

1. Publicação nº <i>INPE-3217-PRE/570</i>	2. Versão	3. Data <i>Agosto, 1984</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DGA/DIO</i>	Programa <i>IONAP</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>ÓRBITAS ELÍPTICAS PREVISÃO DE ÓRBITAS</i> <i>ÓRBITAS HELIOCÊNTRICAS ÓRBITAS PERTURBADAS</i> <i>COMETA HALLEY</i>			
7. C.D.U.: <i>521.7</i>			
8. Título <i>ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE ÓRBITAS ELÍPTICAS HELIOCÊNTRICAS</i>		10. Páginas: <i>36</i>	
		11. Última página: <i>33</i>	
9. Autoria <i>C.J. Zamlutti</i>		12. Revisada por <i>Eugênio Scalise Junior</i> <i>Eugênio Scalise Junior</i>	
Assinatura responsável <i>[assinatura]</i>		13. Autorizada por <i>[assinatura]</i> <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Director General</i>	
14. Resumo/Notas <i>Três fatos recentes como a aproximação do cometa Halley, a hipótese sobre um décimo planeta no sistema solar e o alinhamento parcial dos planetas fazem ressurgir o interesse por órbitas de corpos celestes. Este trabalho focaliza alguns aspectos de órbitas repetitivas periodicamente (elípticas), para as quais a atração central é exercida pelo Sol. Primeiramente são introduzidos os conceitos físicos e geométricos necessários ao desenvolvimento do trabalho. Em seguida, o material é particularizado para órbitas heliocêntricas consideradas em relação ao plano da órbita da Terra em torno do Sol. Este assunto é tratado de forma acessível aos leitores não-especializados.</i>			
15. Observações <i>Este trabalho foi parcialmente subvencionado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FNDCT), através do Contrato FINEP 537/CT. Trabalho apresentado na SBPC, 1984 e submetido à Revista Brasileira de Física.</i>			

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE ÓRBITAS ELÍPTICAS HELIOCÊNTRICAS

C. J. Zamlutti

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq
12200 São José dos Campos, S.P., Brasil

SUMÁRIO

Três fatos recentes como a aproximação do cometa Halley, a hipótese sobre um décimo planeta no sistema solar e o alinhamento parcial dos planetas fazem ressurgir o interesse por órbitas de corpos celestes. Este trabalho focaliza alguns aspectos de órbitas repetitivas periodicamente (elípticas), para as quais a atração central é exercida pelo Sol. Primeiramente são introduzidos os conceitos físicos e geométricos necessários ao desenvolvimento do trabalho. Em seguida, o material é particularizado para órbitas heliocêntricas consideradas em relação ao plano da órbita da Terra em torno do Sol. Este assunto é tratado de forma acessível aos leitores não-especializados.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE ÓRBITAS ELÍPTICAS HELIOCÊNTRICAS

C. J. Zamlutti

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq
12200 São José dos Campos, S.P., Brasil

ABSTRACT

Three recent news: the approximation of the Halley cometa, speculations about a tenth planet in the solar system and the partial alignment of planets bring again the interest on orbits of celestial bodies. This work focus on some aspects of periodically cycling orbits (elliptic orbits), for which the central force is due to the Sun. First physical and geometrical concepts, needed to the development, are introduced. Then, the matter is particularized to heliocentric orbits, considered relative to the plane of the Earth's orbits around the Sun. The material is delt with in accessible form to non-expert readers.

1- INTRODUÇÃO

O problema da determinação da posição de corpos celestes, relativamente à Terra, apresenta-se em vários graus de complexidade. Os estudos para simples observação são os mais elementares. Os estudos para os quais se deseja determinar indiretamente características de corpos celestes, que produzem efeitos secundários (perturbações) sobre a órbita, exigem certamente um elevado grau de precisão. Neste trabalho será tratado o problema da determinação de órbita para observação do corpo celeste. O efeito de perturbações é discutido de uma forma elementar para dar ao leitor uma idéia sobre trabalhos mais complexos.

O problema de determinação de órbitas, em sua forma mais simples, reduz-se a um problema de dois corpos, formulado e resolvido inicialmente por Newton. Este problema resume-se a: "Sabendo num dado instante a posição e a velocidade de dois corpos, de massas conhecidas, movendo-se sobre a ação da força gravitacional mútua, determinar a posição e a velocidade desses corpos em qualquer outro instante".

O problema que será aqui discutido difere ligeiramente do problema de Newton, pois no presente caso o observador encontra-se em movimento. A abordagem sob um ponto de vista de dois corpos é considerada suficiente numa primeira aproximação. Na realidade vários corpos são envolvidos, mas como o Sol retém mais de 99.9% de toda a matéria do sistema solar a aproximação por movimento de dois corpos é possível. O efeito da atração mútua de um planeta sobre outro pode ser considerado como uma perturbação ao movimento de dois corpos.

A abordagem aqui utilizada, no tratamento do problema, permite que o leitor possa obter uma solução aproximada nos seguintes casos:

- 1- movimento de qualquer corpo do sistema solar (órbitas heliocêntricas),

2- movimentação de satélites naturais ou artificiais em torno de qualquer planeta (órbitas planetocêntricas).

A teoria aqui exposta não se aplica a órbitas interplanetárias, embora possa ser estendida facilmente para englobar estes casos.

A apresentação do material no trabalho é feita em três formas distintas:

- a- desenvolvimento teórico,
- b- informação complementar,
- c- ilustração suplementar.

O desenvolvimento teórico é adotado quando o elemento introduzido pertence à estrutura básica do trabalho. As informações são fornecidas (em geral referenciadas) como complementação do texto. Os exemplos ilustrativos suplementam o assunto abordado, dando ao leitor uma idéia da importância do conhecimento introduzido.

O tratamento teórico detalhado dos elementos físicos e matemáticos foi evitado. Este tópico é de importância para projeto de órbitas (colocação de satélites em órbitas), mas de importância secundária para a simples observação de corpos já em órbitas. Com isto, resumiu-se o problema da formulação da equação básica de órbitas e suprimiu-se o desenvolvimento matemático para a obtenção da forma da órbita. Assim, uma vez estabelecida a forma da órbita (elíptica), são discutidos os elementos necessários para a determinação da posição do corpo celeste, em relação a um observador localizado na terra.

2- ELEMENTOS DE FÍSICA

Nesta seção serão introduzidos os conceitos físicos, necessários ao cálculo de órbitas. Primeiramente cumpre lembrar que a dinâmica predominate da movimentação de corpos celestes é a de um movi

mento de atração central. Este tipo de movimento é essencialmente planar quando apenas dois corpos são considerados (Landau and Lifchitz⁴, 1966).

2.1- Leis do Movimento

O movimento de um corpo sujeito a uma força central é caracterizado pela existência de uma força:

$$F = k^2 \frac{Mm}{r^2}, \quad (2.1)$$

sempre na direção da reta que une os centros dos dois corpos. No presente caso, k^2 é a constante gravitacional universal, M a massa central, m a massa do corpo que descreve o movimento, e r a distância entre os centros dos dois corpos. A força é dirigida do corpo de massa menor (m) para o corpo de massa maior (M). A Figura 1 ilustra a geometria do movimento. No sistema cartesiano, de coordenadas x , caracteriza-se o movimento com relação ao centro do corpo de massa maior. No sistema de coordenadas y caracteriza-se o movimento com respeito ao ponto de observação.

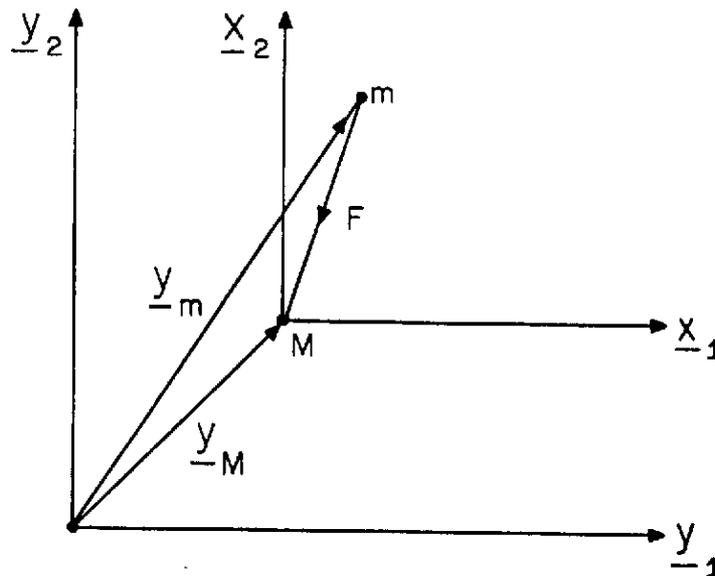


Fig. 1 - Geometria do movimento de atração central mostrando os sistemas de referência.

O sistema de coordenadas x_1, x_2 e x_3 tem seus eixos cartesianos paralelos respectivamente aos eixos y_1, y_2 e y_3 do sistema de observação.

O vetor unitário da direção da força central é $r^{-1}(\underline{y}_M - \underline{y}_m)$, onde os elementos sublinhados indicam vetores. As equações diferenciais do movimento para as duas massas tornam-se respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\underline{y}}_m &= \frac{k^2 M}{r^3} (\underline{y}_M - \underline{y}_m), \\ \ddot{\underline{y}}_M &= \frac{k^2 m}{r^3} (\underline{y}_m - \underline{y}_M), \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

onde as derivadas temporais são indicadas por pontos acima de cada símbolo, seguindo a notação e o desenvolvimento de Stiefel e Scheifele¹⁰ (1971).

2.2- Movimento Relativo à Massa Central

No sistema de coordenadas x , a posição do corpo de massa m , com relação ao corpo de massa M , é caracterizada pelo vetor radial:

$$\underline{x} = \underline{y}_m - \underline{y}_M \quad (2.3)$$

O Sistema (2.2), que contém seis equações diferenciais escalares, reduz-se ao sistema abaixo, com apenas três equações escalares:

$$\ddot{\underline{x}} = - \frac{k^2 (M+m)}{r^3} \underline{x}. \quad (2.4)$$

Certamente deve-se conhecer perfeitamente o movimento da origem de coordenadas y , com relação à origem de coordenadas x . Apenas para fixar idéias, para um observador localizado na Terra (sistema y), o movimento de um corpo em torno do Sol (sistema determinado por x) pode ser deter

minado por (2.4), pois o movimento da Terra em torno do Sol (variação temporal do vetor \underline{y}_M) é conhecido.

A resolução do Sistema (2.4) de equações constitui assim o problema básico de previsão de órbitas. Considerando, adicionalmente, que o movimento provocado por uma força central é sempre plano (Landau and Lifchitz⁴, 1966) existirá ainda um sistema de coordenadas z , obtido por rotações planas do sistema x , para o qual apenas duas equações escalares caracterizam o movimento. O problema de órbitas é então descrito pelo sistema de equações escalares:

$$\ddot{\underline{z}} = - \frac{k^2 (M+m)}{r^3} \underline{z}, \quad (2.5)$$

onde z_1 e z_2 (componentes do vetor \underline{z}) são as coordenadas cartesianas do corpo em movimento no plano orbital. A noção exata do relacionamento dos sistemas x e z será adquirida gradualmente pelo leitor no decorrer da Seção 3.

2.3- Órbitas Circulares e Elípticas

A forma geométrica de uma órbita é caracterizada essencialmente por considerações energéticas (Landau and Lifchitz⁴, 1966). Este tópico não é abordado neste trabalho que se ocupa da observação de corpos já em órbita. As considerações energéticas são entretanto extremamente importantes, em Ciência Espacial, para lançamento de satélites e observatórios espaciais.

A forma orbital mais simples é a circular para a qual o valor do raio r permanece constante em (2.5), e é dado pela distância d entre os dois corpos. Neste caso, a solução de (2.5) é extremamente simples pois se trata de movimento de um oscilador harmônico de frequência:

$$\omega = +[k^2(M+m)/d^3]^{1/2}. \quad (2.6)$$

Oferecem maior interesse, no estudo de órbitas, as formas elípticas que englobam as formas circulares. Neste caso, o raio vetor oscila entre um valor mínimo e um valor máximo, com periodicidade bem determinada. O raio vetor \bar{r} é dado por:

$$r = a(1 - e \cos \psi), \quad (2.7)$$

onde a é o semi-eixo maior da elipse; e , a excentricidade; e ψ , um ângulo denominado anomalia excêntrica. Este ângulo será melhor identificado quando forem expostas as relações geométricas envolvidas. Cumpre lembrar que não sendo a velocidade angular uniforme durante o trajeto de uma órbita elíptica não se pode esperar obter $\psi = \omega t$. Na realidade, o ângulo ψ é determinado pela solução de uma equação transcendental conhecida como equação de Kepler:

$$\psi - e \sin \psi = \omega \Delta t = \mu \quad (2.8)$$

(McCuskey⁵, 1963). O valor de ω é determinado usando-se o período T , de repetição da órbita, e Δt é o intervalo de tempo, decorrida entre o instante considerado e o instante correspondente à última passagem pelo periélio. O produto $\omega \Delta t$ é chamado anomalia média (μ).

A solução da equação (2.8) pode ser obtida por métodos numéricos como por exemplo o da régua falsi (Zamlutti¹¹, 1969) ou o método de relaxação (Roy⁶, 1965). Uma vez determinado o ângulo ψ , as coordenadas z_1 e z_2 da equação (2.5) podem ser obtidas por:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= a(\cos \psi - e), \\ z_2 &= a \sin \psi \sqrt{1 - e^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

(McCuskey⁵, 1963). Assim, conhecido o semi-eixo maior da elipse, sua excentricidade e o período de repetição orbital, são perfeitamente determinadas as coordenadas do movimento, no plano da órbita. É importan

te notar que para $e \rightarrow 0$ a órbita elíptica tende a uma órbita circular, estando portanto este caso englobado na Solução (2.9).

2.4- Perturbações no Movimento

O movimento livre de dois corpos para os quais a força atuante é ao longo da reta que une os centros dos corpos pode ser perturbado por uma série de fatores. Dentre eles destacam-se: o atrito com a atmosfera de planetas, no caso de satélites interplanetários; força exercida por outros corpos; assimetria na distribuição de massas, no caso de corpos com grandes dimensões; etc. Pode-se representar a resultante das perturbações pela inclusão de uma aceleração \underline{j} no lado direito das equações do movimento, que neste caso deixam de ser equações homogêneas.

Neste trabalho será apenas considerado o caso de pequenas perturbações (que não afetam significativamente a órbita) para as quais a solução da equação homogênea representa ainda uma boa aproximação.

3- ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

A Figura 2 ilustra a geometria do movimento central, no plano da órbita. O movimento foi primeiramente considerado estacionário para melhor compreensão.

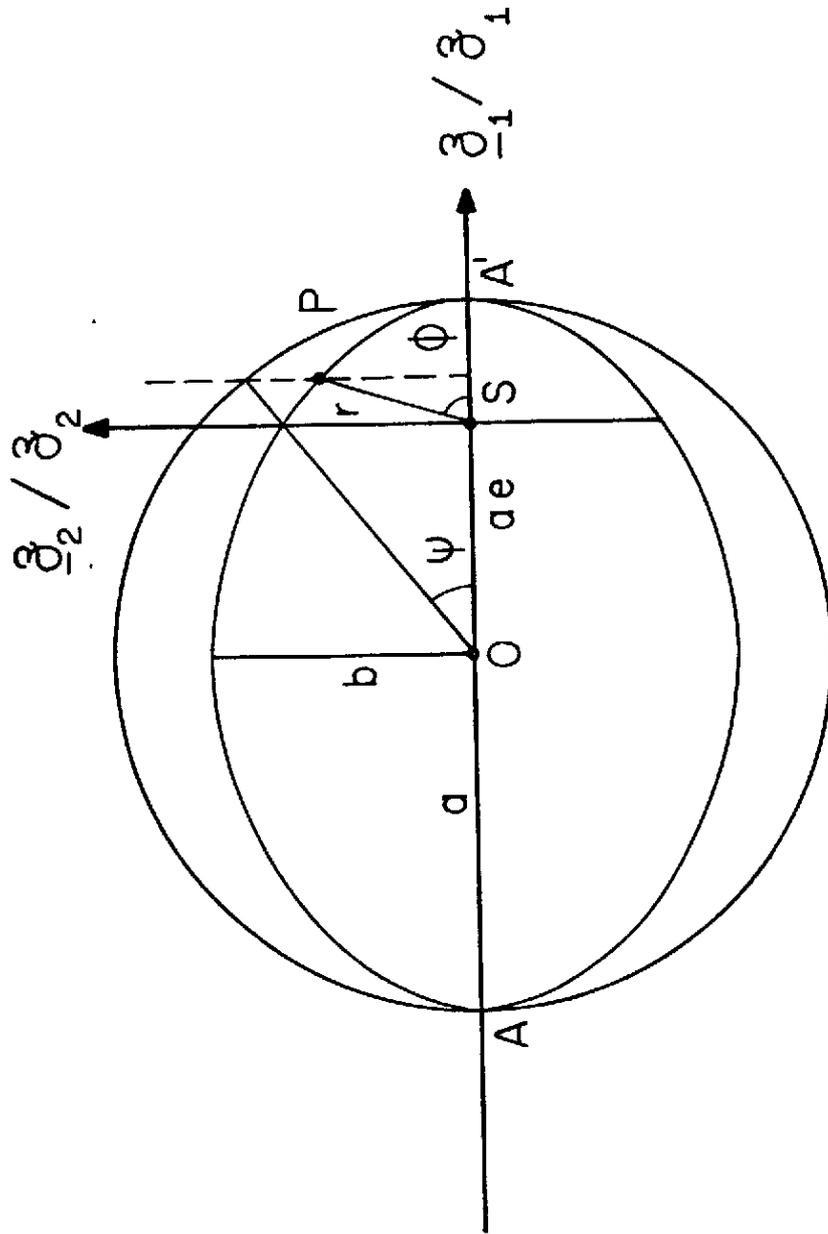


Fig. 2 - Movimento elíptico no plano da órbita.

Na Figura 2 têm-se os seguintes elementos:

- SA' - distância do centro do Sol ao periélio*,
- SA - distância do centro do Sol ao apoélio*,
- a - semi-eixo maior,
- b - semi-eixo menor,
- e - excentricidade,
- P - posição do corpo relativamente ao centro do Sol,
- ψ - anomalia excêntrica,
- ϕ - anomalia verdadeira.

3.1- Solução da Equação do Movimento no Plano da Órbita

Pela Figura 2 pode-se estabelecer a relação:

$$z_1 = r \cos \phi = a \cos \psi - ae. \quad (3.1)$$

A equação da elipse permite escrever:

$$\frac{(z_1 + ae)^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1,$$

que resulta em:

$$z_2 = b \sin \psi = a \sqrt{1-e^2} \sin \psi. \quad (3.2)$$

Assim sendo, a resolução da equação do movimento no plano da órbita requer o conhecimento de apenas três parâmetros, a saber: semi-eixo maior, excentricidade e período orbital. Esta resolução envolve os seguintes passos:

* Convencionou-se usar os prefixos *peri* e *apo* juntamente com o nome do corpo central do movimento para indicar o pericentro e o apocentro da elipse da órbita. No entanto, não existe obrigatoriedade da utilização uniforme do prefixo *apo*. Assim, é escrita a forma *ofélio* em lugar de *apoélio*. O autor recomenda que seja mantida uniformidade de notação para consistência com a literatura internacional.

- a) resolução da equação de Kepler,
- b) cálculo das coordenadas z_1 e z_2 pelas Equações (3.1) e (3.2).

3.2- Variação da órbita no Plano

Nas considerações teóricas sobre órbitas (Landau and Lifchitz⁴, 1966), quando o raio vetor oscila entre o limite máximo e o limite mínimo (órbitas elípticas), o movimento nem sempre é a curva fechada da Figura 2. Na realidade a trajetória do corpo de massa m está contida em um anel limitado por dois círculos, um com o raio mínimo e outro com o raio máximo. A Figura 3 ilustra a variação da trajetória no plano da órbita.

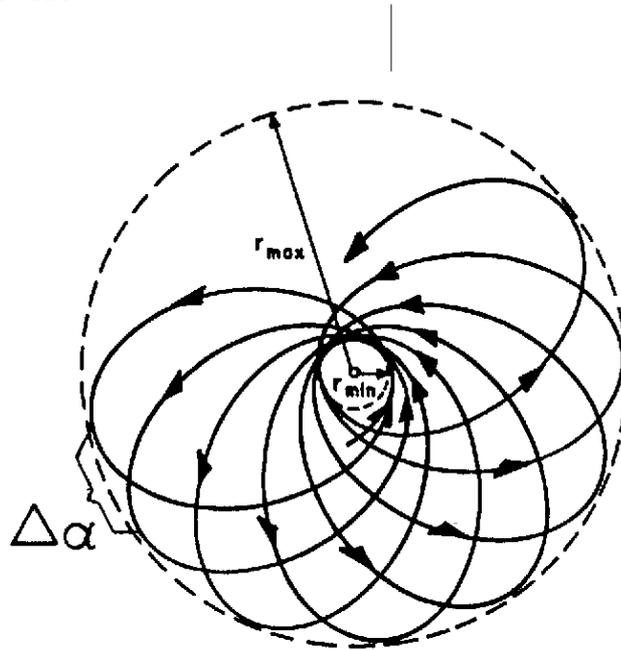


Fig. 3 - Variação do movimento elíptico no plano da órbita.

O ângulo $\Delta\alpha$, na Figura 3, é a rotação sofrida pelo sistema de coordenadas z durante um período orbital.

3.3- Orientação da Órbita no Espaço

Uma vez determinado o movimento no plano da órbita, relativo à posição do pericentro, é necessário considerar o posicionamento do plano da órbita e do pericentro no espaço. Isto permite relacionar as coordenadas x das Equações (2.4) com as coordenadas z das Equações (2.5).

A geometria da trajetória no espaço é ilustrada na Figura 4.

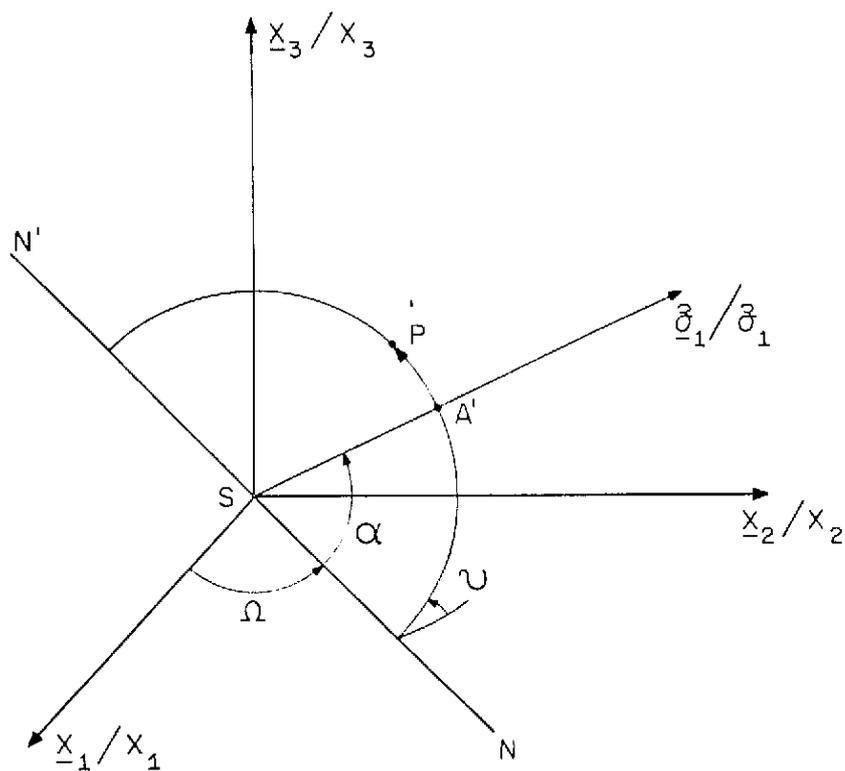


Fig. 4 - Localização do plano orbital no espaço.

Na Figura 4 a reta NN' indica a intersecção do plano da órbita com o plano determinado pelos vetores \underline{x}_1 e \underline{x}_2 . A inclinação entre esses planos é designada por ν . A posição do pericentro, com relação à reta NN', determina um ângulo α denominado argumento do pericentro. O ângulo Ω , compreendido entre o eixo \underline{x}_1/x_1 e a intersecção NN' com o plano da órbita, é denominado longitude do nó ascendente (ascensão reta do nó ascendente). Uma discussão sobre o problema de localização da órbita no espaço é encontrada em Sterne⁹ (1960).

Conhecidos os três parâmetros da órbita no plano e os três parâmetros da órbita no espaço, torna-se possível a determinação da órbita, em qualquer sistema de coordenadas.

4- VARIAÇÃO TEMPORAL DOS PARÂMETROS DA ÓRBITA

Os parâmetros da órbita, em geral, não permanecem constantes no decorrer do tempo. Várias razões podem ser apontadas para isto, destacando-se em particular a presença de uma aceleração \underline{j} nas equações do movimento. O efeito de perturbações, conforme mencionado anteriormente, pode ser complexo em casos particulares. Serão aqui considerado apenas o caso de pequenas perturbações que não afetam o comportamento geral da trajetória. Isto restringe o trabalho aos casos em que:

$$|\underline{j}| \ll |\underline{\ddot{x}}| . \quad (4.1)$$

Por exemplo, este caso inclui o efeito de um terceiro corpo de massa m_1 localizado a uma distância média r_1 do corpo de massa m , e tal que $m_1/r_1^2 \ll M/r^2$. Uma aplicação deste tipo de perturbação é encontrada no movimento da Terra em torno do Sol, considerada a presença da Lua. Neste caso:

$$\begin{aligned} m_1 &= \text{massa da Lua} = 7.4 \times 10^{22} \text{ Kg,} \\ r_1 &= \text{distância Terra-Lua} = 3.8 \times 10^5 \text{ Km,} \\ M &= \text{massa do Sol} = 2 \times 10^{30} \text{ Kg,} \\ r &= \text{distância Terra-Sol} = 1.5 \times 10^8 \text{ Km,} \end{aligned}$$

o que resulta em:

$$m_1/r_1^2 \cong 0.5 \times 10^{12} \ll 0.9 \times 10^{14} \cong M/r^2,$$

sendo os valores dados em Kg/Km².

4.1- Alteração da Equação do Movimento

O Sistema (2.2) de equações do movimento é alterado ligeiramente no caso em que uma aceleração \underline{j} adicional esta presente. Para não perturbar a determinação da órbita no caso em que $|\underline{j}|$ é suficientemente pequeno em relação à aceleração produzida pela força central, resolvem-se separadamente o Sistema (2.2) de equações homogêneas e, em seguida, o sistema de equações das perturbações:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{\underline{y}}_m &= \underline{j}, \\ \delta \ddot{\underline{y}}_M &= \underline{j}_M, \end{aligned} \right\}, \quad (4.2)$$

onde \underline{j}_M é o efeito que a força geradora da aceleração \underline{j} (sobre o corpo de massa m) produz no corpo de massa M.

Os mais variados métodos de abordagem do problema são tratados na literatura (e.g. Stiefel and Scheifele¹⁰, 1971; Roy⁶, 1965). O método de variação dos parâmetros tratado em Roy⁶ (1965) apresenta grande complexidade para a obtenção de resultados simples. Uma visualização do resultado torna-se impraticável nesses casos.

Para dar ao leitor uma idéia do que se espera, como efeito de perturbações, optou-se neste trabalho pelo tratamento simplificado do problema, usando analogias.

Como considerações básicas, do presente tratamento, serão feitas as hipóteses:

- a- as acelerações \underline{j} e \underline{j}_M admitem um desenvolvimento linear do tipo: $\underline{j} = p \delta \underline{y}_m$ e $\underline{j}_M = p_M \delta \underline{y}_M$, com p e p_M constantes para pequenos intervalos do tempo;
- b- adota-se o efeito equivalente às acelerações \underline{j} e \underline{j}_M produzidas por forças hipotéticas e de natureza central.

Nessas condições, tem-se para o corpo de massa m um sistema de equações análogo ao sistema dado por (2.4). Considerando, adicionalmente, uma massa M , para o corpo fictício do item b, determina-se a distância necessária para produzir \underline{j} . É simples verificar que sendo \underline{j} muito menor que a aceleração principal, a distância para produzi-la será muito maior que as distâncias orbitais envolvidas. Em virtude da hipótese de \underline{j} constante tem-se então uma órbita circular com raio muito grande, como solução do Sistema (4.2). Resulta assim em um deslocamento praticamente linear, na direção perpendicular a \underline{j} , como efeito dessa aceleração. O deslocamento dá-se no plano da órbita, determinado pelo corpo de massa m e o corpo fictício de massa M . Esta analogia permite verificar que a órbita original do corpo será alterada ligeiramente, em sua forma, bem como deslocada do plano orbital original. A Figura 5 ilustra a geometria envolvida no processo de perturbação.

Um exemplo numérico de aplicação do método de analogia apresentado é o de determinar o efeito produzido pela Lua no movimento da Terra em torno do Sol. Sendo $p = 0.5 \times 10^{12} \text{Kg/Km}^2$ e $M = 2 \times 10^{30} \text{Kg}$, o raio orbital, em torno do corpo fictício de massa M , será:

$$r_0 = (2 \times 10^{30} / 0.5 \times 10^{12})^{1/2} = 2 \times 10^9 \text{Km}$$

que é 10 vezes maior que a distância da Terra ao Sol. O período desta órbita fictícia, determinado a partir de (2.6), vale:

$$T = \frac{2 \pi r_0}{k} [r_0 / (M+m)]^{1/2}. \quad (4.3)$$

Sendo $k^2 = 6.67 \times 10^{-20} \text{Km}^3/(\text{Kg sec}^2)$ tem-se:

$$T \cong 1.5 \times 10^9 \text{ sec} \cong 50 \text{ anos.}$$

Assim, durante toda uma órbita da Terra (360°) em torno do sol, apenas 7° da órbita em torno do corpo fictício terão sido percorridos, de onde a validade de uma aproximação linear para o deslocamento produzido pela Lua.

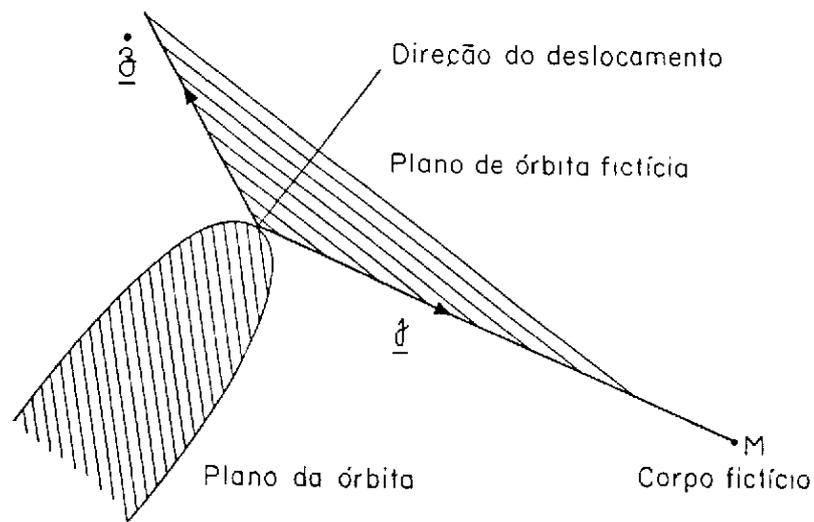


Fig. 5 - Deslocamento produzido sobre um ponto da órbita por perturbações.

Cumpre notar que a escolha, para o corpo fictício, de uma massa idêntica \tilde{m} que produz o movimento principal visa permitir uma comparação imediata do efeito da perturbação no movimento principal.

É importante ressaltar que apesar de o efeito da Lua, sobre a órbita da Terra ser mínimo a restrição a de constância de p requer um intervalo de tempo consideravelmente menor que o período orbital da Terra. De fato, como a Lua apresenta um período de 28 dias para circulação completa em torno da Terra para que p possa ser considerado constante, os intervalos de tempo não devem superar $\Delta t = 1$ dia.

4.2- Variações Temporais Regulares

As variações temporais regulares, ou variações de primeira ordem, são importantes, principalmente, na determinação de trajetórias de satélites. Intuitivamente pode-se perceber que mesmo sem alteração das características orbitais principais (ou seja, constância do semi-eixo maior, da excentricidade, e da permanência da órbita num mesmo plano) é possível a existência de variações regulares dos outros parâmetros com o tempo.

A presença de fatores regulares, que aceleram ou retardam a movimentação orbital normal do corpo (atrito com a atmosfera no caso de satélites), pode provocar alterações no período anomalístico. Este será então representado por:

$$T = T_0 + \dot{T}_0 (\tau - \tau_0), \quad (4.4)$$

onde o índice 0 indica o valor do parâmetro considerado, no instante de referência τ_0 ; e τ denota o instante para o qual se deseja determinar a posição do corpo em órbita.

Adicionalmente, variações energéticas provocam deslocamento da órbita, como ilustrado na Figura 3. Isto se reflete como uma variação do argumento do pericentro, dada por:

$$\alpha = \alpha_0 + \dot{\alpha}_0 (\tau - \tau_0) . \quad (4.5)$$

As perturbações discutidas na seção anterior, mesmo sem perturbar significativamente as características orbitais, podem introduzir uma rotação no plano da órbita, mantendo constantes a , e e v . Esta variação reflete-se como um acréscimo ou decréscimo da ascensão reta do nó ascendente. Este efeito se expressa por:

$$\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}_0 (\tau - \tau_0) . \quad (4.6)$$

As variações temporais regulares provocam um efeito em ca deia sobre o valor da anomalia média. De fato, considerada a variação do período anomalístico, a anomalia média será calculada por:

$$\mu' = \mu_0 + 2\pi \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{T_0 + \dot{T}_0 (\tau - \tau_0)}, \quad (4.7)$$

onde μ_0 é o valor da anomalia média no instante τ_0 . A integral em (4.7) é imediata. Da solução dela resulta:

$$\mu' = \mu_0 + \frac{2\pi}{\dot{T}_0} \ln [1 + \dot{T}_0 (\tau - \tau_0)/T_0] \quad (4.8)$$

O valor da anomalia média dado por (4.8) é relativo ao ei xo SA' da Figura 2, para o instante τ_0 . Como este eixo varia, com o tem po, esta variação deve ser acrescentada ao valor obtido em (4.8). A va riação temporal do eixo SA' é dada por:

$$\frac{d SA'}{dt} = \frac{\partial SA'}{\partial t} + \frac{\partial SA'}{\partial NN'} \frac{d NN'}{dt}. \quad (4.9)$$

Mas:

$$\frac{\partial SA'}{\partial t} = \dot{\alpha}_0, \quad \frac{\partial SA'}{\partial NN'} = \cos \nu, \quad \frac{d NN'}{dt} = \dot{\Omega}_0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial SA'} = 1$$

de onde finalmente

$$\mu = \mu' + (\dot{\alpha}_0 + \dot{\Omega}_0 \cos \nu) (\tau - \tau_0) \quad (4.10)$$

que é o valor obtido por Zamlutti¹¹ (1969) que usou considerações geo métricas.

4.3- Variações Temporais Aleatórias

Variações de natureza irregular (passagem ocasional de meteoros próximos à trajetória de um satélite por exemplo) podem afetar a trajetória de um corpo celeste. Para determinar estes efeitos, medidas periódicas das órbitas são efetuadas. Considerando a média da diferença entre os valores previstos e os medidos podem-se estabelecer as correções necessárias. Seja q um determinado parâmetro, variável no tempo ou não, sejam $q(\tau_i)$ as medidas deste parâmetro nos instantes τ_i , $i = 1, 2, \dots$. Considerando q_i como os valores previstos, para os instantes τ_i , estabelece-se o valor médio da diferença:

$$\overline{\delta q} = \overline{q_i - q(\tau_i)}, \quad (4.11)$$

e as correções necessárias podem ser efetuadas. A título de exemplo considera-se $q = a$. Seja a_0 a medida de referência do semi-eixo maior. O valor deste parâmetro será corrigido para:

$$a = a_0 + \overline{[a_0 - a(\tau_i)]}.$$

As correções para variações aleatórias permitem remover os erros aleatórios das medidas dos parâmetros.

4.4- Descoberta Teórica de Corpos Celestes

Uma vez determinada, com toda a precisão, a trajetória regular de corpos celestes, qualquer variação sistemática indicará um efeito adicional não-considerado. O planeta Netuno, por exemplo, foi previsto em 1846, por causa do desvio sistemático da órbita de Urano, que indicava a presença de uma aceleração j ainda não conhecida na ocasião.

Considerados os elementos existentes, de conhecimento do sistema solar, os astrônomos têm verificado ligeira diferença das órbitas de Netuno e Urano. Isto pode indicar a presença de uma aceleração

j devida a algum corpo desconhecido. Determina-se, desta forma, uma direção e módulo correspondente ao efeito observado. Como o módulo depende da massa e da distância, do corpo, existe uma indeterminação com respeito a estes valores. Este é o fundamento no qual se baseiam os astrônomos para sugerir a existência de um décimo planeta no sistema solar. Outras hipóteses são levantadas, mas até a resolução da indeterminação sobre massa e distância do corpo, tais hipóteses são meras especulações. Dados recentes do satélite IRAS mostraram a existência de um corpo celeste de acordo com as previsões. As informações foram ainda insuficientes para solução do problema. Uma análise diferencial das ôrbitas das sondas Pioneer 10 e 11 é aguardada para melhor esclarecimento da indeterminação.

5- SISTEMA DE REFERÊNCIA

A escolha adequada dos sistemas cartesianos, de coordenadas x e y, constitui um tópico importante no campo de previsões de ôrbita para fins de sua observação da Terra. Adicionalmente, a escolha de sistemas de coordenadas intermediários é sempre possível para maior conveniência no processamento. A matéria é discutida em detalhes na literatura (e.g. Kourganoff³, 1961; Roy⁶, 1965), da qual foram extraídos os elementos necessários para este trabalho.

5.1- Localização na Superfície da Terra

O sistema tradicional para localização de pontos situados sobre a superfície da Terra baseia-se nos princípios de Copérnico, considerando-se um dos eixos cartesianos coincidindo com o eixo de rotação da Terra em torno de si mesma. Os outros dois eixos estão num plano perpendicular ao eixo de rotação que passa pelo centro da Terra considerada perfeitamente esférica. Este plano é denominado equatorial. A Figura 6 ilustra a geometria que caracteriza este sistema de referência.

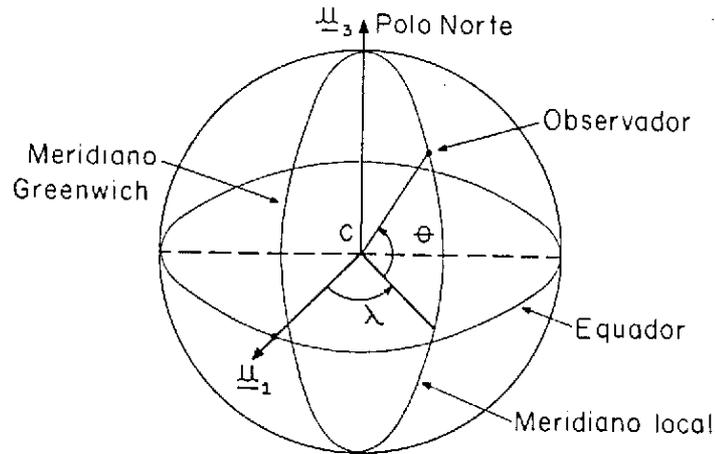


Fig. 6 - Sistema equatorial de referência.

O ângulo λ é denominado longitude e pode ser dado como medida angular ou de tempo, considerando que 24 horas (1 dia) corresponde a uma rotação completa de 360° . A intersecção do meridiano de Greenwich com o plano equatorial define o eixo de referência a partir do qual se mede a longitude, no sentido anti-horário relativamente a um observador localizado no Pólo Norte.

O ângulo θ é denominado latitude e medido a partir do plano equatorial positivamente para o Hemisfério Norte e negativamente para o Hemisfério Sul, variando assim de -90° a $+90^{\circ}$.

Como a Terra não é perfeitamente esférica, variantes deste sistema (ver Roy⁶, 1965) são em geral consideradas para levar em conta a sua forma geóide (elipse de revolução). Considerar-se-á, neste trabalho, a forma perfeitamente esférica como uma aproximação suficiente.

5.2- O Sistema Eclíptico

O sistema de localização de pontos sobre a superfície da Terra apresenta uma conveniência estreitamente local. Para satisfazer o propósito duplo, conveniência local e fácil aplicação em sua forma paralela com origem no centro do Sol (coordenadas x), um sistema seme

lhante ao anterior é usado. Neste sistema, denominado eclíptico, o plano de referência é estabelecido pelo plano da órbita da Terra em torno do Sol. Este plano secciona o plano equatorial definindo sobre a superfície da Terra dois pontos bem caracterizados (equinócios vernal e outonal). O equinócio vernal é utilizado para caracterizar o eixo de referência para contagem das longitudes eclípticas λ_e . As latitudes eclípticas θ_e são contadas do mesmo modo que anteriormente, a partir do plano da eclíptica. O terceiro eixo deste sistema é definido pela perpendicular ao plano da eclíptica que passa pelo centro da Terra, considerada esférica. A Figura 7 ilustra este sistema de referência.

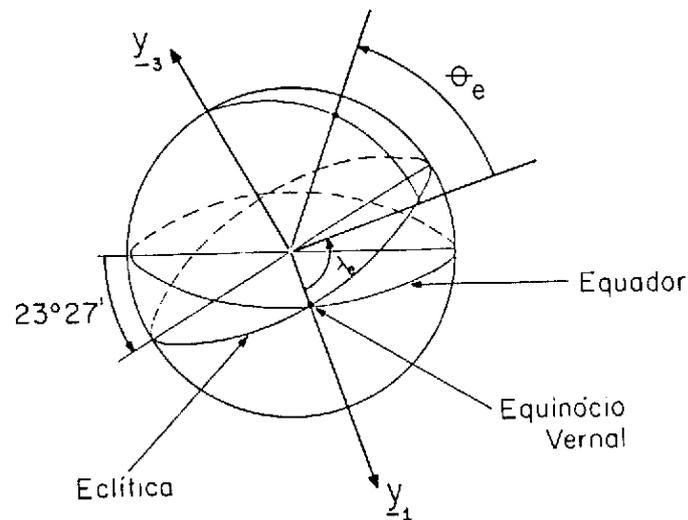


Fig. 7 - Sistema eclíptico de referência.

O sistema eclíptico é usualmente utilizado como básico na determinação de órbitas heliocêntricas, por satisfazer o duplo propósito mencionado acima. O eixo y_3 forma um ângulo de $23^{\circ}27'$ com o eixo y_3 .

A transformação de coordenadas entre os dois sistemas aqui apresentados pode ser efetuada facilmente por uma seqüência conveniente de rotações planas.

Para satélites em órbitas em torno da Terra, o sistema equatorial apresenta o inconveniente da variação dos eixos $\underline{\mu}_1$ e $\underline{\mu}_2$ com a rotação da Terra. Por outro lado apresenta a vantagem de ser um sistema local, para o qual a posição do observador é conhecida para todos os pontos. Assim, adota-se nestes casos um sistema misto, utilizando o eixo $\underline{\mu}_1$ coincidente com o eixo \underline{y}_1 e o eixo $\underline{\mu}_3$ apontando para o Pólo Norte. O eixo $\underline{\mu}_2$ é escolhido sobre o plano equatorial, de modo que a orientação do sistema seja positiva. Uma discussão sobre este sistema é encontrada em Roy⁶ (1965) e um exemplo de aplicação em Zamlutti¹¹ (1969).

6- ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA E TRIGONOMETRIA

Para completar a apresentação dos elementos essenciais para a observação de órbitas heliocêntricas, por um observador localizado na Terra, alguns conhecimentos complementares são ainda necessários. Com relação à transformação de coordenadas, serão introduzidos nesta seção os elementos requeridos da geometria analítica. No tocante ao posicionamento do telescópio (ou antena) observador serão apresentados os conhecimentos exigidos de trigonometria.

6.1- Rotação Plana

As rotações planas são de capital importância no estudo de órbitas. Isto se deve ao fato de dois sistemas cartesianos de coordenadas, com origem comum, poderem ser superpostos, por uma conveniente seqüência de rotações planas. Serão aqui determinadas as modificações que sofrem as coordenadas de um corpo num determinado sistema de referência, quando uma rotação em torno de um de seus eixos é imposta sobre este sistema. Para referência o leitor pode consultar Brouwer e Clemence², (1961).

Considere-se a Figura 8 na qual está representado um sistema de coordenadas s , que gira um ângulo β em torno do eixo \underline{s}_1 . Os eixos \underline{s}_2 e \underline{s}_3 passam respectivamente a ocupar as posições \underline{s}'_2 e \underline{s}'_3 .

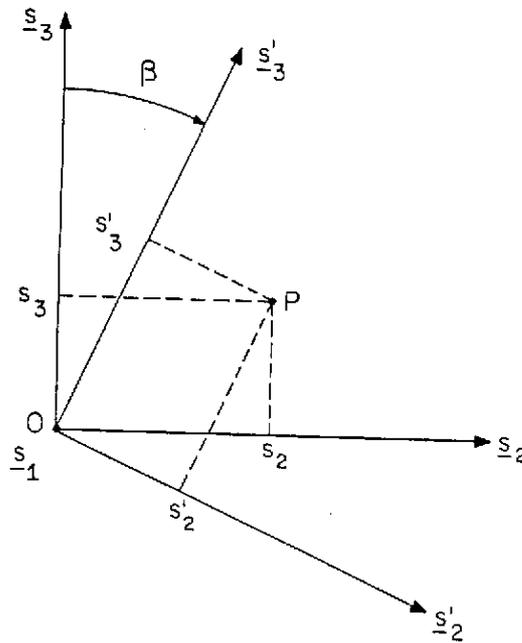


Fig. 8 - Rotação plana, de um ângulo horário β , em torno do eixo \underline{s}_1 , perpendicular ao plano da figura.

Seja P a projeção do corpo no plano \underline{s}_2 \underline{s}_3 . Sejam s_2 e s_3 as coordenadas de P no sistema s . As novas coordenadas s'_2 e s'_3 valerão respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} s'_2 &= s_2 \cos \beta - s_3 \operatorname{sen} \beta \\ s'_3 &= s_2 \operatorname{sen} \beta + s_3 \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

o que permite caracterizar a mudança de variáveis por meio de uma matriz de transformação como:

$$\underline{s}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\operatorname{sen} \beta \\ 0 & \operatorname{sen} \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \underline{s} \quad (6.2)$$

para rotação horária, em torno do eixo \underline{s}_1 . Para rotação anti-horária, deve-se substituir β por $-\beta$ na matriz acima.

É simples verificar que se o eixo de rotação fosse \underline{s}_2 se-
ria obtido:

$$\underline{s}' = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \underline{s} \quad (6.3)$$

para rotação horária. Analogamente, se o eixo de rotação horária fosse \underline{s}_3 seria obtido:

$$\underline{s}' = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\text{sen } \beta & 0 \\ \text{sen } \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{s}. \quad (6.4)$$

Para ilustrar a utilização de rotações planas nas trans-
formações de coordenadas, necessárias em cálculos orbitais, considere-
-se o problema de transformar as coordenadas z em coordenadas x . Isto
é conseguido por meio de três rotações planas. Referindo à Figura 4,
efetua-se primeiramente uma rotação horária de um ângulo $\beta = \alpha$ em tor-
no do eixo \underline{z}_3 . Isto permite que o eixo \underline{z}_1 passe a coincidir com a reta
 NN' . Faz-se em seguida uma rotação horária de um ângulo $\beta = \nu$ em torno
do eixo \underline{z}_1 . Com isto, o eixo \underline{z}_3 passará a coincidir com o eixo \underline{x}_3 . Fi-
nalmente, uma rotação horária de um ângulo $\beta = \Omega$ em torno do eixo \underline{z}_3
permitirá a perfeita coincidência dos dois sistemas de coordenadas e a
identificação das coordenadas x com as coordenadas z transformadas. Tem-
-se assim:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\text{sen } \Omega & 0 \\ \text{sen } \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & -\text{sen } \nu \\ 0 & \text{sen } \nu & \cos \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{z}.$$

6.2- Posição do Sol em Relação à Terra

O posicionamento de um corpo, em órbita heliocêntrica,
com relação à Terra requer o conhecimento do vetor \underline{y}_M (ver Seção 2).

A utilização de coordenadas eclípticas favorece, de certa forma, a resolução deste problema, uma vez que o vetor \underline{y}_M , neste caso, pertence ao plano $x_1 x_2$.

A Figura 9 ilustra a geometria envolvida na determinação do vetor \underline{y}_M .

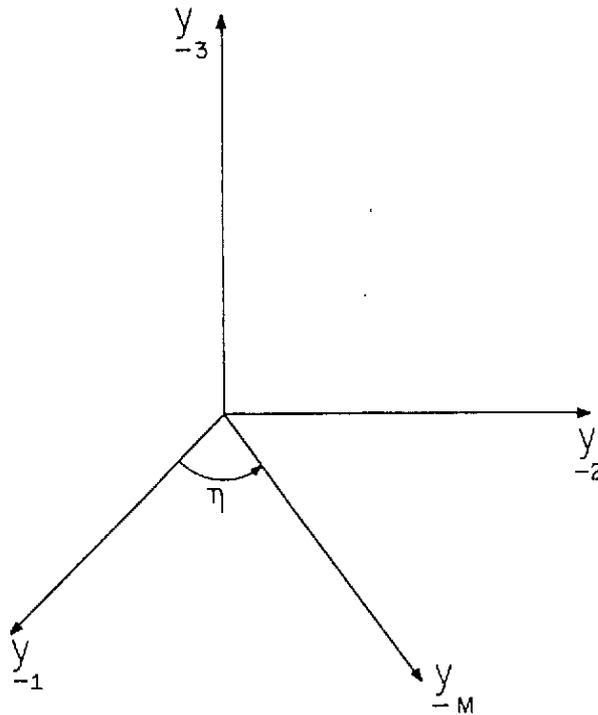


Fig. 9 - Geometria para localização da direção do vetor \underline{y}_M .

Quanto à Figura 9 o eixo \underline{y}_1 coincide com a direção estabelecida pelo centro da Terra e o equinócio vernal. O ângulo η é dado por:

$$\eta = \frac{2\pi}{T_s} (\tau - \tau_V), \quad (6.5)$$

onde T_s é o período de rotação da Terra em torno do Sol, τ é o instante considerado e τ_V o instante de equinócio vernal (fornecido pelos observatórios astronômicos e.g. Anuário do Observatório de São Pau

10¹, 1984). O período de rotação da Terra, em torno do Sol, a ser considerado é o período anomalístico de 365d06h13m53s (ver Roy⁶, 1965). O intervalo de tempo ($\tau - \tau_V$) deve ser convertido para tempo anomalístico para compatibilidade de unidades.

Para fins de cálculos aproximados de órbitas heliocêntricas, pode-se desprezar a pequena excentricidade da órbita terrestre em torno do Sol ($e = 0.016726$). Adota-se então o valor $y_M = 1.495 \times 10^8$ km.

6.3- Posicionamento do Dispositivo Observador da Órbita

O posicionamento do dispositivo que irá observar a órbita é feito por uma referência estritamente local, para maior conveniência do observador. Esta referência local é feita por meio de dois ângulos. Um dos ângulos localiza horizontalmente o dispositivo no plano tangente à superfície da Terra no ponto de observação. Este ângulo é chamado azimute. O outro ângulo, denominado elevação, posiciona o dispositivo observador no plano vertical, perpendicular ao plano tangente horizontal e determinado por três pontos a saber: centro da Terra, observador e ponto de espaço onde se encontra o corpo em observação.

A geometria envolvida no cálculo da elevação é ilustrada na Figura 10.

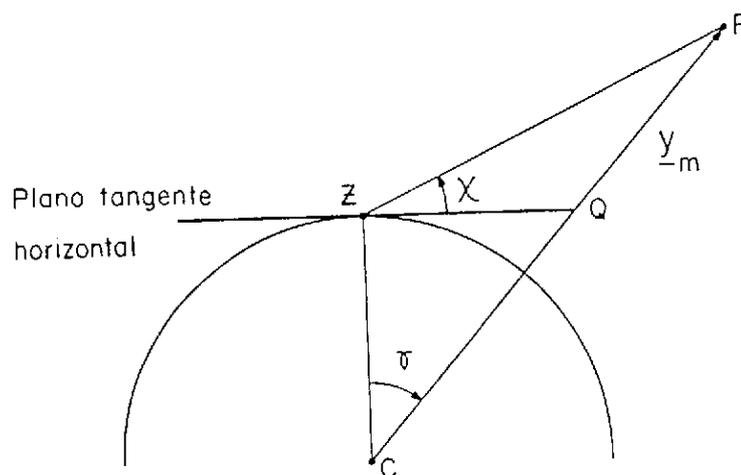


Fig. 10 - Geometria para determinação da elevação.

O elemento essencial, desconhecido na Figura 10, é o ângulo central γ . Utilizando as relações de trigonometria esférica (ver Selby⁸, 1971), determina-se facilmente este ângulo como:

$$\gamma = \cos^{-1} [\cos (\Delta\theta) \cos (\Delta\lambda)], \quad (6.6)$$

onde $\Delta\theta$ é a diferença de latitude entre o corpo celeste e o observador e $\Delta\lambda$ a diferença de longitude. As latitudes e longitudes consideradas podem ser equatoriais ou eclípticas, indiferentemente na Expressão (6.6).

Utilizando a lei dos co-senos, determina-se a distância PZ por:

$$PZ = (r_e^2 + y_m^2 - 2 r_e y_m \cos \gamma)^{1/2}, \quad (6.7)$$

onde r_e representa o raio da Terra. Como:

$$y_m \cos \gamma - r_e = PZ \sin \chi, \quad (6.8)$$

segue que:

$$\chi = \sin^{-1} [(y_m \cos \gamma - r_e) (r_e^2 + y_m^2 - 2 r_e y_m \cos \gamma)^{-1/2}]. \quad (6.9)$$

A geometria envolvida na determinação do azimute é mostrada na Figura 11.

Na Figura 11 o plano sobre o qual repousa o hemisfério mostrado é paralelo ao plano tangente à superfície da Terra no ponto de observação. O ângulo Λ é denominado azimute. Também mostrado na figura está o ângulo central γ , para que o leitor possa verificar a correspondência entre as Figuras 10 e 11. Vê-se que o meridiano que passa por Z é o elemento básico na geometria para determinação do azimute.

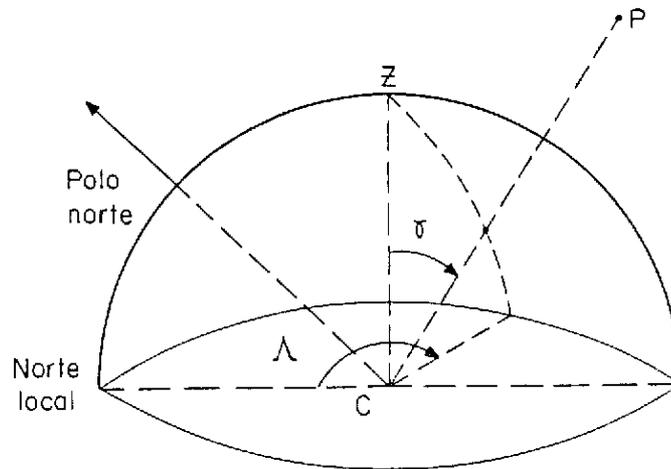


Fig. 11 - Geometria para determinação do azimute.

Do mesmo modo como para o cálculo de elevação, será utilizado um ângulo auxiliar ζ , que é o ângulo compreendido entre o plano equatorial e o plano determinado por três pontos, a saber: observador, centro da Terra e o ponto em que se encontra o corpo celeste. A Figura 12 ilustra a geometria envolvida na caracterização deste ângulo.

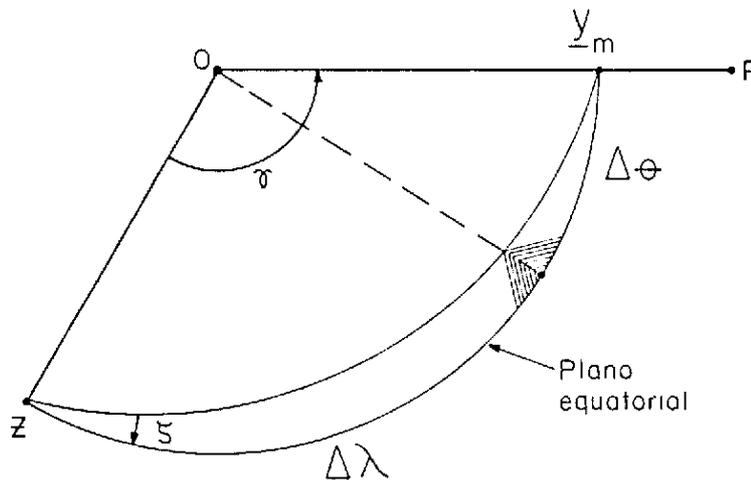


Fig. 12 - Geometria para determinação do ângulo auxiliar ζ .

Na Figura 12 o triângulo esférico formado pelos três ângulos centrais, $\Delta\theta$, $\Delta\lambda$, γ , é um triângulo retângulo. Da trigonometria esférica tira-se a relação (Selby⁸, 1971):

$$\text{sen } \zeta = \text{sen } \Delta\theta / \text{sen } \gamma \quad (6.10)$$

da qual resulta:

$$\zeta = \text{sen}^{-1} (\text{sen } \Delta\theta / \text{sen } \gamma). \quad (6.11)$$

O azimute pode então ser facilmente determinado a partir do ângulo ζ . Tomando a longitude, variando-a de 0° a 360° , a relação entre Λ e $|\zeta|$ é mostrada na Tabela 1.

TABELA 1

$\Delta\theta$	$\Delta\lambda$	Λ
+	+	$90^{\circ} - \zeta $
-	+	$90^{\circ} + \zeta $
-	-	$270^{\circ} - \zeta $
+	-	$270^{\circ} + \zeta $

É possível também a utilização de coordenadas eclípticas no processamento para o cálculo de azimute; neste caso entretanto deve-se levar em conta a inclinação da eclíptica, relativamente ao plano equatorial. Esta inclinação é de $23^{\circ}27'$, que deverão ser adicionados ao valor de Λ quando este ângulo for calculado em coordenadas eclípticas.

7- APLICAÇÕES

Os elementos apresentados neste trabalho possuem as mais variadas aplicações. A mais simples é certamente a determinação do efeito de um alinhamento parcial dos planetas.

Considerando Sol, Terra, Jupiter e Saturno alinhados tem-se a distribuição instantânea de forças:

- a- Sol sobre a Terra: proporcional a 0.33×10^6 ;
- b- Júpiter sobre a Terra: proporcional a -20;
- c- Saturno sobre a Terra: proporcional a -1.4.

O coeficiente de proporcionalidade é m/r^2 , onde m é a massa da Terra e r é a distância da Terra ao Sol (também denominada Unidade Astronômica A.U.). O sinal, no fator de proporcionalidade, indica a direção da força relativamente à direção da força exercida pelo Sol.

Pode-se perceber que neste alinhamento parcial, o efeito dos outros planetas nas equações do movimento da Terra em torno do Sol é 10^{-4} vezes menor que o efeito principal. Pode-se assim esperar uma variação de 1%, com a relação à órbita que se pode determinar com os elementos teóricos deste trabalho (movimento de dois corpos).

Uma segunda aplicação pode ser desenvolvida pelo leitor considerando os elementos orbitais do cometa Halley (ver o Manual de Yeomans⁷, 1984). Estes dados são os seguintes: período anomalístico $T = 75$ anos, semi-eixo maior $a = 18A.U.$, excentricidade $e = 0.967$.

Os dados angulares do cometa Halley são os seguintes: inclinação da órbita $\nu = 162^\circ$, ascensão reta do nó ascendente $\Omega = 58^\circ$, argumento do periélio $\alpha = 112^\circ$.

Não são fornecidas as variações temporais dos parâmetros. Com isto presume-se que a órbita seja relativamente estável para poder desprezã-las. De qualquer forma, em vista do longo período anomalístico, variações temporais de curto prazo podem ser desprezadas.

O último parâmetro, necessário para completa determinação da posição do cometa, é o instante da última passagem pelo periélio $\tau_p = 9.6613$ de fevereiro de 1986 (tempo local de Greenwich) que permite determinar a anomalia média usando a Equação (2.8).

Conhecida a anomalia média, determina-se a anomalia excêntrica resolvendo a equação de Kepler (2.8). Calculam-se, em seguida, as coordenadas z_1 e z_2 no plano orbital pelas Equações (3.1) e (3.2). As coordenadas x , no sistema heliocêntrico, são determinadas como mostrado na Seção 6.1. As coordenadas y , no sistema geocêntrico, são determinadas como mostrado na Seção 6.2. Haverá ainda a necessidade de conversão para coordenadas equatoriais (Seção 5.1), por meio de rotações planas (Seção 6.1). Finalmente determinam-se os ângulos para posicionamento do telescópio (azimute e elevação) pela sequência mostrada na Seção 6.3.

Procedendo coerentemente, a partir do roteiro do último parágrafo, o leitor deverá obter os mesmos resultados publicados em Yeomans⁷ (1984).

No posicionamento do seu telescópio o observador deverá tomar cuidado para não utilizar uma bússola, em virtude de o norte magnético diferir do norte geográfico (referência básica para o azimute).

Uma terceira aplicação do material exposta foi a utilização na previsão do 10º planeta do sistema solar. Este tipo de utilização requer entretanto um conhecimento mais aprofundado do assunto, que não cabe num tratamento introdutório como o aqui exposto.

8- CONCLUSÕES

Neste trabalho foram discutidos alguns aspectos básicos de previsão da posição de um corpo no espaço. Foi focalizado o problema para corpos em órbitas heliocêntricas. A abordagem escolhida visou uma melhor compreensão por parte de leitores não-especializados.

O assunto foi tratado na forma mais elementar possível (movimento de dois corpos). Uma idéia simples sobre o efeito de perturbações foi introduzida para dar uma visão mais real da amplitude do estudo de astrodinâmica.

A aplicação do material exposto foi discutida brevemente, visando ilustrar sua utilidade.

AGRADECIMENTO

O autor agradece a cooperação do Dr. I.J. Kantor e da bibliotecária M.L. Ribeiro no fornecimento de parte do material ilustrativo discutido no texto. Este trabalho foi desenvolvido no Instituto de Pesquisas Espaciais (INPE), subvencionado através do convênio FINEP-537/CT.

REFERÊNCIAS

- 1- Anuário do observatório de São Paulo, 1984.
- 2- Brouwer, D.; Clemence, G.M. "Methods of Celestial Mechanics", Academic Press., New York, 1961.
- 3- Kourganoff, V. "Astronomie Fondamentale Elémentaire". Masson et al., 1961.
- 4- Landau, L.; Lifchitz, E. "Mecanique" Mir., Moscou, 1966.
- 5- McCuskey, S.W. "Introduction to Celestial Mechanics". Addison-Wesley, 1963.
- 6- Roy, A.E. "The foundations of Astrodynamics" Macmillan, New York, 1965.
- 7- Yeomans, D.K. "Manual do Observador do Cometa Halley", traduzido e adaptado por E. Scalise Jr., INPE, 1984.
- 8- Selby, S.M. "Standard Mathematical Tables". The Chemical Rubber Co. Cranwood Parkway, 1971.
- 9- Sterne, T.E. "An Introduction to Celestial Mechanics" Interscience Publishers, Inc. New York, 1960.
- 10- Stiefel, E.L.; Scheifele, G. "Linear and Regular Celestial Mechanics" Springer-Verlag, New York, 1971.
- 11- Zamlutti, C.J. "Previsão de Passagem para Satélites em Órbitas Elípticas ou Circulares sem perturbações". Relatório LAFE-89, CNAE, 1969.