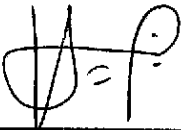


|                                                                                                                                                                                                                               |                          |                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Publicação nº<br><i>INPE-2388-PRE/108</i>                                                                                                                                                                                  | 2. Versão                | 3. Data<br><i>Abril, 1982</i>                                                                                                                                      | 5. Distribuição<br><input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa<br><input type="checkbox"/> Restrita |
| 4. Origem<br><i>DSE/DDO</i>                                                                                                                                                                                                   | Programa<br><i>ORBAT</i> |                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                      |
| 6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)<br><i>MARÉS TERRESTRES</i><br><i>PERTURBAÇÕES EM SATÉLITES</i>                                                                                                            |                          |                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                      |
| 7. C.D.U.: <i>521.3:629.7.076.6</i>                                                                                                                                                                                           |                          |                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                      |
| 8. Título<br><br><i>PERTURBAÇÃO DEVIDA À MARÉS EM SATÉLITES ARTIFICIAIS</i>                                                                                                                                                   |                          | 10. Páginas: <i>13</i>                                                                                                                                             |                                                                                                                                      |
|                                                                                                                                                                                                                               |                          | 11. Última página: <i>10</i>                                                                                                                                       |                                                                                                                                      |
| 9. Autoria <i>Hans-Ulrich Pilchowski</i>                                                                                                                                                                                      |                          | 12. Revisada por<br><br><i>Sae</i><br><br><i>Santiago Alves Tavares</i>                                                                                            |                                                                                                                                      |
| Assinatura responsável<br><br>                                                                                                             |                          | 13. Autorizada por<br><br><br><i>Nelson de Jesus Parada</i><br><i>Diretor</i> |                                                                                                                                      |
| 14. Resumo/Notas<br><br><i>Trata-se de um modelo teórico para o cálculo da influência de marés na órbita de satélites artificiais.</i>                                                                                        |                          |                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                      |
| 15. Observações <i>Este trabalho foi apresentado na III Escola de Matemática Aplicada, realizada de 15/02 à 19/02 de 1982 no Laboratório de Computação Científica, Rio de Janeiro, R.J. Será publicado nos Anais da SBMAC</i> |                          |                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                      |

ABSTRACT

*A theoretical model is presented to compute the tide influences over orbits of artificial satellites.*

PERTURBAÇÃO DEVIDA À MARÉS EM  
SATÉLITES ARTIFICIAIS

*H. U. Pilchowski*

CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO  
CNPq

INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS  
INPE

RESUMO

Trata-se de um modelo teórico para o cálculo da influência de ma  
rés na órbita de satélites artificiais.

## 1. INTRODUÇÃO

A atração exercida pelo sol e pela lua sobre a Terra produz deslocamentos elásticos em seu interior e uma protuberância em sua superfície, como mostra a Figura 1; onde " $F_p$ " representa a força de atração no ponto "P" e " $F_t$ " no centro de gravidade "T" da Terra. Consequentemente, tem-se uma perturbação no geopotencial. Esta perturbação reflete-se como perturbação gravitacional no movimento de satélites artificiais, e é distribuída [ 3 ] como se segue:

- a) perturbação devida a deslocamentos internos  $\approx 40\%$ .
- b) perturbação devida a deslocamentos na crosta (marés terrestres)  $\approx 48\%$ .
- c) perturbação devida a marés oceânicas  $\approx 12\%$ .

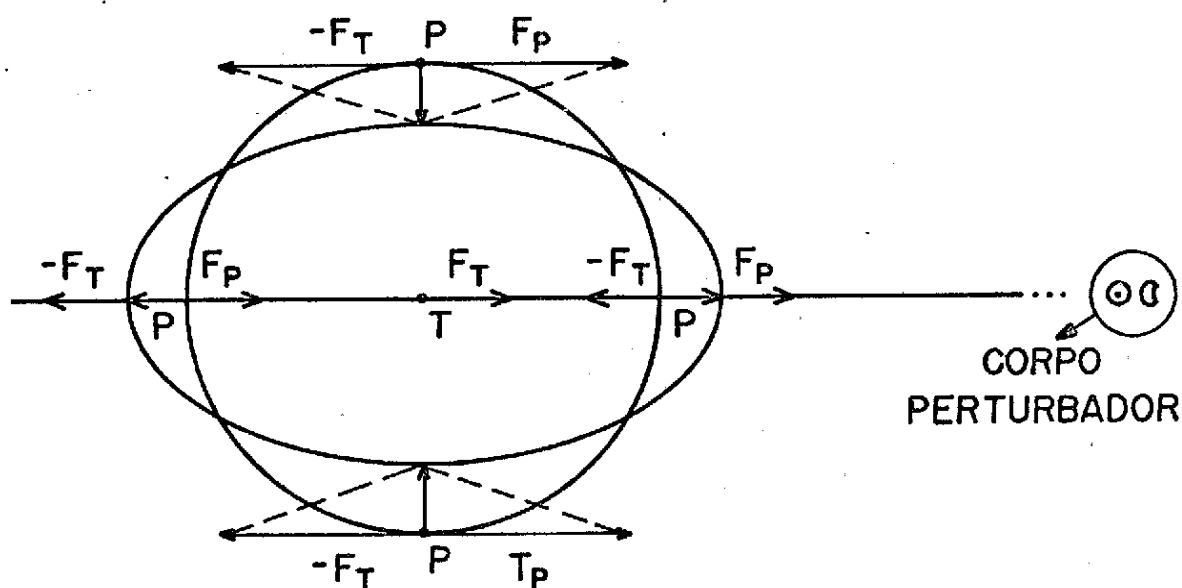


Fig. 1 - Deslocamento elástico da Terra, devida à atração de um corpo perturbador (sol e lua).

Na prática toma-se o globo terrestre como "um todo", utilizando-se os "Números de Love" ( $k_n$ ), e as perturbações mais significativas são causadas pelas seguintes ondas de maré:

- a) Diurnas:  $K_1$  - Onda declinação (S,L);  
 $O_1$  - Principal onda diurna (L);  
 $P_1$  - Principal onda diurna (S).

- b) Semidiurnas:  $M_2$  - Principal onda semidiurna (L);  
 $S_2$  - Principal onda semidiurna (S);  
 $N_2$  - Maior onda elíptica devida a  $M_2$  (L).

$K_1$  é a onda de maré que mais contribui para a perturbação do geopotencial e é diretamente proporcional a  $k_2$  (primeiro número de love), isto é,  $K_1 \propto k_2$ .

Números de Love:

$k_2, k_3 \rightarrow$  variáveis (detectáveis),

$k_4, k_5, \dots, k_n \rightarrow$  variáveis (não-detectáveis), usadas como parâmetros.

Os números de love são globais, quando dependentes do grau dos harmônicos utilizados na expansão do geopotencial.

Os números de love são locais, quando dependentes da longitude ( $\lambda$ ) e da latitude  $\phi$ .

$\phi \rightarrow$  perturbações de longo período em satélites.

$\lambda \rightarrow$  perturbações de curto período em satélites.

Como o interesse está restrito aos efeitos de longo período, negligencia-se a dependência da longitude, tomando-se apenas:

$$k_n = k_n(\phi).$$

## 2. POTENCIAL PERTURBADOR

As perturbações no geopotencial produzem um potencial externo adicional, o qual, quando desenvolvido em harmônicos, é dado por:

$$(1) \quad W = \frac{G m^*}{r^*} \sum_{\ell=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r^*} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos s)$$

onde:  $P_{\ell}$  - é o polinômio de legendre,

$r$  - o raio da Terra,

$r^*$  - a distância centro Terra-corpo perturbador,

$G$  - a constante gravitacional,

$s$  - o arco entre o ponto considerado sobre a superfície da Terra e a direção de  $r$ ,

$m^*$  - a massa do corpo perturbador, como mostra a Figura 2.

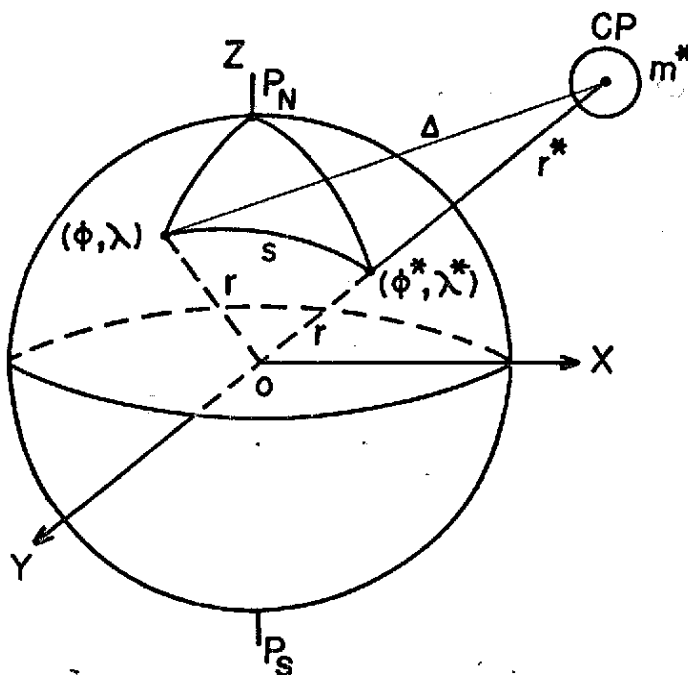


Fig. 2 - Representação para o cálculo do potencial perturbador.

Aplicando-se o teorema da adição na Expressão 1, obtém-se:

$$(2) \quad W = \frac{Gm^*}{r^*} \sum_{\ell=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r^*} \right)^{\ell} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} (2-\delta_{0m}) P_{\ell m}(\sin \phi) P_{\ell m}(\sin \phi^*) [\cos m \lambda \cos m \lambda^* + \sin m \lambda \sin m \lambda^*].$$

Para obter as variações de  $r^*$ ,  $\phi^*$  e  $\lambda^*$ , deve-se expressá-los em função dos elementos keplerianos. Faz-se esta transformação, efetuando-se rotações sobre os ângulos de Euler ( $\Omega^* - \theta$ ),  $I^*$  e  $(\omega^* + f^*)$ , dividindo-se os harmônicos  $P_{\ell m}(\sin \phi^*) [\cos m \lambda^*]$  ou  $P_{\ell m}(\sin \phi^*) [\sin m \lambda^*]$  em  $\ell + 1$  termos, e substituindo-se  $r^*$  e  $f^*$  por  $a^* - M^*$ , respectivamente, para:

$\Omega^*$  = longitude do nodo ascendente,

$\theta$  = tempo sideral,

$I$  = inclinação,

$\omega^*$  = argumento do perigeu,

$f^*$  = anomalia verdadeira,

$a^*$  = semi-eixo maior,

$M^*$  = anomalia média,

donde:

$$(3) W = \frac{G m^*}{a^*} \sum_{\ell=2}^{\infty} \left( \frac{r}{a^*} \right)^{\ell} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} (2 - \delta_{0m}) P_{\ell m}(\sin \phi).$$

$$\sum_{p=0}^{\ell} F_{\ell mp}(I^*) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{\ell pq}(e^*) \left[ \cos m \lambda \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \begin{matrix} (\ell-m) \text{ par} \\ (\ell-m) \text{ ímpar} \end{matrix} \right. \\ \left. \cdot \Psi_{\ell pqm} + \sin m \lambda \begin{cases} \sin \\ -\cos \end{cases} \begin{matrix} (\ell-m) \text{ par} \\ (\ell-m) \text{ ímpar} \end{matrix} \Psi_{\ell pqm} \right],$$

onde:

$$\Psi_{\ell pqm} = \{(\ell-2p)\omega^* + (\ell-2p+q)M^* + m(\Omega^* - \theta)\},$$

$$(4) F_{\ell mp}(I^*) = \sum_{t=0}^{p,k} \frac{(2\ell-2t)!}{t! (\ell-t)! (\ell-m-2t)! 2^{2\ell-2t}} \sin^{\ell-m-2t} I^*.$$

$$\sum_{s=0}^m \begin{pmatrix} m \\ s \end{pmatrix} \cos^s I^* \sum_{c=2}^{\left[\frac{\ell-p-t}{2}\right]} \begin{pmatrix} \ell-m-2t-s \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-s \\ p-t-c \end{pmatrix} (-1)^{c-k},$$

e

$$(5) G_{\ell pq}(e^*) = (-1)^{|q|} (1+\beta)^{2\ell} \beta^{|q|} \sum_{k=0}^{\infty} P_{\ell pqk} Q_{\ell pqk} \beta^{2k},$$

onde por sua vez:

$$(6) \beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}},$$

$$(7) P_{\ell pqk} = \sum_{r=0}^h \begin{pmatrix} 2p'-2\ell \\ h-r \end{pmatrix} \frac{(-1)^r}{r!} \left[ \frac{(\ell-2p'+q')e}{2\beta} \right]^r p / \begin{cases} h=k+q' \text{ se } q' > 0 \\ h=k \text{ se } q' < 0 \end{cases}$$

$$(8) Q_{\ell pqk} = \sum_{r=0}^h \begin{pmatrix} -2p' \\ h-r \end{pmatrix} \frac{1}{r!} \left[ \frac{(\ell-2p'+q')e}{2\beta} \right]^r p / \begin{cases} h=k \text{ se } q' > 0 \\ h=k-q' \text{ se } q' < 0 \end{cases}$$

para:

$$(9) \begin{cases} p' = p \\ q' = q \end{cases} \text{ se } p \leq \frac{\ell}{2} \text{ e } \begin{cases} p' = \ell - p \\ q' = -q \end{cases} \text{ se } p > \frac{\ell}{2}.$$

Desenvolvendo-se as multiplicações das funções trigonométricas da Expressão 3, pode-se escrever:

$$(10) \quad W = \sum_{\ell, m, p, q} W_{\ell, m, p, q}(r) ,$$

onde:

$$(11) \quad W_{\ell, m, p, q}(r) = B_{\ell m}^* C_{\ell m p q}^* P_{\ell m}(\sin \phi) \begin{cases} \cos & (\ell - m) \text{ par} \\ \sin & (\ell - m) \text{ ímpar} \end{cases} \{V_{\ell m p q}^* - m(\lambda - \theta)\}$$

para:

$$(12) \quad B_{\ell m}^* = Gm^* \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} (2 - \delta_{0m}) \quad C_{\ell m p q}^* = \frac{1}{(a^*)^{\ell + 1}} F_{\ell m p}(L^*) G_{\ell p q}(e^*)$$

$$(13) \quad V_{\ell m p q}^* = (\ell - 2p)\omega^* + (\ell - 2p + q)M^* + m \Omega^*.$$

A deformação da Terra pelo potencial  $W_{\ell m p q}(r)$  tem como consequência um potencial perturbador  $U_{\ell m p q}(r)$ , o qual na superfície é proporcional a  $k_{\ell} W_{\ell m p q}(r)$ ; onde  $k_{\ell}$  é o número de love para o potencial.

O fato da Terra não ser um corpo "perfeitamente elástico" faz surgir um "ângulo de defasagem"  $\epsilon_{\ell m p q}$  entre  $U_{\ell m p q}(r)$  e  $W_{\ell m p q}(r)$ . A Figura 3 mostra a natureza do atrito devido às marés.

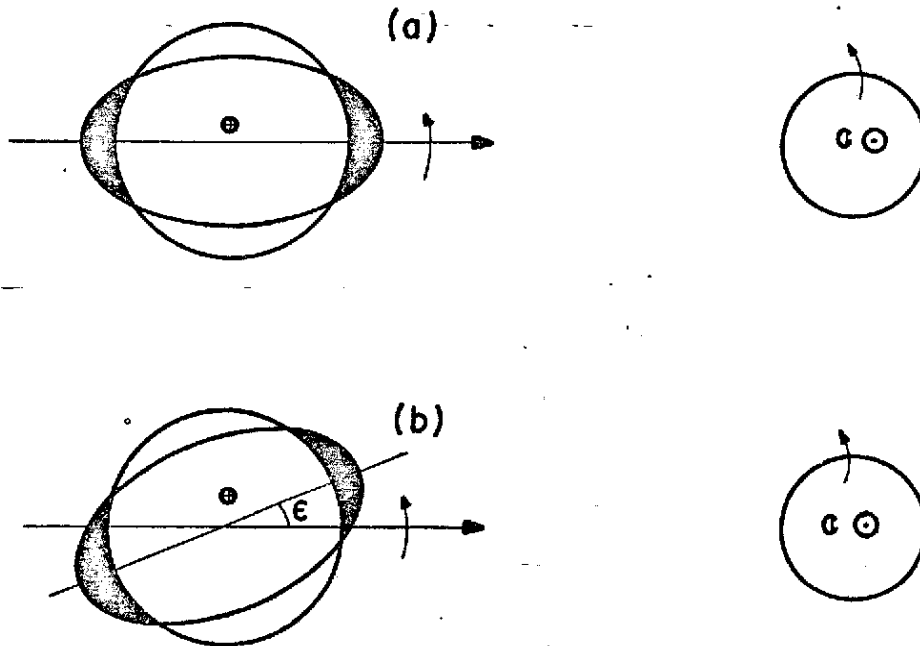


Fig. 3 - Ângulo de defasagem  $\epsilon$ , devido ao atrito interno na Terra.



Na Figura 3, em (a) tem-se a elevação máxima está sobre a reta que liga os centros "Terra-corpo perturbador", e devido à simetria não há torque, e em (b) supõe-se que a deformação esteja sujeita a atritos internos, e a rotação própria da Terra carrega a protuberância para frente, deslocando a maré máxima, o que produz um momento.

O potencial perturbador  $U_{\ell mpq}(r)$  é um harmônico de  $\ell$ -ésimo grau, o que significa, que no exterior (fora do planeta) ele deve ser proporcional a  $r^{-(\ell+1)}$ , donde:

$$(14) U_{\ell mpq}(r) = k_{\ell} \left[ \frac{R}{r^*} \right] W_{\ell mpq}(R),$$

onde  $R$  é o "raio médio" da Terra.

Se não houver uma "não linearidade" significativa, o potencial na superfície pode ser escrito em função de  $r = R$ , donde:

$$(15) U_{\ell mpq}(R) = k_{\ell} R^{\ell} B_{\ell m}^* C_{\ell mpq}^* P_{\ell m}(\sin \phi) \begin{cases} \cos & (\ell - m) \text{ par} \\ \sin & (\ell - m) \text{ ímpar} \end{cases} \cdot \{V_{\ell mpq} - \epsilon_{\ell mpq} - m(\lambda + \phi)\}.$$

$k_{\ell}(\phi, \lambda)$  e  $\epsilon_{\ell mpq}(\phi, \lambda)$  podem ser representados na forma de harmônicos esféricos.

No caso da análise de órbita de satélites artificiais, adota-se  $k_{\ell}(\phi)$  e  $\epsilon_{\ell mpq}(\phi)$  como funções apenas da latitude, isto é:

$$(16) k_{\ell}(\phi) = \sum_h K_{\ell h} P_{ho}(\sin \phi)$$

e

$$(17) \epsilon_{\ell mpq}(\phi) = \sum_n \epsilon_{n(\ell mpq)} P_{no}(\sin \phi).$$

Aqui, supõe-se que todos os  $\epsilon_n$  sejam suficientemente pequenos para que  $\sin \epsilon_{\ell mpq} = \epsilon$  e  $\cos \epsilon_{\ell mpq} = 1$ , caso em que o potencial na superfície pode ser escrito da seguinte maneira:

$$(18) \bar{U}(R) = \sum_{\ell, m, p, q, h, n} S_{\ell mpq}^* K_{\ell h} P_{ho}(\sin \phi) P_{\ell n}(\sin \phi) \cdot \begin{cases} \cos & (\ell - m) \text{ par} \\ \sin & (\ell - m) \text{ ímpar} \end{cases} \{V_{\ell mpq}^* - m(\lambda + \phi)\} +$$

$$+ \epsilon_n P_{no}(\sin \phi) \left\{ \begin{array}{l} \text{sen} \\ -\cos \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\ell - m) \text{ par} \\ (\ell - m) \text{ ímpar} \end{array} \{V_{\ell mpq}^* - m(\lambda + \phi)\} \Bigg],$$

onde:

$$(19) S_{\ell mpq}^* = R^\ell B_{\ell m}^* C_{\ell mpq}^*.$$

Substituindo-se  $P_{\ell m}(\sin \phi)$   $P_{jo}(\sin \phi)$  por  $\sum_{k=m}^{\ell+j} Q_{\ell j km} P_{km}(\sin \phi)$  na (18), para  $r > R \rightarrow$  (no exterior),

$$(20) U(r) = \sum_{\ell, m, p, q, h, n, k, s} S_{\ell, m, p, q}^* K_{\ell h} Q_{\ell h k w} \cdot \left[ \left[ \left( \frac{R}{r} \right)^{k+1} P_{km}(\sin \phi) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \text{sen} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\ell - m) \text{ par} \\ (\ell - m) \text{ ímpar} \end{array} \{V_{\ell mpq}^* - m(\lambda + \phi)\} + \right. \right. \\ \left. + \epsilon_n Q_{k n s m} \left( \frac{R}{r} \right)^{s+1} P_{sm}(\sin \phi) \left\{ \begin{array}{l} \text{sen} \\ -\cos \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\ell - m) \text{ par} \\ (\ell - m) \text{ ímpar} \end{array} \cdot \right. \\ \left. \cdot \{V_{\ell mpq}^* - m(\lambda + \phi)\} \right],$$

que é o potencial perturbador, devido à ação das marés, no exterior da Terra.

### 3. FUNÇÃO PERTURBADORA NO SATÉLITE

Determinou-se o potencial perturbador no exterior da Terra, e agora deve-se determinar a função perturbadora, tal como ela age no satélite. Na Equação (3), as coordenadas  $(r^*, \phi^*, \lambda^*)$  foram transformadas em elementos keplerianos do corpo perturbador. Para determinar o efeito do potencial  $U(r)$  sobre um satélite artificial, deve-se aplicar uma "transformação de semelhança" sobre o potencial, utilizando-se a conversão usual das coordenadas esféricas  $(r, \phi, \lambda)$  do satélite em elementos keplerianos da órbita.

Aplicando-se esta transformação sobre a Expressão (20), obtém-se:

$$(21) U(r) = \sum_{\ell, m, p, q, h, n, k, j, g} S_{\ell mpq}^* K_{\ell h} Q_{\ell h k m} \left[ \left( \frac{R}{a} \right)^{k+1} F_{kmj}(I) \cdot \right. \\ \left. \cdot G_{k j g}(e) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ (-1)^m \text{sen} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (k - \ell) \text{ par} \\ (k - \ell) \text{ ímpar} \end{array} \{V_{kmjg} - V_{\ell mpq}^*\} + \right.$$

$$+ \epsilon_n Q_{kns m} \left( \frac{R}{a} \right)^{k+1} F_{kmj}(I) G_{kjg}(e) \left\{ \begin{array}{l} -\text{sen} \\ (-1)^m \text{cos} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (k-l) \text{ par} \\ (k-l) \text{ ímpar} \end{array} \cdot \{V_{kmjg} - V_{lmpq}^*\} \Bigg] .$$

Para a análise de perturbações devidas às marés em satélites artificiais, é necessário que:

- a) não haja termos de curto período,  $\Rightarrow g = 2j - k$ ;
- b) o fator de amortecimento  $(a^{*l+1})^{-1}$  seja pequeno  $\Rightarrow l = 2$ .

Consequentemente, a Equação (21) é escrita da seguinte maneira:

$$(22) U(r) = \sum_{m,p,q,h,j} S_{2mpq}^* \left( \frac{R}{a} \right)^{k+1} F_{kmj}(I) G_{kj(2j-k)}(e) Q_{2hkm} \cdot \\ \cdot \left[ K_{2h} \left\{ \begin{array}{l} \text{cos} \\ (-1)^m \text{sen} \end{array} \right\} \begin{array}{l} k \text{ par} \\ k \text{ ímpar} \end{array} \{V_{kmj(2j-k)} - V_{2mpq}^*\} + \right. \\ \left. + (k_l \epsilon_h) \left\{ \begin{array}{l} -\text{sen} \\ (-1)^m \text{cos} \end{array} \right\} \begin{array}{l} k \text{ par} \\ k \text{ ímpar} \end{array} \{V_{kmj(2j-k)} - V_{2mpq}^*\} \right] ,$$

que é a função perturbadora, tal como ela atua no satélite

$$(k_l \epsilon_n) = K_{lh} \sum_n \epsilon_n Q_{kns m} .$$

Para determinar a perturbação sofrida pelos elementos orbitais, de vida às marés, utilizam-se as equações diferenciais clássicas para a variação de constantes, isto é:

$$(23) \frac{d \delta I}{dt} = - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \text{sen } I} \frac{\partial U}{\partial \Omega} ,$$

$$(24) \frac{d \delta \Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \text{sen } I} \frac{\partial U}{\partial I} ,$$

$$(25) \frac{d \delta \pi}{dt} = \frac{1 - \cos I}{na^2 \sqrt{1-e^2} \text{sen } I} \frac{\partial U}{\partial I} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial U}{\partial e} ,$$

$$(26) \frac{d \delta M}{dt} = - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial U}{\partial e} - \frac{2}{na^2} \left( a \frac{\partial U}{\partial a} \right) ,$$

as quais podem ser resolvidas por um método analítico ou por um método numérico.

Os elementos mais afetados pelas marés terrestres são "I" e "Ω".

Os gráficos apresentados na Figura 4 são o resultado de integrações numéricas para o satélite BE-C [ 4 ].

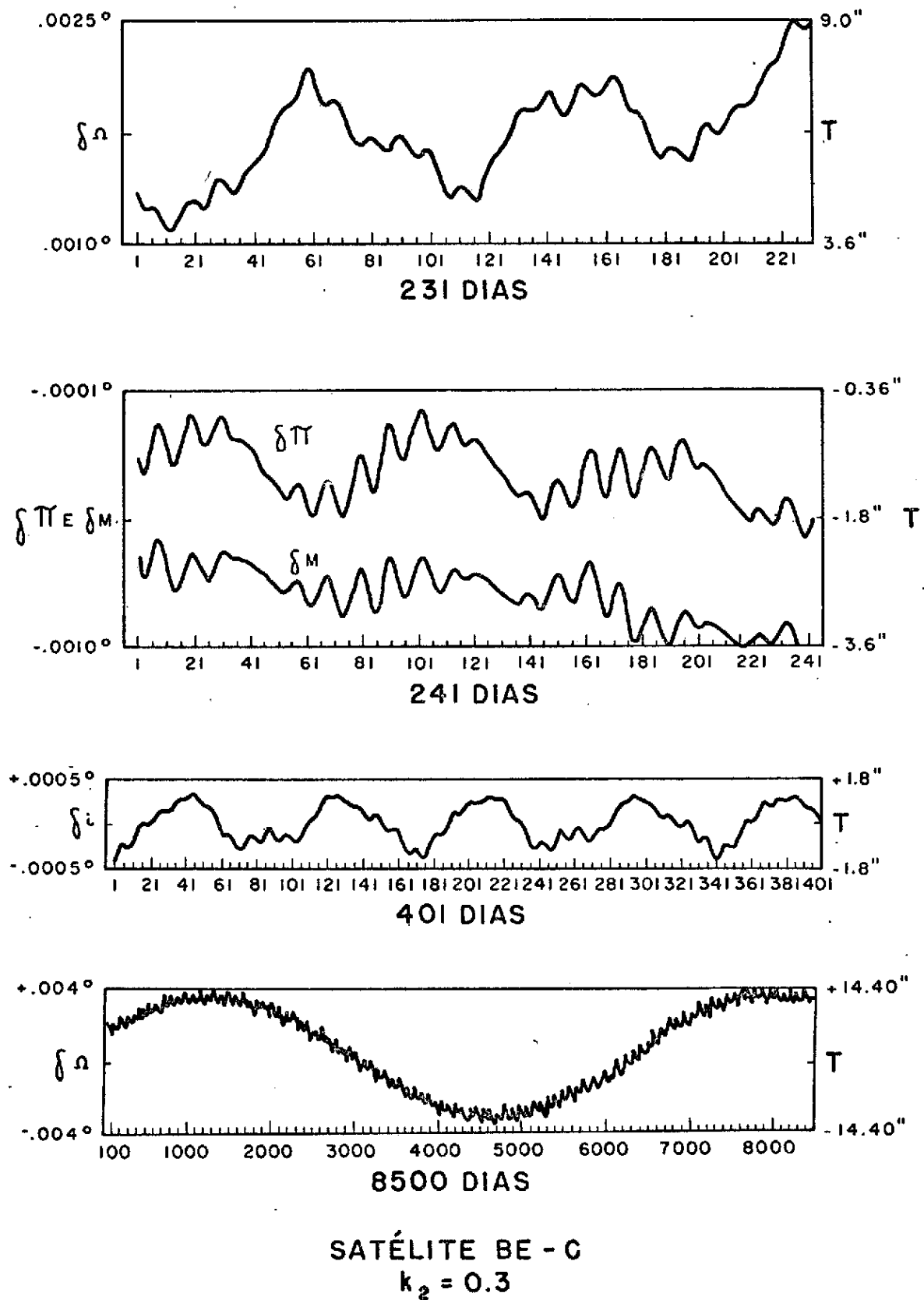


Fig. 4 - Perturbações no satélite BE-C, devidas às marés.

#### 4. CONCLUSÕES

Um dos problemas encontrados é a escolha dos valores adequados, isto é, mais corretos de " $\epsilon$ " e de " $k_2$ ".

Newton e Kozai encontraram, com dados de satélites do sistema TRANET, os seguintes valores:

- a) Newton [ 6 ] encontrou valores que variam de  $\epsilon = 0,7^\circ$  a  $\epsilon = 2,5^\circ$  para precisões de  $\pm 0,8^\circ$ ;  $k_2 = 0,28$  a  $k_2 = 0,44$  para uma precisão de  $\pm 0,03$ ;
- b) Kozai [ 2 ] encontrou valores que variam de  $\epsilon = 0^\circ$  a  $\epsilon = 9^\circ$  para precisões de  $\pm 5^\circ$ ;  $k_2 = 0,23$  a  $k_2 = 0,33$  para uma precisão de  $\pm 0,03$ ;
- c) Newton [ 5 ], com dados dos satélites 1963 498 e 38C encontrou:  
 $\epsilon = -8,5^\circ \pm 2,5^\circ$  p/ 1963 49B  
 $\epsilon = -2,2^\circ \pm 2,2^\circ$  p/ 1963 38C.

Nos trabalhos, baseados na observação de satélites artificiais, efetuados por Kaula [ 1 ] e Newton [ 5 ], [ 6 ], Kozai [ 2 ], e Musen e Estes [ 4 ], os resultados obtidos divergem entre si, não sendo possível concluir nada de concreto sobre a grandeza das perturbações na órbita de satélites artificiais, devidas às marés.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ 1 ] KAULA. Tidal friction with latitude-dependent amplitude and phase angle. The astronomical Journal, 74(9): 1108-14, Nov. 1969.
- [ 2 ] KOZAI, Y. Love's number of the earth derived from satellite observations.
- [ 3 ] MUSEN, P. A semi-analytical method of computation of oceanic tidal perturbation in the motion of artificial satellites. Greenbelt, MD, GSFC, 1973. (GSFC-X-590-73-190).
- [ 4 ] MUSEN, P; ESTES, R. On the tidal effects in the motion of artificial satellites. Celestial Mechanics, 6(1): 4-21, July, 1972.
- [ 5 ] NEWTON, R.R. An observation of the satellites perturbation produced by the solar-tide. Journal of Geophysical Research, 70(24): 5983 - 89, Dec. 1965.
- [ 6 ] NEWTON, R.R. A satellite determination of tidal parameters and earth deceleration. The Geophysical Journal, 14(4): 505-39, Aug. 1967.