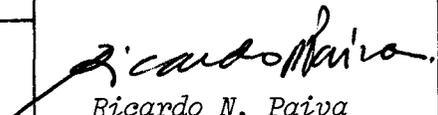
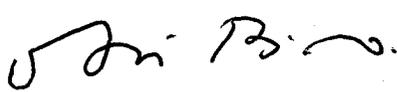


1. Publicação nº <i>INPE-2385-RPI/069</i>	2. Versão	3. Data <i>Abri1, 1982</i>	5. Distribuição <input checked="" type="checkbox"/> Interna <input type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DSE/DDO</i>	Programa <i>ORBAT</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>FILTRO DE KALMAN</i> <i>ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA</i>			
7. C.D.U.: <i>681.5.01</i>			
8. Título <i>ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA DO RUÍDO NO ESTADO PARA ESTIMADORES SEQUENCIAIS</i>		10. Páginas: <i>36</i>	
		11. Última página: <i>29</i>	
		12. Revisada por	
9. Autoria <i>Atair Rios Neto</i> <i>Hélio Koiti Kuga</i>		 <i>Ricardo N. Paiva</i>	
		13. Autorizada por	
Assinatura responsável 		 <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor	
14. Resumo/Notas <i>A utilidade do filtro de Kalman fica comprometida devido à ocorrência de divergência nas estimativas, quando este é utilizado na sua forma original para estimar o estado de sistemas dinâmicos não-lineares. A divergência é resultado da modelagem imprecisa do sistema, de instabilidade numérica do algoritmo, e de hipóteses de linearização adotadas. Para eliminar esse comportamento, propõe-se um procedimento para estimar, adaptativamente e em tempo real, o nível de ruído a ser incluído na dinâmica do sistema. Apresentam-se e discutem-se os resultados de testes preliminares do estimador no caso de determinação de órbita em tempo real, de satélites artificiais terrestres a baixa altitude, observados por estações topocêntricas de rastreamento.</i>			
15. Observações			

ABSTRACT

When employed in its original form to estimate the state of nonlinear dynamic systems the Kalman filter is usually inappropriate due to the divergence of the estimates. Divergence is caused by inaccurate modelling of the system, numerical instability of the algorithm and linearization hypotheses. A procedure to eliminate this behavior is to estimate adaptively and in real time the noise level to be included in the system dynamics. Preliminary tests of a real time orbit determination estimator, applied to a near Earth satellites, tracked by topocentric tracking stations, are presented and discussed.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	v
1. <u>INTRODUÇÃO</u>	1
2. <u>EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS</u>	2
3. <u>PROCEDIMENTO DE ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA DO RUÍDO NO ESTADO</u>	5
3.1 - Hipótese básica	5
3.2 - Equação de pseudomedidas	6
3.3 - Processamento das pseudomedidas	10
3.4 - Informação a priori	11
3.5 - Sumário do ruído adaptativo	12
4. <u>SIMULAÇÕES</u>	14
4.1 - Modelo matemático	14
4.2 - Testes	15
5. <u>CONCLUSÕES</u>	28
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	29

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1 - Divergência em posição	19
2 - Divergência em velocidade	19
3 - Resíduo normalizado de "range"	20
4 - Resíduo normalizado de "range-rate"	20
5 - Erros em posição para uma estação de rastreamento	21
6 - Erros em velocidade para uma estação de rastreamento	21
7 - Resíduo normalizado de "range"	22
8 - Resíduo normalizado de "range-rate"	22
9 - Erros em posição para duas estações de rastreamento	23
10- Erros em velocidade para duas estações de rastreamento	23
11- Erros em posição para 3 estações de rastreamento	24
12- Erros em velocidade para 3 estações de rastreamento	24
13- Resíduo normalizado de "range" (duas estações)	25
14- Resíduo normalizado de "range-rate" (duas estações)	25
15- Resíduo normalizado de "range" (3 estações)	26
16- Resíduo normalizado de "range-rate" (3 estações)	26

1. INTRODUÇÃO

Recentemente o filtro de Kalman tem ganho larga aceitação pela comunidade científica e provou ser extremamente útil na estimação do estado de sistemas dinâmicos. Para problemas não-lineares a versão mais comumente usada é o filtro estendido de Kalman (Jazwinski, 1970; Gelb et alii, 1974). Desde que esta extensão é uma aplicação do filtro de Kalman para sistemas não-lineares, certos cuidados devem ser tomados pelo usuário que pretenda interpretar corretamente as informações fornecidas por tal estimador.

Para sistemas não-lineares, o filtro pode divergir em decorrência das várias hipóteses simplificadoras adotadas. Após certo período de operação do filtro, os erros nas estimativas do estado podem, eventualmente, assumir valores incoerentes com sua estatística estimada. O que comumente ocorre é que o resultado numérico observado contradiz o comportamento previsto, pois os erros reais de estimação excedem os valores estimados. Esse comportamento anômalo decorre, basicamente, de três fontes de erros:

- erros devidos às hipóteses de linearização,
- erros devidos ao procedimento numérico-computacional empregado,
- erros devidos à má-modelagem do sistema dinâmico.

Quando a matriz de covariância estimada para os erros se torna irrealisticamente pequena, atinge-se um nível de confiança exageradamente otimista nas estimativas obtidas. Como consequência, o ganho (o qual corrige a estimativa e a covariância) também se torna pequeno, e medidas subseqüentes são ignoradas para efeito de melhoria da estimativa, ocorrendo a divergência (Fitzgerald, 1971).

Em vista disso, propõe-se estimar o nível de ruído necessário no estado para evitar a divergência. Tal ruído é incorporado no procedimento de estimação por meio de suas propriedades estatísticas, degradando a matriz de covariância dos erros e aumentando o ganho e, com

isso, "abrindo" o filtro para novos dados. Este ruído é dosado, passo a passo, de forma adaptativa, através de um critério generalizado de coerência estatística entre os erros reais e os estimados (Kuga, 1982; Rios Neto e Kuga, 1981). O resíduo das observações (diferença entre o valor observado e o calculado) é o valor utilizado para detectar a ocorrência de divergência e combatê-la em tempo real, estando disponível sempre que existirem dados de observação. No procedimento proposto, isto é feito da seguinte maneira:

- a) modela-se o ruído no estado como uma seqüência branca (realizações constantes entre observações);
- b) utiliza-se o conceito de resíduo verdadeiro (que ocorreria na ausência de erros de observação) através de uma generalização do procedimento proposto por Jazwinski (1970), para a materialização da coerência entre erros estimados e resíduos de observação;
- c) na dosagem do ruído no estado, utiliza-se o limite de 3σ do correspondente ruído de observação, ao invés do resíduo calculado, sempre que este exceder aquele limite (tendo em vista a satisfação das hipóteses de linearização).

Com o objetivo de validar preliminarmente o procedimento para as aplicações pretendidas, ele é testado segundo condições simuladas para o caso de determinação de órbita de satélites artificiais a baixa altitude.

2. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Seja o sistema dinâmico descrito por

$$\dot{x}(t) = f(x,t) + G(t) \omega(t) \quad (1)$$

onde x é um vetor $n \times 1$ que representa o estado; $f(x,t)$ é uma função vetorial $n \times 1$ não-linear do estado, que exprime a modelagem dinâmica ado

tada no estimador; $G(t)$ é uma matriz $n \times r$ contínua no tempo; e $\omega(t)$ é um vetor $r \times 1$ de um ruído branco gaussiano cuja estatística é dada por $E[\omega(t)] = 0$, $E[\omega(t) \omega^T(\tau)] = Q(t) \delta(t - \tau)$, sendo $Q(t)$ a matriz de densidade espectral associada do ruído dinâmico ω .

Para os propósitos em vista discretiza-se a dinâmica do sistema da Equação 1, para a propagação da matriz de covariância do erro no estado via filtro estendido de Kalman. Para tanto assume-se $\omega(t)$ uma sequência branca ("step-process") i.é., ω é considerado constante no intervalo $k \leq t \leq k+1$ ($k \equiv t_k$, $k+1 \equiv t_{k+1}$, notação devido à discretização) de modo que $E[\omega_k] = 0$ e $E[\omega_k \omega_j^T] = Q_k \delta_{kj}$ para tal intervalo. Adicionalmente considera-se a matriz Q_k diagonal, supondo-se que as componentes do vetor ω_k são independentes entre si. A dinâmica linearizada e discretizada é, então, dada por:

$$\delta x_{k+1} = \phi_{k+1,k} \delta x_k + \Gamma_k \omega_k, \quad (2)$$

onde $\phi_{k+1,k}$ é a matriz de transição correspondente ao intervalo $k \leq t \leq k+1$; $\delta x \triangleq x - \hat{x}(t/k)$ é o desvio do estado no instante $k \leq t \leq k+1$ em relação a uma referência $\hat{x}(t/k)$; e Γ_k é uma matriz $n \times r$ dada por:

$$\Gamma_k = \int_k^{k+1} \phi_{k+1,s} G(s) ds, \quad (3)$$

pelo fato de se considerar ω um "step-process". A matriz de transição é obtida integrando-se:

$$\dot{\phi}_{t,k} = F(\bar{x}, t) \phi_{t,k}, \quad k \leq t \leq k+1, \quad (4)$$

com condição inicial $\phi_{k,k} = I$, matriz $n \times n$ identidade. A matriz $n \times n$ $F(\bar{x}, t)$ é expressa por:

$$F(\bar{x}, t) = \left. \frac{\partial f(\bar{x}, t)}{\partial x} \right]_{\bar{x} = \hat{x}(t/k)} ; \quad (5)$$

ou seja, avaliada em $k \leq t \leq k + 1$ na referência $\bar{x} = x(t/k)$.

A modelagem das medidas \bar{e} expressa por:

$$y_k = h_k(x_k) + v_k \quad (6)$$

e \bar{e} é admitida escalar, sem perda de generalidade. Dada a forma não-linear das medidas, efetua-se uma linearização em torno da referência:

$$\delta y_k = H_k \delta x_k + v_k , \quad (7)$$

onde δy_k é definido por $\delta y_k \triangleq y_k - h_k[\hat{x}(k/k - 1)]$, H_k é um vetor linha $1 \times n$ dado por $H_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial x} \right]_{x = \hat{x}(k/k - 1)}$, e v_k é uma sequência gaussiana

branca dada por $E[v_k] = 0$ e $E[v_k^2] = R_k > 0$ escalar. As estimativas do estado e do erro são obtidas pelo algoritmo de Kalman (Jazwinski, 1970):

$$\hat{x}(k/k) = \hat{x}(k/k - 1) + K_k \{y_k - h_k[\hat{x}(k/k - 1)]\} ,$$

$$P(k/k) = P(k/k - 1) - K_k H_k P(k/k - 1) , \quad (8)$$

$$K_k = P(k/k - 1) H_k^T [H_k P(k/k - 1) H_k^T + R_k]^{-1} ,$$

$$\hat{x}(k + 1/k) = \hat{x}(k/k) + \int_k^{k+1} f(x, t) dt, \quad (9)$$

$$P(k + 1/k) = \phi_{k+1, k} P(k/k) \phi_{k+1, k}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T ,$$

onde as Expressões 8 são atualizações do estado e da covariância do erro no estado, e as Expressões 9 são propagações do estado estimado (segundo a dinâmica da Equação 1) e da covariância do erro no estado entre medidas (segundo a dinâmica da Equação 4).

3. PROCEDIMENTO DE ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA DO RUÍDO NO ESTADO

Esta seção apresenta o estimador adaptativo de ruído no estado. Analisa-se detalhadamente o desenvolvimento obtido à luz das condições impostas na Introdução.

A Seção 3.1 contém a hipótese básica que é a diretriz do procedimento. A Seção 3.2 desenvolve a hipótese básica para chegar à Equação de pseudomedidas. Na Seção 3.3 aplica-se o algoritmo de Kalman para processar as pseudomedidas. Na Seção 3.4 formaliza-se a informação a priori do estimador de ruído. A Seção 3.5 contém um sumário para aplicação do procedimento.

3.1 - HIPÓTESE BÁSICA

Seja a matriz Q_k covariância do ruído dinâmico ω , e q_{k+1} o vetor $r \times 1$ das componentes da diagonal de Q_k :

$$Q_k = \text{diag} \left\{ q_{k+1} \right\} .$$

Para estimar o nível de ruído Q_k , impõe-se a condição de coerência entre o resíduo e sua estatística (Jazwinski, 1970). Supondo-se que o resíduo verdadeiro das observações (definido como a diferença entre o valor verdadeiro da observação e seu valor estimado) tem distribuição gaussiana, determinam-se as variâncias q_{k+1} do ruído que produzam o mais provável resíduo verdadeiro. Algebricamente esta idéia é expressa por:

$$\max_{q_{k+1} \geq 0} p[r_v] , \quad (10)$$

maximizando a probabilidade do resíduo verdadeiro ocorrer. Na expressão 10, $p[r_v]$ representa a densidade de probabilidade do resíduo verdadeiro, e a restrição $q_{k+1} \geq 0$ é coerente com a propriedade de positividade das variâncias. A aplicação desta operação para o resíduo verdadeiro escalar leva à seguinte condição:

$$r_v^2(k+1) = E[r_v^2(k+1)], \quad (11)$$

que será considerada como hipótese básica.

3.2 - EQUAÇÃO DE PSEUDOMEDIDAS

O desenvolvimento algébrico da Condição 11 leva a uma expressão denominada pseudomedia. Para tal propósito, definir-se-á formalmente o conceito de resíduo verdadeiro. O resíduo calculado das medidas é a diferença entre o valor medido e o valor estimado; i.é.:

$$r(k+1) = y_{k+1} - \hat{y}_{k+1} = y_{k+1} - h_{k+1} [\hat{x}(k+1/k)]. \quad (12)$$

Define-se o resíduo verdadeiro das medidas como o resíduo que se obteria caso não houvesse ruído na medida:

$$r_v(k+1) = r(k+1) - v_{k+1}. \quad (13)$$

Portanto, o resíduo verdadeiro é uma abstração que auxilia o desenvolvimento das equações subsequentes.

Com uma aproximação de 1ª ordem para os resíduos escalares, as seguintes equações são válidas:

$$\begin{aligned} r(k+1) &= y_{k+1} - \hat{y}_{k+1} = H_{k+1} \delta x_{k+1} + v_{k+1} = \\ &= H_{k+1} \left\{ \phi_{k+1,k} [x_k - \hat{x}(k/k)] + \Gamma_k \omega_k \right\} + v_{k+1}, \quad (14) \end{aligned}$$

$$r_V(k+1) = H_{k+1} \left\{ \phi_{k+1,k} [x_k - \hat{x}(k/k)] + \Gamma_k \omega_k \right\}. \quad (15)$$

Assim,

$$E[r_V^2(k+1)] = H_{k+1} \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T H_{k+1}^T + H_{k+1} \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T H_{k+1}^T \quad (16)$$

e pela Equação 13,

$$r_V^2(k+1) = r^2(k+1) - 2r(k+1)v_{k+1} + v_{k+1}^2. \quad (17)$$

As parcelas que contêm o ruído v_{k+1} são modeladas por um erro η_{k+1}^i com a seguinte estatística:

$$\begin{aligned} E[\eta_{k+1}^i] &= E[-2r(k+1)v_{k+1} + v_{k+1}^2] = E[v_{k+1}^2] = R_{k+1} \\ E[(\eta_{k+1}^i - E[\eta_{k+1}^i])^2] &= E[-2r(k+1)v_{k+1} + v_{k+1}^2 - R_{k+1}]^2 \quad (18) \\ &= E[v_{k+1}^4 - 4r(k+1)v_{k+1}^3 - 2R_{k+1}v_{k+1}^2 + \\ &\quad 4r^2(k+1)v_{k+1}^2 + 4r(k+1)v_{k+1}R_{k+1} + \\ &\quad R_{k+1}^2], \end{aligned}$$

onde

$$E[v_{k+1}^4] = 3R_{k+1}^2,$$

$$E[v_{k+1}^3] = 0,$$

$$E[v_{k+1}^2] = R_{k+1},$$

$$E[v_{k+1}] = 0,$$

resultando

$$E[(\eta'_{k+1} - E[\eta'_{k+1}])^2] = 4r^2(k+1) R_{k+1} + 2R_{k+1}^2.$$

Impondo-se a hipótese básica, Equação 11; i.é., igualando-se a Expressão 17 à Expressão 16, obtêm-se:

$$r^2(k+1) + \eta'_{k+1} = H_{k+1} \phi_{k+1} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T H_{k+1}^T + H_{k+1} \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T H_{k+1}^T. \quad (19)$$

Em seguida transforma-se η'_{k+1} em ruído branco gaussiano por:

$$\eta_{k+1} \triangleq \eta'_{k+1} - E[\eta'_{k+1}].$$

Portanto, η_{k+1} tem a seguinte estatística:

$$E[\eta_{k+1}] = E[\eta'_{k+1} - E[\eta'_{k+1}]] = 0$$

$$E[\eta_{k+1}^2] = E[(\eta'_{k+1} - E[\eta'_{k+1}])^2] = 4r^2(k+1) R_{k+1} + 2R_{k+1}^2. \quad (20)$$

Substituindo-se esta transformação na Equação 19 vem:

$$r^2(k+1) + R_{k+1} + \eta_{k+1} = H_{k+1} \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T H_{k+1}^T + H_{k+1} \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T H_{k+1}^T.$$

Como η_{k+1} tem média nula e é um ruído estatístico então:

$$r^2(k+1) + R_{k+1} - H_{k+1} \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T H_{k+1}^T = H_{k+1} \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T H_{k+1}^T + \eta_{k+1} \quad (21)$$

Lembrando-se que Q_k é uma diagonal pode-se obter:

$$H_{k+1} \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T H_{k+1}^T = M_{k+1} q_{k+1}, \quad (22)$$

onde q_{k+1} é o vetor $r \times 1$ que contém as componentes da diagonal de Q_k , e

$$M_{k+1} = \left[\left(\sum_{j=1}^n H_j \Gamma_{j1} \right)^2 : \left(\sum_{j=1}^n H_j \Gamma_{j2} \right)^2 : \dots : \left(\sum_{j=1}^n H_j \Gamma_{jr} \right)^2 \right], \quad (23)$$

o vetor $1 \times r$, onde H_j e Γ_{ji} , $i=1, \dots, r$ são os elementos do vetor H_{k+1} e da matriz Γ_k respectivamente. Em seguida define-se a pseudomedida es calar por:

$$z_{k+1} \triangleq r^2(k+1) + R_{k+1} - H_{k+1} \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T H_{k+1}^T, \quad (24)$$

obtendo-se finalmente a equação de pseudomedida:

$$z_{k+1} = M_{k+1} q_{k+1} + \eta_{k+1}, \quad (25)$$

onde o valor determinístico de z_{k+1} é dado pela Equação 24, M_{k+1} é dado pela Expressão 23, q_{k+1} são as variâncias a serem estimadas e η_{k+1} é um ruído branco gaussiano com a estatística fornecida pelas Equações 20.

Para o caso de sistemas não-lineares em que seja válida a consideração de que o ruído no estado tenha realizações que possam ser modeladas como pequenas perturbações, alguma forma de limitação deve ser considerada para o nível de ruído. Isto porque devido a erros iniciais grandes no estado pode ocorrer uma situação de perda de validade das hipóteses consideradas para as aproximações lineares. Assim, na Equação 25, os valores de $r(k+1)$, que definem z_{k+1} e η_{k+1} , são limitados superiormente, levando-se em conta uma faixa de 3σ correspondente ao ruído da observação i.é.:

$$r(k+1) = \max \left\{ r(k+1), 3\sigma_{k+1} \right\},$$

onde

$$\sigma_{k+1} = R_{k+1}^{1/2}$$

3.3 - PROCESSAMENTO DAS PSEUDOMEDIDAS

A Equação 25, equação de pseudomedidas, deve conter todas as informações necessárias para estimar as variâncias q_{k+1} , do ruído dinâmico ω_k . Se a quantidade de pseudomedidas num dado instante \bar{e} maior que a dimensão do vetor q_{k+1} , pode-se obter uma estimativa de q_{k+1} , processando-se as pseudomedidas sem informação a priori. Como nem sempre isso ocorre \bar{e} necessário ter algum critério para gerar a informação a priori e então aplicar o filtro de Kalman para processar as pseudomedidas sequencialmente. Assim, se $P^q(k+1/k)$ for a matriz $r \times r$ de covariância a priori do erro em q_{k+1} , e $\bar{q}(k+1/k)$ a estimativa a priori de q_{k+1} , tem-se:

$$K_{k+1} = P^q(k+1/k) M_{k+1}^T [M_{k+1} P^q(k+1/k) M_{k+1}^T + 4r^2(k+1) R_{k+1} + 2R_{k+1}^2]^{-1}$$

$$\bar{q}(k+1/k) = \bar{q}(k+1/k) + K_{k+1} [z_{k+1} - M_{k+1} \bar{q}(k+1/k)]$$

$$P^q(k+1/k+1) = P^q(k+1/k) - K_{k+1} M_{k+1} P^q(k+1/k). \quad (26)$$

Obtêm-se, pois, a estimativa de q_{k+1} e o nível de incerteza sobre tal estimativa, fornecido por $P^q(k+1/k+1)$. Após o processamento das pseudomedidas deve-se impor:

$$(q_{k+1})_i = \begin{cases} [\hat{q}(k+1/k+1)]_i & \text{se } > 0 \\ 0 & \text{do contrário} \end{cases} ; i = 1, \dots, r, \quad (27)$$

para manter a positividade da variância. A montagem da matriz Q_k é obtida após o processamento de todas as pseudomedidas:

$$Q_k = \text{diag} \left\{ (q_{k+1})_i ; i = 1, \dots, r \right\} . \quad (28)$$

A matriz Q_k é levada em conta na equação de propagação dos erros no estado (ver Relação 9):

$$P(k+1/k) = \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T .$$

3.4 - INFORMAÇÃO A PRIORI

Para gerar a informação a priori, a fim de processar as pseudomedidas, adota-se um modelo matemático para evolução da dinâmica de q i.é., para a estimativa da medida utilizada para a dispersão do ruído:

$$q_{k+1} = \phi_{k+1,k}^q q_k + \varepsilon_k , \quad (29)$$

onde $\phi_{k+1,k}^q$ representa a matriz de transição da variância do ruído dinâmico q , e ε_k é um ruído branco gaussiano com média nula e covariância $E [\varepsilon_k \varepsilon_j^T] = W_k \delta_{kj}$. Coerentemente com a hipótese já adotada de "step-process", utiliza-se $\phi_{k+1,k}^q \equiv I$. Se algum conhecimento acerca do comportamento dinâmico do nível de ruído q está disponível, ele deve ser incorporado na matriz de transição. Assim, a informação a priori é gerada por:

$$\begin{aligned} \hat{q}(k+1/k) &= \phi_{k+1,k}^q \hat{q}(k/k), \\ P^q(k+1/k) &= \phi_{k+1,k}^q P^q(k/k) (\phi_{k+1,k}^q)^T + W_k . \end{aligned} \quad (30)$$

A covariância W_k é suposta constante ao longo do processo de estimação e, basicamente, tem a função de evitar que a matriz P^q caia para valores demasiado pequenos. Seu valor deve ser ajustado por testes, e é razoável fixá-la no nível de precisão da máquina, por exemplo $W_k = 10^{-2p} I_{r \times r}$, onde p é o número de dígitos da mantissa com o qual o computador trabalha.

A escolha dos valores iniciais q_0 e P_0^q é bastante simplificada. Para q_0 , assume-se $\hat{q}(0/0) = 0$, por falta de maior conhecimento e ajusta-se $P^q(0/0)$ por testes, pois seu valor é inerente ao tipo de problema em questão. Se algo sobre a natureza de q for conhecido, pode-se escolher $\hat{q}(0/0)$ de acordo com tal fato.

3.5 - SUMÁRIO DO RUÍDO ADAPTATIVO

- *modelo dinâmico*

$$q_{k+1} = \phi_{k+1,k}^q q_k + \varepsilon_k ,$$

$$E[\varepsilon_k] = 0; E[\varepsilon_k \varepsilon_j^T] = W_k \delta_{kj} .$$

- *pseudomedida escalar*

$$z_{k+1} = M_{k+1} q_{k+1} + \eta_{k+1} ,$$

$$E[\eta_{k+1}] = 0; E[\eta_{k+1}^2] = 4r^2(k+1) R_{k+1} + 2R_{k+1}^2 ,$$

$$r^2(k+1) = \max \left\{ r^2(k+1), (3R_{k+1}^{1/2})^2 \right\}$$

- *filtro de Kalman*

• propagação

$$\hat{q}(k + 1/k) = \phi_{k+1,k}^q \hat{q}(k/k)$$

$$P^q(k + 1/k) = \phi_{k+1,k}^q P^q(k/k) [\phi_{k+1,k}^q]^T + W_k$$

• ganho

$$K_{k+1} = P^q(k + 1/k) M_{k+1}^T [M_{k+1} P^q(k + 1/k) M_{k+1}^T + 4r^2(k + 1) R_{k+1} + 2R_{k+1}^2]^{-1}$$

• atualização

$$\hat{q}(k + 1/k + 1) = \hat{q}(k + 1/k) + K_{k+1} [z_{k+1} - M_{k+1} \hat{q}(k + 1/k)]$$

$$P^q(k + 1/k + 1) = P^q(k + 1/k) - K_{k+1} M_{k+1} P^q(k + 1/k)$$

• montagem da matriz Q_k

$$(q_{k+1})_i = \begin{cases} \hat{q}_i(k+1/k+1) > 0 \\ 0 \text{ em caso contrário} \end{cases} \quad i = 1, \dots, r$$

$$Q_k = \text{diag} \{ q_{k+1} \}$$

A fim de caracterizar um caso típico no qual ocorreria a divergência, simula-se a órbita de um satélite artificial a baixa altitude, com modelagem matemática que leva em conta o geopotencial gravitacional (até o zonal J_6 e os tesserais C_{44} e S_{44}), o arrasto atmosférico e os efeitos perturbadores do Sol e da Lua. A órbita inicial tem 250 Km de altura, excentricidade nula (órbita circular) e inclinação de 42° . Supõe-se que tal órbita simulada seja a verdadeira. A partir desta órbita simulam-se observações contaminadas por erros e efetuadas por estações topocêntricas de rastreamento. A quantidade de estações topocêntricas é gerada de acordo com o teste que se queira efetuar (são estações fictícias). Cada estação efetua duas observações independentes (de "range" e de "range-rate") por segundo. Os desvios-padrões das observações são supostas constantes e valem $\sigma_\rho = 3$ metros para "range" e $\sigma_{\dot{\rho}} = 1$ cm/seg para "range-rate".

Paralelamente, a modelagem utilizada no estimador é bastante pobre em relação à órbita simulada. Ela modela somente o geopotencial gravitacional, incluindo o zonal J_2 . Portanto, fica caracterizada a má-modelagem como fonte de divergência.

4.1 - MODELO MATEMÁTICO

As equações que modelam o movimento do satélite no estimador são descritas por:

$$\dot{r}(t) = v(t),$$

$$\dot{v}(t) = a_m(t) + \omega(t), \quad (31)$$

onde r é o vetor posição, v é o vetor velocidade, a_m é o vetor das acelerações modeladas (até J_2) e ω é o vetor ruído branco gaussiano, representado por $E[\omega(t)] = 0$ e por $E[\omega(t) \omega^T(\tau)] = Q(t) \delta(t - \tau)$. De forma compacta, e em concordância com a Equação 1, representam-se tais equações por:

$$\dot{x}(t) = f(x,t) + G(t) \omega(t),$$

onde

$$x^T(t) = [r^T(t) : v^T(t)],$$

$$f(x,t) = [v^T(t) : a_m^T(t)],$$

$$G^T(t) = [0_{3 \times 3}^T : I_{3 \times 3}^T] . \quad (32)$$

Conforme a Equação 6, as medidas são modeladas por

$$y_k = h_k(x_k) + v_k ,$$

escalar. A estatística do ruído de medida v_k é expressa por $E[v_k] = 0$ e por $E[v_k^2] = R_k > 0$. Para observação de "range" vale $R_k^{1/2} = 3$ m e para o "range-rate" vale $R_k^{1/2} = 1$ cm/seg.

4.2 - TESTES

Como condições iniciais dos testes, o estado inicial contém erros de 1000 metros em posição e 10 m/seg em velocidade. A matriz de covariância dos erros no estado é considerada diagonal e inicializada a favor da segurança como se segue:

$$p_{ii}^{1/2}(0/0) = 3000\text{m}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$p_{ii}^{1/2}(0/0) = 30 \text{ m/seg}, \quad i = 4, 5, 6.$$

Para atestar a coerência estatística, são calculados a cada instante o erro real e o erro estimado, assim definidos:

- erro real em posição:

$$\Delta r = \left[\sum_{i=1}^3 (x_i - \hat{x}_i)^2 \right]^{1/2},$$

- erro estimado em posição:

$$\hat{\Delta r} = \left[\sum_{i=1}^3 P_{ii} \right]^{1/2},$$

- erro real em velocidade:

$$\Delta v = \left[\sum_{i=4}^6 (x_i - \hat{x}_i)^2 \right]^{1/2},$$

- erro estimado em velocidade:

$$\hat{\Delta v} = \left[\sum_{i=4}^6 P_{ii} \right]^{1/2}.$$

Mostra-se o comportamento do resíduo das observações através do resíduo normalizado de cada observação, calculado a cada instante por:

$$r_{\rho} = \frac{1}{NE} \sum_{i=1}^{NE} \frac{|y_{\rho}^i - \hat{y}_{\rho}^i|}{\sigma_{\rho}} \quad \text{para "range"},$$
$$r_{\dot{\rho}} = \frac{1}{NE} \sum_{i=1}^{NE} \frac{|y_{\dot{\rho}}^i - \hat{y}_{\dot{\rho}}^i|}{\sigma_{\dot{\rho}}} \quad \text{para "range-rate"},$$

onde NE é o número de estações de rastreamento, e \hat{y} é a estimativa da observação, conforme definido na Equação 12.

Para o estimador adaptativo de ruído no estado utilizam-se as seguintes inicializações:

- matriz de covariância do erro em q_0 :

$$P^q(0/0) = \text{diag} \left\{ 10^{-18} \right\}_{3 \times 3},$$

- matriz de covariância do ruído em q :

$$W_k = \text{diag} \left\{ 10^{-22} \right\}_{3 \times 3},$$

constante em todo o intervalo de estimação.

- valor inicial de q_0 :

$$\hat{q}(0/0) = 0.$$

Todos os testes são feitos para um intervalo de 8 minutos de observação, suficiente para caracterizar o comportamento do estimador.

- Caso com divergência

Neste teste, a propagação da matriz de covariância dos erros no estado \bar{e} é calculada por

$$P(k+1/k) = \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T,$$

ou seja, a matriz Q_k na Equação 9 é considerada nula. Portanto, o estimador de ruído adaptativo não é incluído no teste.

Pelo fato de a modelagem dinâmica do estimador ser imprecisa, o filtro "aprende" bem o problema errado. Os erros estimados decrescem, fornecendo uma visão otimista e irrealista ao estimador que supõe estar aumentando seu conhecimento sobre o sistema. Com o passar do tempo, os erros reais aumentam e as estimativas se deterioram.

As Figuras 1 e 2 mostram os erros em posição e em velocidade para observações efetuadas por 3 estações topocêntricas de rastreamento. A incoerência estatística manifesta-se através da discordância entre os erros reais e os estimados.

As Figuras 3 e 4 mostram os resíduos normalizados de "range" e de "range-rate". À medida que forem aumentando os erros reais e estes excederem o grau de precisão das observações, os resíduos se tornam tendenciosos, ultrapassando a faixa de 3σ (Kuga, 1982).

- Casos com aplicação do estimador adaptativo de ruído

As Figuras 5 e 6 mostram os erros quando uma estação fornece dados de observação para serem processados. Ao fim de 8 minutos, atinge-se precisão de 160 m em posição e 1,5 m/s em velocidade. As estatísticas são coerentes e fornecem 400 m de erro em posição e 4 m/s em velocidade, portanto, a favor da segurança. As Figuras 7 e 8 expõem o comportamento dos resíduos das observações.

Nas Figuras 9 e 10, 11 e 12, estão traçados os erros, quando são utilizadas duas e três estações de rastreamento, respectivamente. Há coerência estatística entre os erros reais e os estimados em ambos os casos. As Figuras 13 e 14, 15 e 16, contêm os resíduos para duas e três estações, respectivamente.

A Tabela 1 fornece uma visão geral dos resultados dos testes.

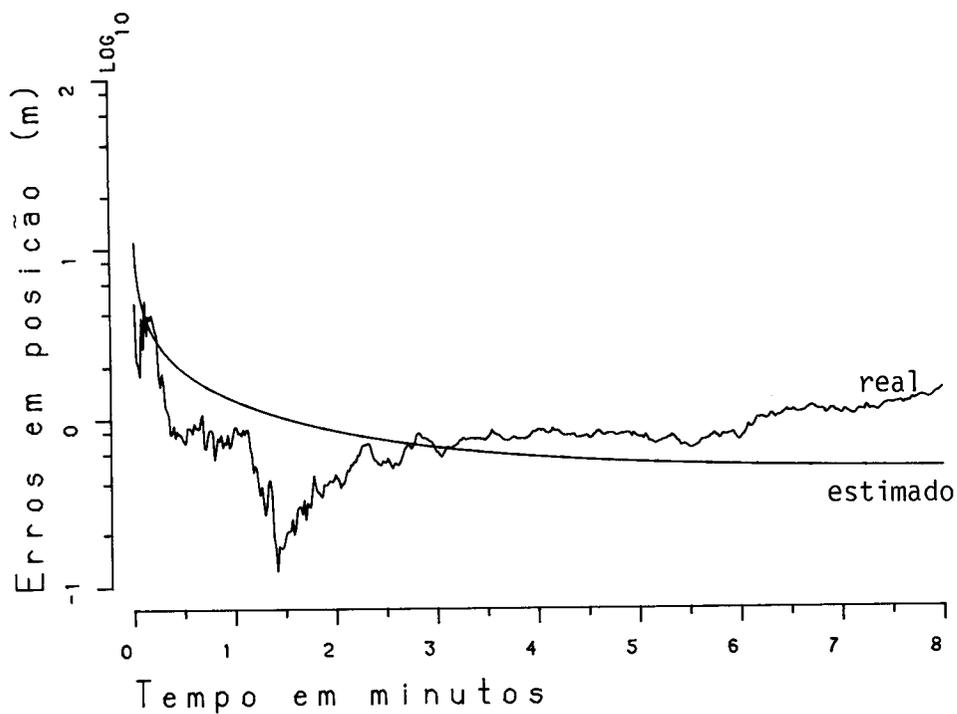


Fig. 1 - Divergência em posição.

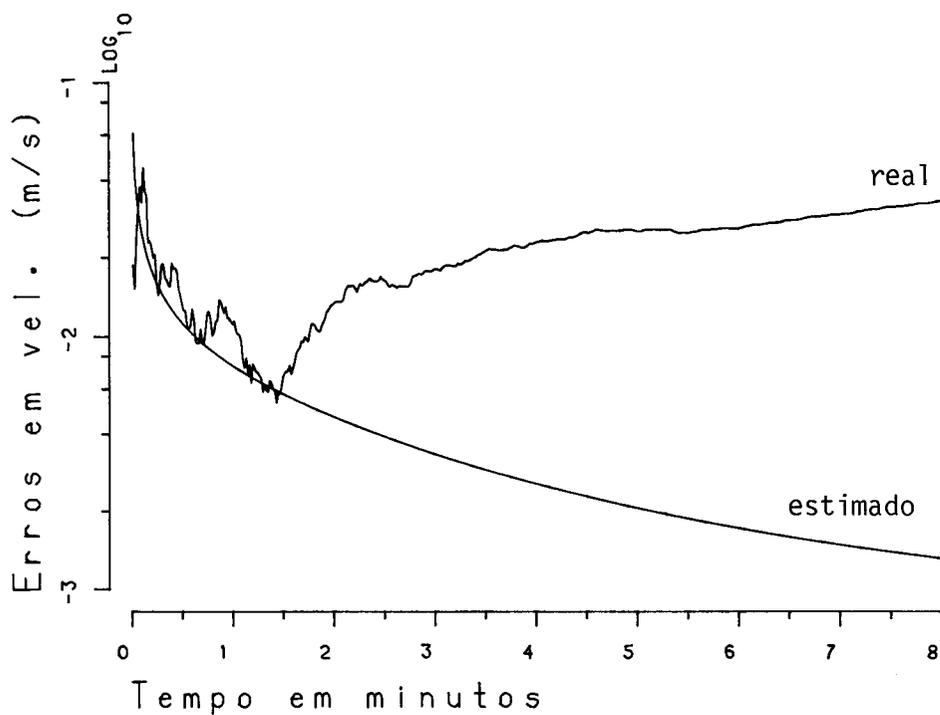


Fig. 2 - Divergência em velocidade.

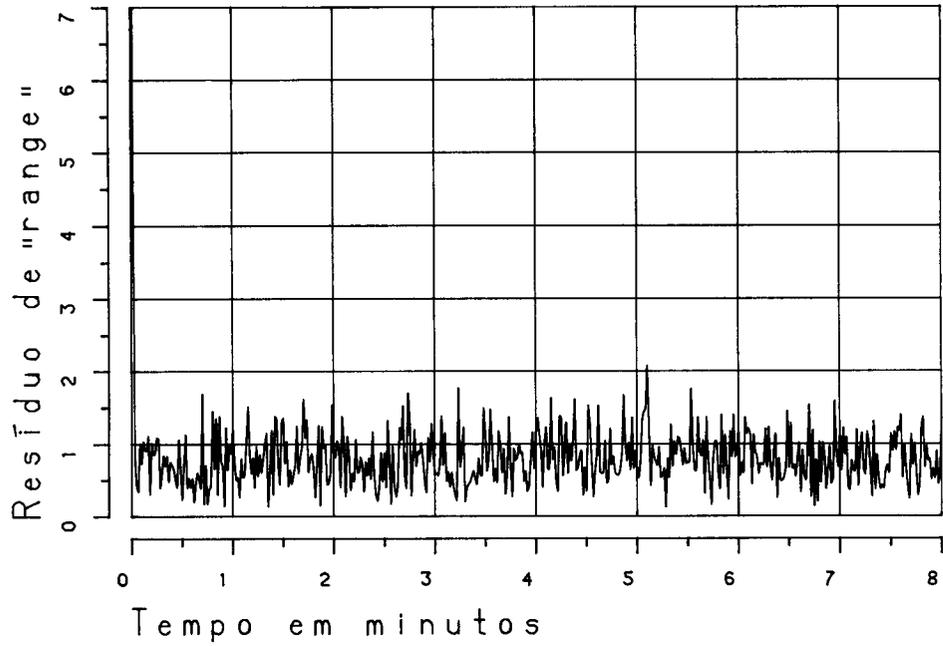


Fig. 3 - Resíduo normalizado de "range".

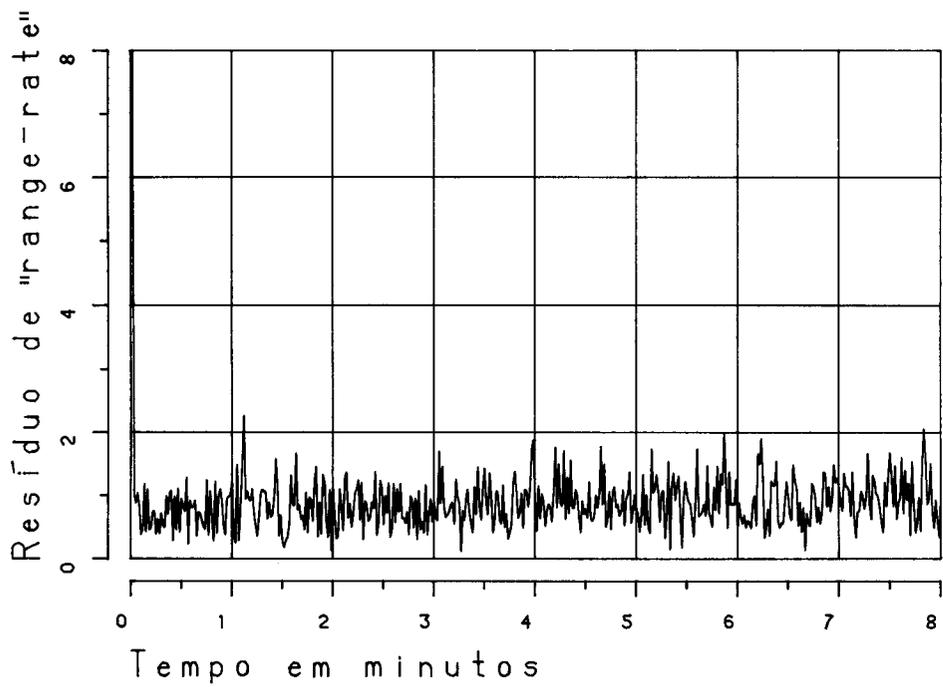


Fig. 4 - Resíduo normalizado de "range-rate".

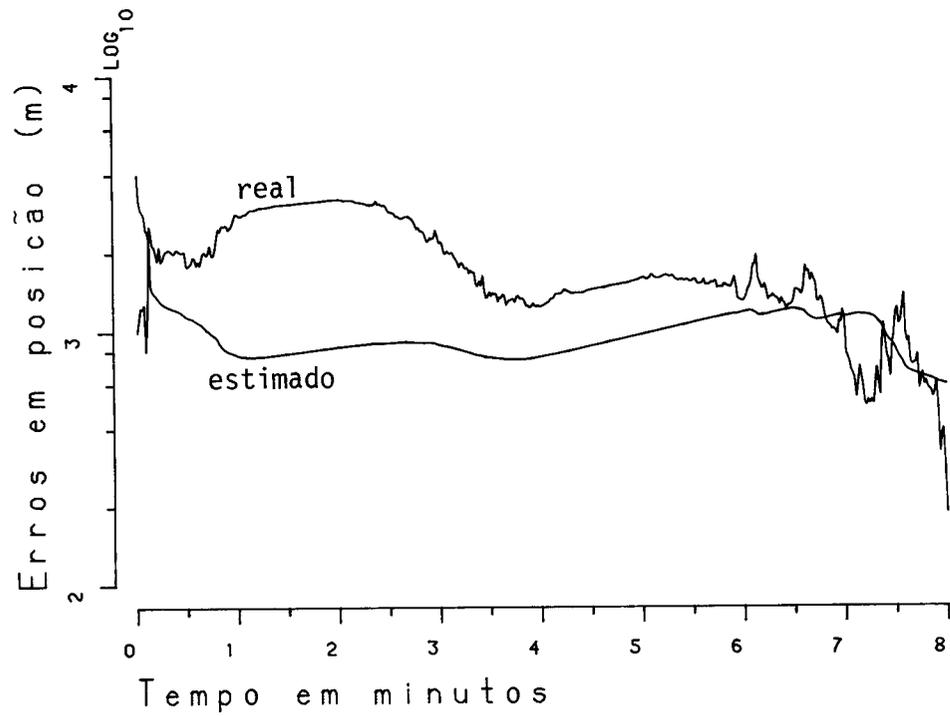


Fig. 5 - Erros em posição para uma estação de rastreamento.

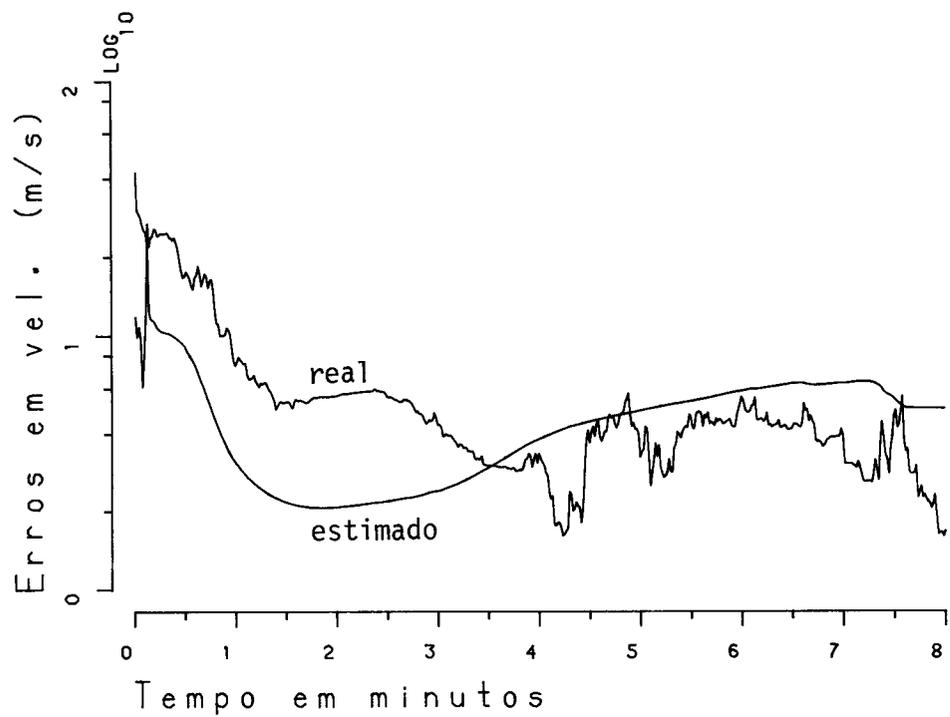


Fig. 6 - Erros em velocidade para uma estação de rastreamento.

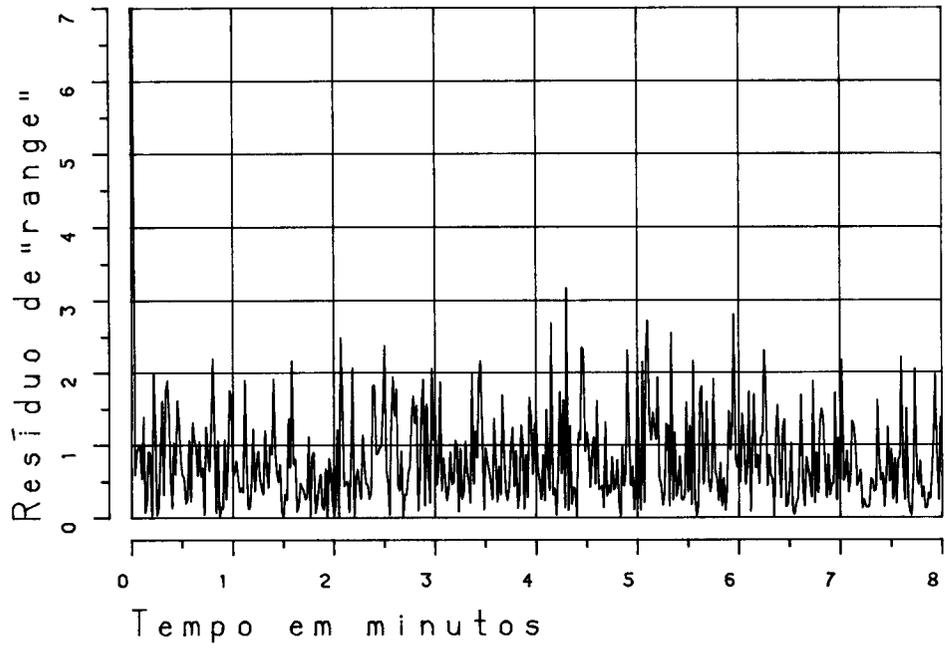


Fig. 7 - Resíduo normalizado de "range".

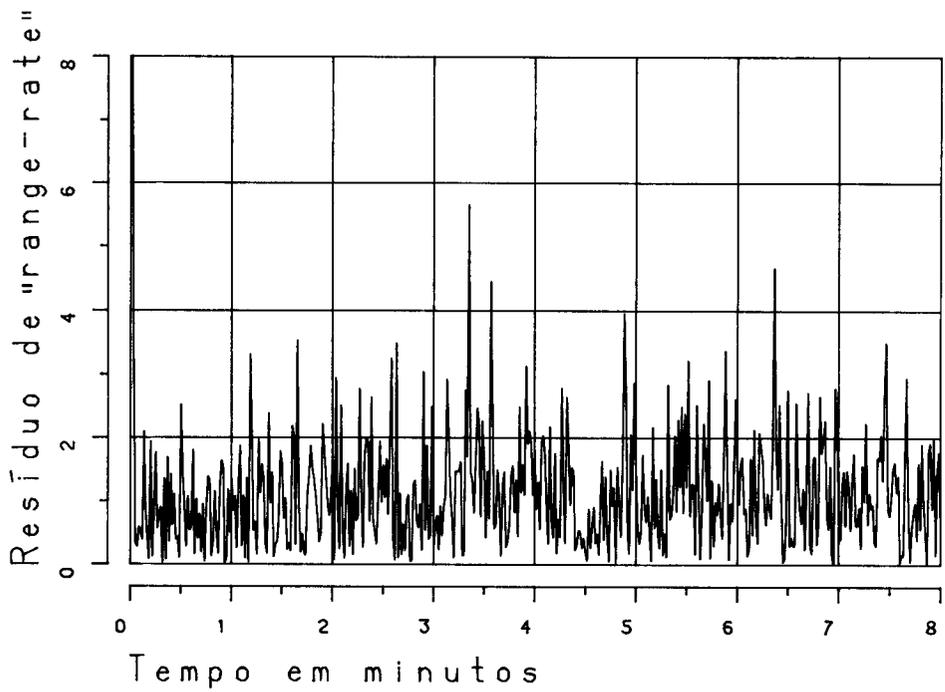


Fig. 8 - Resíduo normalizado de "range-rate".

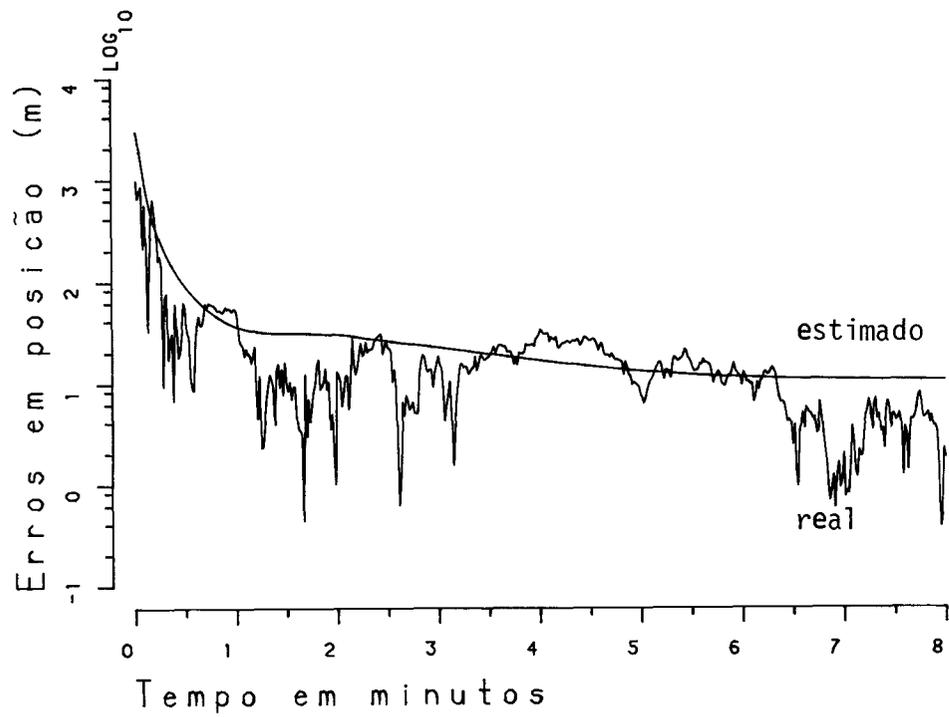


Fig. 9 - Erros em posição para duas estações de rastreamento.

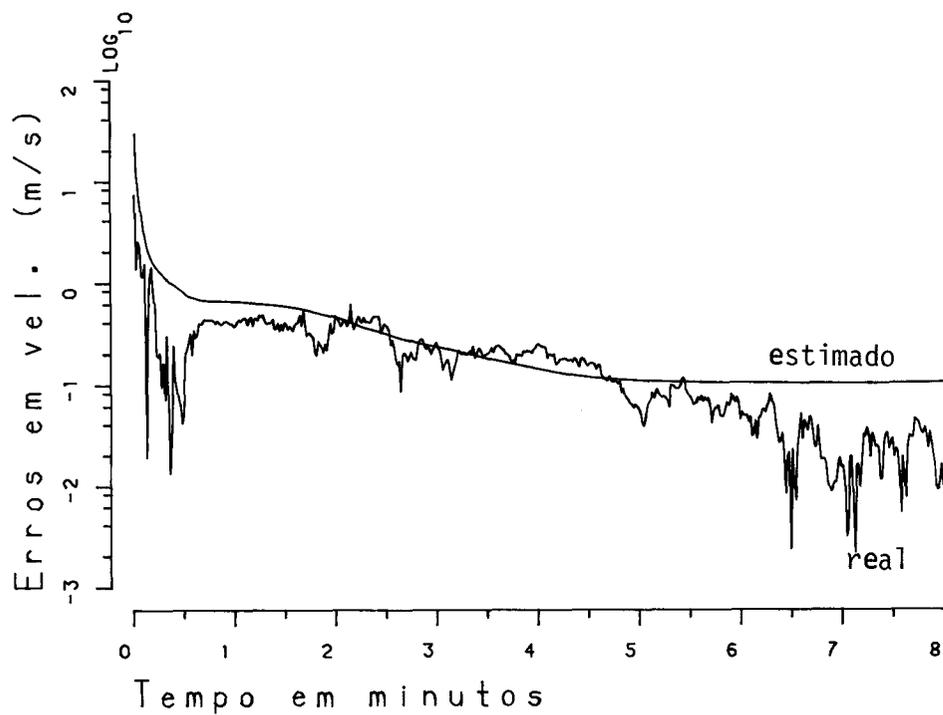


Fig. 10 - Erros em velocidade para duas estações de rastreamento.

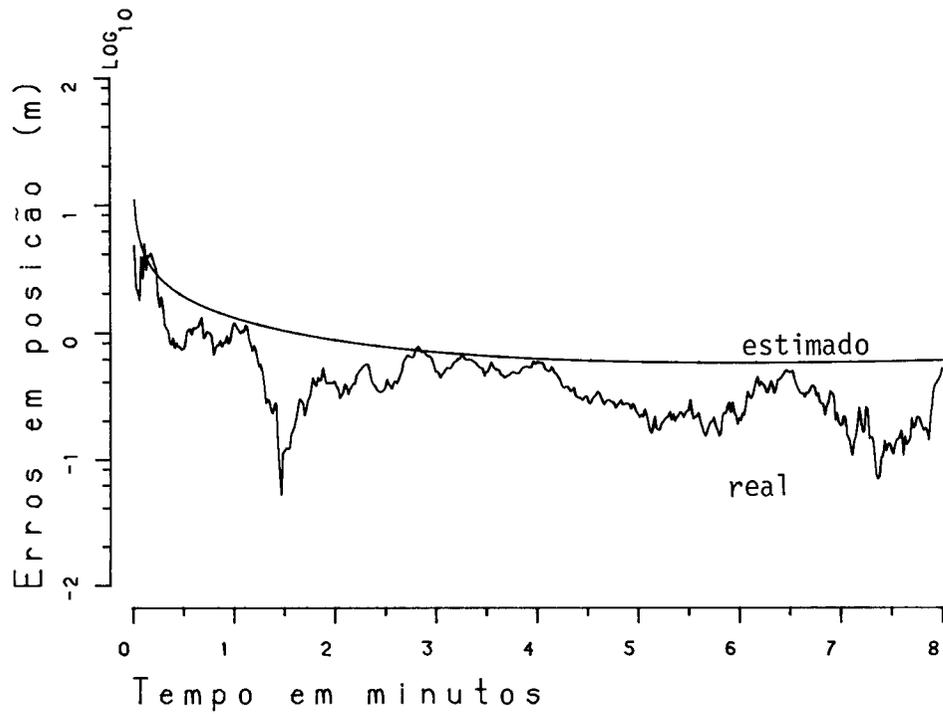


Fig. 11 - Erros em posição para 3 estações de rastreamento.

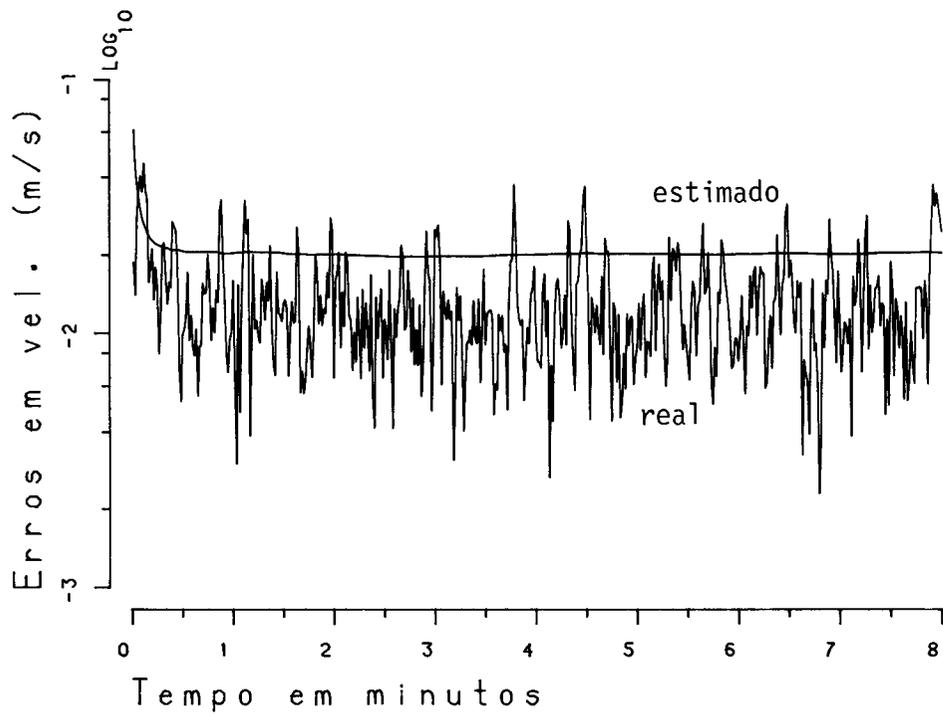


Fig. 12 - Erros em velocidade para 3 estações de rastreamento.

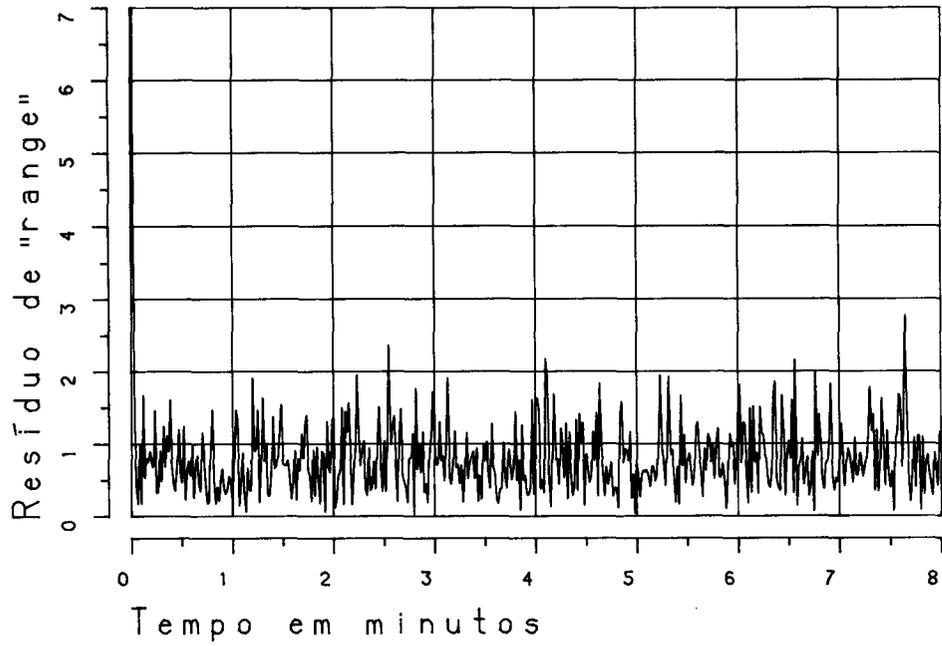


Fig. 13 - Resíduo normalizado de "range" (duas estações).

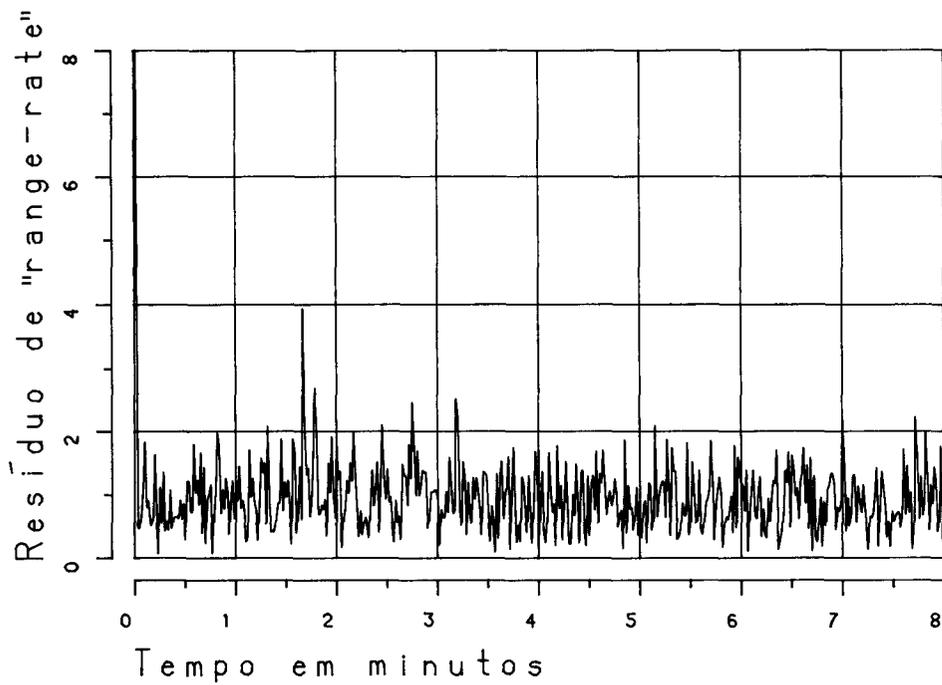


Fig. 14 - Resíduo normalizado de "range-rate" (duas estações).

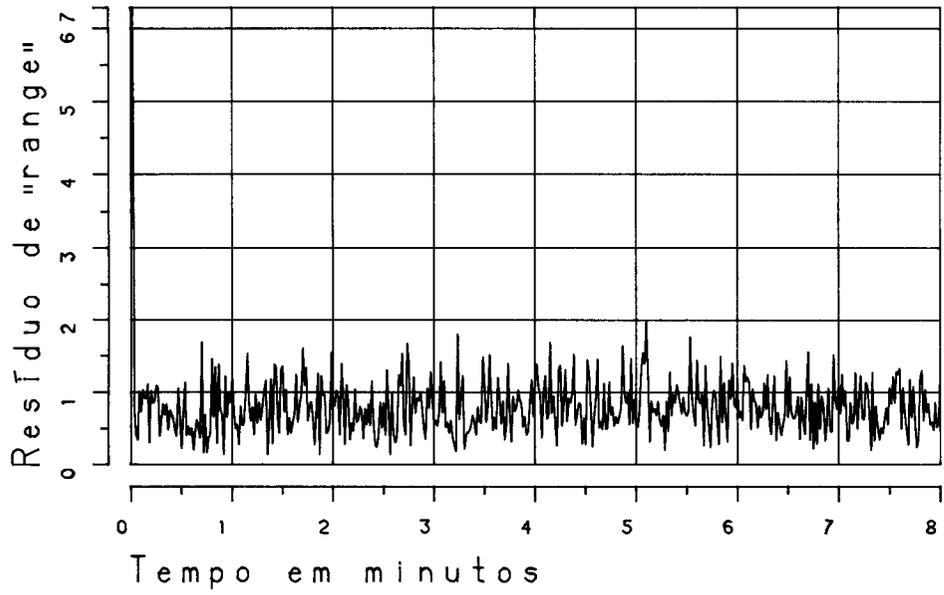


Fig. 15 - Resíduo normalizado de "range" (3 estações).

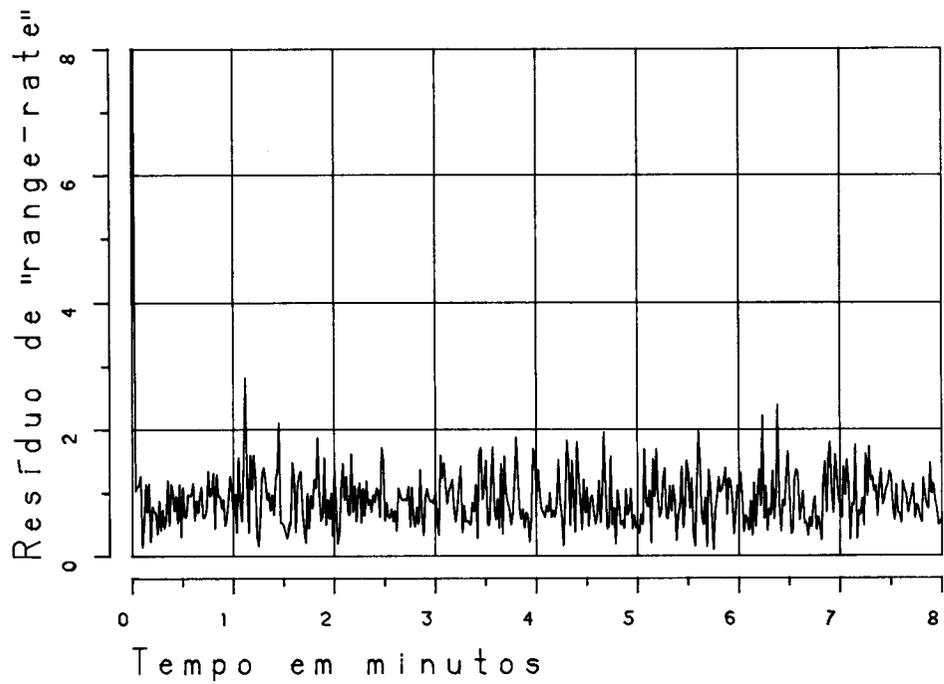


Fig. 16 - Resíduo normalizado de "range-rate" (3 estações).

TABELA 1

RESULTADOS DOS CASOS TESTADOS

QUANTIDADE DE ESTAÇÕES	ERROS INICIAIS (m e m/s)				ERROS FINAIS (m e m/s)				COMENTÁRIO
	$\Delta \bar{r}$	Δr	$\Delta \bar{v}$	Δv	$\Delta \bar{r}$	Δr	$\Delta \bar{v}$	Δv	
3	3000	1000	30	10	0,5	1,6	0,002	0,03	diverge, $Q_k \equiv 0$
1	3000	1000	30	10	400	160	4	1,5	960 dados
2	3000	1000	30	10	10	2	0,1	0,02	1920 dados
3	3000	1000	30	10	0,4	0,3	0,02	0,01	2880 dados

5. CONCLUSÕES

As simulações realizadas com o objetivo de validar preliminarmente o estimador de ruído levam às conclusões:

- 1) a não-linearidade aliada a uma modelagem dinâmica incorreta levam à divergência, se nenhuma técnica de compensação for adotada. Depois de algum tempo de observação o filtro diverge, por melhor que sejam as condições, tais como: taxa de observações, nível de informação e precisão das medidas. O comportamento está coerente com o obtido por outros autores, em situações semelhantes (Jazwinski, 1970).
- 2) Sob as mesmas condições, mas com o uso do estimador adaptativo de ruído, o filtro adquire a necessária estabilização para manter a coerência estatística e fornecer estimativas de boa qualidade (veja caso com 3 estações de rastreamento). Tal desempenho se obtém também, embora com alguma deterioração da qualidade das estimativas, quando o filtro trabalha sob más condições de observabilidade, geradas artificialmente por uma ou duas estações de rastreamento.

Os resultados obtidos constituem uma boa indicação de que o procedimento ora desenvolvido se qualifica para utilização na estimação de estado de sistemas não-lineares, em tempo real.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- FITZGERALD, R.J. Divergence of the Kalman filter. *IEEE Transactions on automatic control*, AC 16(6): 736 . 747, December, 1971.
- GELB, A.; KASPER JR., J.F.; NASH JR., R.A.; PRICE, C.F.; SUTHERLAND JR., A.A. *Applied optimal estimation*. Cambridge, Ma, MIT, 1974.
- JAZWINSKI, A.H. *Stochastic process and filtering theory*. New York, Academic, 1970. (Mathematics in Science and Engineering, 64).
- KUGA, H.K. *Estimação adaptativa de órbitas aplicada a satélites a baixa altitude*. Tese de mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1982 (INPE-2316-TDL/079).
- RIOS NETO, A.; KUGA, H.K. Estimação adaptativa e em tempo real de órbitas de satélites artificiais a baixa altitude. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 6., Rio de Janeiro, 15-18 Dez., 1981. *Anais*. Rio de Janeiro, Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 1981, V.B, p. 405 - 414.