1. Publicação nº	2. Versão	3. Data	5. Distribuição
INPE-2423-PRE/130		*Junho, 1982*	☐ Interna ☒ Externa ☐ Restrita
4. Origem *DSE/DES*	Programa *NAS/MEDEP*		

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)
TAMANHO DE LOTE
ANÁLISE DE HEURÍSTICAS

7. C.D.U.: *519.688*

8. Título *INPE-2423-PRE/130*

ANÁLISE DE ALGUNS PROCEDIMENTOS HEURÍSTICOS PARA PROBLEMAS DE TAMANHO DE LOTE NÃO-CAPACITADO

10. Páginas: *16*

11. Última página: *15*

12. Revisada por

Oscar Pereira Dias Jr.

9. Autoria *Gabriel R. Bitran*
Thomas L. Magnanti
Horacio H. Yanasse

Assinatura responsável

13. Autorizada por

Nelson de Jesus Parada
Diretor

14. Resumo/Notas

Apresenta-se uma versão resumida do trabalho "Analysis of the Uncapacitated Dynamic Lot Size Problem" de Bitran, Magnanti e Yanasse. Analisam-se as aproximações utilizadas para resolver o problema dinâmico não-capacitado de tamanho de lote. Discute-se o efeito da partição do horizonte de planejamento e de uma agregação baseada na proporcionalidade dos parâmetros dos produtos. Além disso, apresenta-se o limite de erros para o pior caso das heurísticas conhecidas como "Silver and Meal", "part-period balancing", lote econômico (expresso em termos de tempo de suprimento) e dois outros procedimentos.

15. Observações *Submetido para apresentação no XV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional/I Congresso Latino-Americano de Pesquisa Operacional e Engenharia de Sistemas a se realizar no Rio de Janeiro, RJ, na 1º quinzena de novembro de 1982.*

ANÁLISE DE ALGUNS PROCEDIMENTOS HEURÍSTICOS PARA PROBLEMAS DE TAMANHO DE LOTE NÃO-CAPACITADO

Gabriel R. Bitran
Thomas L. Magnanti
Massachusetts Institute of Technology

Horacio H. Yanasse
Instituto de Pesquisas Espaciais
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científicò e Tecnológico
C.P. 515
12.200 São Josê dos Campos
São Paulo

RESUMO

Apresenta-se uma versão resumida do trabalho "Analysis of the Uncapacitated Dynamic Lot Size Problem" de Bitran, Magnanti e Yanasse. Analisam-se as aproximações utilizadas para resolver o problema dinâmico não-capacitado de tamanho de lote. Discute-se o efeito da partição do horizonte de planejamento e de uma agregação baseada na proporcionalidade dos parâmetros dos produtos. Além disso, apresenta-se o limite de erros para o pior caso das heurísticas conhecidas como "Silver and Meal", "part period balancing", lote econômico (expresso em termos de tempo de suprimento) e dois outros procedimentos.

ABSTRACT

This work is a condensed version of the paper "Analysis of the Uncapacitated Dynamic Lot Size Problem" by Bitran, Magnanti and Yanasse. In this paper we analyse approximations used to solve the dynamic lot size problem. We discuss the effect of partitioning the planning horizon and an aggregation procedure based on the proportionality of the parameters of the products. We also provide worst case error bounds for the heuristics known as Silver and Meal, part period balancing, economic order quantity (expressed in terms of time supply) and two other procedures.

1. INTRODUÇÃO

Problemas de tamanho de lote recebem atenção na literatura(veja, por exemplo, Manne (1958), Peterson and Silver (1979), Wagner and Whitin (1958), Yanasse (1981)), devido à sua importância no planejamento de produção e controle de estoques. Em particular, eles são de grande importância no planejamento da requisição de materiais. (Veja Orlicky (1975), Smith (1978). Este trabalho concentra-se no seguinte problema de tamanho de lote não capacitado:

(P)

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left\{ s_{it}\, \delta(X_{it}) + h_{it} I_{it} + v_{it} X_{it} \right\}$$

$$\text{s.a } X_{it} - I_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} \qquad i = 1,\ldots,N;\ t=1,\ldots,T$$

$$X_{it},\ I_{it} \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,N;\ t=1,\ldots,T$$

$$\delta(X_{it}) = \begin{cases} 1 \text{ se } X_{it} > 0 \\ 0 \text{ se } X_{it} = 0 \end{cases} \qquad i = 1,\ldots,N;\ t=1,\ldots,T;$$

onde as variáveis de decisão são:

X_{it} = número de unidades do produto i a ser produzido no período t;

I_{it} = estoque a ser carregado do período t para o período t + 1 do produto i;

e os parâmetros são:

s_{it} = custo fixo para produzir o produto i no período t;

h_{it} = custo unitário de armazenamento do produto i, do período t para o período t + 1;

v_{it} = custo unitário de produção do produto i no período t;

d_{it} = demanda do produto i no período t.

O problema (P) é separável em i e reduz-se a N problemas não capacitados de tamanho de lote com um único produto.

Wagner and Whitin (1958) propuseram um algoritmo de programação dinâmica ($0(T^2)$) para solucionar o problema (P) com um único

produto. Este algoritmo não tem sido extensivamente usado na prática, devido às dificuldades dos gerentes em entendê-lo e também por consumir muito tempo de computação, quando aplicado a dezenas de milhares de componentes. Desta forma, outras aproximações e heurísticas de O(T) têm sido desenvolvidas para o problema. Neste trabalho, fornece-se o limite de erros de algumas destas heurísticas, analisam-se o efeito da partição do horizonte de planejamento e um procedimento de agregação para (P).

Inicialmente, analisar-se-á na Seção 2, o efeito da partição do horizonte de planejamento. Mostra-se que, quando o problema com múltiplas instalações e com um único produto é particionado em dois subproblemas, o erro no pior caso não excede uma função dos custos fixos.

Na Seção 3, abordam-se questões sobre agregação e prova-se que, quando dois produtos apresentam uma certa proporcionalidade nos seus parâmetros, existe uma estratégia ótima aplicável a ambos. Derivam-se os erros, no pior caso, quando tais condições de proporcionalidade não se verificam. Os resultados desta seção aplicam-se, em particular, para a análise de diagnóstico de sistemas de estoque, e complementam os resultados de Bitran et alii (1980).

Na Seção 4, apresenta-se o limite de erros, para o pior caso, das heurísticas conhecidas como "Silver and Meal", "part period balancing" e da heurística baseada no lote econômico expresso em termos de tempo de suprimento (Veja Peterson and Silver (1979)). Propõem-se dois outros procedimentos simples, cujo erro relativo, no pior caso, é igual a dois. Limitar-se-á nesta seção à apresentação dos resultados, sem as suas demonstrações. O leitor interessado poderá consultar Bitran et alii (1981) para os detalhes.

Finalmente, na última seção, apresentam-se conclusões e tópicos para pesquisas futuras.

2. REDUÇÃO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO

Nesta seção, computa-se o custo de redução do horizonte de planejamento em um problema de tamanho de lote não-capacitado. Geralmente as previsões das demandas são sujeitas a um erro maior, à medida que se avança no futuro. Considerando-se um número reduzido de períodos, opera-se com uma precisão mais acurada e manipula-se um número menor de dados.

Considera-se um modelo com múltiplas instalações em série e um único produto final:

$$(F)\quad \text{Min} \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{M} (v_j X_{jt} + s_j \delta(X_{jt}) + h_j I_{jt})$$

$$\text{st.}\quad I_{jt} = I_{j,t-1} + X_{jt} - X_{j+1,t} \qquad j = 1,\ldots,M-1;\ t = 1,\ldots,T$$

$$I_{Mt} = I_{M,t-1} + X_{Mt} - d_t \qquad t = 1,\ldots,T$$

$$X_{jt} \geq 0, I_{jt} \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,M;\ t = 1,\ldots,T$$

$$I_{j0} = I_{jT} = 0, \qquad j = 1,\ldots,M,$$

onde o índice j indica a instalação, e o índice t, o período. Particionando-se o problema (F) em dois subproblemas, o primeiro (F_1) com T_1 períodos e o segundo (F_2) com os $T_2 = T - T_1$ períodos restantes, obtém-se:

<u>Proposição 2.1:</u> $0 \leq v(F_1) + v(F_2) - v(F) \leq \sum_{j=1}^{M} s_j$, onde:

v(Y) denota o valor ótimo do problema Y.

<u>Prova</u>: A partição corresponde a impor, no problema (F), que $I_{jT_1} = 0$ para $j = 1,\ldots,M$. Considere-se uma solução ótima

$$(X^*_{jt}, I^*_{jt},\ t=1,\ldots,T; j=1,\ldots,M)$$

para o problema (F) e ajuste-a da segunte forma:

- produza no período $(T_1 + 1)$ a quantidade $I^*_{jT_1}$, se esta for positiva;
- diminua a quantidade produzida no 1º período anterior a $T_1 + 1$, onde houve produção, de modo a fazer $I_{jT_1} = 0$.

Esta solução é viável em (F_1) e (F_2). Logo:

$v(F_1) + v(F_2) \leq v(F) + \sum_{j=1}^{M} s_j$, pois o lado direito da desigualdade é um limite superior do custo da nova solução ajustada. Como qualquer solução de (F_1) e (F_2) compõe uma solução viável para (F),

têm-se $v(F) \leq v(F_1) + v(F_2)$, e a prova agora está completa.

Convém observar que o limite dado pode ser melhorado, caso admita-se que o problema tenha somente parâmetros inteiros e que

$$s_j \geq h_j, \ \forall j.$$

Neste caso pode-se escrever: $v(F_1) + v(F_2) \leq v(F) + \sum_{j=1}^{M} (s_j - h_j)$.

Admitindo-se que as demandas não sejam conhecidas com uma acuracidade razoável, por exemplo, para períodos além de T/2, a Proposição 2.1 estabelece que, no pior caso, incorrer-se-á num custo extra de $\sum_{j=1}^{M} s_j$ ao considerar-se o problema com apenas T/2 períodos. Este custo extra pode ser interpretado também como o valor da informação acerca das demandas para os últimos T/2 períodos.

Casos especiais da Proposição 2.1 são o caso de uma simples instalação e o caso de múltiplos produtos. O custo extra incorrido, no pior caso, seria um custo fixo para o caso do problema com uma única instalação, e a soma dos custos fixos de cada produto para o caso de múltiplos produtos.

Observe-se que a Proposição 2.1 poderia ser derivada, considerando-se custos fixos e custos de armazenamento variáveis e custos de produção não-crescentes. Neste caso, ter-se-ia:

$$0 \leq v(F_1) + v(F_2) - v(F) \leq \sum_{j=1}^{M} s_{jT_1} + 1$$

3. AGREGAÇÃO

Nesta seção sugere-se uma agregação de produtos para resolver o problema (P). Define-se um produto agregado básico, cuja estratégia de produção prescreve os planos de produção de todos os produtos na agregação; derivam-se limites para erros no pior caso. A agregação sugerida evita, em parte, a previsão detalhada das demandas e limita o montante de dados manipulados. Ela foi desenvolvida primariamente para servir como ferramenta na análise de diagnóstico de sistemas de estoque.

Considere-se o problema não-capacitado com um único produto:

$$(P_1) \quad \text{Min} \sum_{t=1}^{T} (s_t\,\delta(X_t) + h_t I_t + v_t X_t)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{s.a} \quad X_t - I_t + I_{t-1} = d_t \\ \\ X_t, I_t \geq 0 \\ \\ \delta(X_t) = \begin{cases} 1 \text{ se } X_t \geq 0 \\ 0 \text{ se } X_t = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \quad t = 1, \ldots, T$$

Uma solução para este problema pode ser obtida formulando-se um problema de localização, quando se levar em conta a existência de uma solução ótima (Veja Wagner and Whitin (1958)) que satisfaça a condição:

$$X_t\, I_{t-1} = 0, \quad t=1,\ldots,T \text{ (supondo-se que } I_0 = 0).$$

Tem-se:

$$(Q) \quad \text{Min} \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=t}^{T} C_{tj}\,\theta_{tj} + \sum_{t=1}^{T} s_t y_t$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{s.a.} \quad \sum_{t=1}^{j} \theta_{tj} = 1 & j = 1,\ldots,T \\ \\ 0 \leq \theta_{tj} \leq y_t \leq 1 & t = 1,\ldots,T;\ j \geq t \\ \\ y_t \text{ inteiro} & t = 1,\ldots,T \end{array}\right\} \text{Conjunto viável } U,$$

onde $C_{tj} = (h_t + h_{t+1} \ldots + h_{j-1} + v_t)\, d_j \qquad t=1,\ldots,T;\ j \geq t$

Explorando-se esta formulação, obter-se-ão limites para os erros devidos à agregação de produtos.

Proposição 3.1 - Se em (Q) os coeficientes dos custos forem trocados por $C^1_{tj} = kC_{tj} + \alpha_j$ e $s^1_t = ks_t$ para algum $k>0$ e qualquer α_j, a estratégia ótima não muda (i.e., a localização das instalações na solução ótima é a mesma para ambas estruturas de custo).

Prova: Pelo fato de $\sum_{t=1}^{j} \theta_{tj} = 1$ para qualquer solução viável de (Q), chega-se ao resultado desejado.

Esta proposição sugere uma maneira de agrupar produtos. Se o produto

1 tem coeficientes de custo C_{tj} e s_t, e o produto 2 tem coeficientes de custo C^1_{tj} e s^1_t, tal que, $C^1_{tj} = kC_{tj} + \alpha_j$, $s^1_t = ks_t$ para $k>0$ e $\forall\alpha_j$, poder-se-á solucionar somente um dos problemas, pois ambos possuem a mesma estratégia ótima.

No que se segue, supõe-se que os custos fixos, os custos de produção e os custos de armazenamento são constantes no tempo. Neste caso, o custo de produção pode ser eliminado do problema.

Admita-se que se tenham dois produtos, 1 e 2, com custos fixos, s_1 e s_2, custos de armazenamento, h_1 e h_2, e demandas, d_{1t} e d_{2t}, no período t. Para que os parâmetros dos dois produtos satisfaçam as condições:

$C^2_{tj} = kC^1_{tj} + \alpha_j$ e $s^2_t = ks^1_t$ para algum $k>0$ e $\alpha_j \in R$, tem-se:

$\alpha_j = 0$, $j=1,2,\ldots,T$; $s_2/s_1 = k$, $d_{1t}/d_{2t} = \alpha$, $(h_2/s_2)(s_1/h_1) = \alpha$

Desta forma,

Corolário 3.1: Se dois problemas não-capacitados de tamanho de lote, com um único produto, têm parâmetros que satisfaçam as condições:

$$d_{1t}/d_{2t} = \alpha \quad t=1,\ldots,T; \tag{1}$$

$$(h_2/s_2)(s_1/h_1) = \alpha \tag{2}$$

então, a estratégia de produção ótima para ambos os problemas coincide.

As condições 1 e 2 são equivalentes àquelas usadas em Manne (1958).

Infelizmente não se pode esperar que as Condições 1 e 2 sejam exatamente satisfeitas em todos os problemas práticos. Tais parâmetros relacionam-se geralmente como:

$d_{1t}/d_{2t} = \alpha + \phi_t$ para algum $\phi_t \in R$.

onde: $\alpha \triangleq (\sum_{t=1}^{T} d_{1t})/(\sum_{t=1}^{T} d_{2t})$ e

$(s_1/h_1)/(s_2/h_2) = \alpha\eta$ para algum $\eta \in R$

No que se segue, estabelecer-se-á o limite de erros para os casos onde a estratégia ótima para o produto 1 é usada como solução para o produto 2, e onde a Relação 1 e/ou 2 não são exatamente satisfeitas.

3.1 A Condição 1 não é satisfeita e a Condição 2 é satisfeita

Admita-se que:

$$\frac{d_{1t}}{d_{2t}} = \alpha+\phi_t \text{ , ou } d_{1t} = \alpha d_{2t} + \phi_t d_{2t} \text{ , } t=1,\ldots,T \qquad (3)$$

$\phi_t \in R$, $\alpha \in R^+$ e $\eta = 1$.

Manipulando-se o problema (Q) para o produto 1, tem-se:

$$\underset{(\theta,y)\in U}{\text{Min}} \sum_{t=1}^{T} \sum_{j\geq t} (j-t)\, h_1 d_{1j}\, \theta_{tj} + \sum_{t=1}^{T} s_1 y_t =$$

$$= \underset{(\theta,y)\in U}{\text{Min}} \left\{ \frac{s_1}{s_2} \left[\sum_{t=1}^{T} \sum_{j\geq t} (j-t)\, h_2 d_{2j}\, \theta_{tj} + \sum_{t=1}^{T} s_2 y_t \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j\geq t} (j-t)\, h_1 \phi_j d_{2j} \theta_{tj} \right\},$$

utilizando-se as Condições 2 e 3.

Sejam θ^1_{tj}, y^1_t e θ^2_{tj}, y^2_t, $t=1,\ldots T$, $j=1,\ldots T$, as soluções ótimas para o produto 1 e para o produto 2, respectivamente. Sejam f^1 e f^2 os valores ótimos correspondentes. Denote-se por f^2_v o valor da função objetivo para o produto 2, quando a solução viável θ^1_{tj}, y^1_t, $t=1,\ldots,T$, $j=1,\ldots,T$ é usada.

Então:

$$f = \underset{(\theta,y)\in U}{\text{Min}} \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=t}^{T} C_{tj}\, \theta_{tj} + \sum_{t=1}^{T} s_1 y_t =$$

$$= \frac{s_1}{s_2} \left\{ \sum_{t=1}^{T} \sum_{j\geq t} (j-t) h_2 d_{2j} \theta^1_{tj} + \sum_{t=1}^{T} s_2 y^1_t \right\} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=t}^{T} (j-t) h_1 \phi_j d_{2j} \theta^1_{tj} =$$

$$= \frac{s_1}{s_2} f^2_v + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=t}^{T} (j-t) h_1 \phi_j d_{2j} \theta^1_{tj} \geq \frac{s_1}{s_2} f^2 + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=t}^{T} (j-t) h_1 \phi_j d_{2j} \theta^1_{tj} \qquad (4)$$

$$f = \underset{(\theta,y)\in U}{\text{Min}} \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=t}^{T} C_{tj}\theta_{tj} + \sum_{t=1}^{T} s_1 y_t \leq \sum_{t=1}^{T} \sum_{j\geq t} C_{tj}\theta^2_{tj} + \sum_{t=1}^{T} s_1 y^2_t =$$

$$= \frac{s_1}{s_2} f^2 + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{T} (j-t) h_1 \phi_j d_{2j} \theta^2_{tj} \cdot \qquad (5)$$

Supondo-se $\frac{s_1}{s_2} > 0$ e das Relações 2,4 e 5 obtém-se:

$$0 \leq f_v^2 - f^2 \leq \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=t}^{T} (j-t) \frac{h_2}{\alpha} \phi_j d_{2j} (\theta^2_{tj} - \theta^1_{tj}). \qquad (6)$$

Um limite superior para o lado direito da Relação 6 é:

$$\max_{(\theta,y)\in U} \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=t}^{T} (j-t) \frac{h_2}{\alpha} \phi_j d_{2j} \theta_{tj} -$$

$$-\min_{(\theta,y)\in U} \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=t}^{T} (j-t) \frac{h_2}{\alpha} \phi_j d_{2j} \theta_{tj} = \sum_{j=1}^{T} (j-1) \frac{h_2}{\alpha} |\phi_j| d_{2j}. \qquad (7)$$

Seja $\phi = \max_{j=1,\ldots,T} |\phi_j|$. Então, segue-se que:

$$0 \leq f_v^2 - f^2 \leq \frac{\phi}{\alpha} \sum_{j=1}^{T} (j-1) h_2 d_{2j} .$$

Definindo-se como referência $f^2_{max} = Ts_2 + \sum_{j=1}^{T} (j-1) h_2 d_{2j}$, tem-se:

$$\frac{f_v^2 - f^2}{f^2_{max} - f^2} \leq \frac{\phi}{\alpha} . \qquad (8)$$

A Relação 8 sugere que se escolha como produto básico aquele onde $\frac{\phi}{\alpha}$ é mínimo.

3.2 A Condição 2 não é satisfeita e 1 é satisfeita

Aqui apresentam-se os limites para o caso onde $\phi_t = 0$, $t=1,\ldots,T$ e $\eta \neq 1$.

Usando-se procedimentos similares àqueles utilizados na seção 3.1, obtém-se:

$$0 \leq f_v^2 - f^2 \leq \left| \frac{\eta - 1}{\eta} \right| \sum_{j=1}^{T} h_2 (j-1) d_{2j}, \quad \text{ou} \qquad (9)$$

$$0 \leq f_v^2 - f^2 \leq |\eta - 1| (T-1) s_2, \qquad (10)$$

dependendo de como as substituições das variáveis são realizadas.

Pode-se escrever também:

$$\frac{f_v^2 - f^2}{f^2_{max} - f^2} \leq \begin{cases} 1 - \frac{1}{\eta} & \text{se } \eta > 1 \\ 1 - \eta & \text{se } \eta < 1 \end{cases}$$

3.3 Ambas as Condições 1 e 2 não são satisfeitas

Utilizando-se procedimentos similares aos das seções anteriores, obtém-se:

$$0 \leq f_v^2 - f^2 \leq \sum_{j=1}^{T} (j-1)h_2 \left| \frac{\phi_j + (1-\eta)\alpha}{\alpha\eta} \right| d_{2j} \leq \left(\frac{\phi}{\alpha\eta} + \left|\frac{1-\eta}{\eta}\right|\right) \sum_{j=1}^{T} (j-1)h_2 d_{2j}. \tag{11}$$

Convém observar que os limites dados nas Relações 7, 10 e 11 são atingíveis (veja Bitran et alii (1981)).

3.4 Agregação de produtos

Considera-se a agregação de produtos não só para evitar muitas computações, mas também para evitar previsão de demanda excessivamente detalhadas. Pode-se argumentar que é sempre mais fácil estimar a demanda de uma família de produtos, do que um único produto separadamente. Também, demandas de intervalos mais longos poderão ser mais fáceis de serem estimadas, do que intervalos mais curtos. Exploram-se essas idéias no que se segue. Admita-se que existem N produtos e um produto agregado com demandas:

$$D_t = \sum_{i=1}^{N} d_{it} \qquad t = 1, 2, \ldots, T.$$

Deseja-se computar os parâmetros S_g e H_g (custo fixo e custo de armazenamento, respectivamente) deste produto agregado, que minimizam o limite de erros para o pior caso. Seja:

$$D \triangleq \sum_{t=1}^{T} D_t, \quad \alpha_i \triangleq \frac{D}{\sum_{t=1}^{T} d_{it}} ; \quad \phi_{it} \triangleq \frac{D_t}{d_{it}} - \alpha_i \text{ e } \eta_i = \frac{S_g/H_g}{\alpha \frac{s_i}{h_i}}. \tag{12}$$

Como mostrou-se anteriormente,

$$0 \leq f_v^i - f^i \leq \left(\frac{\phi_i}{\alpha_i \eta_i} + \frac{|1 - \eta_i|}{\eta_i} \right) \sum_{j=1}^{T} (j-1)\, h_i\, d_{ij}, \tag{13}$$

onde: $\phi_i = \max_{t=1,\ldots,T} |\phi_{it}|$.

Seja $\beta_i \triangleq \frac{s_i}{S_g} H_g(\phi_i+\alpha_i \mid 1 - \frac{S_g h_i}{H_g s_i \alpha_i}|)$ e (14)

$$\beta = \max_{i=1,\ldots,N} \beta_i \quad (15)$$

Das relações 12, 13, 14, 15, segue-se que:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{N} (f_v^i - f^i) \leq \sum_{i=1}^{N} \beta_i \sum_{j=1}^{T} (j-1)d_{ij} \leq \beta \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{T} (j-1)d_{ij} =$$

$$= \beta \sum_{j=1}^{T} (j-1)D_j. \quad (16)$$

Deseja-se determinar os valores de S_g e H_g que minimizam

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i \sum_{j=1}^{T} (j-1)d_{ij}:$$

A fim de evitar previsões detalhadas, sugere-se que um problema da forma:

(R) $\beta^* = \min_{0<S_g,\ 0<H_g} \max_{i=1,\ldots,N} \beta_i$ seja resolvido. Este problema pode ser escrito como:

(R) $\beta^* = \min \delta$

sujeito a $\delta \geq \beta_i \quad i=1,\ldots,N$

$H_g>0, S_g>0.$

Pode-se verificar que a solução ótima de (R) depende somente da razão H_g/S_g. Isto implica que se tem um grau de liberdade na escolha dos parametros do produto agregado.

Supondo-se:

$f^i_{max} = Ts_i + \sum_{j=1}^{T} h_i(j-1)\, d_{ij}$, tem-se que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} (f_v^i - f^i)}{\sum_{i=1}^{N} (f_{max}^i - f^i)} \leq \frac{\beta \sum_{j=1}^{T} (j-1)D_j}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{T} h_i(j-1)d_{ij}} = \frac{\beta}{H} \quad \text{se}$$

$$H \triangleq \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{T} h_i (j-1)d_{ij}}{\sum_{j=1}^{T} (j-1)D_j}$$

Minimizando-se β , assegurar-se-á que este erro relativo seja feito tão pequeno quanto possível.

Convém observar que para casos ideais (onde os parâmetros dos produtos satisfazem exatamente as Condições 1 e 2), $\beta^*=0$ em (R).

Uma inconveniência desta abordagem é resolver o problema (R). No caso particular em que $\frac{s_j \alpha_j}{h_j}$ = constante, para j=1, 2,...,N e

$$\alpha_i \geq \phi_i, \quad i=1,\ldots,N \tag{17}$$

a solução ótima para (R) é:

$$\frac{H_g}{S_g} = \frac{h_i}{s_i \alpha_i} \quad \text{e} \quad \beta^* = \max_{i=1,\ldots,N} \frac{h_i \phi_i}{\alpha_i} .$$

Note-se que a Suposição 17 não é tão restritiva, pois espera se que α_i seja grande.

Uma possível alternativa para simplificar o problema (R) seria definir β_i como sendo:

$$\beta_i \triangleq \left(\frac{\phi_i}{\alpha_i \eta_i} + \frac{|1-\eta_i|}{\eta_i}\right) .$$

Poder-se-á, neste caso, obter uma solução explícita para (R), supondo-se a Relação 17. Note-se que o que se propõe é equivalente a manipular os parâmetros do problema original (P), de modo a obter se um problema equivalente, onde as novas demandas para cada produto são dadas por $h_i d_{it}$, e os custos de armazenamento são todos iguais a 1.

Todos os limites apresentados nesta seção são limites a priori. Limites mais restritivos podem ser obtidos após a determina

ção da solução do problema agregado.

A agregação sugerida difere da maneira tradicionamente apresentada na literatura. O modelo agregado apresentado prescreve apenas uma estratégia de produção a ser seguida pelos produtos componentes da agregação. Em trabalhos de agregação propostos na literatura (Veja Geoffrion (1977 e 1976 a e b)), a solução do modelo agregado é uma solução aproximada do problema inicial.

O modelo agregado de otimização é útil como ferramenta na análise de diagnóstico de sistemas de estoque. As firmas esperam queos estudos de diagnóstico sejam baratos e não exijam muito esforço. As previsões detalhadas das demandas e a manipulação de muitos dados são aspectos indesejáveis. A agregação sugerida leva em conta tais fatores.

4. LIMITE DE ERROS, NO PIOR CASO, DE ALGUMAS HEURÍSTICAS PARA O PROBLEMA DE TAMANHO DE LOTE NÃO-CAPACITADO

O algoritmo de Wagner e Whitin apresenta inconvenientes do ponto de vista do praticante, devido à sua natureza complexa. As dificuldades em entendê-los levam os praticantes a utilizarem algotitmos mais simples. Dentre eles, pode-se citar o de Silver e Meal. Este algoritmo tem-se comportado bem em comparação com outros procedimentos sugeridos na literatura (Veja Peterson and Silver (1979)). Entretanto, esta heurística pode, em determinados casos, portar-se muito mal. Pode-se dizer que:

Proposição 4.1-(Bitran et alii (1981)). O erro relativo, no pior caso, da heurística de Silver e Meal pode ser tão grande quanto se queira.

Considerando-se duas outras heurísticas usadas na prática (Veja Peterson and Silver (1979)), o lote econômico (expresso em termos de tempo de suprimento) e o "part period balancing", pode-se dizer também que:

Proposição 4.2 - (Bitran et alii (1981)). O lote econômico (expresso como tempo de suprimento) para solucionar o problema de tamanho de lote não-capacitado pode apresentar um erro relativo tão grande quanto se queira.

Proposição 4.3 - (Bitran et alii (1981)). O erro relativo, no pior caso, da heurística "part-period balancing" para o problema de tamanho de lote não-capacitado é limitado por 3.

Considere-se um procedimento que identifica os períodos com produção (positiva), usando-se a seguinte regra básica; produza neste período sempre que o custo total de armazenamento desde a última produção exceda o custo fixo se se adicionar a esta última produção a demanda de mais este período. Duas heurísticas podem ser geradas a partir desta idéia; a primeira que aplica a regra do início para o fim dos períodos, e a outra que a aplica no sentido inverso.

Em Bitran et alii (1981), mostra-se que ambos os procedimentos apresentam o mesmo número de períodos com produção. Além disso, prova-se que o erro relativo para o pior caso, de ambos, não excede a 2.

Considerando-se que as demandas sejam limitadas inferiormente, pode-se ainda melhorar este limite do erro encontrado. Admite-se sem perda de generalidades que $h_t \geq 1$, $t=1,\ldots,T$.

Proposição 4.4 - (Bitran et alii (1981)). Seja s o custo fixo e suponha que $d_t \geq ps$, $t=1,2\ldots,T$ para alguma constante $p \leq 1$. Então o erro relativo é limitado por $2-p$.

Alguns dos limites de erro aqui apresentados não admitem limitações no comprimento dos horizontes de planejamento. Permanece ainda a questão de como tais limites se modificam, quando o horizonte de planejamento é finito.

5. CONCLUSÕES E TÓPICOS DE PESQUISAS FUTURAS

Em situações práticas, preferem-se procedimentos mais simples e intuitivos, para resolver problemas de tamanho de lote, do que o algoritmo mais complexo de Wagner-Whitin. Quase sempre tais aproximações baseiam-se fundamentalmente em regras de senso comum, sem um bom suporte teórico. Neste trabalho tenta-se preencher esta lacuna, fornecendo erros relativos, no pior caso, para três procedimentos heurísticos usados na prática e dois outros que podem ser vistos como variantes da heurística "part-period balancing". Pesquisa adicional é necessária ainda para casos com horizontes finitos e para aqueles em que as demandas seguem padrões especiais. Sugere-se também que se pesquise limites de erros probabilísticos, pois estes são de maior interesse para propósitos práticos.

As aproximações sugeridas nas Seções 2 e 3 são opções adicionais para os gerentes. A agregação sugerida neste trabalho assume custos fixos e custos de armazenamento constantes. O caso geral é ainda um tópico de pesquisa futura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BITRAN, G.R.; HAX, A.C.; VALOR-SABATIER, J. *Diagnostic analysis of inventory systems; an optimization approach.* Cambridge, MA, Sloan School of Management, MIT, 1980. (Technical Report, 11).

BITRAN, G.R.; MAGNANTI, T.L.; YANASSE, H.H. *Analysis of the uncapacitated dynamic lot size problem.* Cambridge, MA, MIT, 1981. Versão preliminar.

GEOFFRION, A.M. *Aggregation theory and its application to modeling in mathematical programming.* Los Angeles, Graduate Shool of Management, University of California, 1977. (Working Paper nº 278).

——— *Customer aggregation in distribution modeling.* Los Angeles. Graduate School of Management, University of California, 1976 b. (Working Paper nº 259).

——— *A priori error bounds for procurement commodity aggregation in logistic planning models.* Los Angeles. Graduate School of Management, University of California, 1976 a. (Working Paper nº 251).

MANNE, A.S. Programming of economic lot sizes. *Management Science, 4:* 115-135, 1958.

ORLICKY, J. *Material requirements planning; The new way of life in production and inventory management.* McGraw-Hill, 1975.

PETERSON, R.; SILVER, E.A. *Decision systems for inventory management and production planning;* John Wiley, New York, 1979.

SMITH, D.J. Material requirements planning. In: HAX, A.C., ed. *Studies in operations management.* North Holland, 1978. cap.11.

WAGNER, H.M.; WHITIN, T.M. Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science, 5:* 89-96, Oct. 1958.

YANASSE, H.H. *Aggregation and computational complexity of lot size problems.* Doctoral Dissertation. Cambridge, MA, Sloan School of Management. MIT. Sept. 1981.