| 1. Publicação nº | 2. Versão | 3. Data | 5. Distribuição |
|---|---|---|---|
| *INPE-2400-TDL/088* | | *Maio, 1982* | ☐ Interna ☒ Externa ☐ Restrita |

| 4. Origem | Programa |
|---|---|
| *DRH/CEA* | *FRH/CEA* |

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)

*CONTROLE DE ATITUDE*
*ESTABILIZAÇÃO PASSIVA*
*GRADIENTE DE GRAVIDADE*
*SATÉLITE AXI-SIMÉTRICO*
*CONJUGADO AERODINÂMICO*
*SIMULAÇÃO DIGITAL*

7. C.D.U.: *629.7.062.2*

8. Título *INPE-2400-TDL/088*

*ESTUDO DE VÁRIOS ASPECTOS DA ESTABILIZAÇÃO PASSIVA DE SATÉLITES POR GRADIENTE DE GRAVIDADE*

10. Páginas: *96*

11. Última página: *79*

12. Revisada por

*Santiago A. Tavares*

9. Autoria *João Ricardo de Freitas Oliveira*

Assinatura responsável

13. Autorizada por

*Nelson de Jesus Parada*
*Diretor*

14. Resumo/Notas

*Estudou-se a estabilização de um satélite rígido por gradiente de gravidade, com ênfase nas fases de aquisição de atitude e de movimento em regime. Utilizou-se o formalismo hamiltoniano para a obtenção das equações de movimento. A análise da estabilidade foi feita através de duas técnicas distintas: o método direto de Liapunov e a linearização das equações de movimento para pequenos ângulos. A fim de realizar simulações para a obtenção de resultados práticos, utilizou-se um modelo físico específico para o satélite. A partir destas simulações obtiveram-se as curvas equipotenciais que fornecem os limites de librações. Fez-se também uma breve análise do processo de amortecimento e das perturbações que atuam no sistema.*

15. Observações

*Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial, aprovada em 11 de dezembro de 1981.*

Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisitos exigidos
para a obtenção do Título de Mestre
em Ciência Espacial

Dr.Atair Rios Neto

Presidente

Dr.Santiago Alves Tavares

Orientador

Dr.Hans Ingo Weber

Membro da Banca
-convidado-

Dr.Rodolpho Vilhena de Moraes

Membro da Banca
-convidado-

Dr.Antonio Felix Martins Neto

Membro da Banca

Candidato: João Ricardo de Freitas Oliveira

São José dos Campos, 11 de dezembro de 1981

Este trabalho é dedicado à minha esposa Solange, e à paz mundial.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de deixar meus agradecimentos a todos aqueles que, de uma forma ou de outra, colaboraram para a execução deste trabalho. Quero agradecer ao Dr. Santiago Alves Tavares a orientação crítica do trabalho, assim como a paciência e camaradagem que dispensou a mim. Ao Dr. Atair Rios Neto, e aos colegas Paulo T. M. Lourenção, Roberto V. F. Lopes e Valdemir Carrara, a disposição que sempre tiveram em discutir o assunto deste trabalho, quando solicitados para tal. Ao colega Hélio K. Kuga, a ajuda valiosa na obtenção dos gráficos que constam desta dissertação. Quero agradecer também ao Dr. Rodolfo Vilhena de Moraes e ao Dr. Hans Ingo Weber as correções e sugestões dadas, valorizando a apresentação e a retidão do trabalho. Gostaria ainda de agradecer aos meus pais por terem me dado a oportunidade de viver neste mundo, educando-me e incentivando-me nos bons e nos maus momentos.

*ABSTRACT*

*The stabilization of a rigid satellite by gravity-gradient, with emphasis on the phases of attitude acquisition and steady-state movement, was studied. The Hamiltonian formalism to get the equations of motion was used. The stability analysis was performed by two different techniques: the Liapunov's direct method and the linearization of the equations of motion for small angles. In order to accomplish the computer simulation, to obtain practical results, a specific geometry for the satellite was used. From these simulations, equipotential curves that provide the bounds of libration were obtained. A brief analysis of the damping process and of the perturbations working on the system was also made.*

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS ..... *xi*
LISTA DE SÍMBOLOS ..... *xiii*

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO ..... 1

1.1 - Atitude de satélites ..... 3
1.2 - Sistema de referência orbital e sistema de referência fixo no corpo ..... 4
1.3 - Estabilização em três eixos e em dois eixos ..... 6
1.4 - Escolha das matrizes de rotação: cossenos diretores ..... 7

CAPÍTULO 2 - CÁLCULO DO POTENCIAL E DO CONJUGADO GRAVITACIONAL .. 11

2.1 - Potencial gravitacional para um corpo de forma arbitrária . 11
2.2 - Conjugado devido ao gradiente de gravidade ..... 15

CAPÍTULO 3 - ESTUDO DA ESTABILIDADE EM TRÊS EIXOS ..... 19

3.1 - A hamiltoniana como função de Liapunov ..... 19
3.2 - Análise infinitesimal da estabilidade ..... 30

CAPÍTULO 4 - INFLUÊNCIA DO CONJUGADO AERODINÂMICO EM UM SATÉLITE AXI-SIMÉTRICO ESTABILIZADO POR GRADIENTE DE GRAVIDADE 37

4.1 - Introdução ..... 37
4.2 - Redução do grau de liberdade de sistemas que contêm variáveis cíclicas ..... 38
4.3 - Análise da estabilidade em dois eixos pelo método direto de Liapunov ..... 42
4.4 - Modelo físico escolhido ..... 43
4.5 - Conjugado aerodinâmico ..... 45
4.6 - Expressões de energia ..... 47
4.7 - Posições de equilíbrio dinâmico ..... 50
4.8 - Condições para a estabilidade ..... 51

CAPÍTULO 5 - SIMULAÇÃO DIGITAL DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO ..... 55

5.1 - Equações de movimento ..... 55
5.2 - Curvas equipotenciais; limites de librações ..... 62

Pág.

CAPÍTULO 6 - AMORTECIMENTO E CONJUGADOS PERTURBADORES ..... 67

6.1 - Amortecimento ..... 67
6.2 - Conjugados perturbadores ..... 68
6.2.1 - Radiação solar ..... 68
6.2.2 - Excentricidade da órbita ..... 68
6.2.3 - Campo magnético ..... 69
6.2.4 - Flexibilidade ..... 69
6.2.5 - Curvamento térmico do mastro ..... 70
6.2.6 - Efeito da não-esfericidade da terra ..... 71
6.2.7 - Efeito das librações do satélite em seu movimento orbital 73
6.3 - Considerações finais ..... 74

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ..... 77

## LISTA DE FIGURAS


Pág.

1.1 - Sistemas de referência ..... 5
1.2 - Definição dos ângulos de rotação $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ ..... 7
1.3 - Definição dos ângulos de rotação $\theta_1$ e $\theta_2$ ..... 8
2.1 - Diagrama para o cálculo do potencial ..... 11
3.1 - Regiões de estabilidade ..... 35
4.1 - Modelo físico escolhido ..... 44
5.1 - Ângulo de equilíbrio $\theta_{2E}$ em função da altura do satélite .. 58
5.2 - Tempo de vida do satélite (atividade solar média) ..... 58
5.3 - Ângulo de rolamento na posição de equilíbrio, em função da velocidade angular em torno do eixo de simetria do satélite 59
5.4 - Simulação do movimento de atitude do satélite (sistema sem amortecimento) ..... 60
5.5 - Curvas equipotenciais ..... 63
5.6 - Determinação da curva limitante das librações para $\theta_{1i}=\theta_{2i}=5^{o}$ e $\theta_{1i} = \theta_{2i} = 0$ ..... 64
5.7 - Determinação dos limites da região estável ..... 65

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A, B, C$ - Momentos principais de inércia ao longo dos eixos x, y, z, respectivamente, kg $m^2$.

$A_a$ - Área aparente do satélite, $m^2$.

$C_D$ - Coeficiente de arrasto do satélite, adimensional.

$e$ - Pequena excentricidade, adimensional.

$\vec{F}$ - Força, N.

$G$ - Constante de gravitação universal, $m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$.

$h$ - Integral de Jacobi, kg $m^2\ s^{-2}$.

$H$ - Hamiltoniana, kg $m^2\ s^{-2}$.

$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ - Momentos de inércia, definidos na Equação 2.14, kg $m^2$.

$I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$ - Produtos de inércia, definidos na Equação 2.14, kg $m^2$.

$[\ell]$ - Matriz dos cossenos diretores, adimensional.

$\ell_{ij}$ - Elementos da matriz $[\ell]$; adimensional.

$L$ - Lagrangeana, kg $m^2\ s^{-2}$.

$m_1$ - Massa da Terra, kg.

$m_2$ - Massa do satélite, kg.

$n$ - Movimento médio, $s^{-1}$.

$\vec{N}$ - Conjugado, N m.

$N_x, N_y, N_z$ - Componentes de $\vec{N}$ segundo os eixos x, y, z, N m.

$\vec{N}_a$ - Conjugado aerodinâmico, N m.

$p$ - Impulso conjugado generalizado.

$\vec{P}$ - Pressão normal, N $m^{-2}$.

$q$ - Pressão aerodinâmica, N $m^{-2}$.

$q_i$ - Coordenada generalizada.

$\dot{q}_i$ - Velocidade generalizada.

$\vec{r}$ - Vetor posição de um elemento de massa do satélite em relação ao centro da Terra, m.

$\vec{R}$ - Vetor posição do centro de massa do satélite em relação ao centro da Terra, m.

$R$ - Routhiana, kg $m^2$ $s^{-2}$.

$t$ - Tempo, s.

$t_p$ - Tempo decorrido desde a passagem do satélite pelo perigeu, s.

$T$ - Energia cinética, kg $m^2$ $s^{-2}$.

$T_{orb}$ - Período orbital, s.

$U$ - Potencial dinâmico, kg $m^2$ $s^{-2}$.

$v$ - Velocidade do satélite, m $s^{-1}$.

$V$ - Energia potencial, kg $m^2$ $s^{-2}$.

$V_A$ - Potencial aerodinâmico, kg $m^2$ $s^{-2}$.

$V_G$ - Potencial gravitacional, kg $m^2$ $s^{-2}$.

$x, y, z$ - Sistema de referência fixo no corpo, definido na Figura 1.2, m.

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ - Coordenadas do centro de massa do satélite em relação ao sistema $x, y, z$, m.

$X, Y, Z$ - Sistema de referência orbital, m.

$\{x\}$ - Vetor expresso no sistema $x, y, z$, m.

$\{X\}$ - Vetor expresso no sistema $X, Y, Z$, m.

$\alpha, \beta, \gamma$ - Ângulos de Euler definidos na Figura 1.2.

$\varepsilon$ - Distância entre o centro de massa e o centro de pressão, m.

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ - Ângulos de Euler definidos na Figura 1.3.

$\Theta$ - Ângulo formado entre o eixo de simetria do satélite e a vertical local.

$\mu$ - Constante de gravitação da Terra, $m^3$ $s^{-2}$.

$\xi, \eta, \zeta$ - Sistema de referência fixo no corpo definido na Figura 1.3, m.

$\vec{\rho}$ - Vetor posição de um elemento de massa do satélite em relação ao seu centro de massa, m.

$\rho$ - Densidade do ar, kg $m^{-3}$.

$\vec{\tau}$ - Tensão de cisalhamento por elemento de área unitária, N $m^{-2}$.

$\phi$ - Anomalia verdadeira.

$[\omega]$ - Matriz anti-simétrica definida na Equação 3.49, $s^{-1}$.

$\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ - Velocidades angulares em relação aos eixos x, y, z, $s^{-1}$.

$\Omega$ - Velocidade angular orbital do satélite em uma órbita circular, $s^{-1}$.

$[H]$ - Matriz hessiana definida na Equação 3.37, kg $m^2$ $s^{-2}$.

Índices Inferiores

E - Posição de equilíbrio.

i - Condição inicial de uma variável.

x - Indica o sistema de referência x, y, z.

$\xi$ - Indica o sistema de referência $\xi$, $\eta$, $\zeta$.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Os satélites artificiais não teriam nenhum valor como instrumento de pesquisa, se não pudesse ser obtida uma estabilização em dois eixos, ou mesmo em três eixos. Esta estabilização pode ser obtida através de controle de atitude ativo, quando a grande quantidade de energia requerida pelo sistema, o seu peso, e a complexidade de seu projeto comprometem fortemente o tempo de vida útil do satélite.

No entanto, pode-se utilizar também sistemas de controle de atitude passivos, quando a energia disponível não limita o tempo de vida do sistema de controle de atitude do satélite, pois este pode funcionar por longo tempo sem consumir energia. A maior desvantagem destes sistemas, porém, é a pequena magnitude relativa dos conjugados estabilizadores, que resulta em uma menor precisão de orientação do sistema em relação à sua posição de equilíbrio nominal.

Pode-se dividir em seis fases a evolução da vida de um satélite estabilizado passivamente, do seu lançamento até à sua morte, a saber:

1) lançamento e separação do satélite do último estágio, normalmente com movimento de rotação desordenado, ou então estabilizado por rotação;

2) decaimento do movimento de rotação através de equipamentos removedores de momento angular (ioiô) e/ou por dissipação interna de energia;

3) aquisição de atitude ou captura na região de libração, representando o início das librações (grandes ângulos);

4) amortecimento das librações até alcançar a vizinhança da posição de equilíbrio;

5) movimento em regime (pequenos ângulos), relativo a um ponto de equilíbrio em resposta aos conjugados perturbadores;

6) morte do satélite devido à falha em componentes, ou ao decaimento da órbita.

No projeto de sistemas de controle de atitude passivos, cada um dos ítens de (2) a (5) deve ser analisado através de técnicas específicas para cada caso, com o intuito de obter detalhes sobre a sua característica de funcionamento global.

Esta dissertação está voltada aos ítens (3) e (5), tendo em vista o desenvolvimento do projeto do primeiro satélite brasileiro, utilizando-se o formalismo hamiltoniano na obtenção das equações de movimento e o método direto de Liapunov no estabelecimento das condições para a estabilidade.

No restante deste capítulo, que visa a padronização da linguagem, seguem-se definições formais de expressões técnicas na área de controle de atitude, assim como sistemas de referência utilizados nos capítulos seguintes. No Capítulo 2 é calculado o potencial gravitacional da Terra, considerada esférica, em um corpo de forma arbitrária, além do conjugado estabilizador devido ao gradiente de gravidade. A seguir, no Capítulo 3, a análise da estabilidade é feita através de duas técnicas diferentes: o método direto de Liapunov (ou segundo método de Liapunov) e a linearização das equações de movimento para pequenos ângulos e subsequente análise das raízes da equação característica, ocasião em que se supõe que a órbita possui uma pequena excentricidade. Visando-se uma aplicação prática, e de acordo com a configuração escolhida para o primeiro satélite brasileiro, no Capítulo 4 novamente faz-se uso, após a eliminação da variável cíclica e consequente redução do grau de liberdade do sistema, do método direto de Liapunov para estabelecer as condições que levam à esbabilização de um satélite axi-simétrico, quando se considera, de modo aproximado, a influência do conjugado aerodinâmico na estabilidade do sistema; um modelo físico é escolhido para a obtenção de resul

tados práticos. No Capítulo 5, são feitas simulações digitais das equações de movimento, assim como são obtidas as curvas equipotenciais que fornecem os limites de librações, ferramenta básica na análise do processo de captura. Finalmente, no Capítulo 6, é feita uma breve análise do processo de amortecimento e das perturbações que atuam no sistema, na tentativa de formar uma idéia a respeito de suas influências no movimento do satélite. Cada uma das seções deste capítulo merecerá um estudo detalhado em futuro próximo.

As referências mais utilizadas no trabalho como um todo foram: Meirovitch (1970), Wertz (1978), Pringle (1964), Coloque Internacional - CNES (1968) e Symposium on Passive Gravity-Gradient Stabilization (1965). Adicionalmente, no Capítulo 3 foi também utilizado Matsumura (1978) e Kaplan (1976); no Capítulo 4, Flanagan and Rangarajan (1972), Frik (1970) e Meirovitch and Wallace (1966); no Capítulo 5, Auelmann (1963) e Zajac (1961); finalmente no Capítulo 6, Etkin (1964), Fischell (1961) e MacNaughton and Grimshaw (1969).

## 1.1 - ATITUDE DE SATÉLITES

*Controle de atitude* é o processo de obter e manter uma determinada orientação no espaço. Uma *manobra de atitude* é o processo de reorientar a espaçonave de uma atitude para outra. Uma manobra de atitude, na qual a atitude inicial não é conhecida quando a manobra planejada está sendo executada, é denominada *aquisição de atitude*. *Estabilização de atitude* é o processo de manter uma atitude existente, relativa a algum sistema de referência externo, o qual pode ser fixo inercialmente, ou lentamente rotatório, como no caso de satélites orientados pela Terra.

Um *sistema de controle de atitude ativo* caracteriza-se pela necessidade contínua de tomadas de decisões e de operações de equipamentos. As fontes mais comuns de conjugados para sistemas de controle ativo são jatos de gás, materiais eletromagnéticos e volantes de inércia. Em contraste, *sistemas de controle de atitude passivos* utilizam conjugados do meio ambiente para manter a orientação da espaçonave. Gradiente de gravidade e pressão de radiação solar são métodos comuns de controle de atitude passivo.

O sistema de controle de atitude depende fortemente da missão do satélite. A decisão em utilizar um sistema de controle ativo ou passivo, ou ainda uma combinação de ambos, depende das especificações de apontamento e estabilidade do satélite, da interação do sistema de controle com os equipamentos e experimentos de bordo, das especificações de potência disponível, das restrições de peso do satélite, das características da órbita projetada para a missão, e da estabilidade do sistema de controle e seu tempo de resposta.

No presente trabalho, será estudado apenas o sistema passivo de controle de atitude por gradiente de gravidade.

Um sistema de estabilização por gradiente de gravidade interage com o campo gravitacional para manter a atitude da espaçanave. Devido ao fato de o conjugado do gradiente de gravidade decrescer com o inverso do cubo da distância da fonte gravitacional, sistemas a gradiente de gravidade são normalmente utilizados em missões próximas à Terra, ou à Lua, que requeiram que uma face da espaçonave aponte em direção ao corpo central (centro de força). A exigência básica para a estabilização a gradiente de gravidade é que o conjugado produzido pelo gradiente de gravidade seja maior do que todos os outros conjugados do meio ambiente. Para obter isto, um dos eixos principais de inércia do satélite deve ser menor do que os outros, o que causa o alinhamento do menor eixo principal de inércia com o vetor nadir. A fim de conseguir esta diferença entre os eixos principais de inércia, estica-se um mastro ao longo do menor eixo principal de inércia. O conjugado devido ao gradiente de gravidade faz a espaçonave oscilar, ou librar em relação ao eixo de arfagem, e um mecanismo amortecedor passivo é normalmente usado para minimizar a amplitude de tais oscilações.

## 1.2 - SISTEMA DE REFERÊNCIA ORBITAL E SISTEMA DE REFERÊNCIA FIXO NO CORPO

Para discutir o movimento de atitude de um satélite rígido em uma órbita circular, é conveniente introduzir um sistema de referência orbital X, Y, Z, com a origem O no centro de massa do corpo, o

eixo X na direção radial, o eixo Y tangente à órbita, e o eixo Z normal ao plano da órbita, como é mostrado na figura 1.1. O sistema de referência fixo no corpo x, y, z, alinhado segundo os três eixos principais de inércia do corpo, é obtido a partir dos eixos X, Y, Z por meio de três rotações independentes, a serem especificadas posteriormente. A relação entre os dois conjuntos de eixos pode ser escrita em termos dos cossenos diretores na forma matricial compacta. Seja $[\ell]$ a matriz dos cossenos diretores:

$$[\ell] = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix}$$

e sejam {x} e {X} as componentes de um vetor no sistema xyz e XYZ, respectivamente:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}; \qquad \{X\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}.$$

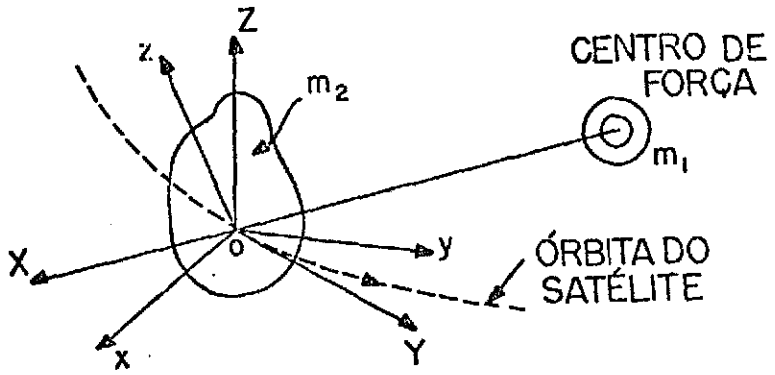


Fig. 1.1 - Sistemas de referência.

A relação entre os dois sistemas é dada por:

$$\{x\} = [\ell]\ \{X\}\ , \qquad (1.1)$$

onde os cossenos diretores dependem das três rotações independentes escolhidas.

*Movimento de arfagem* é o movimento relativo do satélite em torno do eixo Z do sistema orbital (também chamado eixo de arfagem).

*Movimento de rolamento* é o movimento relativo do satélite em torno do eixo Y do sistema orbital (também chamado eixo de rolamento).

*Movimento de guinada* é o movimento relativo do satélite em torno do eixo X do sistema orbital (também chamado eixo de guinada).

Os momentos de inércia associados aos três eixos principais de inércia do satélite serão denominados de A, B e C, segundo os eixos x, y, z, respectivamente.

## 1.3 - ESTABILIZAÇÃO EM TRÊS EIXOS E EM DOIS EIXOS

O estudo da estabilidade dos movimentos do satélite, a ser desenvolvido posteriormente neste trabalho, leva a uma posição de equilíbrio estável, definida da seguinte maneira: o eixo de maior momento de inércia está alinhado com o eixo de arfagem; o eixo de momento de inércia intermediário está alinhado com o eixo de rolamento; e o eixo de menor momento de inércia confunde-se com o eixo de guinada.

Quando os três momentos de inércia do satélite são diferentes, os três eixos do satélite coincidem com os eixos do sistema orbital, com exceção de pequenas oscilações em torno desta posição. Neste caso tem-se estabilização em três eixos.

Quando os dois momentos de inércia maiores são iguais, o movimento de guinada é livre, sendo controlados apenas os movimentos de rolamento e de arfagem; tem-se, portanto, estabilização em dois eixos. O efeito deste controle será o de alinhar o eixo de menor momento de inércia com o vetor nadir.

## 1.4 - ESCOLHA DAS MATRIZES DE ROTAÇÃO: COSSENOS DIRETORES

No estudo da estabilização em três eixos, para passar do sistema orbital para o sistema fixo no corpo, serão feitas três rotações, $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$, segundo a Figura 1.2.

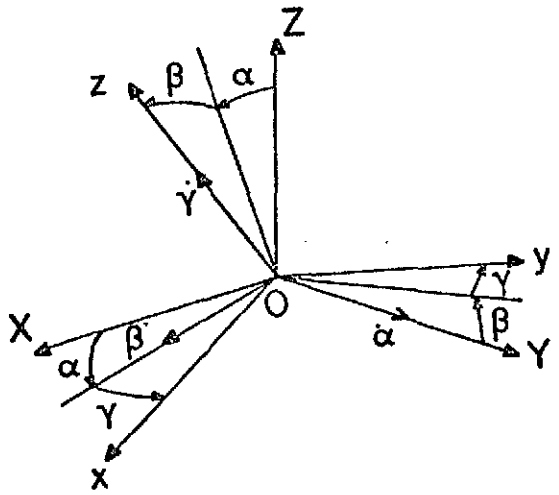


Fig. 1.2 - Definição dos ângulos de rotação $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$.

Os valores dos elementos da matriz $[\ell]_x$ da Equação 1.1 são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} \ell_{11} = \cos\alpha\,\cos\gamma + \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta\,\operatorname{sen}\gamma \\ \ell_{12} = \cos\beta\,\operatorname{sen}\gamma \\ \ell_{13} = -\operatorname{sen}\alpha\,\cos\gamma + \cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta\,\operatorname{sen}\gamma \\ \ell_{21} = -\cos\alpha\,\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta\,\cos\gamma \\ \ell_{22} = \cos\beta\,\cos\gamma \\ \ell_{23} = \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\gamma + \cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta\,\cos\gamma \\ \ell_{31} = \operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta \\ \ell_{32} = -\operatorname{sen}\beta \\ \ell_{33} = \cos\alpha\,\cos\beta, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $\alpha$ é o ângulo de rolamento, $\beta$ o ângulo de guinada e $\gamma$ o ângulo de arfagem. A matriz de rotação $[\ell]_X$ será utilizada nos Capítulos 2 e 3.

Para o estudo da estabilização em dois eixos (Capítulo 4), utilizar-se-á também o sistema $\xi$, $\eta$, $\zeta$, definido a partir de duas rotações, $\theta_1$ e $\theta_2$, apresentadas na Figura 1.3. O eixo $\xi$ será sempre coincidente com o eixo de simetria do satélite, e o momento de inércia, em relação a esse eixo será representado por A, enquanto os momentos de inércia em relação aos eixos perpendiculares a $\xi$ serão denotados por B.

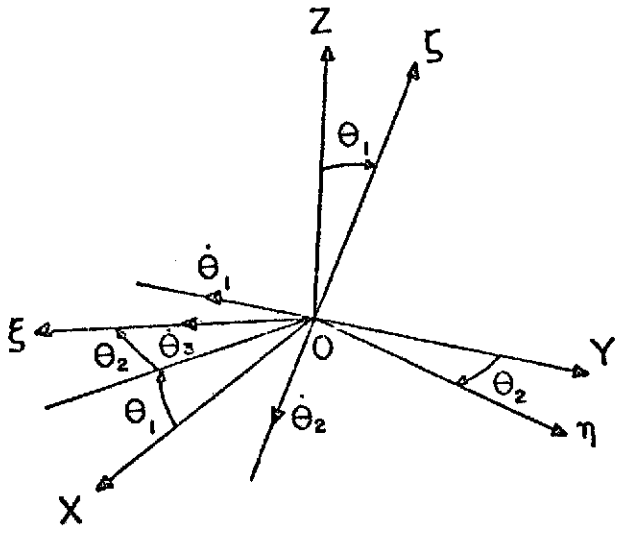


Fig. 1.3 - Definição dos ângulos de rotação $\theta_1$ e $\theta_2$.

A matriz de rotação $[\ell]_\xi$, dada por:

$$[\ell]_\xi = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 & \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 \\ \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \\ -\operatorname{sen}\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

dá a transformação de um sistema de coordenadas para outro:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [\ell]_\xi \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} .$$

A posição do eixo de simetria do satélite é descrita em termos dos ângulos $\theta_1$ (rolamento) e $\theta_2$ (arfagem). O ângulo $\Theta$ entre o eixo de simetria do satélite, $\xi$, e a vertical local, X, é dado por:

$$\Theta = \arccos(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2) . \tag{1.4}$$

# CAPÍTULO 2

## CÁLCULO DO POTENCIAL E DO CONJUGADO GRAVITACIONAL

### 2.1 - POTENCIAL GRAVITACIONAL PARA UM CORPO DE FORMA ARBITRÁRIA

Considere-se um sistema de dois corpos, consistindo em um corpo de massa $m_1$ que possui simetria esférica, e em um outro corpo de massa $m_2$ que tem uma distribuição de massa arbitrária. Como $m_1$ é simétrico, pode-se supor que o seu centro geométrico coincide com o centro de força, como é mostrado na Figura 2.1.

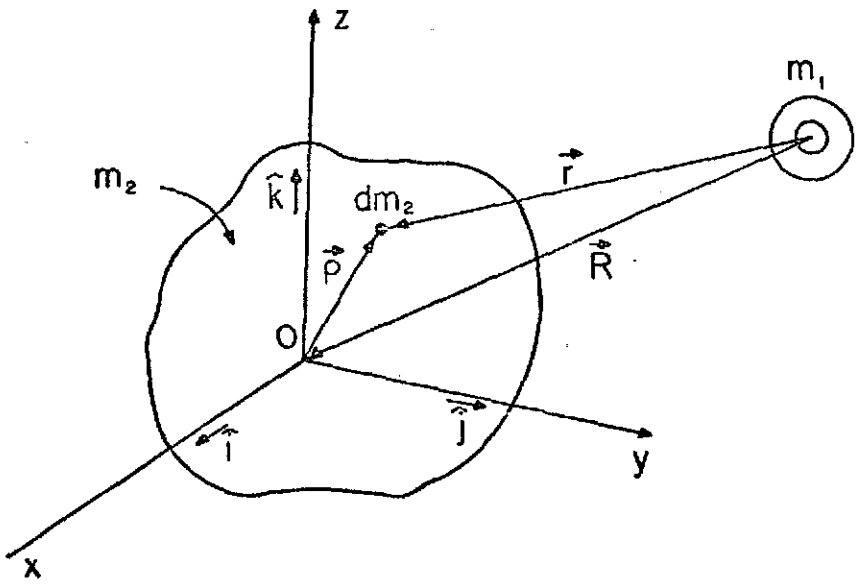


Fig. 2.1 - Diagrama para o cálculo do potencial.

Representação de um vetor no sistema orbital:

$$\vec{A} = X\,\hat{e}_x + Y\,\hat{e}_y + Z\,\hat{e}_z \qquad (2.1)$$

Representação de um vetor no sistema fixo no corpo:

$$\vec{A} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k} \qquad (2.2)$$

O vetor $\vec{R}$ no sistema orbital é dado por:

$$\vec{R} = R\,\hat{e}_x, \tag{2.3}$$

e utilizando-se a matriz de rotação $[\ell\,]_x$ e a Equação 1.1, encontra-se $\vec{R}$ expresso no sistema x, y, z, fixo no corpo:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R\ell_{11} \\ R\ell_{21} \\ R\ell_{31} \end{Bmatrix},$$

portanto:

$$\vec{R} = R\,(\ell_{11}\hat{i} + \ell_{21}\hat{j} + \ell_{31}\hat{k})\ . \tag{2.4}$$

Tem-se ainda que:

$$\vec{\rho} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}\ . \tag{2.5}$$

A energia potencial correspondente a um campo central newtoniano pode ser escrito na forma integral:

$$V = -\,G\,m_1 \int_{m_2} \frac{dm_2}{r}\ , \tag{2.6}$$

onde $r = |\vec{R} + \vec{\rho}|$ é a distância entre o centro de força e o elemento de massa diferencial $dm_2$. Tem-se, portanto, que:

$$r^2 = (\vec{R} + \vec{\rho})^2 = (R^2 + 2\vec{R}\cdot\vec{\rho} + \rho^2) = R^2\left(1 + \frac{2\vec{R}\cdot\vec{\rho}}{R^2} + \frac{\rho^2}{R^2}\right),$$

portanto:

$$r^{-1} = R^{-1}\left(1 + \frac{2\vec{R}\cdot\vec{\rho}}{R^2} + \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{-1/2}\ . \tag{2.7}$$

Utilizando-se a expansão binomial em série de potências, segundo a fórmula:

$$(1 + q)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} q + \frac{3}{8} q^2 - \frac{15}{48} q^3 + \ldots \quad , \tag{2.8}$$

tem-se:

$$r^{-1} = R^{-1} \left[ 1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R^2} - \frac{\rho^2}{2R^2} + \frac{3(\vec{R} \cdot \vec{\rho})^2}{2R^4} + \frac{3\rho^2}{2R^4} \vec{R} \cdot \vec{\rho} + \ldots \right]$$

$$= R^{-1} \left\{ 1 - R^{-2} \vec{R} \cdot \vec{\rho} + \frac{1}{2} R^{-2} \left[ 3R^{-2}(\vec{R} \cdot \vec{\rho}) - \rho^2 \right] + o\left[ \left(\frac{\rho}{R}\right)^3 \right] \right\}$$

portanto:

$$r^{-1} \cong R^{-1} - R^{-3} \vec{R} \cdot \vec{\rho} + \frac{1}{2} R^{-3} \left[ 3R^{-2}(\vec{R} \cdot \vec{\rho})^2 - \rho^2 \right] \tag{2.9}$$

Tem-se ainda que:

$$\vec{R} \cdot \vec{\rho} = R(\ell_{11} x + \ell_{21} y + \ell_{31} z) \tag{2.10}$$

Aplicando-se as Equações 2.5 e 2.10 na Equação 2.9, vem:

$$r^{-1} = R^{-1} - R^{-2}(\ell_{11} x + \ell_{21} y + \ell_{31} z) + \frac{1}{2} R^{-3} \left[ 3(\ell_{11} x + \right.$$

$$\left. + \ell_{21} y + \ell_{31} z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \right] \tag{2.11}$$

Substituindo-se a Equação 2.11 na Equação 2.6, tem-se:

$$V = -\frac{Gm_1 m_2}{R} + \frac{Gm_1}{R^2} \int_{m_2} (\ell_{11} x + \ell_{21} y + \ell_{31} z) \, dm_2 -$$

$$- \frac{Gm_1}{2R^3} \int_{m_2} \left[ 3(\ell_{11} x + \ell_{21} y + \ell_{31} z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \right] dm_2 =$$

$$= - \frac{Gm_1 m_2}{R} + \frac{Gm_1}{R^2} \left[ \ell_{11} \int_{m_2} x \, dm_2 + \ell_{21} \int_{m_2} y \, dm_2 + \ell_{31} \int_{m_2} z \, dm_2 \right] -$$

$$- \frac{Gm_1}{2R^3}\left[(3\ell_{11}^2 - 1)\int_{m_2} x^2 dm_2 + (3\ell_{21}^2 - 1)\int_{m_2} y^2 dm_2 + (3\ell_{31}^2 - 1)\int_{m_2} z^2 dm_2 + \right.$$

$$\left. + 6\ell_{11}\,\ell_{21}\int_{m_2} xy dm_2 + 6\ell_{11}\,\ell_{31}\int_{m_2} xz dm_2 + 6\ell_{21}\,\ell_{31}\int_{m_2} yz dm_2 \right] \tag{2.12}$$

Chamando-se de $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ as coordenadas do centro de massa em relação aos eixos x, y, z, tem-se:

$$\int_{m_2} x dm_2 = \overline{x}\, m_2 \; ; \quad \int_{m_2} y dm_2 = \overline{y}\, m_2 \; ; \quad \int_{m_2} z dm_2 = \overline{z}\, m_2 \tag{2.13}$$

e ainda, das definições dos momentos de inércia, pode-se escrever:

$$\begin{cases} \int_{m_2} x^2 dm_2 = \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz} - I_{xx}) \\ \int_{m_2} y^2 dm_2 = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{zz} - I_{yy}) \\ \int_{m_2} z^2 dm_2 = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}) \\ \int_{m_2} xy dm_2 = I_{xy} \\ \int_{m_2} xz dm_2 = I_{xz} \\ \int_{m_2} yz dm_2 = I_{yz} \end{cases} \tag{2.14}$$

Substituindo-se as Equações 2.13 e 2.14 na Equação 2.12, obtém-se a expressão geral do potencial, desprezados os termos de ordem igual ou superior a $\rho^3/R^3$:

$$V = - \frac{Gm_1\, m_2}{R} + \frac{Gm_1\, m_2}{R^2}(\ell_{11}\overline{x} + \ell_{21}\overline{y} + \ell_{31}\overline{z}) - \frac{Gm_1}{4R^3}\left[(3\ell_{11}^2 - 1)\cdot\right.$$

$$\cdot (I_{yy} + I_{zz} - I_{xx}) + (3\ell_{21}^2 - 1)(I_{xx} + I_{zz} - I_{yy}) + (3\ell_{31}^2 - 1) \cdot$$

$$\cdot (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}) + 12(\ell_{11}\ell_{21}\, I_{xy} + \ell_{11}\ell_{31}\, I_{xz} + \ell_{21}\ell_{31}\, I_{yz}) \Big] \qquad (2.15)$$

Escolhendo-se a origem dos eixos x, y, z coincidindo com o centro de massa do corpo e tomando-se x, y, z segundo os eixos principais de inércia do corpo, tem-se:

$$\begin{cases} \bar{x} = 0, & \bar{y} = 0, & \bar{z} = 0 \\ I_{xx} = A, & I_{yy} = B, & I_{zz} = C \\ I_{xy} = 0, & I_{xz} = 0, & I_{yz} = 0 \end{cases} \qquad (2.16)$$

Substituindo-se a Equação 2.16 na Equação 2.15, obtém-se:

$$V = -\frac{Gm_1\, m_2}{R} - \frac{Gm_1}{4R^3}\Big[(3\ell_{11}^2 - 1)\,(B + C - A) + (3\ell_{21}^2 - 1) \cdot$$

$$\cdot (A + C - B) + (3\ell_{31}^2 - 1)\,(A + B - C)\Big]$$

ou, de outra forma:

$$V = -\frac{Gm_1\, m_2}{R} + \frac{Gm_1}{4R^3}(A + B + C) - \frac{3Gm_1}{4R^3}\Big[\ell_{11}^2\,(B + C - A) +$$

$$+ \ell_{21}^2\,(A + C - B) + \ell_{31}^2\,(A + B - C)\Big] \qquad (2.17)$$

## 2.2 - CONJUGADO DEVIDO AO GRADIENTE DE GRAVIDADE

Vê-se a partir da Figura 2.1 que a força exercida por $m_1$ no elemento de massa diferencial $dm_2$ pode ser expressa por:

$$\vec{dF} = -\frac{Gm_1\, dm_2}{r^3}\,\vec{r}\,, \qquad (2.18)$$

portanto, o conjugado em relação a O é:

$$\vec{N} = \int_{m_2} \vec{\rho} \times d\vec{F} \tag{2.19}$$

Substituindo-se a Equação 2.18 na Equação 2.19, tem-se:

$$\vec{N} = - Gm_1 \int_{m_2} \frac{\vec{\rho} \times \vec{r}}{r^3} \, dm_2 = - Gm_1 \int_{m_2} \frac{\vec{\rho} \times (\vec{R} + \vec{\rho})}{r^3} \, dm_2 =$$

$$= - Gm_1 \int_{m_2} \frac{\vec{\rho} \times \vec{R}}{r^3} \, dm_2 \tag{2.20}$$

Da Equação 2.7 resulta que:

$$r^{-3} = R^{-3} \left( 1 + \frac{2\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R^2} + \frac{\rho^2}{R^2} \right)^{-3/2} \tag{2.21}$$

Utilizando-se a fórmula:

$$(1 + q)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2} q + \frac{15}{8} q^2 - \frac{35}{16} q^3 + \ldots , \tag{2.22}$$

tem-se:

$$r^{-3} = R^{-3} \left[ 1 - \frac{3\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R^2} + o\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \right] ,$$

portanto, utilizando-se a Equação 2.10, tem-se:

$$r^{-3} \cong R^{-3} \left[ 1 - \frac{3(\ell_{11}x + \ell_{21}y + \ell_{31}z)}{R} \right] . \tag{2.23}$$

Substituindo-se a Equação 2.23 na Equação 2.20 e desprezando-se os termos de ordem igual ou superior a $\rho^2/R^2$, tem-se:

$$\vec{N} = - \frac{Gm_1}{R^3} \int_{m_2} \vec{\rho} \times \vec{R} \left[ 1 - \frac{3(\ell_{11}x + \ell_{21}y + \ell_{31}z)}{R} \right] dm_2 =$$

$$= \frac{Gm_1}{R^3} \left[ \vec{R} \times \int_{m_2} \vec{\rho} \, dm_2 + 3 \int_{m_2} \vec{\rho} \times \vec{R} \, \frac{(\ell_{11}x + \ell_{21}y + \ell_{31}z)}{R} \, dm_2 \right] .$$

(2.24)

Supondo-se que o centro de massa do corpo coincide com a origem 0 do sistema fixo no corpo, tem-se que:

$$\int_{m_2} \vec{\rho} dm_2 = 0 \ ,$$

portanto, a Equação 2.24 fica:

$$\vec{N} = \frac{3Gm_1}{R^3} \int_{m_2} \vec{\rho} \times \vec{R} \frac{(\ell_{11}x + \ell_{21}y + \ell_{31}z)}{R} \ dm_2 \ . \qquad (2:25)$$

Tem-se ainda que:

$$\vec{\rho} \times \vec{R} = R \left[ \ (\ell_{31}y - \ell_{21}z)\hat{i} + (\ell_{11}z - \ell_{31}x)\hat{j} + (\ell_{21}x - \ell_{11}y)\hat{k} \ \right] \qquad (2.26)$$

Substituindo-se a Equação 2.26 na Equação 2.25, vem:

$$\vec{N} = \frac{3Gm_1}{R^3} \int_{m_2} \left[ \ (\ell_{31}y - \ell_{21}z)\hat{i} + (\ell_{11}z - \ell_{31}x)\hat{j} + (\ell_{21}x - \ell_{11}y)\hat{k} \ \right] \cdot$$

$$\cdot \ (\ell_{11}x + \ell_{21}y + \ell_{31}z) \ dm_2 = \frac{3Gm_1}{R^3} \int_{m_2} \Big\{ \left[ \ \ell_{21} \ \ell_{31}(y^2 - z^2) + \right.$$

$$+ \ \ell_{11} \ \ell_{31}xy - \ell_{11} \ \ell_{21}xz + (\ell_{31}^2 - \ell_{21}^2)yz \ \Big]\hat{i} + \Big[\ell_{11} \ \ell_{31}(z^2 - x^2) +$$

$$+ \ \ell_{11} \ \ell_{21}yz - \ell_{21} \ \ell_{31}xy + (\ell_{11}^2 - \ell_{31}^2)xz \ \Big]\hat{j} + \Big[\ell_{11} \ \ell_{21}(x^2 - y^2) +$$

$$+ \ \ell_{21} \ \ell_{31}xz - \ell_{11} \ \ell_{31}yz + (\ell_{21}^2 - \ell_{11}^2)xy \ \Big]\hat{k} \ \Big\} \ dm_2 \ .$$

Utilizando-se a Equação 2.14 e integrando a equação acima, obtém-se:

$$\vec{N} = \frac{3Gm_1}{R^3} \Big\{ \left[ \ \ell_{21} \ \ell_{31}(I_{zz} - I_{yy}) + \ell_{11} \ \ell_{31} \ I_{xy} - \ell_{11} \ \ell_{21} \ I_{xz} + \right.$$

$$+ \ (\ell_{31}^2 - \ell_{21}^2)I_{yz} \ \Big]\hat{i} + \Big[ \ \ell_{11} \ \ell_{31}(I_{xx} - I_{zz}) + \ell_{11} \ \ell_{21} \ I_{yz} \ -$$

$$- \ell_{21}\ \ell_{31}\ I_{xy} + (\ell_{11}^2 - \ell_{31}^2) I_{xz}\ ]\hat{j} + [\ \ell_{11}\ \ell_{21}(I_{yy} - I_{xx}) +$$

$$+ \ell_{21}\ \ell_{31}\ I_{xz} - \ell_{11}\ \ell_{31}\ I_{yz} + (\ell_{21}^2 - \ell_{11}^2)\ I_{xy}\ ]\hat{k}\ \Big\}\ . \qquad (2.27)$$

Finalmente, se x, y, z são os eixos principais de inércia do corpo, utilizando-se a Equação 2.16, as componentes do conjugado serão dadas por:

$$\begin{cases} N_x = \dfrac{3Gm_1}{R^3}\ (C - B)\ \ell_{21}\ \ell_{31} \\ \\ N_y = \dfrac{3Gm_1}{R^3}\ (A - C)\ \ell_{11}\ \ell_{31} \\ \\ N_z = \dfrac{3Gm_1}{R^3}\ (B - A)\ \ell_{11}\ \ell_{21}\ . \end{cases} \qquad (2.28)$$

# CAPÍTULO 3

## ESTUDO DA ESTABILIDADE EM TRÊS EIXOS

### 3.1 - A HAMILTONIANA COMO FUNÇÃO DE LIAPUNOV

A energia cinética é dada, no caso geral, por:

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \quad , \tag{3.1}$$

onde:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \alpha_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s \tag{3.2}$$

é uma função quadrática homogênea nas velocidades generalizadas,

$$T_1 = \sum_{r=1}^{n} \beta_r \dot{q}_r \tag{3.3}$$

é uma função linear homogênea nas velocidades generalizadas, e

$$T_0 = \gamma_0 \tag{3.4}$$

é uma função não-negativa das coordenadas generalizadas e do tempo. Os coeficientes $\alpha_{rs}$, $\beta_r$ e $\gamma_0$ são funções das coordenadas generalizadas edo tempo.

Partindo-se da equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad , \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{3.5}$$

e considerando-se o caso em que a lagrangeana não depende explicitamente do tempo, tem-se:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Portanto:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = \sum_{k=1}^{n} \left[ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) .$$

Esta relação pode ser reescrita na forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = 0 \quad .$$

Integrando-se a equação acima em relação ao tempo, obtém-se:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = h = \text{const.} \tag{3.6}$$

que é uma integral do movimento, conhecida como integral de Jacobi.

Como se está considerando o caso em que a lagrangeana

$$L = T - V = T_2 + T_1 + T_0 - V \tag{3.7}$$

não depende explicitamente do tempo, a energia cinética T também não dependerá explicitamente do tempo e, portanto, os coeficientes $\alpha_{rs}$, $\beta_r$ e $\gamma_0$ que aparecem nas Equações 3.2, 3.3 e 3.4 não mais dependem do tempo.

Introduzindo-se a Equação 3.7 na Equação 3.6, e usando-se o teorema de Euler para funções homogêneas, obtém-se para a integral de Jacobi:

$$h = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = 2T_2 + T_1 - L = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - V)$$

portanto,

$$h = T_2 - T_0 + V \quad . \tag{3.8}$$

Lembrando-se que a definição da função hamiltoniana é dada por:

$$H = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \quad , \tag{3.9}$$

conclui-se que se a lagrangeana de um sistema não depende explicitamente do tempo, então, tem-se para a hamiltoniana o valor da integral de Jacobi:

$$H = T_2 - T_0 + V = h = \text{const} \quad . \tag{3.10}$$

Calculando-se agora as componentes da velocidade angular do corpo em relação aos eixos x, y, z, vê-se pela Figura 1.2 que:

$$\begin{cases} \omega_x = \Omega_x + \dot{\alpha}_x + \dot{\beta}_x \\ \omega_y = \Omega_y + \dot{\alpha}_y + \dot{\beta}_y \\ \omega_z = \Omega_z + \dot{\alpha}_z + \dot{\gamma} \quad . \end{cases} \tag{3.11}$$

Como o vetor velocidade angular orbital $\vec{\Omega}$ do satélite é paralelo ao eixo Z do sistema orbital, vem:

$$\begin{Bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \dot{\Omega}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{Bmatrix}$$

portanto:

$$\begin{cases} \Omega_x = \Omega\, \ell_{13} \\ \Omega_y = \Omega\, \ell_{23} \\ \Omega_z = \Omega\, \ell_{33} \end{cases} \tag{3.12}$$

Calculando-se as componentes de $\dot{\alpha}$ no sistema x, y, z, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_x \\ \dot{\alpha}_y \\ \dot{\alpha}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

portanto:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_x = \dot{\alpha}\ \ell_{12} \\ \dot{\alpha}_y = \dot{\alpha}\ \ell_{22} \\ \dot{\alpha}_z = \dot{\alpha}\ \ell_{32} \end{cases} . \qquad (3.13)$$

Fazendo-se o mesmo para $\dot{\beta}$, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\beta}_x \\ \dot{\beta}_y \\ \dot{\beta}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \cos\beta\ \operatorname{sen}\gamma & \operatorname{sen}\beta\ \operatorname{sen}\gamma \\ -\operatorname{sen}\gamma & \cos\beta\ \cos\gamma & \operatorname{sen}\beta\ \cos\gamma \\ 0 & -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

portanto:

$$\begin{cases} \dot{\beta}_x = \dot{\beta}\cos\gamma \\ \dot{\beta}_y = -\dot{\beta}\operatorname{sen}\gamma \end{cases} \qquad (3.14)$$

Substituindo-se as Equações 3.12, 3.13 e 3.14 na Equação 3.11, vem:

$$\begin{cases} \omega_x = \Omega\ \ell_{13} + \dot{\alpha}\ \ell_{12} + \dot{\beta}\cos\gamma \\ \omega_y = \Omega\ \ell_{23} + \dot{\alpha}\ \ell_{22} - \dot{\beta}\operatorname{sen}\gamma \\ \omega_z = \Omega\ \ell_{33} + \dot{\alpha}\ \ell_{32} + \dot{\gamma} \end{cases} . \qquad (3.15)$$

Supor-se-á que os três momentos de inércia sejam diferentes, isto é, $A \neq B$, $A \neq C$ e $C \neq B$.

A energia cinética de rotação é dada por:

$$T = \frac{1}{2}\,(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) = T_2 + T_1 + T_0 \qquad (3.16)$$

Substituindo-se nesta equação os valores dados pela Equação 3.15, tem-se:

$$T_2 = \frac{1}{2}\,\left[\, A(\dot{\alpha}\ell_{12} + \dot{\beta}\cos\gamma)^2 + B(\dot{\alpha}\ell_{22} - \dot{\beta}\,\mathrm{sen}\gamma)^2 + C(\dot{\alpha}\ell_{32} + \dot{\gamma})^2 \,\right] , \qquad (3.17)$$

$$T_1 = \Omega\,\left[\, A\ell_{13}(\dot{\alpha}\ell_{12} + \dot{\beta}\cos\gamma) + B\ell_{23}(\dot{\alpha}\ell_{22} - \dot{\beta}\,\mathrm{sen}\gamma) + \right.$$

$$\left. + C\ell_{33}(\dot{\alpha}\ell_{32} + \dot{\gamma}) \,\right] , \qquad (3.18)$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\,\Omega^2\,(A\ell_{13}^2 + B\ell_{23}^2 + C\ell_{33}^2) \quad . \qquad (3.19)$$

Desprezando-se, na Equação 2.17, os termos constantes para um satélite em órbita circular em torno da Terra, tem-se para a energia potencial:

$$V = -\frac{3\Omega^2}{4}\,\left[\, \ell_{11}^2\,(B + C - A) + \ell_{21}^2\,(A + C - B) + \ell_{31}^2\,(A + B - C)\right], \qquad (3.20)$$

onde tomou-se $\Omega^2 = \mu/R^3 \cong Gm_1/R^3$, pois a massa do satélite é pequena em comparação com a massa $m_1$ da Terra. A Equação 3.20 pode ser reescrita na forma:

$$V = -\frac{3\Omega^2}{4}\,\left[\, A(\ell_{21}^2 + \ell_{31}^2 - \ell_{11}^2) + B(\ell_{11}^2 + \ell_{31}^2 - \ell_{21}^2) + \right.$$

$$\left. + C(\ell_{11}^2 + \ell_{21}^2 - \ell_{31}^2) \,\right] \quad . \qquad (3.21)$$

Decorre das propriedades dos cossenos diretores a seguinte relação:

$$\ell_{11}^2 + \ell_{21}^2 + \ell_{31}^2 = 1 \quad . \qquad (3.22)$$

Fazendo-se substituição da Equação 3.22 na Equação 3.21, obtém-se:

$$V = -\frac{3\Omega^2}{4}\left[ A(1 - 2\ell_{11}^2) + B(1 - 2\ell_{21}^2) + C(1 - 2\ell_{31}^2) \right] =$$

$$= -\frac{3\Omega^2}{4}(A + B + C) + \frac{3\Omega^2}{2}(A\ell_{11}^2 + B\ell_{21}^2 + C\ell_{31}^2) \ . \qquad (3.23)$$

Desprezando-se na Equação 3.23 a parcela constante, tem-se para a energia potencial:

$$V = \frac{3}{2}\Omega^2 (A\ell_{11}^2 + B\ell_{21}^2 + C\ell_{31}^2) \ . \qquad (3.24)$$

Vê-se através das Equações 3.16, 3.17, 3.18, 3.19 e 3.24 que a lagrangeana L = T - V não depende explicitamente do tempo t e, de acordo com a Equação 3.10, tem-se a seguinte expressão para a hamiltoniana:

$$H = T_2 - T_0 + V = \text{const} \ . \qquad (3.25)$$

As equações diferenciais que descrevem o movimento de rotação de um satélite são altamente não-lineares, e não existe uma solução analítica para as equações. Nestas circunstâncias, pode-se obter a informação referente ao comportamento do sistema na vizinhança de posições específicas. Em particular, deve-se ser capaz de estabelecer se o sistema é estável ou instável nessas posições. Utilizar-se-á para tal análise o método direto de Liapunov, o qual requer que se teste se uma certa função é positiva definida ou não, na vizinhança da posição estudada.

Considerando-se o satélite da Figura 1.1, examinar-se-á a estabilidade na vizinhança de um ponto de equilíbrio para o qual o corpo está em repouso, em relação ao sistema de referência orbital, isto é, $\dot{\alpha}_E = \dot{\beta}_E = \dot{\gamma}_E = 0$. Para definir completamente os pontos de equilíbrio, os valores das coordenadas angulares correspondentes devem ser determinados. Como o sistema é canônico, estas posições são dadas pelas equações:

$$\left.\frac{\partial H}{\partial q_i}\right|_E = 0 \ , \qquad i = 1, 2, 3 \ , \tag{3.26}$$

onde as coordenadas generalizadas $q_i$ (i = 1, 2, 3) são os ângulos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$. O símbolo E significa que a derivada será avaliada no ponto de equilíbrio.

Em relação à expressão da hamiltoniana, dada pela Equação 3.25, sabe-se que o termo $T_2$ é quadrático nas velocidades generalizadas, as quais são zero nos pontos de equilíbrio considerados, decorrendo, portanto, que as posições de equilíbrio relativas ao sistema de referência orbital devem satisfazer às equações:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_E = 0 \ , \qquad i = 1, 2, 3 \ , \tag{3.27}$$

onde:

$$U = V - T_0 \ . \tag{3.28}$$

Substituindo-se as Equações 3.19 e 3.24 na Equação 3.28, obtém-se:

$$U = \frac{1}{2}\,\Omega^2 \left[\, A(3\ell_{11}^2 - \ell_{13}^2) + B(3\ell_{21}^2 - \ell_{23}^2) + C(3\ell_{31}^2 - \ell_{33}^2) \,\right], \tag{3.29}$$

que é uma função que depende apenas das coordenadas generalizadas.

Usando-se a notação:

$$\ell_{ij\alpha} = \frac{\partial \ell_{ij}}{\partial \alpha} \ ; \qquad \ell_{ij\beta} = \frac{\partial \ell_{ij}}{\partial \beta} \ ; \qquad \ell_{ij\gamma} = \frac{\partial \ell_{ij}}{\partial \gamma}$$

e tomando-se as derivadas parciais de $\ell_{11}$, $\ell_{21}$, $\ell_{31}$, $\ell_{13}$, $\ell_{23}$, $\ell_{33}$ em relação a $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$, obtém-se:

$$\begin{cases} \ell_{11\alpha} = \ell_{13} \ ; & \ell_{13\alpha} = -\ell_{11} \\ \ell_{21\alpha} = \ell_{23} \ ; & \ell_{23\alpha} = -\ell_{21} \\ \ell_{31\alpha} = \ell_{33} \ ; & \ell_{33\alpha} = -\ell_{31} \end{cases} \tag{3.30}$$

$$\begin{cases} \ell_{11\beta} = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \operatorname{sen}\gamma ; & \ell_{13\beta} = \cos\alpha \cos\beta \operatorname{sen}\gamma \\ \ell_{21\beta} = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \cos\gamma ; & \ell_{23\beta} = \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \\ \ell_{31\beta} = -\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta ; & \ell_{33\beta} = -\cos\alpha \operatorname{sen}\beta \end{cases} \tag{3.31}$$

$$\begin{cases} \ell_{11\gamma} = \ell_{21} ; & \ell_{13\gamma} = \ell_{23} \\ \ell_{21\gamma} = -\ell_{11} ; & \ell_{23\gamma} = -\ell_{13} \\ \ell_{31\gamma} = 0 & \ell_{33\gamma} = 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

Calculando-se as derivadas parciais de U em relação a $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$, tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}\Omega^2 \left[ A(6\ell_{11}\,\ell_{11\alpha} - 2\ell_{13}\,\ell_{13\alpha}) + B(6\ell_{21}\,\ell_{21\alpha} - 2\ell_{23}\,\ell_{23\alpha}) + \right.$$

$$\left. + C(6\ell_{31}\,\ell_{31\alpha} - 2\ell_{33}\,\ell_{33\alpha})\right] = \Omega^2 \left[ A(3\ell_{11}\,\ell_{13} + \ell_{11}\,\ell_{13}) + \right.$$

$$\left. + B(3\ell_{21}\,\ell_{23} + \ell_{21}\,\ell_{23}) + C(3\ell_{31}\,\ell_{33} + \ell_{31}\,\ell_{33})\right] ,$$

portanto:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = 4\Omega^2 \,(A\ell_{11}\,\ell_{13} + B\ell_{21}\,\ell_{23} + C\ell_{31}\,\ell_{33}) \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = \Omega^2 \left[ A(3\ell_{11} \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \operatorname{sen}\gamma - \ell_{13} \cos\alpha \cos\beta \operatorname{sen}\gamma) + \right.$$

$$+ B(3\ell_{21} \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \cos\gamma - \ell_{23} \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma) -$$

$$\left. - C(3\ell_{31} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta - \ell_{33} \cos\alpha \operatorname{sen}\beta) \right]$$

portanto:

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = \Omega^2 \left[ A \cos\beta \operatorname{sen}\gamma \,(3\ell_{11} \operatorname{sen}\alpha - \ell_{13} \cos\alpha) + B \cos\beta \cos\gamma \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \,(3\ell_{21} \operatorname{sen}\alpha - \ell_{23} \cos\alpha) - C \operatorname{sen}\beta (3\ell_{31} \operatorname{sen}\alpha - \ell_{33} \cos\alpha) \right] \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma} = \Omega^2 \left[ A(3\ell_{11}\,\ell_{21} - \ell_{13}\,\ell_{23}) - B(3\ell_{21}\,\ell_{11} - \ell_{23}\,\ell_{13}) \right] ,$$

portanto:

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma} = \Omega^2 \,(B - A)\,(\ell_{13}\,\ell_{23} - 3\ell_{11}\,\ell_{21}) \,. \tag{3.35}$$

Para encontrar os valores de $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ nos pontos de equilíbrio, deve-se ter:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \alpha}\right|_E = 0 \;; \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial \beta}\right|_E = 0 \;; \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial \gamma}\right|_E = 0 \,. \tag{3.36}$$

Os pontos de equilíbrio são aqueles em que os eixos principais do corpo estão alinhados com os eixos do sistema de referência orbital. Estas posições correspondem aos ângulos $\alpha_E = \beta_E = \gamma_E = 0$, $\alpha_E = \pi/2$ e $\beta_E = \gamma_E = 0$, etc. No entanto, qualquer ponto de equilíbrio que se tome para estudar a estabilidade levará exatamente ao mesmo resultado.

Como a hamiltoniana é constante, a sua derivada temporal $\dot{H}$ é zero e, portanto, se H for positiva definida na vizinhança de um ponto de equilíbrio, a hamiltoniana poderá ser tomada como uma função de Liapunov, e o ponto de equilíbrio correspondente será estável. Mas, por definição, $T_2$ é positiva definida e, portanto, o sistema será estável se U for positiva definida. O problema se resume então em encontrar a condição a ser satisfeita para que U seja positiva definida.

Considerar-se-á, neste estudo, o ponto de equilíbrio para o qual $\alpha_E = \beta_E = \gamma_E = 0$.

Pelo critério de Sylvester, uma certa função U é positiva definida, se a sua matriz hessiana $[H]$, definida como sendo:

$$[H] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \beta} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \gamma} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial \beta \partial \alpha} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \beta \partial \gamma} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial \gamma \partial \alpha} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \gamma \partial \beta} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \gamma^2} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

tiver todos os seus menores principais com determinante positivo.

Calculando-se os elementos da hessiana, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = 4\Omega^2 \left[ A(\ell_{13}^2 - \ell_{11}^2) + B(\ell_{23}^2 - \ell_{21}^2) + C(\ell_{33}^2 - \ell_{31}^2) \right], \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 U}{\partial \beta \partial \alpha} = 4\Omega^2 \left[ A \cos\beta \operatorname{sen}\gamma(\ell_{11} \cos\alpha + \ell_{13} \operatorname{sen}\alpha) + B \cos\beta \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \cos\gamma(\ell_{21}\cos\alpha + \ell_{23} \operatorname{sen}\alpha) - C \operatorname{sen}\beta(\ell_{31} \cos\alpha + \ell_{33} \operatorname{sen}\alpha) \right], \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \gamma} = \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma \partial \alpha} = -4\Omega^2 (B - A)(\ell_{11} \ell_{23} + \ell_{13} \ell_{21}), \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = \Omega^2 \left[ (B-A) \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen} 2\gamma + (A \operatorname{sen}^2\alpha + B \cos^2\alpha - C) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (3 \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha) \cos 2\beta \right], \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \beta \partial \gamma} = \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma \partial \beta} = \Omega^2 (B-A) \cos\beta \left[ \cos\gamma(\ell_{13} \cos\alpha - 3\ell_{11} \operatorname{sen}\alpha) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}\gamma (\ell_{23} \cos\alpha - 3\ell_{21} \operatorname{sen}\alpha) \right], \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma^2} = \Omega^2 (B - A) \left[ \ell_{23}^2 - \ell_{13}^2 - 3(\ell_{21}^2 - \ell_{11}^2) \right]. \quad (3.43)$$

Para o ponto de equilíbrio $\alpha_E = \beta_E = \gamma_E = 0$, tem-se:

$$\begin{cases} \ell_{11} = 1, & \ell_{21} = 0, & \ell_{31} = 0 \\ \ell_{13} = 0, & \ell_{23} = 0, & \ell_{33} = 1 \end{cases}. \quad (3.44)$$

A hessiana avaliada nesse ponto terá a forma:

$$[H]_E = \begin{bmatrix} 4\Omega^2(C-A) & 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2(C-B) & 0 \\ 0 & 0 & 3\Omega^2(B-A) \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Portanto, as condições para que U seja positiva definida, e, consequentemente, para que o sistema seja estável, são:

$$\begin{cases} 4\Omega^2(C-A) > 0 \\ 4\Omega^4(C-A)\ (C-B) > 0 \\ 12\Omega^6(C-A)\ (C-B)\ (B-A) > 0\ . \end{cases} \tag{3.46}$$

As condições expressas acima podem ser resumidas na seguinte relação:

$$C > B > A\ , \tag{3.47}$$

cujo significado físico é o eixo de momento de inércia mínimo estar alinhado com a direção radial, e o eixo de momento de inércia máximo ser normal ao plano da órbita. A interpretação desse resultado é que uma pequena perturbação da posição de equilíbrio do corpo, quando este está com o eixo de menor momento de inércia segundo a vertical local, levará ao aparecimento de um conjugado gravitacional, que irá restaurar a posição original do corpo. Se, no entanto, houver amortecimento no sistema, tal que $\dot{H} \leq 0$, então a configuração dada pela Expressão 3.47 é assintoticamente estável.

O mesmo problema pode ser tratado por meio de análise infinitesimal, que consiste em linearizar as equações de movimento do corpo na vizinhança da posição de equilíbrio e resolver a equação característica resultante. Esta análise, feita a seguir, confirma o resultado que se obteve na Expressão 3.47 e, além deste, obter-se-á um outro critério em que a estabilidade também será possível em um subdomínio de $B > A > C$. Isto implicará que, para certas razões dos momentos de inércia, existirá uma posição de equilíbrio estável, na qual o eixo de momento de inércia intermediário coincide com a vertical local, um resultado não previsto pelo método direto de Liapunov, o que é explicado pelo fato deste método fornecer as condições suficientes para o equilíbrio estável; portanto, restringindo o conjunto de critérios para a obtenção da estabilidade do sistema.

## 3.2 - ANÁLISE INFINITESIMAL DA ESTABILIDADE

A equação de movimento, na forma matricial, é dada por:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial T}{\partial \omega}\right\} + [\omega]\left\{\frac{\partial T}{\partial \omega}\right\} = \{N\}\ , \tag{3.48}$$

com:

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

Substituindo-se as Equações 2.28 e 3.16 na Equação 3.48, obtém-se:

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_x + (C-B)\omega_y\,\omega_z = 3\,\frac{\mu}{R^3}\,(C-B)\,\ell_{21}\,\ell_{31} \\ B\dot{\omega}_y + (A-C)\omega_x\,\omega_z = 3\,\frac{\mu}{R^3}\,(A-C)\,\ell_{11}\,\ell_{31} \\ C\dot{\omega}_z + (B-A)\omega_x\,\omega_y = 3\,\frac{\mu}{R^3}\,(B-A)\,\ell_{11}\,\ell_{21} \end{cases} \tag{3.50}$$

Para estudar o efeito, na estabilidade do sistema, de órbita quase circular, incluir-se-á uma pequena excentricidade orbital $e$. Usar-se-á a equação das cônicas:

$$R = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos\phi}\ ,$$

onde $a$ é o semi-eixo maior, e $\phi$ é a anomalia verdadeira; assim, pode-se desprezar os termos $o(e^2)$ de modo que:

$$R \cong \frac{a}{1 + e\cos\phi}$$

e, consequentemente,

$$\frac{\mu}{R^3} \cong \frac{\mu(1 + e\cos\phi)^3}{a^3} \cong n^2(1 + 3e\cos\phi)$$

onde $n = \sqrt{\mu/a^3}$ é o movimento médio do satélite.

Pode-se obter a anomalia verdadeira como função do movimento médio do satélite, n, da pequena excentricidade, $e$, e do tempo decorrido desde a passagem do satélite pelo perigeu, $t_p$, através de uma expansão em série (Wertz, 1978):

$$\phi \cong nt_p + 2e \operatorname{sen} nt_p + o(e^2)$$

A derivada temporal da anomalia verdadeira será:

$$\dot{\phi} \cong n(1 + 2e \cos nt_p) \tag{3.51}$$

e a sua derivada segunda terá a forma:

$$\ddot{\phi} \cong -2n^2 \, e \operatorname{sen} nt_p \, .$$

Linearizando-se em torno da posição de equilíbrio, dada por $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tem-se para $\alpha$ pequeno:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha \cong \alpha \, ; & \cos\alpha \cong 1 \\ \operatorname{sen}^2\alpha \cong 0; & \cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha \cong 1 \end{cases} \tag{3.52}$$

Expressões análogas às da Equação 3.52 são válidas também para $\beta$ e $\gamma$ pequenos.

Os cossenos diretores serão aproximados por:

$$\begin{cases} \ell_{11} \cong 1 \, , & \ell_{21} \cong -\gamma \, , & \ell_{31} \cong \alpha \\ \ell_{12} \cong \gamma \, , & \ell_{22} \cong 1 \, , & \ell_{32} \cong -\beta \, , \\ \ell_{13} = -\alpha \, , & \ell_{23} \cong \beta \, , & \ell_{33} \cong 1 \end{cases} \tag{3.53}$$

e a partir da Equação 3.15, obtêm-se as expressões aproximadas para as velocidades angulares:

$$\begin{cases} \omega_x \cong \dot{\beta} - \dot{\phi}\alpha \\ \omega_y \cong \dot{\alpha} + \dot{\phi}\beta \\ \omega_z \cong \dot{\gamma} + \dot{\phi} \end{cases} , \tag{3.54}$$

para os seus produtos:

$$\begin{cases} \omega_x \, \omega_y \cong 0 \\ \omega_x \, \omega_z \cong \dot{\phi}\dot{\beta} - \dot{\phi}^2\alpha \cong n\dot{\beta} - n^2\alpha \\ \omega_y \, \omega_z \cong \dot{\phi}\dot{\alpha} + \dot{\phi}^2\beta \cong n\dot{\alpha} + n^2\beta \end{cases} , \tag{3.55}$$

e para as suas derivadas em relação ao tempo:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x \cong \ddot{\beta} - \dot{\phi}\dot{\alpha} \cong \ddot{\beta} - n\dot{\alpha} \\ \dot{\omega}_y \cong \ddot{\alpha} + \dot{\phi}\dot{\beta} \cong \ddot{\alpha} + n\dot{\beta} \\ \dot{\omega}_z = \ddot{\gamma} + \ddot{\phi} \cong \ddot{\gamma} - 2\, n^2\, e \,\text{sen}\, nt_p \end{cases} , \tag{3.56}$$

onde foram desprezados os quadrados e os produtos de pequenas quantidades.

Substituindo-se as aproximações dadas pelas Equações 3.53, 3.55 e 3.56 na Equação 3.50, tem-se:

$$A(\ddot{\beta} - n\dot{\alpha}) + (C - B)\,(n\dot{\alpha} + n^2\beta) = 0 , \tag{3.57}$$

$$B(\ddot{\alpha} + n\dot{\beta}) + (A - C)\,(n\dot{\beta} - n^2\alpha) = 3\, n^2\,(A - C)\,\alpha , \tag{3.58}$$

$$C(\ddot{\gamma} - 2\, n^2\, e \,\text{sen}\, nt_p) = -\, 3\, n^2\,(B - A)\,\gamma . \tag{3.59}$$

Dessas equações acima, vê-se que o pequeno movimento de arfagem (ângulo $\gamma$) está desacoplado dos pequenos movimentos de rolamento e guinada (ângulos $\alpha$ e $\beta$, respectivamente). Da Equação 3.59 conclui-se que o pequeno movimento de arfagem será estável, se:

$$B > A \tag{3.60}$$

A solução geral da Equação 3.59, que dá o movimento de arfagem, a qual inclui a oscilação natural e o movimento forçado devido à excentricidade, supondo-se que este movimento é estável, é da forma:

$$\gamma = \frac{2\, e \,\text{sen}\, nt_p}{3\,(\frac{B-A}{C}) - 1} + K \cos\left[\, nt_p \sqrt{3\,(\frac{B-A}{C})} + \delta \,\right] , \qquad (3.61)$$

onde K e $\delta$ são constantes de integração que dependem das condições iniciais. Definindo-se:

$$k_A = \frac{B - A}{C} ,$$

vê-se que para $k_A = 1/3$ ocorre ressonância no movimento de arfagem, por menor que seja a excentricidade $e$. Portanto, em projetos de satélites estabilizados por gradiente de gravidade, deve-se evitar a configuração geométrica em que:

$$C \cong 3(B - A) ,$$

evitando-se assim a ocorrência de ressonância em arfagem.

Definindo-se:

$$k_G = \frac{C - B}{A} , \qquad k_R = \frac{C - A}{B} ,$$

as equações acopladas dos movimentos de rolamento e guinada, Equações 3.57 e 3.58, podem ser colocadas na forma:

$$\begin{cases} \ddot{\beta} + k_G\, n^2\beta - (1 - K_G)n\dot{\alpha} = 0 \\ \ddot{\alpha} + 4\, k_R\, n^2\alpha + (1 - k_R)n\dot{\beta} = 0 \end{cases} \qquad (3.62)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace na Equação 3.62, obtém-se:

$$\begin{cases} (s^2 + k_G\, n^2)\beta - (1 - k_G)n\alpha s = 0 \\ (s^2 + 4k_R\, n^2)\alpha + (1 - k_R)n\beta s = 0 \end{cases},$$

que leva à equação característica biquadrada:

$$s^4 + (k_G\, k_R + 3k_R + 1)n^2 s^2 + 4k_G\, k_R\, n^4 = 0 \quad . \tag{3.63}$$

Para que se tenha estabilidade, é necessário que as raízes da Equação 3.63 não tenham parte real positiva. Se $s_1$ for uma raiz da Equação 3.63, $-s_1$ também o será e, portanto, para que ambas, $s_1$ e $-s_1$, não possuam parte real positiva, $s_1$ deve ser imaginária pura. Consequentemente, deve-se ter as seguintes relações:

$$k_G\, k_R > 0 \quad , \tag{3.64}$$

$$k_G\, k_R + 3k_R + 1 > 4\sqrt{k_G\, k_R} \quad . \tag{3.65}$$

A Expressão 3.64 implica que o momento de inércia ao longo do eixo de arfagem, C, deve ser o maior, ou o menor momento de inércia para se obter estabilização em rolamento e guinada. Da Expressão 3.60 para a estabilização em arfagem, obtém-se a condição de que o momento de inércia de rolamento deve ser maior que o momento de inércia de guinada. Portanto, tem-se duas relações permitidas, que são $C > B > A$ ou $B > A > C$. Entretanto, a condição dada pela Expressão 3.65 restringe a última configuração para certas razões de momentos de inércia. A Figura 3.1 resume as zonas de estabilidade para várias razões dos momentos de inércia.

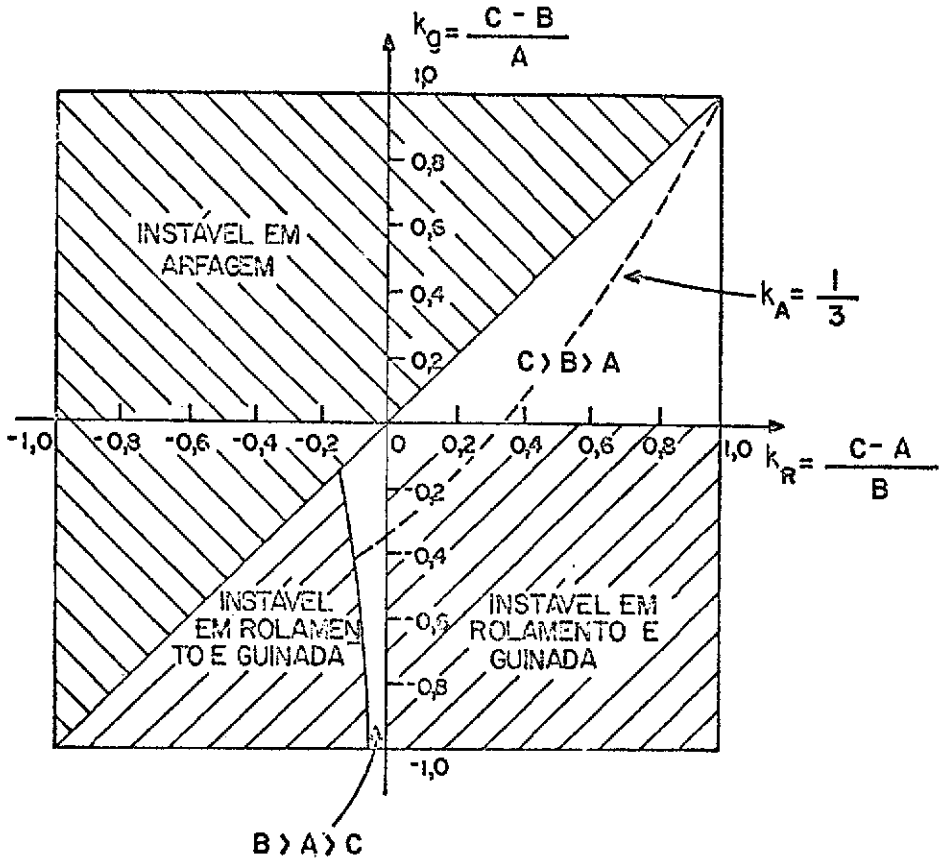


Fig. 3.1 - Regiões de estabilidade.

# CAPÍTULO 4

## INFLUÊNCIA DO CONJUGADO AERODINÂMICO EM UM SATÉLITE AXI-SIMÉTRICO ESTABILIZADO POR GRADIENTE DE GRAVIDADE

### 4.1 - INTRODUÇÃO

Sabe-se que os conjugados aerodinâmicos são significantes para altitudes de várias centenas de quilômetros, e podem predominar sobre o conjugado devido ao gradiente de gravidade, para certas configurações do satélite, em altitudes de até 450 quilômetros aproximadamente. Tanto o conjugado gravitacional, como o conjugado aerodinâmico dependem da configuração do satélite; porém, esta dependência funcional é completamente diferente para cada um dos dois efeitos. Em seguida, investigar-se-á a estabilidade de um satélite rígido em uma órbita circular, no caso do satélite estar sujeito a conjugados aerodinâmicos e gravitacionais simultaneamente. Usar-se-á, novamente, o método direto de Liapunov a fim de se obter os critérios de estabilidade para o movimento ao redor de uma posição de equilíbrio. Neste estudo, supõem-se as seguintes hipóteses:

a) A órbita é circular de raio constante, o que implica que o decaimento da órbita devido às forças aerodinâmicas será desprezado.

b) Os conjugados perturbadores periódicos devido à não-uniformidade do campo gravitacional serão ignorados. Portanto, o campo gravitacional terrestre será tomado como sendo função apenas de distância radial.

c) Os conjugados perturbadores no satélite, devido à variação da densidade do ar entre os lados do dia e da noite da Terra, serão desprezados. Esta hipótese é justificável, para altitudes acima de 300 quilômetros.

d) O conjugado aerodinâmico é não-conservativo. Entretanto, será mostrado posteriormente que, através de hipóteses simplificado

ras, o conjugado aerodinâmico pode ser derivado de uma função potencial e, consequentemente, será tratado como conservativo.

e) O acoplamento entre o movimento rotacional do satélite, em relação ao seu centro de massa, e o movimento orbital do centro de massa não será considerado.

## 4.2 - REDUÇÃO DO GRAU DE LIBERDADE DE SISTEMAS QUE CONTÊM VARIÁVEIS CÍCLICAS

Para um sistema dinâmico descrito por n coordenadas generalizadas $q_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, as equações diferenciais do movimento podem ser escritas na forma de n equações de Lagrange, em termos da lagrangeana $L = T - V$.

Considere-se um sistema conservativo e, em particular, o caso especial em que algumas das coordenadas generalizadas não aparecem explicitamente na lagrangeana; portanto, o sistema das equações de movimento pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , & i = 1, 2, \ldots, m \qquad (4.1) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) = 0 , & s = m + 1, \ldots, n , \qquad (4.2) \end{cases}$$

o que implica que as coordenadas generalizadas que não aparecem na lagrangeana são as $q_s (s = m + 1, \ldots, n)$. Estas coordenadas são chamadas cíclicas ou ignoráveis, e as n-m equações de movimento correspondentes podem ser integradas imediatamente para obter:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = p_s = \text{const.} , \qquad s = m+ 1, \ldots, n , \qquad (4.3)$$

onde os impulsos conjugados generalizados $p_s (s = m + 1, \ldots, n)$ são integrais do movimento do sistema, cujos valores são determinados pelas condições iniciais. Visto que todas as equações representadas pela Equa

ção 4.3 são funções lineares nas velocidades $\dot{q}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), pode-se resolver o sistema para as velocidades $\dot{q}_s$ ($s = m + 1, \ldots, n$), em termos das velocidades restantes $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) e das constantes $p_s$ ($s = m + 1, \ldots, n$), e escrever:

$$\dot{q}_s = \dot{q}_s\ (q_1, q_2, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m, p_{m+1}, \ldots, p_n)\ , \quad (4.4)$$

$$s = m + 1, \ldots, n\ .$$

Estas n-m equações podem ser usadas para reduzir o grau de liberdade do sistema de n para m.

No caso de funções do tipo $f(x_1, x_2)$, com $x_2 = g(x_1)$, define-se a quantidade conhecida como derivada semitotal em relação a $x_1$ como sendo:

$$\frac{\not\partial f}{\not\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1}\ , \quad (4.5)$$

onde $\partial f/\partial x_i$ ($i = 1, 2$) representa a derivada parcial de f em relação apenas à $x_i$ ($i = 1, 2$). Se for construída a função $f^*(x_1) = f(x_1, g(x_1))$, conclui-se que:

$$\frac{\not\partial f}{\not\partial x_1} = \frac{\partial f^*}{\partial x_1}\ .$$

Generalizando-se para o caso em que $L = L(q_1, q_2, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$ com $\dot{q}_s = \dot{q}_s(q_1, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m)(s = m+1, \ldots, n)$, tem-se:

$$\frac{\not\partial L}{\not\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{s=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}\ \frac{\partial \dot{x}_s}{\partial \dot{x}_i}\ , \qquad i = 1, \ldots, m\ . \quad (4.6)$$

O procedimento para efetuar a redução do grau de liberdade de um sistema é conhecido como eliminação das coordenadas cíclicas, introduzido por Routh. De acordo com esse procedimento, define-se a função routhiana de um sistema como sendo da forma:

$$R = L - \sum_{s=m+1}^{n} p_s \dot{q}_s \quad , \tag{4.7}$$

usando-se a Equação 4.4 para eliminar as velocidades generalizadas cíclicas $\dot{q}_s$ ($s = m + 1, \ldots, n$) e fazendo-se com que a routhiana não seja função destas velocidades, obtém-se:

$$R = R\,(q_1, q_2, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m, p_{m+1}, \ldots, p_n) \; . \tag{4.8}$$

A routhiana pode ser usada como se fosse uma função lagrangeana, para a obtenção das equações de movimento, em função das coordenadas $q_i$ ( $i = 1, 2, \ldots, m$), ignorando-se, portanto, as coordenadas cíclicas. Para mostrar isto, forma-se:

$$\begin{aligned} \delta R = \delta L - \sum_{s=m+1}^{n} \delta p_s \, \dot{q}_s - \sum_{s=m+1}^{n} p_s \, \delta \dot{q}_s = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \sum_{s=m+1}^{n} \dot{q}_s \, \delta p_s - \sum_{s=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s = \\ = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \sum_{s=m+1}^{n} \dot{q}_s \, \delta p_s \end{aligned} \tag{4.9}$$

por um lado, e

$$\delta R = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial R}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{s=m+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial p_s} \delta p_s \tag{4.10}$$

por outro lado. Nota-se que, para uma variação completa, mesmo os impulsos conservados sofreram variação.

Comparando-se as Equações 4.9 e 4.10, conclui-se que:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial R}{\partial q_i} \; , \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \; , \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.11}$$

e ainda:

$$- \dot{q}_s = \frac{\partial R}{\partial p_s} \quad , \qquad s = m + 1, \ldots, n \; . \tag{4.12}$$

Portanto, substituindo-se a Equação 4.11 nas m equações da das pela Equação 4.1, as equações de movimento correspondentes tornam-se:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.13}$$

e formam um conjunto de equações de movimento para um sistema comapenas m graus de liberdade. Se uma solução da Equação 4.13 puder ser encontrada, pode-se obter as coordendas cíclicas pela integração da Equação 4.12:

$$q_s = -\int \frac{\partial R}{\partial p_s}\, dt \ , \qquad s = m + 1, \ldots, n \ . \tag{4.14}$$

Para encontrar a hamiltoniana H, parte-se da Equação 3.9 e utilizando-se as Equações 4.3 e 4.6, obtém-se:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_{s=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s - L =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{s=m+1}^{n} p_s \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{q}_i} \right] \dot{q}_i + \sum_{s=m+1}^{n} p_s \dot{q}_s - L \ . \tag{4.15}$$

Utilizando-se as Equações 4.7 e 4.11, é fácil ver que

$$H = H(q_1, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, p_{m+1}, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - R \ . \tag{4.16}$$

A Equação 4.15 pode ser reescrita como:

$$H = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L + \sum_{s=m+1}^{n} p_s \left(\dot{q}_s - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) \ . \tag{4.17}$$

Considerando-se que a lagrangeana é do tipo da Equação 3.7, isto é:

$$L = T - V = T_2 + T_1 + T_0 - V \ , \tag{4.18}$$

supondo-se que a energia cinética T é dada pelas Equações 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, similarmente ao que foi feito na Equação 3.8, e usando-se o teorema de Euler para funções homogêneas, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T_2 + T_1 \quad . \tag{4.19}$$

Substituindo-se na Equação 4.17 as Equações 4.18 e 4.19, obtém-se:

$$H = T_2 + V - T_0 + \sum_{s=m+1}^{n} p_s \left(\dot{q}_s - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right) . \tag{4.20}$$

## 4.3 - ANÁLISE DA ESTABILIDADE EM DOIS EIXOS PELO MÉTODO DIRETO DE LIAPUNOV

Sabe-se que quando a lagrangeana não depende explicitamente do tempo, tem-se que $\dot{H} = 0$, e portanto, se H for positiva definida em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio, a hamiltoniana poderá ser tomada como uma função de Liapunov e o ponto de equilíbrio correspondente será estável.

Seguindo-se o mesmo raciocínio já utilizado, pode-se escrever:

$$H = T_2 + U \tag{4.21}$$

e como $T_2$ é positiva definida, o sistema será estável se U for positiva definida. Os pontos de equilíbrio são dados pela Equação 3.27, isto é:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_E = 0 , \qquad i = 1, \ldots, m \tag{4.22}$$

Combinando-se as Equações 4.20 e 4.21, tem-se:

$$U = V - T_0 + \sum_{s=m+1}^{n} p_s \left(\dot{q}_s - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right) , \tag{4.23}$$

onde $\dot{q}_s$ $(s = m+1, \ldots, n)$ são funções de $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, obtidas a partir da Equação 4.3.

Definindo-se a matriz hessiana, avaliada no ponto de equilíbrio, como sendo da forma:

$$[H]_E = \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \, \partial q_j} \right]_E \quad , \tag{4.24}$$

pode-se dizer que a função U é positiva definida se $[H]_E$ for positiva definida. De acordo com o critério de Sylvester, uma matriz é positiva definida, se todos os determinantes de seus menores principais forem positivos. Portanto, $[H]_E$ é positiva definida se:

$$\left| \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \, \partial q_j} \right|_E > 0 \quad , \qquad \begin{matrix} i, j = 1, 2, \ldots, r \\ r = 1, 2, \ldots, m \end{matrix} \quad . \tag{4.25}$$

A relações dadas pela Equação 4.25 representam as condições suficientes para a existência da estabilidade do movimento em uma vizinhança do ponto de equilíbrio E. Isto significa que a função U possui um ponto de mínimo local em E.

## 4.4 - MODELO FÍSICO ESCOLHIDO

Devido ao fato do conjugado aerodinâmico depender fortemente da geometria do satélite, um estudo mais realista requer que se adote uma configuração específica.

O modelo físico adotado para representar o satélite proposto no anteprojeto do mesmo, constante do estudo de viabilidade do primeiro satélite brasileiro, será composto de cinco cilindros com eixos coincidentes, como é mostrado na Figura 4.1. O cilindro superior representa a massa na ponta do mastro, o segundo cilindro representa o mastro, o terceiro é o corpo principal do satélite, o quarto representa o anel adaptador ao último estágio, e o cilindro inferior representa a antena de UHF. O centro de gravidade do satélite (CG) está a uma distância $\varepsilon$ (braço do momento aerodinâmico) do centro de pressão (CP). Os valores nas cotas estão dados em milímetros.

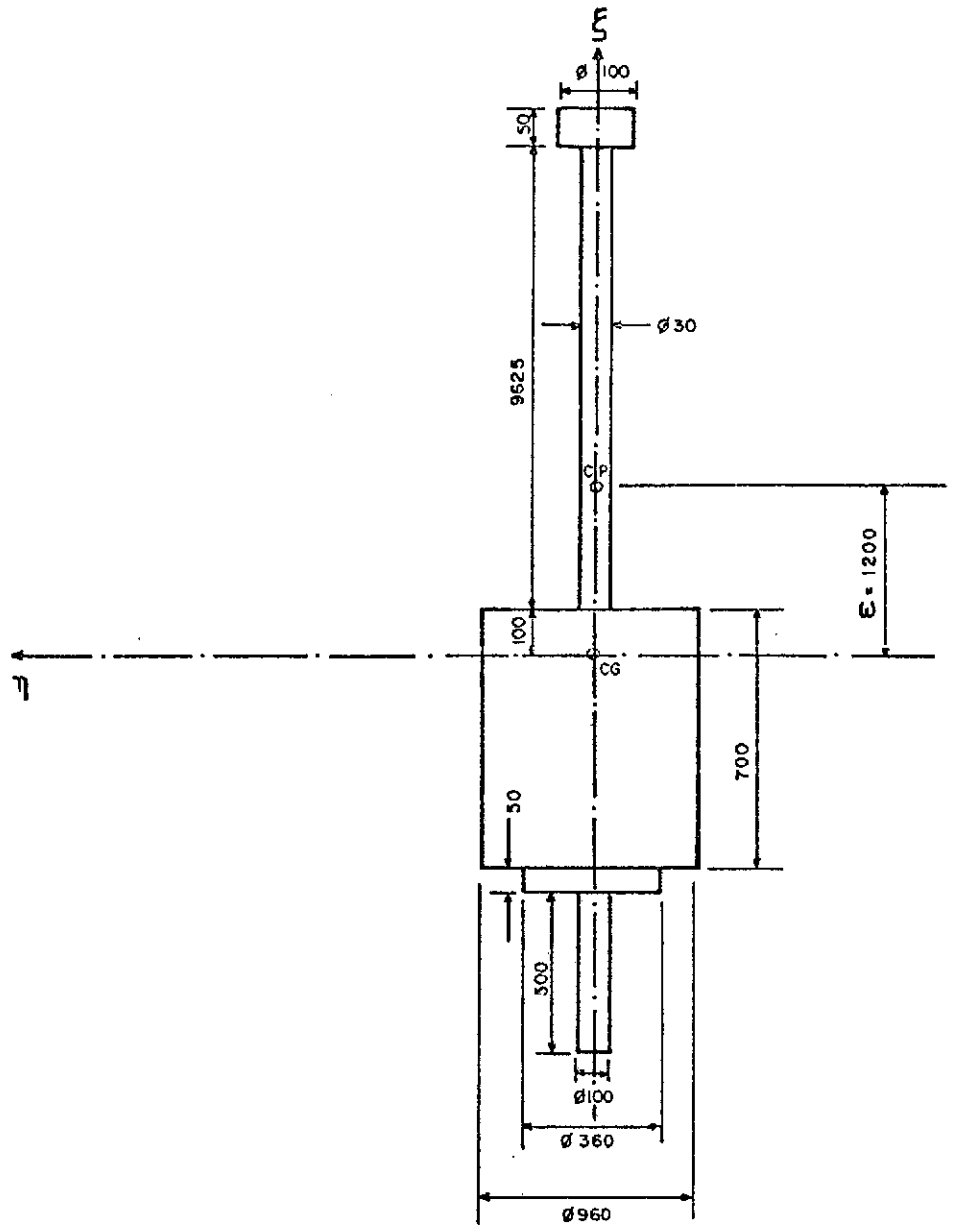


Fig. 4.1 - Modelo físico escolhido.

## 4.5 - CONJUGADO AERODINÂMICO

Um satélite em órbita terrestre sentirá os efeitos das forças aerodinâmicas em altitudes de até várias centenas de quilômetros, devido à atmosfera terrestre. Quando a força aerodinâmica resultante, composta pelo arrasto e pela sustentação, não passa através do centro de gravidade, o satélite será submetido a um torque que irá influenciar seu movimento de atitude. É evidente que as forças aerodinâmicas dependem da densidade atmosférica.

Para altitudes acima de 120 quilômetros, a trajetória média livre do movimento molecular na atmosfera rarefeita é grande em comparação às dimensões típicas do satélite, e o fluxo de regime é classificado como fluxo molecular livre (Schaaf and Chambre, 1958). Para corpos convexos, considerando-se que as condições de fluxo e superfície são dados, a força aerodinâmica em um ponto de superfície do satélite é função apenas do ângulo entre o fluxo de moléculas incidentes e a superfície. Consequentemente, é possível integrar a força de superfície (a qual existe em virtude da incidência molecular e de sua subsequente reemissão) sobre a área frontal do satélite, obtendo-se o arrasto, a sustentação e o momento no satélite em termos dos ângulos de atitude. Neste trabalho, o interesse estará restrito ao momento aerodinâmico, sendo desprezado o decaimento da órbita devido ao arrasto.

Chamando-se, respectivamente, $\vec{P}$ e $\vec{\tau}$, a pressão normal e a tensão de cisalhamento em um elemento de área unitária, o momento aerodinâmico no corpo será dada por:

$$\vec{N}_A = \int \vec{r} \times (\vec{P} + \vec{\tau})\, dA \,, \tag{4.26}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor-posição do elemento diferencial de área no sistema $\xi\eta\zeta$; a integração será efetuada sobre a superfície do satélite. As expressões de $\vec{P}$, $\vec{\tau}$ e $\vec{r}$ em termos de suas componentes nesse sistema serão:

$$\begin{cases} \vec{P} = P_\xi \hat{e}_\xi + P_\eta \hat{e}_\eta + P_\zeta \hat{e}_\zeta \\ \vec{\tau} = \tau_\xi \hat{e}_\xi + \tau_\eta \hat{e}_\eta + \tau_\zeta \hat{e}_\zeta \\ \vec{r} = \xi \hat{e}_\xi + \eta \hat{e}_\eta + \zeta \hat{e}_\zeta \end{cases} \tag{4.27}$$

Substituindo-se estas expressões na Equação 4.26, tem-se para o momento aerodinâmico:

$$\vec{N}_A = \left\{ \int \left[ \eta(P_\zeta + \tau_\zeta) - \zeta(P\eta + \tau_\eta) \right] dA \right\} \hat{e}_\xi + \left\{ \int \left[ \zeta(P_\xi + \tau_\xi) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \xi(P_\zeta + \tau_\zeta) \right] dA \right\} \hat{e}_\eta + \left\{ \int \left[ \xi(P_\eta + \tau_\eta) - \eta(P_\xi + \tau_\xi) \right] dA \right\} \hat{e}_\zeta . \tag{4.28}$$

Como se está interessado no caso de um satélite simétrico em relação ao eixo $\xi$, movendo-se na direção do eixo $\eta$, as integrais correspondentes aos dois primeiros termos da Equação 4.28 se anulam, e o conjugado aerodinâmico terá a sua expressão simplificada:

$$\vec{N}_A = \left\{ \int \left[ \xi(P_\eta + \tau_\eta) - \eta(P_\xi + \tau_\xi) \right] dA \right\} \hat{e}_\zeta . \tag{4.29}$$

Vê-se, portanto, que o conjugado aerodinâmico será da forma:

$$\vec{N}_A = - N_A \hat{e}_\zeta , \tag{4.30}$$

o que mostra que $\vec{N}_A$ atuará no plano $\xi\eta$. O sinal negativo é utilizado por conveniência de formalismo.

Considerando-se que a velocidade de rotação, segundo o eixo de arfagem do satélite, é desprezível em relação à sua velocidade orbital, a velocidade de incidência das partículas independe de $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$. Neste caso, o conjugado $N_A$ depende dos ângulos de orientação $\theta_1$ e $\theta_2$, e não das velocidades angulares. Consequentemente, uma função potencial pode ser obtida, de forma que ela seja igual ao trabalho necessário para mover o satélite da orientação de referência ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) para a orientação dada por $\theta_1$ e $\theta_2$. Para o sistema de coordenadas utilizado, pode-se ver que o conjugado aerodinâmico no satélite axi-simétrico dependerá ape

nas do ângulo $\theta_2$, e nenhum trabalho será realizado pelas forças aerodinâmicas quando o satélite executar rotações segundo os outros eixos. Portanto, a função potencial devido às forças aerodinâmicas será:

$$V_A = - \int_0^{\theta_2} N_A \, d\theta_2 \qquad (4.31)$$

Várias estimativas das forças aerodinâmicas em um ponto da superfície do satélite existem (Schaaf and Chambre, 1958; Schaaf and Talbot, 1959; Schamberg, 1959; Evans, 1962), embora não exista uma concordância universal com os métodos e constantes físicas adotados. Utilizando-se o método proposto por Schaaf and Chambre (1958), Meirovitch and Wallace (1966) dão uma expresão aproximada para $N_A$, quando o satélite é composto por cilindros com eixos coincidentes:

$$N_A = C_D \, q \, \varepsilon \, A_a \cos^2 \theta_2 \, , \qquad (4.32)$$

onde $C_D$ é o coeficiente de arrasto para $\theta_2 = 0$, $A_a$ é a área aparente do satélite, $q = 1/2 \, \rho v^2$ é a pressão aerodinâmica ($\rho$ é a densidade atmosférica, e v, a velocidade do satélite), e $\varepsilon$ é a distância ao longo do eixo $\xi$ entre o centro de gravidade e o centro de pressão, isto é, o centro geométrico do satélite está localizado no ponto $\xi = \varepsilon$.

Os valores para o conjugado aerodinâmico, em função de $\theta_2$, obtidos através do uso da expressão analítica, dada pela Equação 4.32, foram comparados com os valores obtidos por Carrara (1981), para o modelo real do satélite, que utilizou integração numérica. A maior discrepância entre os valores do conjugado aerodinâmico é de 6% e ocorre em torno de $\theta_2 = 30^o$.

## 4.6 - EXPRESSÕES DE ENERGIA

As componentes da velocidade angular do satélite, no sistema de eixos $\xi\eta\zeta$, são dadas por:

$$\begin{cases} \omega_\xi = \Omega\ \text{sen}\theta_1\ \cos\theta_2 + \dot{\theta}_1\ \text{sen}\theta_2 + \dot{\theta}_3 \\ \omega_\eta = \Omega\ \text{sen}\theta_1\ \text{sen}\theta_2 - \dot{\theta}_1\ \cos\theta_2 \\ \omega_\zeta = \Omega\ \cos\theta_1 - \dot{\theta}_2 \end{cases} \tag{4.33}$$

onde $\Omega$ é a velocidade angular orbital e $\dot{\theta}_3$ é a velocidade angular de rotação em relação ao eixo de simetria do satélite (eixo $\xi$). Deve estar claro que $\theta_3$ é uma coordenada cíclica (ou ignorável) e, portanto, o grau de liberdade do sistema pode ser reduzido para 2.

Lembrando-se que a energia cinética de rotação é dada por:

$$T = \frac{1}{2}\left(A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + B\omega_\zeta^2\right) = T_2 + T_1 + T_0\ , \tag{4.34}$$

e que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\ ,$$

pois o potencial V só depende das coordenadas e não das velocidades, pode-se utilizar a Equação 4.3 para obter:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_3} = p = A(\Omega\ \text{sen}\theta_1\ \cos\theta_2 + \dot{\theta}_1\ \text{sen}\theta_2 + \dot{\theta}_3) = \text{const.} \tag{4.35}$$

ou seja:

$$\dot{\theta}_3 = \frac{p}{A} - \Omega\ \text{sen}\theta_1\ \cos\theta_2 - \dot{\theta}_1\ \text{sen}\theta_2 \tag{4.36}$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{\partial \dot{\theta}_3}{\partial \dot{\theta}_1} = -\ \text{sen}\theta_2\ ; \qquad \frac{\partial \dot{\theta}_3}{\partial \dot{\theta}_2} = 0 \tag{4.37}$$

A parcela $T_0$ da energia cinética não depende das velocidades generalizadas e, portanto:

$$T_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{A} + B\Omega^2\ \text{sen}^2\theta_1\ \text{sen}^2\theta_2 + B\Omega^2\ \cos^2\theta_1\right)\ . \tag{4.38}$$

Eliminando-se da Equação 4.38 as parcelas constantes, tem-se:

$$T_0 = -\frac{1}{2}\,\Omega^2\, B\, \mathrm{sen}^2\theta_1\, \cos^2\theta_2 \,. \qquad (4.39)$$

Para construir a função U dada pela Equação 4.23, deve-se ter a expressão para a energia potencial:

$$V = V_G + V_A \,, \qquad (4.40)$$

onde $V_G$, que é a parcela relativa ao potencial gravitacional, pode ser obtida através da Equação 3.24, resultando:

$$V_G = -\frac{3}{2}\,\Omega^2\,(B-A)\,\cos^2\theta_1\,\cos^2\theta_2 \qquad (4.41)$$

e $V_A$, que é a parcela relativa ao potencial aerodinâmico, pode ser obtida das Equações 4.31 e 4.32, resultando:

$$V_A = -\frac{1}{2}\,C_D\,q\,\varepsilon\,A_a\,(\theta_2 + \mathrm{sen}\theta_2\,\cos\theta_2) \qquad (4.42)$$

Reescrevendo-se a Equação 4.23 para o caso presente, tem-se:

$$U = V - T_0 + p\,(\dot{\theta}_3 - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial\dot{\theta}_3}{\partial\dot{\theta}_i}\,\dot{\theta}_i) = V - T_0 + p\,(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1\,\mathrm{sen}\theta_2). \qquad (4.43)$$

Utilizando-se a Equação 4.36 e desprezando-se a parcela constante, a Equação 4.43 torna-se:

$$U = \frac{1}{2}\,\Omega^2\, B\, \mathrm{sen}^2\theta_1\, \cos^2\theta_2 - \frac{3}{2}\,\Omega^2(B-A)\,\cos^2\theta_1\,\cos^2\theta_2 -$$

$$-\frac{1}{2}\,C_D\,q\,\varepsilon\,A_a\,(\theta_2 + \mathrm{sen}\theta_2\,\cos\theta_2) - \Omega\,p\,\mathrm{sen}\theta_1\,\cos\theta_2 \,,$$

ou de outro modo:

$$U = \frac{1}{2}\,\Omega^2\,B\cos^2\theta_2 - \frac{1}{2}\,\Omega^2\,(4B - 3A)\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 -$$

$$- \frac{1}{2}\,C_D\,\varepsilon\,A_a\,(\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_2) - \Omega\,p\,\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2\ . \qquad (4.44)$$

## 4.7 - POSIÇÕES DE EQUILÍBRIO DINÂMICO

As posições de equilíbrio são dadas por:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial\theta_1}\right|_E = 0\ ; \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial\theta_2}\right|_E = 0\ . \qquad (4.45)$$

Calculando-se as derivadas parciais, tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial\theta_1} = \Omega^2\,(4B - 3A)\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_1\cos^2\theta_2 - \Omega\,p\cos\theta_1\cos\theta_2\ . \qquad (4.46)$$

Estabelecendo-se a hipótese de que o satélite não estará longe da posição desejada ($\theta_1 = \theta_2 = 0$), tem-se portanto, que $\theta_1 \neq \pm\,\pi/2$ e $\theta_2 \neq \pm\,\pi/2$. Em consequência, na posição de equilíbrio deve-se ter:

$$p = \Omega\,(4B - 3A)\operatorname{sen}\theta_{1E}\cos\theta_{2E} \qquad (4.47)$$

A derivada parcial em relação a $\theta_2$, fornece:

$$\frac{\partial U}{\partial\theta_2} = \Omega^2\,(4b - 3A)\cos^2\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_2 - \Omega^2\,B\operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_2 +$$

$$+ \Omega\,p\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 - C_D\,q\,\varepsilon\,A_a\cos^2\theta_2 \qquad (4.48)$$

e, na posição de equilíbrio, levando-se em conta a Equação 4.47, tem-se:

$$\Omega^2(4B-3A)\operatorname{sen}\theta_{2E}\cos\theta_{2E} - \Omega^2 B\operatorname{sen}\theta_{2E}\cos\theta_{2E} - C_D\,q\,\varepsilon\,A_a\cos^2\theta_{2E} = 0$$

ou de outra forma:

$$3\Omega^2\,(B - A)\operatorname{tg}\theta_{2E} = C_D\,q\,\varepsilon\,A_a \qquad (4.49)$$

Vê-se, portanto, que a posição de equilíbrio dada por $\theta_{1E}$ e $\theta_{2E}$, será tal que:

$$\theta_{2E} = \text{arc tg} \left[ \frac{C_D \, q \, \varepsilon \, A_a}{3\Omega^2(B-A)} \right] \tag{4.50}$$

$$\theta_{1E} = \text{arc sen} \left[ \frac{p}{\Omega(4B-3A) \cos\theta_{2E}} \right] , \tag{4.51}$$

sendo que p depende das condições iniciais.

## 4.8 - CONDIÇÕES PARA A ESTABILIDADE

Deve-se montar a matriz hessiana de U, dada pela Equação 4.24. Calculando-se as derivadas de segunda ordem, tem-se:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2} = \Omega^2(4B-3A) \, (\cos^2\theta_1 - \text{sen}^2\theta_1) \cos^2\theta_2 + \Omega \, p \, \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 =$$

$$= \Omega^2(4B-3A) \cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2 + \Omega \, \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 \cdot$$

$$\cdot \left[ p - \Omega(4B-3A) \, \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 \right] \tag{4.52}$$

e, na posição de equilíbrio, tem-se:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2} \right|_E = \Omega^2(4B-3A) \cos^2\theta_{1E} \cos^2\theta_{2E} \, . \tag{4.53}$$

Tem-se também que:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1 \, \partial \theta_2} = -2\Omega^2(4B-3A) \, \text{sen}\theta_1 \cos\theta_1 \, \text{sen}\theta_2 \cos\theta_2 + \Omega \, p \cos\theta_1 \, \text{sen}\theta_2 =$$

$$= -\Omega^2(4B-3A) \, \text{sen}\theta_1 \cos\theta_1 \, \text{sen}\theta_2 \cos\theta_2 + \Omega \cos\theta_1 \, \text{sen}\theta_2 \cdot$$

$$\cdot \left[ p - \Omega(4B-3A) \, \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 \right] \tag{4.54}$$

e, no ponto de equilíbrio:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1 \, \partial \theta_2} \right|_E = -\Omega^2(4B-3A) \, \text{sen}\theta_{1E} \cos\theta_{1E} \, \text{sen}\theta_{2E} \cos\theta_{2E} \, . \tag{4.55}$$

Finalmente,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_2^2} = \Omega^2(4B-3A)\cos^2\theta_1\,(\cos^2\theta_2 - \operatorname{sen}^2\theta_2) - \Omega^2 B(\cos^2\theta_2 - \operatorname{sen}^2\theta_2) +$$

$$+ \Omega\, p\, \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + 2\, C_D\, q\, \varepsilon\, A_a \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 = 3\Omega^2(B-A) \cdot$$

$$\cdot (\cos^2\theta_2 - \operatorname{sen}^2\theta_2) + \Omega^2(4B-3A)\operatorname{sen}^2\theta_1 \operatorname{sen}^2\theta_2 + \Omega \operatorname{sen}\theta_1$$

$$\cdot \cos\theta_2 \left[\, p - \Omega(4B-3A)\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 \,\right] +$$

$$+ 2\, C_D\, q\, \varepsilon\, A_a \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 \qquad (4.56)$$

e, no ponto de equilíbrio:

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_2^2}\right|_E = 3\Omega^2(B-A)\,(\cos^2\theta_{2E} - \operatorname{sen}^2\theta_{2E}) + \Omega^2(4B-3A)\operatorname{sen}^2\theta_{1E} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sen}^2\theta_2 + 2\, C_D\, q\, \varepsilon\, A_a \operatorname{sen}\theta_{2E} \cos\theta_{2E} \;. \qquad (4.57)$$

Dado que o critério de estabilidade advém de duas condições que devem ser satisfeitas pela Equação 4.25, tem-se:

1ª condição

$$\Omega^2(4B - 3A)\cos^2\theta_{1E}\cos^2\theta_{2E} > 0$$

$$(4B - 3A) > 0 \qquad (4.58)$$

$$B > \frac{3}{4} A$$

2ª condição

$$\Omega^2(4B-3A)\cos^2\theta_{1E}\cos^2\theta_{2E}\left[\, 3\Omega^2(B-A)\,(\cos^2\theta_{2E} - \operatorname{sen}^2\theta_{2E}) +\right.$$

$$\left. + \Omega^2(4B-3A)\operatorname{sen}^2\theta_{1E}\operatorname{sen}^2\theta_{2E} + 2\, C_D\, q\, \varepsilon\, A_a \operatorname{sen}\theta_{2E}\cos\theta_{2E} \,\right] -$$

$$- \Omega^4(4B-3A)^2 \operatorname{sen}^2\theta_{1E}\cos^2\theta_{1E}\operatorname{sen}^2\theta_{2E}\cos^2\theta_{2E} > 0$$

ou simplificando,

$$\Omega^2(4B-3A)\cos^2\theta_{1E}\cos^2\theta_{2E}\left[3\Omega^2(B-A)(\cos^2\theta_{2E}-\operatorname{sen}^2\theta_{2E})+\right.$$

$$\left.+2C_D q\,\varepsilon A_a \operatorname{sen}\theta_{2E}\cos\theta_{2E}\right] > 0 . \qquad (4.59)$$

Considerando-se que a primeira condição deve ser satisfeita, o termo que aparece multiplicando o colchete deve ser positivo e, portanto, a quantidade entre colchetes também deverá ser positiva. Substituindo-se a Equação 4.49 na Equação 4.59, obtém-se:

$$3\Omega^2(B-A)(2\cos^2\theta_{2E}-1)+6\Omega^2(B-A)\operatorname{sen}^2\theta_{2E} > 0$$

$$6\Omega^2(B-A)-3\Omega^2(B-A) > 0$$

$$3\Omega^2(B-A) > 0$$

ou seja:

$$B > A . \qquad (4.60)$$

Fazendo-se a interseção entre as duas condições encontradas, Expressões 4.58 e 4.60, conclui-se que o sistema será localmente estável segundo Liapunov, se o momento de inércia segundo o eixo radial ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) for menor que os outros momentos de inércia, isto é, $B > A$.

Vê-se, portanto, que o conjugado aerodinâmico influi na posição de equilíbrio do satélite, porém não altera a sua estabilidade.

# CAPÍTULO 5

## SIMULAÇÃO DIGITAL DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

### 5.1 - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Construindo-se a função routhiana dada pela Equação 4.7, obtêm-se:

$$R = -\frac{1}{2}\frac{p^2}{A} + \frac{1}{2} B \left[(\Omega \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 - \dot{\theta}_1 \cos\theta_2)^2 + (\Omega \cos\theta_1 - \dot{\theta}_2)^2\right]$$

$$+ \frac{3}{2}\Omega^2 (B - A) \cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2 + \frac{1}{2} C_D q \epsilon A_a (\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2)$$

$$+ \Omega p \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \dot{\theta}_1 p \operatorname{sen}\theta_2 \qquad (5.1)$$

Para a obtenção das equações de movimento, deve-se utilizar a Equação 4.13:

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_1} = B \dot{\theta}_1 \cos^2\theta_2 - \frac{\Omega}{2} B \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}2\theta_2 + p \operatorname{sen}\theta_2 \qquad (5.2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = B \ddot{\theta}_1 \cos^2\theta_2 - 2 B \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 - \frac{\Omega}{2} B \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \operatorname{sen}2\theta_2$$

$$- \Omega B \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}\theta_1 \cos 2\theta_2 + p \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \ , \qquad (5.3)$$

e a primeira equação será:

$$\ddot{\theta}_1 = 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \operatorname{tg}\theta_2 + 2 \Omega \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}\theta_1 - \frac{p \dot{\theta}_2}{B \cos\theta_2}$$

$$- \frac{\Omega^2 (4 B - 3 A)}{2 B} \operatorname{sen}2\theta_1 + \frac{\Omega p \cos\theta_1}{B \cos\theta_2} \qquad (5.4)$$

Fazendo-se o mesmo para $\theta_2$, resulta:

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_2} = B\,\dot{\theta}_2 - \Omega B \cos\theta_1 \tag{5.5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = B\,\ddot{\theta}_2 + \Omega B\,\dot{\theta}_1 \operatorname{sen}\theta_1 \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \theta_2} = \Omega^2 B \operatorname{sen}^2\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 - \Omega B\,\dot{\theta}_1 \operatorname{sen}\theta_1 \cos 2\theta_2$$

$$- B\,\dot{\theta}_1^2 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 - \frac{3\Omega^2}{2}(B-A)\cos^2\theta_1 \operatorname{sen} 2\theta_2 + p\,\dot{\theta}_1 \cos\theta_2$$

$$+ C_D\, q\, \epsilon\, A_a \cos^2\theta_2 - \Omega p \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \tag{5.7}$$

e a segunda equação de movimento será:

$$\ddot{\theta}_2 = -2\Omega\,\dot{\theta}_1 \operatorname{sen}\theta_1 \cos^2\theta_2 - \frac{1}{2}\,\dot{\theta}_1^2 \operatorname{sen} 2\theta_2$$

$$- \frac{\Omega^2 (4B - 3A)}{2B}\cos^2\theta_1 \operatorname{sen} 2\theta_2 + \frac{p\,\dot{\theta}_1 \cos\theta_2}{B} + \frac{\Omega^2}{2}\operatorname{sen} 2\theta_2$$

$$+ \frac{C_D\, q\, \epsilon\, A_a}{B}\cos^2\theta_2 - \frac{\Omega p}{B}\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \tag{5.8}$$

Adotar-se-ão os seguintes dados para o modelo físico proposto na Seção 4.4, visando a simulação digital:

$A = 10{,}135 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

$B = 323{,}8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

$C_D = 2{,}42$

$A_a = 1{,}034\ m^2$

$\varepsilon = 1{,}20\ m$ ,

e considerando-se que o satélite se encontra em uma órbita circular a 700 km de altura, tem-se ainda que:

$\Omega = 1{,}062 \times 10^{-3}\ s^{-1}$

$v = 7509\ m \cdot s^{-1}$

$\rho = 3{,}6 \times 10^{-14}\ kg \cdot m^{-3}$

$q = 1/2\ \rho\ v^2 = 1{,}015 \times 10^{-6}\ kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$

Usando-se estes valores na Equação 4.53, obtém-se o valor do ângulo $\theta_2$ na posição de equilíbrio:

$\theta_{2E} \cong 10'$ ,

ou seja, para um satélite como o proposto, o arrasto aerodinâmico é desprezível quando comparado com outras perturbações. Porém, para órbitas mais baixas, este valor cresce rapidamente. Por exemplo, considerando-se uma órbita a 600 km, o valor de $\theta_2$ na posição de equilíbrio está próximo de $0{,}5^o$, e uma órbita a 500 km de altitude, $\theta_{2E}$ cresce para $3^o$, como se vê na Figura 5.1.

A Figura 5.2, feita a partir de dados obtidos do trabalho de Kondapalli (1981), mostra, para uma atividade solar média, o decaimento da órbita em função do tempo. Note-se que alguns meses antes da queda do satélite, este já estará fora de operação, visto que, a 400 km de altura, o ângulo formado entre o eixo de simetria do satélite e a vertical local alcança o valor de $15^o$.

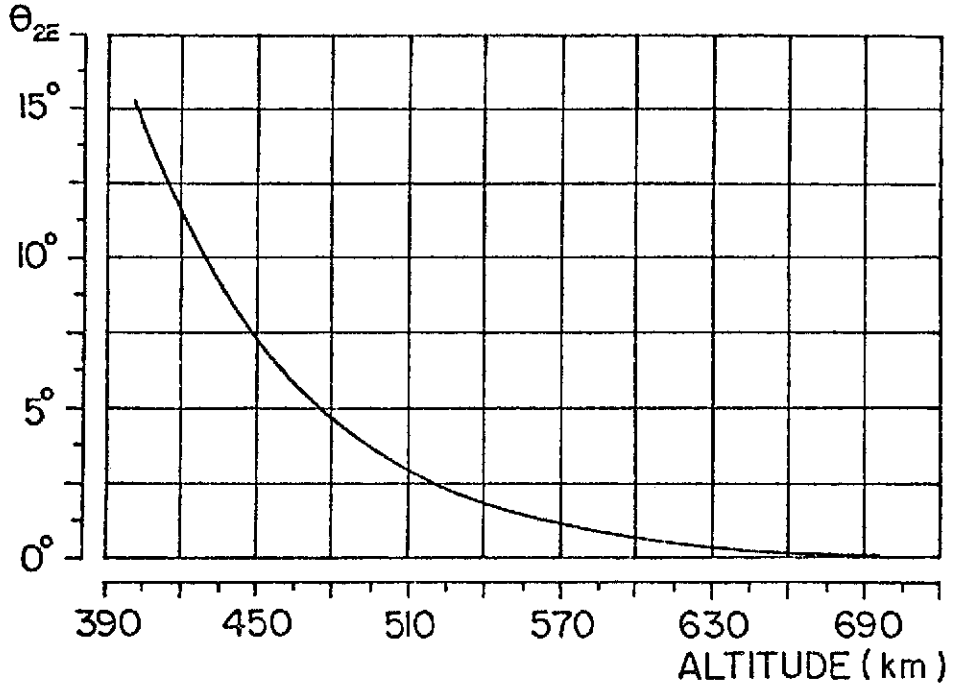


Fig. 5.1 - Ângulo de equilíbrio $\theta_{2E}$ em função da altura do satélite.

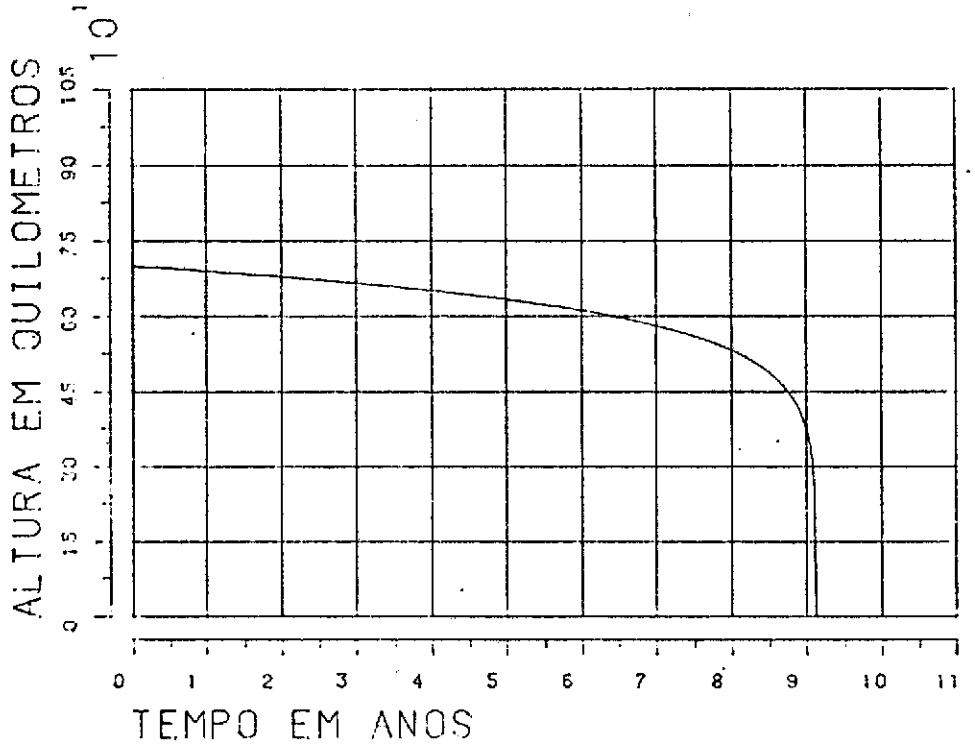


Fig. 5.2 - Tempo de vida do satélite (atividade solar média).

Considerando-se $\rho = 0$ e, portanto, $\theta_2 = 0$, a Equação 4.36, avaliada no ponto de equilíbrio, tem a forma:

$$\dot{\theta}_{3E} = \frac{p}{A} - \Omega \operatorname{sen} \theta_{1E}$$

Substituindo-se p, dado pela Equação 4.47, obtém-se:

$$\dot{\theta}_{3E} = \Omega \operatorname{sen} \theta_{1E} \left[ \frac{(4B - 3A)}{A} - 1 \right] = 4\,\Omega \left( \frac{B - A}{A} \right) \operatorname{sen} \theta_{1E}$$

que, utilizando-se as constantes adotadas, fornece:

$$\dot{\theta}_{3E} \cong 1{,}255 \operatorname{sen} \theta_{1E} \qquad \text{(rpm)}$$

Esta relação está representada graficamente na Figura 5.3.

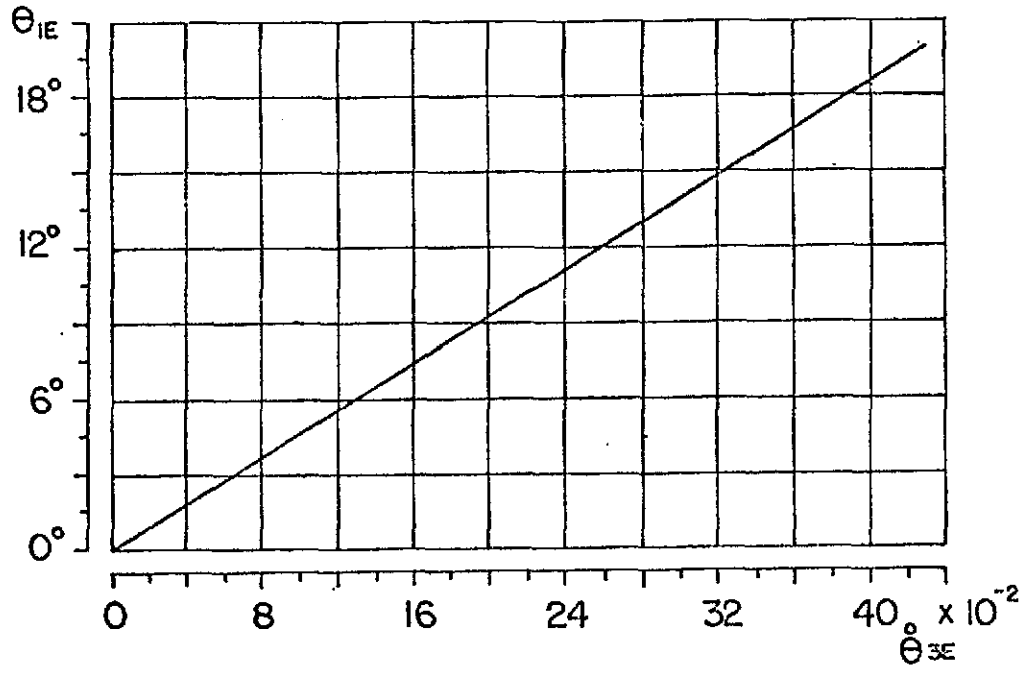


Fig. 5.3 - Ângulo de rolamento na posição de equilíbrio, em função da velocidade angular em torno do eixo de simetria do satélite.

Pode-se ver claramente por este gráfico a importância, na precisão de apontamento do satélite, de remover todo o movimento de rotação do mesmo. Isto significa que o impulso conjugado p deve ser pequeno. Para que o erro no apontamento do satélite, devido à sua rotação, não seja maior que $0{,}5^{o}$, deve-se ter $\dot{\theta}_{3E} \leq 0{,}01$ rpm.

A Figura 5.4 mostra o comportamento do sistema durante 5 horas ($\cong$ 3 órbitas), com as condições iniciais dadas por $\theta_1 = \theta_2 = 5^{o}$ e $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$. Para esta simulação, tomou-se o valor de p igual a zero.

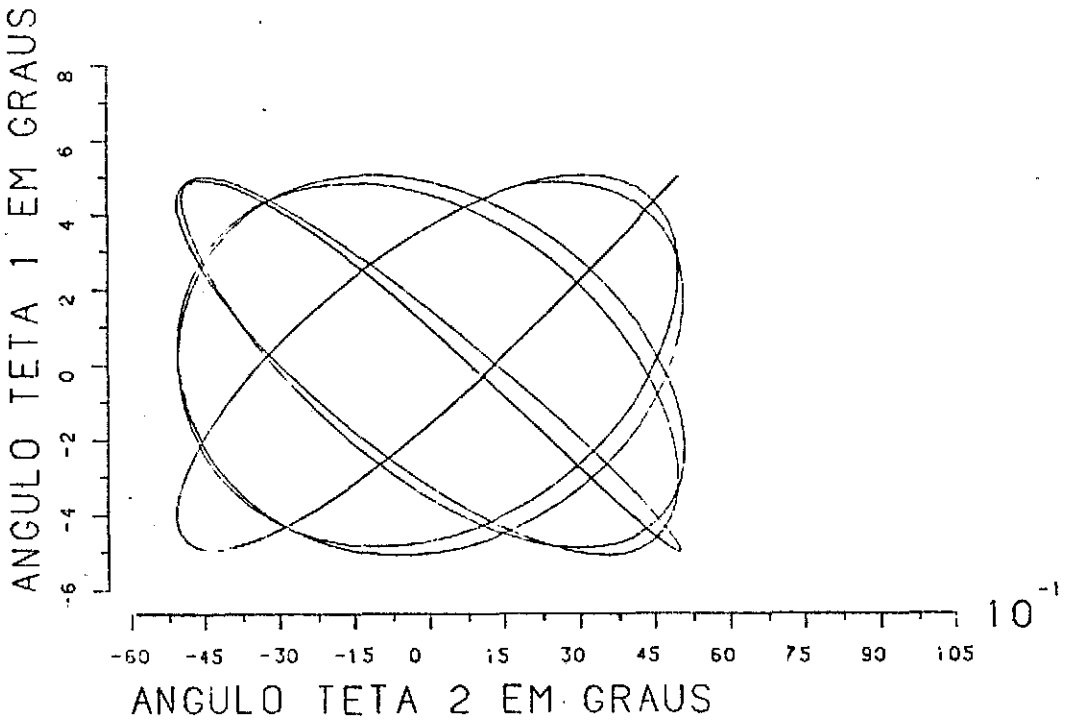


Fig. 5.4 - Simulação do movimento de atitude do satélite (sistema sem amortecimento).

Se uma linearização for feita nas equações de movimento, Equações 5.4 e 5.8, e considerando-se p = 0, obtém-se:

$$\ddot{\theta}_1 = - \frac{\Omega^2 (4B - 3A)}{B} \theta_1 \qquad (5.9)$$

e

$$\ddot{\theta}_2 = - 3\Omega^2 \left(1 - \frac{A}{B}\right) \theta_2 \qquad (5.10)$$

Integrando-se analiticamente, vem:

$$\theta_1 = \theta_{1i} \cos \left[ \Omega \sqrt{\frac{4B - 3A}{B}}\ t \right] \qquad (5.11)$$

$$\theta_2 = \theta_{2i} \cos \left[ \Omega \sqrt{3 \left(1 - \frac{A}{B}\right)}\ t \right] \qquad (5.12)$$

onde os deslocamentos iniciais são dados por $\theta_{1i}$ e $\theta_{2i}$.

Supondo-se que B >> A, as Equações 5.11 e 5.12 são aproximadas por:

$$\theta_1 \cong \theta_{1i} \cos 2\Omega t$$

$$\theta_2 \cong \theta_{2i} \cos \sqrt{3}\ \Omega t$$

Lembrando-se que o período orbital é dado por:

$$T_{orb} = \frac{2\pi}{\Omega} ,$$

o período natural de oscilação em rolamento será dado por:

$$T_{\theta_1} \cong \frac{2\pi}{2\Omega} = \frac{T_{orb}}{2} , \qquad (5.13)$$

e em arfagem por:

$$T_{orb} \cong \frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\Omega} = \frac{T_{orb}\sqrt{3}}{3} \qquad (5.14)$$

Vê-se da Equação 5.13 que o período natural de oscilação em rolamento é igual à metade do período orbital. Como várias perturbações são periódicas, e possuem período igual ao orbital, pode-se prever a ocorrência do fenômeno da ressonância, uma vez que essas perturbações são sub-harmônicas do movimento de rolamento. Portanto, evidencia-se a necessidade de ter um dispositivo amortecedor para minimizar as oscilações.

Substituindo-se nas Equações 5.11 e 5.12 os valores dados, obtém-se:

$$\theta_1 \cong \theta_{1i} \cos 7{,}54\ t \qquad (5.15)$$

$$\theta_2 \cong \theta_{2i} \cos 6{,}51\ t\ , \qquad (5.16)$$

com o tempo t dado em horas. Pelas Equações 5.15 e 5.16, pode-se verificar que o período aproximado do movimento de rolamento situa-se em torno de 50 minutos e do movimento de arfagem, em torno de 58 minutos.

## 5.2 - CURVAS EQUIPOTENCIAIS; LIMITES DE LIBRAÇÕES

Reescrevendo-se a Equação 4.44 para p e ρ iguais a zero, tem-se:

$$U = \frac{1}{2}\,\Omega^2\, B \cos^2\theta_2 - \frac{1}{2}\,\Omega^2.(4B - 3A)\cos^2\theta_1\,\cos^2\theta_2 \qquad (5.17)$$

Dado um valor de U constante, U = C, pode-se obter o lugar geométrico de todos os pares, $\theta_1$, $\theta_2$, que resultam em U = C. Para conseguir isto, basta atribuir valores para $\theta_1$ na expressão:

$$\cos \theta_2 = \pm \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{2C}{B - (4B - 3A) \cos^2 \theta_1}} \quad , \tag{5.18}$$

obtendo-se o valor de $\theta_2$ correspondente. É facil ver que o gráfico assim obtido será simétrico, tanto em relação ao eixo $\theta_1$ como em relação ao eixo $\theta_2$. Somente deverão ser considerados os valores de $\theta_1$, tais que:

$$\left| \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{2C}{B - (4B - 3A) \cos^2 \theta_1}} \right| \leq 1$$

As curvas dadas pela Figura 5.5 foram obtidas para diversos valores de U. Estas curvas são interpretadas como sendo curvas de nível da função potencial U. O ponto central corresponde à posição de equilíbrio (mínimo de U).

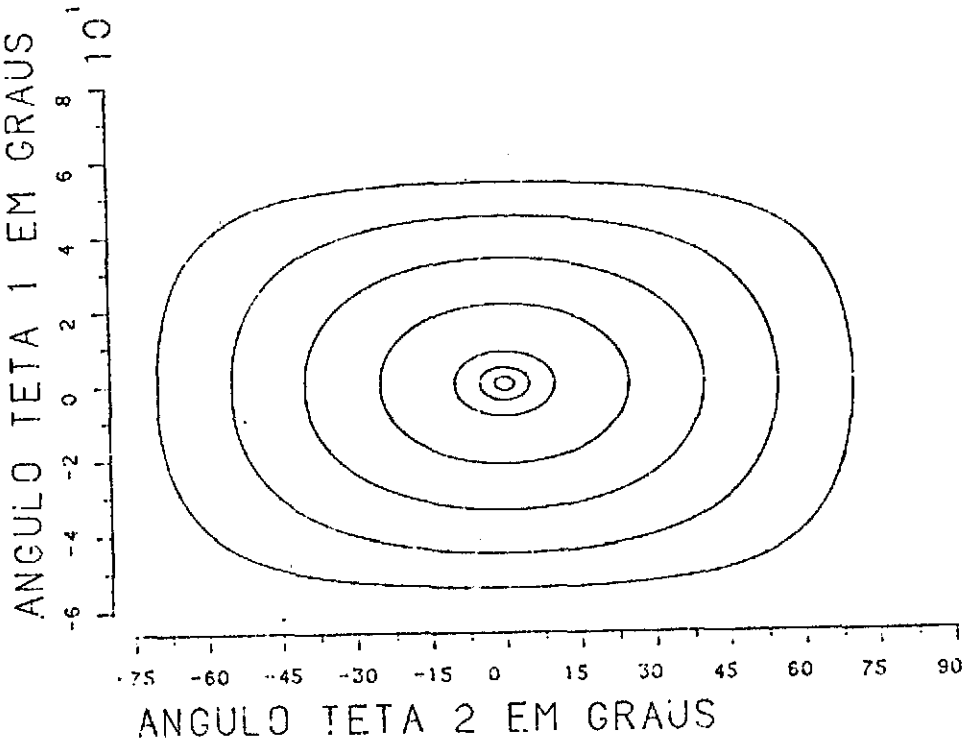


Fig. 5.5 - Curvas equipotenciais.

Um movimento, cujas condições iniciais estejam sobre uma determinada curva equipotencial U = C, com $\dot{\theta}_{1i} = \dot{\theta}_{2i} = 0$, estará totalmente contido dentro da curva equipotencial considerada. As curvas de nível de U, portanto, fornecem os limites de librações do satélite, para uma dada condição inicial, com o movimento partindo do repouso. Sempre que a trajetória do movimento atinge a curva de nível limitante, tem-se que $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$. A Figura 5.6 mostra o movimento de condições iniciais $\theta_{1i} = \theta_{2i} = 5^0$ e $\dot{\theta}_{1i} = \dot{\theta}_{2i} = 0$, contido dentro da curva equipotencial $U = -5{,}21 \times 10^{-4}$ kg . m$^2$ . s$^{-2}$. Lembrando-se que a constante do movimento é $H = T_2 + U$, se o satélite parte do repouso, isto é, $T_2 = 0$, e o eixo de simetria do satélite forma um ângulo $\theta$ com a vertical local de sorte que $U = H_0$, então para todo o movimento subsequente tem-se que $T_2 \geq 0$ e portanto $U \leq H_0$. Isto explica o observado na Figura 5.6.

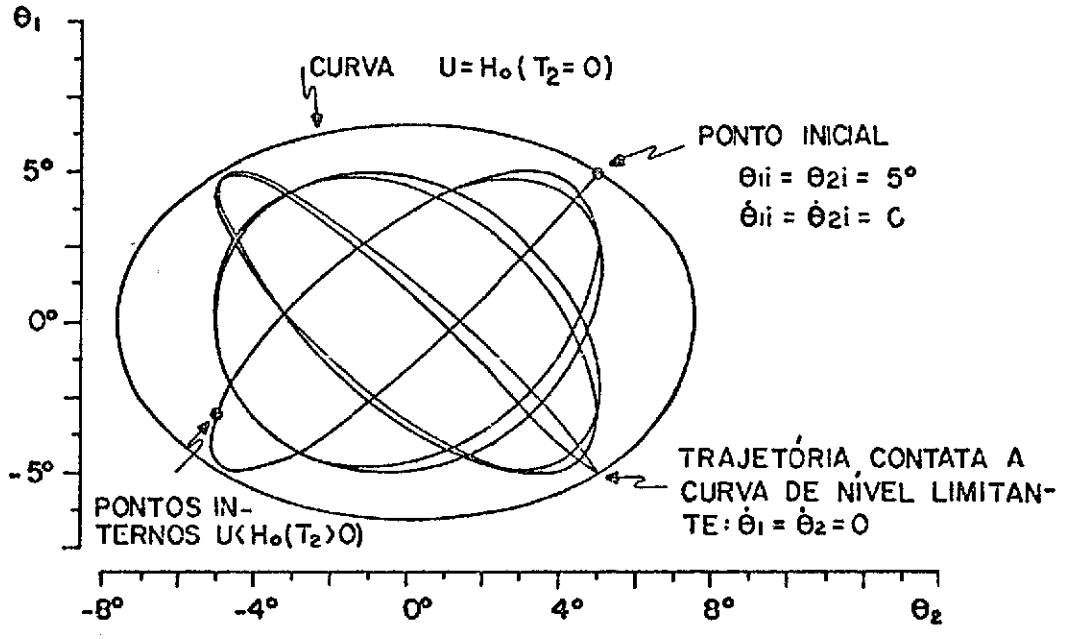


Fig. 5.6 - Determinação da curva limitante das librações para $\theta_{1i} = \theta_{2i} = 5^0$ e $\dot{\theta}_{1i} = \dot{\theta}_{2i} = 0$.

Para determinar o limite da região estável, ou seja, o maior valor de U para o qual o sistema ainda oscila em torno da posição de equilíbrio considerada, basta aumentar o valor de U, a partir do mínimo em questão, até obter a última curva fechada possível. A Figura 5.7 mostra que, para o caso presente, a curva separatriz ocorre para U = 0, e portanto $\theta_{1MAX} = 59^{o}36'$ e $\theta_{2MAX} = 90^{o}$.

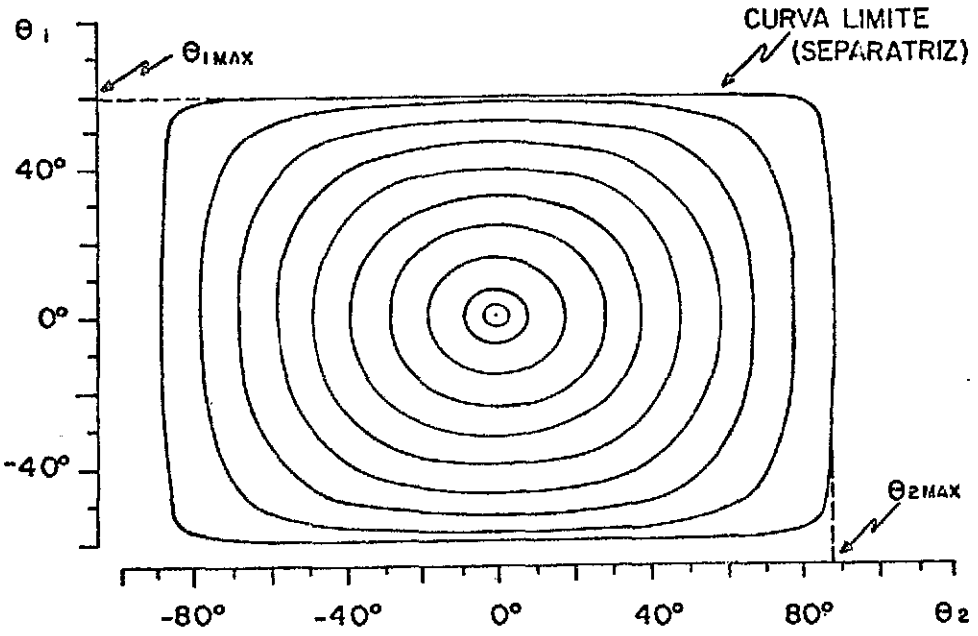


Fig. 5.7 - Determinação dos limites da região estável.

# CAPÍTULO 6

## AMORTECIMENTO E CONJUGADOS PERTURBADORES

### 6.1 - AMORTECIMENTO

Normalmente, as forças amortecedoras são tais que $\dot{H} \leq 0$. De acordo com a teoria de estabilidade de Liapunov, uma posição de equilíbrio que é estável para forças potenciais torna-se assintoticamente estável com a adição de forças dissipativas. Se acaso ocorrer $\dot{H} = 0$ em pontos diferentes da posição de equilíbrio, diz-se que o amortecimento é espalhado ("pervasive damping").

Considere-se o caso de amortecimento por histerese magnética. As perdas por histerese magnética nas barras magnéticas ocorrem devido aos ciclos contínuos de magnetização e desmagnetização, induzidos pelas oscilações do satélite no campo magnético. Como o fenômeno da histerese é independente da frequência, este amortecedor é particularmente desejável em aplicações de estabilização por gradiente de gravidade, quando as frequências de oscilações são inerentemente pequenas.

Tentativas feitas no passado para predizer o desempenho de satélites, utilizando-se amortecedores por histerese magnética, invariavelmente resultaram em uma simulação por computador. O modo mais preciso e que gasta menos tempo de computação consiste em uma simulação híbrida, sendo que a parte analógica seria fornecida, através de equipamentos que acoplam as barras magnéticas reais e o computador analógico, ao computador digital (Gluck and Wong, 1968).

Sabe-se que aumentando o volume das barras magnéticas resulta um decaimento mais rápido das librações iniciais, mas observa-se uma maior perturbação magnética atuando no satélite, que torna maior o pico do desvio da vertical local em regime. Deve-se, portanto, ajustar a taxa inicial de decaimento desejada com a precisão da estabilização final.

Na especificação de projeto do sistema amortecedor é dado o tempo requedido para o satélite entrar em operação nominal, o qual vincula o transiente do sistema. Este tempo, dependendo da missão, pode variar de algumas horas a algumas dezenas de dias. Em contraste, na especificação de projeto para o sistema em regime é dada a precisão do alinhamento do sistema com a vertical local.

Segundo Fischell (1961), o método de amortecimento por histerese magnética é mais efetivo para amortecer librações normais ao plano da órbita. No entanto, esse efeito é minimizado devido à indução de movimento de arfagem (no plano da órbita) pelo movimento de rolamento.

Uma continuação natural deste trabalho seria o dimensionamento de um dispositivo amortecedor.

## 6.2 - CONJUGADOS PERTURBADORES

A seguir, são descritas brevemente as influências dos conjugados perturbadores mais importantes que atuam no satélite.

### 6.2.1 - RADIAÇÃO SOLAR

De acordo com Wiggins (1964), à altitude considerada de 700 quilômetros, o momento devido à pressão de radiação é da ordem de grandeza do momento produzido pelo arrasto aerodinâmico, podendo, portanto, ser também desprezado.

### 6.2.2 - EXCENTRICIDADE DA ÓRBITA

Uma pequena excentricidade na órbita induz um movimento oscilatório de arfagem, de acordo com a Equação 3.61. O ângulo de arfagem máximo, $\theta_{2MAX}$, que é induzido pela pequena excentricidade e, é dado por:

$$\theta_{2MAX} = \frac{2\,e}{3\,(\frac{B-A}{C}) - 1} \qquad \text{(radianos)} \qquad (6.1)$$

Se $B = C >> A$, então a Equação 6.1 toma a forma aproximada:

$$\theta_{2MAX} \cong e \qquad \text{(radianos)} \qquad (6.2)$$

Como ilustração, $e = 0{,}01$ fornece $\theta_{2MAX} \cong 0{,}5^{o}$.

### 6.2.3 - CAMPO MAGNÉTICO

Os conjugados perturbadores magnéticos resultam da interação entre o campo magnético residual do satélite e o campo geomagnético. As principais fontes destes conjugados são as correntes de fuga, a histerese magnética e o momento magnético do satélite. Estas perturbações são as de mais difícil modelamento. Conhecendo-se os parâmetros magnéticos do satélite, um procedimento aproximado para calcular o conjugado perturbador devido ao campo magnético é descrito por Wertz (1978).

### 6.2.4 - FLEXIBILIDADE

A perturbação na atitude do satélite devido à sua flexibilidade depende fortemente da geometria do satélite e dos materiais que o compõe. Pode-se desprezar a influência da flexibilidade do satélite, se a menor frequência natural de oscilação das componentes flexíveis for, pelo menos, uma ordem de magnitude maior que as frequências das librações do corpo rígido, que, para os valores considerados no Capítulo 5, são da ordem de $2 \times 10^{-3}$ rad/s.

A menor frequência natural de oscilação das componentes flexíveis do sistema é dada, aproximadamente, por:

$$f \cong \sqrt{\frac{3EI}{(M+0{,}243\ \rho\ell)\ell^3}} \quad \text{(rad/s)}, \qquad (6.3)$$

onde E é o módulo de Young do material estrutural do mastro; I o momento de inércia de área de uma seção transversal do mastro; o produto EI, conhecido como "rigidez à flexão"; M a massa na ponta do mastro; $\rho$, a densidade de massa do mastro por unidade de comprimento; e $\ell$, o comprimento do mastro.

Substituindo-se na Equação 6.3 os valores típicos, M=5 kg, $\ell = 9{,}7$ m, $\rho = 0{,}0219$ kg/m e $EI = 4{,}2$ N . $m^2$, obtém-se $f \cong 5{,}2 \times 10^{-2}$ rad/s. Neste caso, portanto, para efeito de controle de atitude, ou mais especificamente estabilização de atitude, o satélite poderá ser aproximado pelo corpo rígido, desprezando-se o efeito da flexibilidade. Deve ficar claro, contudo, que deve ser considerada a influência da flexibilidade para efeito de determinação e predição de atitude.

Um trabalho recente sobre o assunto, para uma configuração do satélite semelhante à que foi adotada nesta dissertação, foi realizado por Lourenção (1981).

### 6.2.5 - CURVAMENTO TÉRMICO DO MASTRO

A amplitude da libração solar induzida pelo curvamento térmico do mastro é uma função das posições relativas da órbita e do Sol. Esta perturbação é muito mais efetiva segundo o eixo de rolamento, para órbitas não-equatoriais. O valor máximo da amplitude do movimento de rolamento é função do ângulo formado pela linha Terra-Sol e pela linha dos nodos, da quantidade da órbita que está na sombra, e da inclinação da órbita. Se esta perturbação não for levada em consideração no projeto, desvios da ordem de $10^0$ da vertical local serão possíveis de ocorrer, como foi mostrado por Pisacane et alii (1967) em um trabalho referente ao satélite GEOS-A (Explorer XXIX), para uma órbita nominal de $59^0$ de inclinação. Para esta inclinação específica, o ângulo de ro

lamento máximo, que é $8,5^{o}$ para o mastro de 17 metros inicialmente projetado, ocorre quando o ângulo entre a linha Terra-Sol e a linha dos modos é de $65^{o}$ e o perigeu está na sombra. Estudos posteriores revelaram que um mastro de 13 metros de comprimento fazia com que o ângulo de rolamento não passasse de $5^{o}$, na pior configuração das posições relativas da órbita e do Sol. Um mastro menor não melhoraria o desempenho do sistema, pois a perturbação no movimento de arfagem devido à excentricidade começaria a predominar.

### 6.2.6 - EFEITO DA NÃO-ESFERICIDADE DA TERRA

No caso de um satélite axi-simétrico, a Equação 2.28 fornece $N_x = 0$, visto que B = C. Baseando-se no trabalho de Beletskii (1966), pode-se considerar que os conjugados $N_y$ e $N_z$, respectivamente, em relação ao eixo de rolamento e ao eixo de arfagem, são compostos de duas parcelas: a primeira, denotada por $N_{oy}$ (ou $N_{oz}$), corresponde à parcela devido a um campo central newtoniano (Terra esférica), e a segunda, denotada por $N_{py}$ (ou $N_{pz}$), refere-se à perturbação quando se inclui o termo $J_2$ da expansão em esféricos harmônicos do geóide. Desse modo, tem-se:

$$N_y = N_{oy} + N_{py} \tag{6.4}$$

$$N_z = N_{oz} + N_{pz} \tag{6.5}$$

As expressões para $N_{oy}$ e $N_{oz}$ são obtidas a partir das Equações 1.3 e 2.28.

$$N_{oy} = (B - A)\,\frac{3\mu}{R^3}\,\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \tag{6.6}$$

$$N_{oz} = (B - A)\,\frac{3\mu}{R^3}\,\cos^2\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 \tag{6.7}$$

Os conjugados perturbadores $N_{py}$ e $N_{pz}$ têm a forma:

$$N_{py} = (B-A)\frac{\mu}{R^3}\left[8{,}111 \times 10^{-3}\frac{R_e^2}{R^2}(7\,\mathrm{sen}^2 i\,\mathrm{sen}^2\lambda - 1)\right.$$

$$\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_1\cos\theta_2 + 1{,}622\times 10^{-2}\,\mathrm{sen}\,i\,\mathrm{sen}\,\lambda\frac{R_e^2}{R^2}$$

$$\left.(\mathrm{sen}\,\theta_1\,\tilde{\beta}_1 - \cos\theta_1\cos\theta_2\,\tilde{\beta}_3) + 3{,}244\times 10^{-3}\frac{R_e^2}{R^2}\,\tilde{\beta}_1\,\tilde{\beta}_3\right] \quad (6.8)$$

$$N_{pz} = (B-A)\frac{\mu}{R^3}\left[8{,}111\times 10^{-3}\frac{R_e^2}{R^2}(7\,\mathrm{sen}^2 i\,\mathrm{sen}^2\lambda - 1)\right.$$

$$\cdot\ \cos^2\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2\cos\theta_2 + 1{,}622\times 10^{-2}\,\mathrm{sen}\,i\,\mathrm{sen}\,\lambda\frac{R_e^2}{R^2}$$

$$\cdot\ (\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2\,\tilde{\beta}_1 + \cos\theta_1\cos\theta_2\,\tilde{\beta}_2)$$

$$\left.+\ 3{,}244\times 10^{-3}\frac{R_e^2}{R^2}\,\tilde{\beta}_1\,\tilde{\beta}_2\right], \quad (6.9)$$

onde $R_e$ é o raio equatorial da Terra ($R_e \cong 6378{,}14$ km); $i$ é a inclinação da órbita; $\lambda$ a latitude do satélite; e $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2$ e $\tilde{\beta}_3$ são definidos como:

$$\tilde{\beta}_1 = -\,\mathrm{sen}\,\theta_2\cos\lambda\,\mathrm{sen}\,i + \mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2\cos i$$

$$+\ \cos\theta_1\cos\theta_2\,\mathrm{sen}\,\lambda\,\mathrm{sen}\,i \quad (6.10)$$

$$\tilde{\beta}_2 = \cos\theta_2\cos\lambda\,\mathrm{sen}\,i + \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2\cos i$$

$$+\ \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2\,\mathrm{sen}\,\lambda\,\mathrm{sen}\,i \quad (6.11)$$

$$\tilde{\beta}_3 = \cos\theta_1\cos i - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\lambda\,\mathrm{sen}\,i \quad (6.12)$$

Para uma órbita de inclinação $i = 25^{o}$, e usando-se os dados do Capítulo 5, os conjugados perturbadores $N_{py}$ e $N_{pz}$ são menores que 2% dos valores de $N_{oy}$ e $N_{oz}$. Uma simulação mais completa, que vise a determinação e a predição de atitude do satélite, deverá incluir esta perturbação.

6.2.7 - EFEITO DAS LIBRAÇÕES DO SATÉLITE EM SEU MOVIMENTO ORBITAL

Pode-se obter, a partir da Equação 2.15, a função potencial, considerando-se a Terra esférica:

$$V = -\frac{\mu m_2}{R} + \frac{\mu m_2}{R^2}(\ell_{11}\,\bar{x} + \ell_{21}\,\bar{y} + \ell_{31}\,\bar{z}) - \frac{\mu}{2R^3}(A+B+C)$$

$$+ \frac{3\mu}{2R^3}(A\ell_{11}^2 + B\ell_{21}^2 + C\ell_{31}^2)\,, \qquad (6.13)$$

onde $\mu = Gm_1$, $m_1$ é a massa da Terra, $m_2$ é a massa do satélite, e $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ são as coordenadas do centro de massa do satélite. O termo $-\mu m_2/R$ na Equação 6.13 representa o potencial gravitacional newtoniano para o caso em que se considera que toda a massa do corpo está concentrada em um só ponto (centro de gravidade). Os outros termos na Equação 6.13 aparecem devido ao fato do satélite possuir dimensões geométricas finitas.

A Equação 6.13 pode estudar o movimento de um corpo rígido sob três pontos de vista diferentes:

1) Problema clássico do movimento de um corpo massivo, quando a função potencial é obtida a partir da Equação 6.13, fazendo-se formalmente $A = B = C = 0$. Este estudo refere-se ao movimento de um corpo em relação a um ponto fixo (origem do sistema xyz).

2) Estudo do movimento do satélite em relação ao seu centro de massa, quando se toma $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$ e supõe-se que o centro de

massa do satélite descreve uma órbita kepleriana. Esta foi a aproximação utilizada nos capítulos anteriores.

3) Estudo do movimento do satélite em relação ao seu centro de massa, acoplado ao movimento próprio do centro de massa, que relaciona a rotação e a translação do satélite, resulta uma órbita não-kepleriana. Também nesse caso $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$. Sabendo-se que o momento de inércia I (representando A, B ou C) é dado por $I = m_2 R_G^2$, uma vez que o raio de giração $R_G$ é da ordem de uma dimensão típica do satélite e, portanto, $R_G << R$, os termos não-newtonianos da Equação 6.13 serão da ordem de grandeza de $(R_G/R)^2$. Estes termos provocam um efeito desprezível na órbita do satélite. Um estudo mais profundo neste assunto foi desenvolvido por Moran (1961), para o caso de um satélite com a forma de um halteres.

## 6.3 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um aumento no comprimento do mastro, o que acarretará uma inércia maior do satélite em dois eixos, faz com que as perturbações induzidas pelo campo geomagnético, que são muito importantes na altura considerada, tornem-se menos significativas, assim como a amplitude do termo forçante, no movimento de arfagem, devido à excentricidade da órbita. Por outro lado, as perturbações decorrentes da pressão de radiação solar, do curvamento térmico do mastro, da flexibilidade e do arrasto atmosférico, crescerão com um aumento no comprimento do mastro. Portanto, fica evidenciado que deve existir um comprimento ótimo para o mastro, que minimize a amplitude do movimento do sistema em regime.

É aconselhável utilizar um mastro com aproximadamente dois metros a mais que o tamanho de projeto, pois se a órbita nominal não for alcançada, fica claro que o comprimento do mastro não terá o seu valor otimizado. Nesse caso, se o satélite fosse colocado em uma órbita mais alta, haveria ainda à disposição a possibilidade de esticar ainda mais o mastro, na tentativa de obter um tamanho ótimo.

Se uma manobra de inversão for requerida, o tempo total para executar esta tarefa é maior que o tempo que o satélite ficará visível para uma estação de controle. Entretanto, esta manobra pode ser realizada em um arco da órbita coberto por duas estações de controle, cujas visibilidades se interceptem ligeiramente. Deverá ser feita uma análise detalhada deste problema, visando a maximização da probabilidade de sucesso da citada manobra.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


AUELMANN, R.R. Regions of libration for a symmetrical satellite. *AIAA Journal*, 1(6):1445-1447, June 1963.

BELETSKII, V.V. *Motion of an artificial satellite about its center of mass*. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1966.

CARRARA, V. *Modelagem das forças e torques atuantes nos satélites*. Tese de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1981. No prelo.

CENTRE NATIONAL D'ETUDES SPATIALES (CNES). *Évolution d'attitude et stabilisation des satellites*, Colloque International, Paris, 8-11 Oct. 1968.

ETKIN, B. Dynamics of gravity-oriented orbiting systems with application to passive stabilization. *AIAA Journal*, 2(6):1008-1014, June 1964.

EVANS, W.J. Aerodynamic and radiation disturbance torques on satellites having complex geometry. *Journal of Astronautical Science*, 9(1):93-99, 1962.

FISCHELL, R.E. Magnetic damping of the angular motions of earth satellites. *ARS Journal*, 31(9):1210-1217, Sept. 1961.

FLANAGAN, R.C.; RANGARAJAN, R. Liapunov stability analysis and attitude response of a passively stabilized space system. *Astronautica Acta*, 1B(1):21-34, June 1972.

FRIK, M.A. Attitude stability of satellites subjected to gravity gradient and aerodynamic torques. *AIAA Journal*, 8(10):1780-1785, Oct. 1970.

GLUCK, R.; WONG, A. Inline hybrid computer for simulation of passively stabilized satellites. In: *AIAA Guidance Control and Flight Dynamics Conference*, Pasadena, CA, Aug. 12-14, 196B. (AIAA Paper no. 68-853).

KAPLAN, M.H. *Modern spacecraft dynamics and control*. New York, NY, John Winley, 1976.

KONDAPALLI, R.R. *Previsão rápida do tempo de vida de satélites*. Tese de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1981. (INPE-2330-TDL/81).

LOURENÇÃO, P.T.M. *Análise da estabilidade dinâmica de um satélite flexível utilizando o método de Liapunov.* Tese de Mestrado em Engenharia Aeronáutica no Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA. São José dos Campos, 1981.

MACNAUGHTON, J.D.; GRIMSHAW, E.R. Deployable booms for gravity gradient stabilization - a progress report. *Canadian Aeronautics and Space Journal,* 15:371-374, Nov. 1969.

MATSUMARA, A.Z. *Estabilidade de um satélite rígido munido de um rotor.* Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica. São Paulo, Escola Politécnica da USP, 1978.

MEIROVITCH, L.; WALLACE Jr., F.B. On the effect of aerodynamic and gravitational torques on the attitude stability of satellites. *AIAA Journal,* 4(12):2196-2202, Dec. 1966.

MEIROVITCH, L. *Methods of analytical dynamics.* New York, NY, McGraw Hill, 1970.

MORAN, J.P. Effects of plane librations on the orbital motion of a dumbbell satellite. *ARS Journal,* 31(8):1089-1096, Aug. 1961.

NASA. *Passive gravity-gradient stabilization,* Symposium held in Moffett Field, CA, May 10-11, 1965. Washington, DC, NASA, 1966. (NASA SP-107).

PISACANE, V.L.; PARDOE, P.P.; HOOK, B.J. *Stabilization system analysis and performance of the GEOS-A gravity gradient satellite (explorer XXIX).* Washington, DC, NASA, 1967. (NASA CR-903).

PRINGLE Jr., R. On the capture, stability, and passive damping of artificial satellites. Washington, DC, NASA, 1964. (NASA CR-139).

SCHAAF, S.A.; CHAMBRE, P.L. The flow of rarefied gasses. Section H of Fundamentals of Gas Dynamics. Princeton, NJ, H.W. Emmons, 195B.

SCHAAF, S.A.; TALBOT, L. *Mechanics of rarefied gases; handbook of supersonic aerodynamic.* Washington, DC, U.S. Government Printing Office, 1959, v. 5.

SCHAMBERG, R. A new analytic presentation of surface interaction for hyperthermal free-molecule flow with application to satellite drag; Proceeding Heat Transfer Fluid Mech. Inst., 1-13, 1959.

WERTZ, J.R. *Spacecraft attitude determination and control.* Dordrecht, D. Reidel, c1978. (Astrophysics and Space Science Library, 73).

WIGGINS, L.E. Relative magnitude of the space-environment torques on a satellite. *AIAA Journal,* 2(4):770-771, Apr. 1964.

ZAJAC, E.E. Capture problem in gravitational attitude control of satellites. *ARS Journal,* 31(10):1464-1466, Oct. 1961.