução numérica está sendo desenvolvida pelo método de elementos finitos.

ABSTRACT

*In this work a summary of the electrostatic potential calculation in a satellite wake is discussed. The physical picture and the suitable approximations are presented. A numerical solution scheme by finite element methods is being developed.*

## 1 - INTRODUÇÃO

O estudo da interação de um satélite com a ionosfera é de grande importância pelas seguintes razões:

1. qualquer medida feita por instrumentos a bordo do satélite deve ser corrigido de modo a eliminar as perturbações criadas por ele;
2. as próprias perturbações podem ser usadas para medir parâmetros do meio ambiente.

Alpert et alii (1965) realizaram os primeiros estudos sobre a interação de satélites com a ionosfera. Kiel et alii (1968) e Venkataraman (1981) analisaram o processo de formação de carga no satélite. Crowson (1966), Kiel et alii (1968) estudaram a estrutura da esteira do satélite.

Neste trabalho apresenta-se um resumo do método de Kiel et alii (1968) e, em seguida, a técnica que os autores estão desenvolvendo para resolver o problema numericamente pelo método de elementos finitos.

## 2 - FORMULAÇÃO

Seja um satélite de forma esférica, com raio  $R$ , construído com um material condutor, movendo-se com velocidade constante  $U$ . Na Figura 1 está indicado o sistema de coordenadas esféricas, utilizado para definir posição  $(r, \theta, \phi)$  e velocidade  $(c, \beta, \alpha)$ . As seguintes hipóteses serão utilizadas neste trabalho:

1. todos os percursos médios das partículas são maiores que a dimensão característica do satélite;
2. A velocidade térmica dos íons  $(\bar{v}_i)$ , dos elétrons  $(\bar{v}_e)$  e a velocidade do satélite  $U$  são tais que  $\bar{v}_i \ll U \ll \bar{v}_e$ ;

3. sobre a superfície do satélite ocorre completa recombinação e neutralização das partículas carregadas;
4. o efeito do campo magnético da terra sobre o satélite e sobre o meio em torno dele é desprezado.

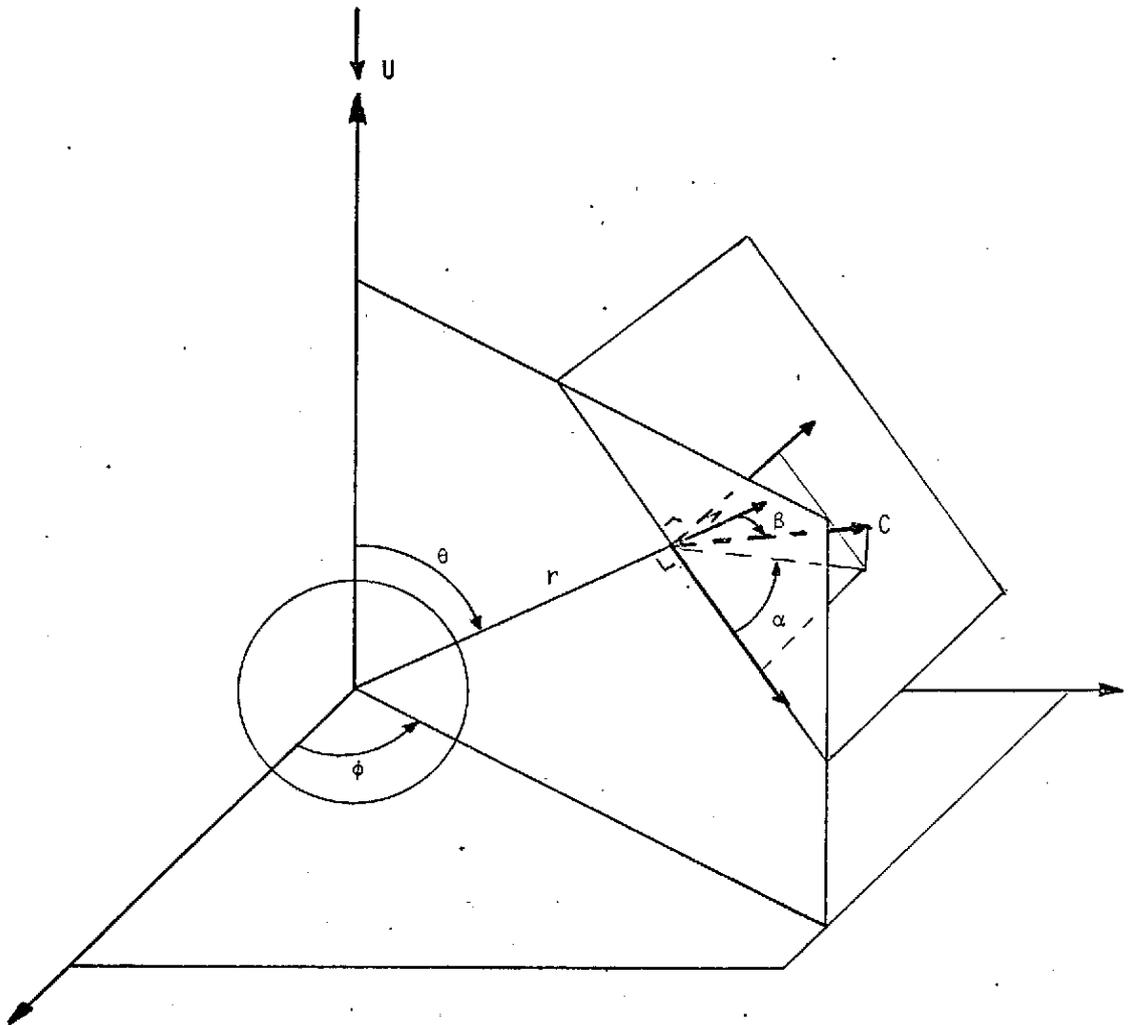


Fig. 1 - Sistema de coordenadas.

O satélite em movimento está carregado negativamente de vido ao diferencial de velocidade de impacto dos elétrons e íons, con sequentemente ele começa a repelir os elétrons até que a vasão de elē trons torne-se equipotencial, com um potencial da ordem de grandeza de 1 volt (Venkataraman, 1981).

As equações diferenciais que regem (modelam) o problema são:

$$\sum_{j=1}^3 c_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^3 \dot{c}_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^3 c_j \frac{\partial f_e}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^3 \dot{c}_j \frac{\partial f_e}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla^2 \phi = - \frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) \quad (3)$$

$$n_i = \int f_i d\vec{c} \quad (4)$$

$$n_e = \int f_e d\vec{c} \quad (5)$$

onde:

- $x_j$  e  $c_j$  são as coordenadas generalizadas de posição e de velocidade;
- $n_i$  e  $n_e$  são os números de densidade do íons e elétrons;
- $\phi$  é o potencial eletrostático;
- $f_i$  e  $f_e$  são as funções de distribuição de íons e de elétrons;
- as integrações em 4 e 5 são feitas sobre o espaço de velocidades;

- e  $\bar{e}$  é a carga do elétron;
- $\epsilon_0$  é a permissividade do meio.

Devido ao fato dessas equações serem altamente não-lineares e acopladas, é se obrigado a fazer aproximações para os números de densidade dos elétrons e íons antes de se tentar alguma solução.

Tendo em vista a hipótese (2), para um sistema de coordenadas fixo no satélite, isto é, para um observador no satélite, os íons estarão se escoando pelo satélite como uma corrente com velocidade U, e os elétrons estarão vindo de todas as direções. Sendo a velocidade com que se calculará a energia cinética dos íons em relação ao satélite. Por outro lado, devido ao campo eletrostático de 1 volt, os íons possuem uma energia potencial. Para este caso, tem-se que a energia cinética é muito maior que a potencial, o que permite aproximar o número de densidade iônico pela densidade de partículas neutras, ou seja:

$$\frac{n_i}{n_0} = \frac{1}{2} + \exp\left[-S^2 \sin^2 \theta\right] \cdot \int_0^\infty x \cdot e^{-x^2} \cdot \operatorname{erf}\left[x\left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right)^{1/2} + S \cos \theta\right] \cdot I_0(2 \times S \cos \theta) dx \quad (6)$$

onde

$$S = \frac{U}{\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}} \quad \text{relação de velocidades}$$

$I_0$  é a função de Bessel modificada de primeira espécie, ordem zero.

Em trabalhos mais antigos, vários autores usaram, para o número de densidade, o seguinte valor de equilíbrio:

$$n_e = n_0 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right) \quad (7)$$

mas esta expressão pode introduzir erros significantes próximo da superfície do satélite. Neste trabalho, preferiu-se usar a distribuição da da por Kiel et alii (1968), a qual descreve-se a seguir.

Supõe-se que a distribuição de potencial a montante do satélite é esfericamente simétrica, logo a densidade elétrica do campo esfericamente simétrico é escrita como

$$\frac{n_e}{n_0} = \frac{1}{2} e^{-\eta} \cdot \left[ 1 + \operatorname{erf}(\eta_s - \eta)^{1/2} + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{\eta_s - \eta}{\frac{r^2}{R^2} - 1}\right)^{1/2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta_s - \eta}{1 - \frac{R^2}{r^2}}\right)^{1/2} \right]$$

onde

$$\eta = \frac{e\phi}{kT} \quad \text{é o potencial dimensional;}$$

$$\eta_s \quad \text{é o dimensional na superfície;}$$

$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$  é a função de erro complementar.

Já a jusante do satélite supõe-se a região dividida em duas zonas:  $R \leq r \leq r_m$  e  $r \geq r_m$ , onde  $r_m$  é a posição do valor máximo de  $\eta(r, \theta)$ . Para  $r_m < r < \infty$ , os elétrons estão numa região, cujo campo de força é repulsor, semelhante ao lado a montante, portanto usa-se a mesma expressão, colocando-se  $\eta_m$  no lugar de  $\eta_s$ , ou seja, para  $r \geq r_m$  tem-se:

$$\frac{n_e}{n_0} = \frac{1}{2} e^{-\eta} \left[ 1 + \operatorname{erf}(\eta_m - \eta)^{1/2} + \left(1 - \frac{r_m^2}{r^2}\right) \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{\eta_m - \eta}{1 - \frac{r_m^2}{R^2}} \right) \right] \quad (9)$$

Na região  $r \leq r_m$ , os elétrons estão no campo de força de atração, podendo-se escrever uma expressão similar. Kiel et alii (1968) descobriram que a distribuição  $n_e = \frac{1}{2} e^{-\eta_m}$  representa o número de densidade com boa aproximação. Portanto, para  $r \leq r_m$  tem-se:

$$\frac{n_e}{n_0} = \frac{1}{2} e^{-\eta_m} \quad (10)$$

Introduzindo-se  $\bar{r} = r/R$ , na Equação de Potencial (3), ela se transforma em:

$$\frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r}^2 \frac{\partial \eta}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) = - \frac{R^2}{\lambda_D^2} \left( \frac{n_i - n_e}{n_0} \right) \quad (11)$$

onde:

- $n_i$  e  $n_e$  são dados pelas equações 6, 8, 9 e 10
- $\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 kT}{n_0 e^2} \right)^{1/2}$  é o comprimento de Debye.

As condições de contorno são

- em  $\bar{r} = 1$   $\eta = \eta_s$
- longe do satélite  $n_i \approx n_e = e^{-\eta}$ , isto é,  $\eta = -\ln(n_i)$ , quando  $\bar{r} \rightarrow \infty$ .

### 3 - DISCUSSÃO

A solução por diferenças finitas da Equação 11 está indicada na Figura 2, para o caso de  $S=8$ . Os resultados indicam clara

mente que, para pequenos valores da relação  $R/\lambda_D$ , o potencial na esteira do satélite é monotonicamente decrescente, com o máximo ocorrendo em uma superfície. Para valores grandes de  $R/\lambda_D$ , o máximo potencial ocorre num ponto que dista do satélite cerca de um a dois diâmetros, e o valor do potencial máximo é de duas a três vezes o potencial do corpo do satélite. A esteira se estende até 6 a 7 diâmetros.

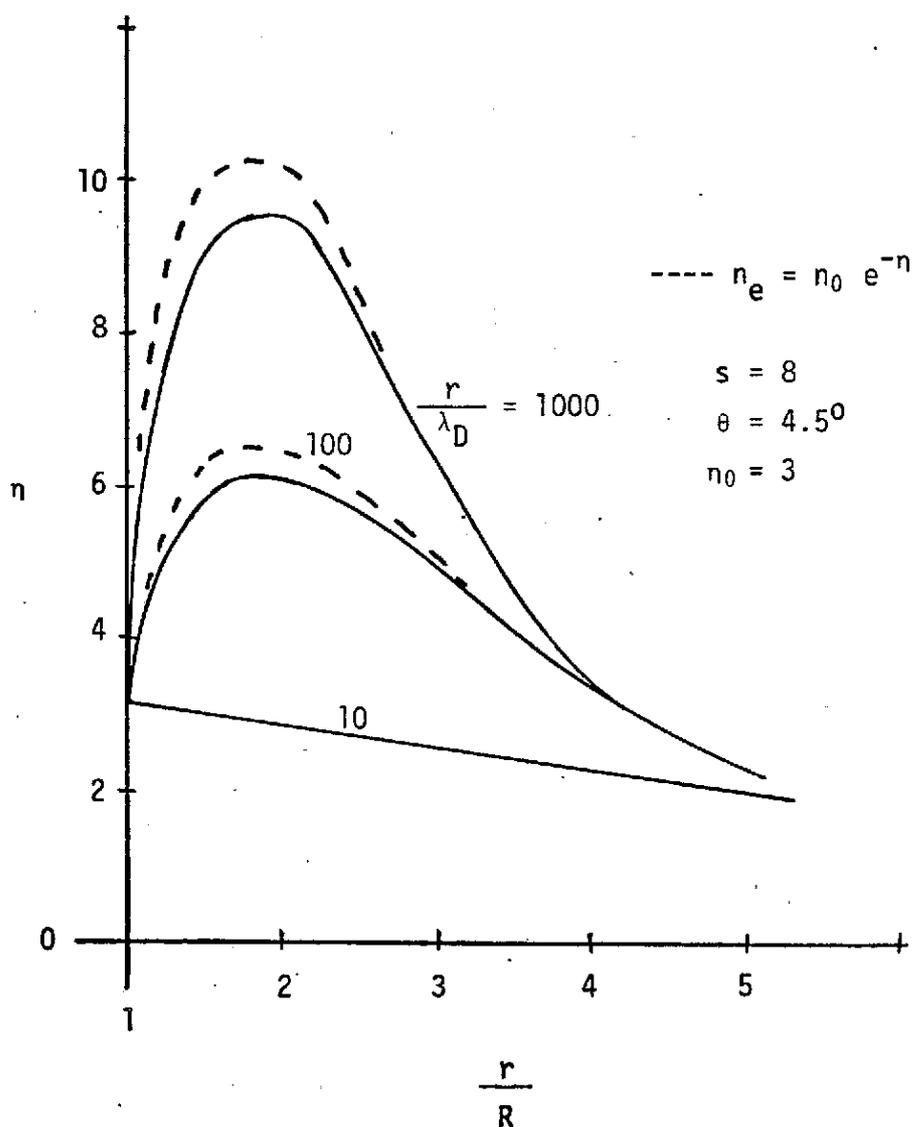


Fig. 2 - Distribuição do potencial adimensional da esteira.

#### 4 - SOLUÇÃO NUMÉRICA PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

A solução numérica pelo método de elementos finitos pode ser feita a partir da Equação 11 ou da 3. Estando a equação 11 em coordenadas polares, supor-se-á que a solução pode ser escrita, de modo aproximado, como:

$$\eta = \sum_{i=1}^n N_i(r, \theta) \eta_i \quad (12)$$

onde  $N_i$  são as funções de forma, as quais geram um espaço de dimensão  $n$ , normalizado, e  $\eta_i$  são as coordenadas nesse espaço.

Para tratar o problema em coordenadas polares dever-se-ão desenvolver expressões, tais como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \quad (13)$$

onde aparecem expressões trigonométricas. Já na formulação pela Equação 3, trata-se o problema em coordenadas cartesianas, obtendo-se a matriz do elemento com trabalho algébrico menor.

Um outro ponto a ser analisado é o da ajustagem do lado do elemento ao contorno. Se o lado 2-3, Figura 3, for reto, não há ajustagem. Uma solução é o uso de elemento isoparamétrico, o que também aumenta o trabalho algébrico.

Outra escolha a ser feita é a do tipo de função de forma a ser usada. Sabe-se, pela solução por diferenças finitas, que a solução é não-linear, contínua e de forma polinomial (não senoidais, nem oscilantes amortecidas, tipo Bessel ou Kern). Isto leva a se pensar em utilizar funções de Hermite, com continuidade em derivada primeira pelo menos. Neste caso, para elemento triangular, Figura 4, tem-se continuidade da função e das derivadas em relação a  $x$  e  $y$  (ou  $r$  e  $\theta$ ) nos

três v̄rtices, e continuidade da função somente, no interior do elemento. Este modo de escolha de variáveis nodais permite o uso de todos os termos do polinômio do terceiro grau (polinômio completo).

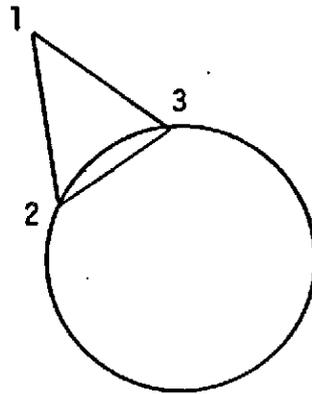


Fig. 3 - Ajustagem do lado do elemento à superfície do satélite.

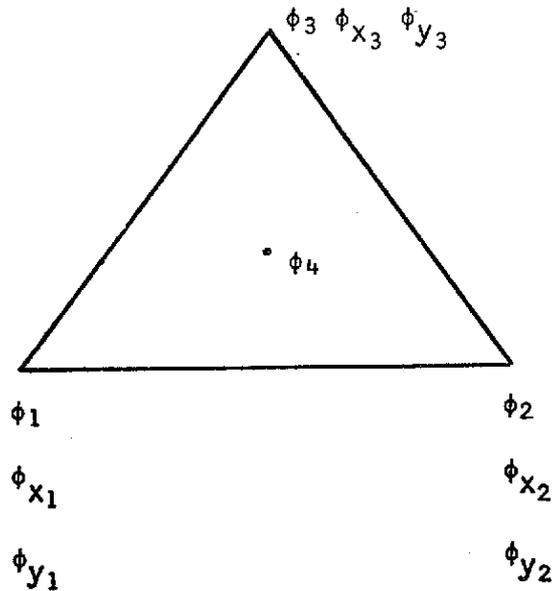


Fig. 4 - Elemento com função de forma dada por polinômio de Hermite até derivada primeira.

Para o desenvolvimento da matriz do elemento, o lado esquerdo da Equação 3 ou 11 não apresenta dificuldades e sim um tratamento algébrico longo. Já do lado direito, há um problema a ser resolvido. Os valores  $n_i$  e  $n_e$  da Expressão 11 são calculados numericamente, em cada ponto do domínio. O valor de  $n_e$  é dado por 9 ou 10, onde aparece a função incôgnita  $\eta$  (ou  $\phi$ ) como expoente. De modo resumido pode-se colocar o termo à direita na forma

$$K_1 + k_2 e^{K_3 \phi} \tag{14}$$

onde  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  são constantes conhecidas. A exponencial não pode ser desenvolvida em série, em princípio, por ser o problema bastante não-linear.

Um modo de ultrapassar esta dificuldade é desenvolver a expressão acima em série e considerar a malha com elementos pequenos, de modo que o desenvolvimento seja válido. Isto leva a um número grande de elementos, que não é uma dificuldade e sim caso normal no Método de Elementos Finitos.

Para completar a solução do problema resta analisar de que modo se vai resolver o sistema não-linear de equações algébricas. A idéia é resolver como um problema de otimização, usando-se os métodos de projeção do gradiente e do gradiente conjugado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AL'PERT, Y.L.; GURVICH, A.V.; PITAEVSKII, L.P. *Space physics with artificial satellites*. New York, Consultants Bureau, 1965.
- CROWSON, H.L. Wake analysis of an Orbiting body. *Journal of Astronautical Sciences*, 13(2): 76-86, Sept.-Oct. 1966.
- KIEL, R.E.; GEY, F.C.; GUSTAFSON, W.A. Electrostatic potential fields of an ionospheric satellite. *AIAA Journal*, 6(4): 690-694, April 1968.
- VENKATARAMAN, N.S. The Electrostatic Potential of an Equatorial Satellite. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 18(2): 186-188, March-April, 1981.