



PALAVRAS CHAVES/KEY WORDS

AUTORES
AUTHORS

controle, modelagem, manipulação algébrica, abertura, painéis flexíveis.

AUTORIZADA POR/AUTHORIZED BY

Rangulo
Dr. Ralf Gielow
Presidente do CPG

AUTOR RESPONSÁVEL
RESPONSIBLE AUTHOR

Alexandre Megiorin Roma
Alexandre Megiorin Roma

DISTRIBUIÇÃO/DISTRIBUTION

INTERNA / INTERNAL
 EXTERNA / EXTERNAL
 RESTRITA / RESTRICTED

REVISADA POR / REVISED BY

Paulo T.M. Lourenção
Dr. Paulo T.M. Lourenção

CDU/UDC

629.78

DATA / DATE

Março 1991

TÍTULO/TITLE	PUBLICAÇÃO Nº PUBLICATION NO
	INPE-5220-TDL/436
Análise Dinâmica e Controle de um Satélite Artificial com Painéis Solares Flexíveis.	
AUTORES/AUTHORSHIP	Alexandre Megiorin Roma

ORIGEM
ORIGIN

FRH/CEA

PROJETO
PROJECT

Nº DE PAG.
NO OF PAGES

177

ULTIMA PAG.
LAST PAGE

F2

VERSÃO
VERSION

Nº DE MAPAS
NO OF MAPS

RESUMO - NOTAS / ABSTRACT - NOTES

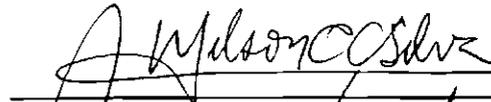
Este trabalho apresenta uma forma sistemática para a obtenção das equações do movimento de atitude de uma classe particularmente importante de veículos espaciais: aqueles compostos por um corpo central rígido contendo rodas de reação, também rígidas, e painéis solares extensíveis, os quais serão considerados flexíveis somente depois de sua fase de abertura. É utilizada a formulação Lagrangiana simultaneamente ao Método dos Modos Admitidos, para que seja evitado um conjunto de equações do movimento do tipo híbrido. Um software empregando o manipulador simbólico Reduce é desenvolvido para obter-se, em alguns casos, estas equações. Com o auxílio deste software, o conjunto de equações não linearizadas do movimento da fase transitória de abertura e o conjunto de equações linearizadas da fase posterior, incluindo a flexibilidade dos painéis, é obtido para um satélite utilizado como exemplo. Para este satélite, a fase transitória é analisada observando-se as mudanças na diádica de inércia ao longo do tempo e no movimento de atitude induzido pelo desdobramento dos painéis solares. Para este caso, o impacto entre o corpo central rígido e cada um dos painéis é induzido. O conjunto de equações linearizadas do movimento é utilizado para a implementação de um esquema de controle empregando a técnica Eigenstructure Assignment, o qual visa estabilizar o movimento de atitude e proporcionar o amortecimento das vibrações elásticas.

OBSERVAÇÕES/REMARKS

Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial aprovada em 20 de novembro de 1990.

Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Mestre
em Ciência Espacial

Dr. Wilson Custódio Canesin da Silva



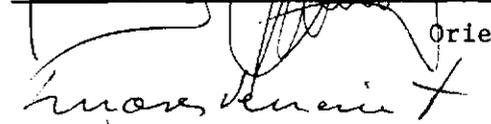
Presidente

Dr. Paulo Tadeu de Mello Lourenção



Orientador

Dr. Luís Novaes Ferreira França



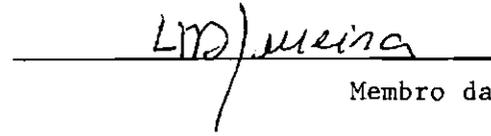
Membro da Banca
-convidado-

Dr. José Jaime da Cruz



Membro da Banca
-convidado-

Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira



Membro da Banca

Candidato: Alexandre Megiorin Roma

São José dos Campos, 20 de novembro de 1990

Agradecimentos

É preciso fazer a *energia fluir*... Acho importante dividir o mérito deste trabalho com outras pessoas. Apenas a minha dedicação e o meu envolvimento não teriam sido suficientes para chegar à sua conclusão.

Devido à natureza do assunto abordado, precisei freqüentar diversos ambientes de trabalho: o CCE – *Centro de Computação Eletrônica* (USP), o IFT – *Instituto de Física Teórica* e o INPE – *Instituto de Pesquisas Espaciais*.

Gostaria de começar, agradecendo a toda a equipe de analistas do CCE, em particular à Rose, à Maria e ao Cristiano, os quais me ajudaram a utilizar o UNISYS B7900, o IBM 4381 e a rede BITNET, durante quase dois anos.

Sou muito grato ao Prof. Gerson, do IFT, por ter me cedido área e tempo de processamento no μ VAX deste instituto. Sem esta gentileza jamais teria conseguido executar parte importante deste trabalho. Muito me auxiliaram no IFT na utilização do μ VAX, o Rodolfo, a MaZé e o Chico. Valeu também a força que o Alberto me deu. Senti-me muito bem vindo neste ambiente.

Na USP, sinto-me comprometido com a Sônia, pelas valiosas e interessadas discussões, com o Cláudio, pela ajuda na edição, e com o Jaime, pela força dada na parte de *Controle*. Valeu a ajuda do Coelho e da Dilma, na parte dos diagramas de bloco, e do Ruy, nos primeiros passos do *Reduce*. Não posso deixar de agradecer à Marlene pela qualidade das cópias e pelas pacientes tentativas em descobrir qual era o fator de redução que daria o resultado que eu queria.

Nestes quase dois anos de falta constante de tempo, muito precisei da ajuda de minha família para cumprir minhas obrigações elementares de pai, filho e marido. Agradeço à Dona Elena e Seu Alfredo, meus sogrinhos, Rubens e Vera, meus super-pais, à minha Tia Anna e à minha Nona, pela ajuda e pelo carinho com que cuidaram várias vezes do Gabriel, enquanto a Angela me ajudava na edição do trabalho.

Agradeço muito e de forma especial à minha irmã Ana Cláudia pelas bonitas ilustrações (que só me custaram um ingresso para o show do David Bowie – brincadeira, dei a ela de presente de aniversário!).

Ao Cyro, ao Aranha e à Priscila, obrigado pela força e velocidade inicial dada. Admirio-os muito!

Não tenho palavras para agradecer o muito que fez por mim o Ijar, mais do que coorientador, amigo. Suas valiosas sugestões, discussões de dia inteiro e recomendação de literatura foram indispensáveis.

Se já não tinha palavras no parágrafo anterior, que faço agora na hora de agradecer ao meu (des)orientador Paulo T. Mello Lourenção? Talvez *Muito Obrigado* não baste. Valeu! (Cosegui te enrolar...) Aprendi mais do que Ciência Espacial com ele.

Obrigado a todos vocês! Obrigado Angela.

À Angela e ao meu bochechudo filho,
Gabriel.

Abstract

This work presents a systematic way to derive the equations of attitude motion for a particularly important class of spacecrafts: those composed by a central rigid body containing reaction wheels, also assumed to be rigid, and extendable solar arrays, which are considered flexible only after the deployment phase. Lagrangian formulation is used simultaneously with the *Assumed Modes Method*, to avoid an *hybrid* set of equations of motion. A software employing the symbolic manipulator *Reduce* is developed to obtain, in some cases, these equations. With this software, the non-linear set of equations for the transient deployment phase and the linearized set of equations for the next phase, including panels flexibility, is derived for a satellite used as an example. For this satellite, the transient phase is analysed observing the dyadic changes along the time and the attitude motion induced by the panels deployment. In this case, the impact between the central body and each panel is introduced. For the linearized set of equations of motion, a control design, employing the *Eigenstructure Assignment* technique is implemented, stabilizing the attitude motion and dumping the elastic vibrations.

The Raven

Once upon a midnight dreary, while I pondered, weak and weary,
Over many a quaint and curious volume of forgotten lore —
While I nodded, nearly napping, suddenly there came a tapping,
As of some one gently rapping, rapping at my chamber door.
'T is some visiter,' I muttered, 'tapping at my chamber door —
Only this and nothing more.'

Ah, distinctly I remember it was in the bleak December;
And each separate dying ember wrought its ghost upon the floor.
Eagerly I wished the morrow; — vainly I had sought to borrow
From my books surcease of sorrow — sorrow for the lost Lenore —
For the rare and radiant maiden whom the angels name Lenore —
Nameless *here* for evermore.

And the silken, sad, uncertain rustling of each purple curtain
Thrilled me — filled me with fantastic terrors never felt before:
So that now, to still the beating of my heart, I stood repeating
'T is some visiter entreating entrance at my chamber door —
Some late visiter entreating entrance at my chamber door; —
This it is and nothing more.'

Presently my soul grew stronger; hesitating then no longer,
'Sir,' said I, 'or Madam, truly your forgiveness I implore;
But the fact is I was napping, and so gently you came rapping,
And so faintly you came tapping, tapping at my chamber door,
That I scarce was sure I heard you' — here I opened wide the door; —
Darkness there and nothing more.

Deep into that darkness peering, long I stood there wondering,
fearing,
Doubting, dreaming dreams no mortal ever dared to dream before;
But the silence was unbroken, and the stillness gave no token,
And the only word there spoken was the whispered word, 'Lenore !'
This I whispered, and an echo murmured back the word 'Lenore !'
Merely this and nothing more.

Startled at the stillness broken by reply so aptly spoken,
'Doubtless,' said I, 'what it utters is its only stock and store
Caught from some unhappy master whom unmerciful Disaster
Followed fast and followed faster till his songs one burden bore —
Till the dirges of his Hope that melancholy burden bore
Of "Never – nevermore."'

But the Raven still beguiling all my fancy into smiling,
Straight I wheeled a cushioned seat in front of the bird, and bust and
door;
Then, upon the velvet sinking, I betook myself to linking
Fancy unto fancy, thinking what this ominous bird of yore —
What this grim, ungainly, ghastly, gaunt, and ominous bird of
yore
Meant in croaking 'Nevermore.'

This I sat engaged in guessing, but no syllable expressing
To the fowl whose fiery eyes now burned into my bosom's core;
This and more I sat divining, with my head at ease reclining
On the cushion's velvet lining that the lamp-light gloated o'er,
But whose velvet violet lining with the lamp-light gloating o'er,
She shall press, ah, nevermore!

Then, methought, the air grew denser, perfumed from an unseen
censer
Swung by Seraphim whose foot-falls tinkled on the tufted floor.
'Wretch,' I cried, 'thy God hath lent thee — by these angels he hath
sent thee
Respite — respite and nepenthe from thy memories of Lenore;
Quaff, oh quaff this kind nepenthe and forget this lost Lenore !'
Quoth the Raven 'Nevermore.'

'Prophet !' said I, 'thing of evil ! prophet still, if bird or devil ! —
Whether Tempter sent, or whether tempest tossed thee here ashore,
Desolate yet all undaunted, on this desert land enchanted —
On this home by Horror haunted — tell me truly, I implore —
Is there — is there balm in Gilead? — tell me — tell me, I implore !'
Quoth the Raven 'Nevermore.'

'Prophet !' said I, 'thing of evil ! — prophet still, if bird or devil !
By that Heaven that bends above us — by that God we both adore —
Tell this soul with sorrow laden if, within the distant Aidenn,
It shall clasp a sainted maiden whom the angels name Lenore —
Clasp a rare and radiant maiden whom the angels name Lenore.'
Quoth the Raven 'Nevermore.'

'Be that word our sign of parting, bird or fiend !' I shrieked,
upstarting —
'Get thee back into the tempest and the Night's Plutonian shore !
Leave no black plume as a token of that lie thy soul hath spoken !
Leave my loneliness unbroken ! — quit the bust above my door !
Take thy beak from out my heart, and take thy form from off my
door !'

Quoth the Raven 'Nevermore.'

And the Raven, never flitting, still is sitting, *still* is sitting
On the pallid bust of Pallas just above my chamber door;
And his eyes have all the seeming of a demon's that is dreaming,
And the lamp-light o'er him streaming throws his shadow on the
floor;
And my soul from out that shadow that lies floating on the floor
Shall be lifted — nevermore !

E. A. Poe

Sumário

Lista de Figuras	xvii
Lista de Tabelas	xxi
Lista de Símbolos	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Objetivos do Trabalho	3
1.2 Revisão da Literatura	4
1.3 Apresentação do Trabalho	7
2 Modelamento Matemático	9
2.1 Metodologia Utilizada	10
2.2 Considerações Cinemáticas	10
2.2.1 Definição dos Sistemas de Referência	11
2.2.2 Localização Inercial dos Elementos de Massa	14
2.2.3 Velocidade Inercial dos Elementos de Massa	16
2.3 Energia Cinética	17
2.4 Energia Potencial	19
2.4.1 Energia Potencial Gravitacional	19
2.4.2 Energia Potencial Elástica	21
2.5 Discretização do Sistema	22
2.6 Equações Linearizadas do Movimento	25
3 Síntese de Controle	29
3.1 Preliminares	30
3.2 Apresentação do Problema	33
3.3 Realocação de Autovalores/Autovetores por Realimentação de Estado	34
3.4 Algoritmo de Porter e D’Azzo Simplificado	38
3.5 Implementação do Controle	39
3.5.1 Equações de 1ª Ordem do Sistema	39
3.5.2 Esquema de Controle	41

Apêndices

A	Energia Cinética Total	A.1
A.1	Movimento do Centro de Massa Instantâneo	A.1
A.2	Energia Cinética dos Componentes	A.2
A.2.1	Energia Cinética da Base	A.2
A.2.2	Energia Cinética dos Rotores	A.2
A.2.3	Energia Cinética dos Painéis em Desdobramento	A.3
A.2.4	Energia Cinética dos Painéis Abertos	A.4
A.3	Energia Cinética do Veículo	A.4
B	Energia Potencial Gravitacional	B.1
B.1	Expansão da Energia Potencial Gravitacional em Série de Taylor . . .	B.1
B.2	Introdução da Diádica de Inércia e dos Cossenos Diretores da Vertical Local	B.3
B.3	Expressão Operacional para a Energia Potencial Gravitacional	B.5
C	Energia Potencial Elástica	C.1
C.1	Tensões Atuantes num Elemento de Massa	C.1
C.2	Deformações Sofridas por um Elemento de Massa	C.2
C.3	Lei de Hooke	C.4
C.4	Trabalho Realizado pelas Tensões	C.5
C.5	Energia Potencial Elástica	C.6
D	Rotinas de Controle	D.1
D.1	Implementação do Controle: 1ª Etapa	D.1
D.1.1	Controlabilidade do Sistema Reduzido	D.3
D.1.2	Construção da Matriz de Realimentação para o Sistema Reduzido	D.4
D.2	Implementação do Controle: 2ª Etapa	D.4
D.3	Listagens das Subrotinas de Controle	D.6
D.3.1	Subrotina CONTROL	D.6
D.3.2	Subrotina KERNEL	D.8
E	Sistema de Manipulação Algébrica	E.1
E.1	Apresentação do SMA	E.2
E.2	Condições de Aplicabilidade	E.2
E.3	Composição	E.4
E.3.1	DADOS.DAT	E.6
E.3.2	Rsc.RED e Rsc.ANS	E.6
E.3.3	Jc.RED e Jc.ANS	E.8
E.3.4	Wc.RED, Wc.ANS, VRTLOC.RED, VRTLOC.ANS	E.8
E.3.5	ABRCHQ.RED, EQNABR.ANS e EQNCHQ.ANS	E.8

4	Aplicação do Método	47
4.1	Modelo Físico e Atitude Nominal	48
4.2	Sistema de Manipulação Algébrica	50
4.3	Seqüência de Rotações e Ângulos de Atitude	53
4.3.1	Obtenção da Velocidade Angular Absoluta	55
4.3.2	Obtenção dos Cossenos Diretores da Vertical Local	55
4.4	Descrição Física do Satélite	56
4.4.1	Caracterização da Base	57
4.4.2	Caracterização dos Rotores	57
4.4.3	Caracterização dos Painéis Abertos	59
4.4.4	Caracterização dos Painéis em Desdobramento	62
4.5	Históricos de Abertura dos Painéis Solares	65
4.6	Impactos no Final da Fase de Abertura	66
4.7	Implementação do Controle	68
4.7.1	Matriz de Massa Generalizada	69
4.7.2	Matriz Giroscópica	70
4.7.3	Matriz de Rigidez Generalizada	71
4.7.4	Etapas de Controle	72
5	Resultados Obtidos	75
5.1	Softwares de Simulação e de Controle	76
5.1.1	Software para a Simulação da Fase de Abertura	76
5.1.2	Software para a Simulação do Sistema com Painéis Completamente Abertos e Flexíveis	78
5.2	Dados do Modelo Físico Adotado	82
5.3	Análise da Fase de Abertura dos Painéis	83
5.3.1	Evolução da Diádica de Inércia	83
5.3.2	Movimento de Atitude Induzido pela Abertura dos Painéis	85
5.4	Análise da Fase Posterior a de Abertura dos Painéis	87
5.4.1	Matrizes de Massa, Giroscópica e de Rigidez	87
5.4.2	Sistemas de Primeira Ordem	88
5.4.3	Estudo do Sistema Original em Malha Aberta	89
5.4.4	Estudo do Sistema Reduzido em Malha Fechada	92
5.4.5	Estudo do Sistema Original em Malha Fechada	96
6	Conclusões e Comentários	113
6.1	Conclusões	113
6.2	Comentários	114
	Referências Bibliográficas	117

E.3.6	EQNLIN.RED, EQLRGD.ANS E EQLFLX.ANS	E.9
E.4	Possíveis Alterações	E.9
E.5	Comentários e Curiosidades	E.10
E.6	Listagens dos Programas em Reduce	E.12
E.6.1	DADOS.DAT	E.12
E.6.2	Rsc.RED	E.15
E.6.3	Wc.RED	E.16
E.6.4	Jc.RED	E.17
E.6.5	VRTLOC.RED	E.19
E.6.6	ABRCHQ.RED	E.20
E.6.7	EQNLIN.RED	E.22
F	Validação das Matrizes de Massa e Rigidez Obtidas	F.1
F.1	Desigualdade de Hölder	F.1
F.2	Consistência das Matrizes de Massa e Rigidez Generalizadas	F.2

Lista de Figuras

2.1	Representação do Satélite e do <i>Sistema Geocêntrico</i> $\{I, XYZ\}$	11
2.2	Representação dos Sistemas $\{S, \vec{i}_s \vec{j}_s \vec{k}_s\}$ e $\{C, \vec{i}_c \vec{j}_c \vec{k}_c\}$	12
2.3	Sistemas Utilizados na Descrição do Movimento dos Apêndices	13
2.4	<i>Sistema Orbital</i> $\{C, \vec{a} \vec{g} \vec{r}\}$	13
2.5	Localização Inercial de Alguns Elementos de Massa	15
2.6	Localização dos Elementos de um Painel Deformado	16
2.7	Localização dos Elementos de cada Componente a Partir de C	20
3.1	Algoritmo Simplificado de Porter e D'Azzo (1978b)	38
3.2	Diagrama de Blocos da 1ª Etapa de Controle	43
3.3	Diagrama de Blocos da 2ª Etapa de Controle	45
4.1	Modelo Físico Adotado – Painéis em Repouso	48
4.2	Satélite-Exemplo Estabilizado em Órbita Circular Polar	49
4.3	Esquema Simplificado do Funcionamento do <i>SMA</i>	51
4.4	Seqüência de Rotações e Ângulos de Atitude	54
4.5	Referenciais Adotados	56
4.6	Parte Interna do Satélite	58
4.7	Satélite-Exemplo com Painéis Deformados Elasticamente	60
4.8	Satélite-Exemplo com Painéis em Desdobramento	62
4.9	Ângulo de Abertura e Posição de Equilíbrio do Painel	65
5.1	Fluxograma do Programa de Abertura	77
5.2	Fluxograma para Simulação e Controle do Satélite – Painéis Abertos e Flexíveis	79
5.3	Detalhamento do <i>Esquema de Controle</i>	81
5.4	Evolução dos Momentos Principais de Inércia	84
5.5	Evolução dos Produtos de Inércia	84
5.6	Movimento Induzido nos Ângulos de Atitude	85
5.7	Movimento Induzido nos Ângulos de Arfagem e Guinada	85
5.8	Taxa de Variação dos Ângulos de Atitude	86
5.9	Taxa de Variação dos Ângulos de Arfagem e Guinada	86
5.10	Deslocamentos Elásticos na Extremidade dos Painéis	90
5.11	Movimento Induzido nos Ângulos de Atitude	91

5.12	Deslocamentos Elásticos na Extremidade dos Painéis	91
5.13	Movimento Induzido nos Ângulos de Atitude	92
5.14	Posição dos Autovalores Pretendidos e Conseguidos no Plano Gaussiano	96
5.15	Ângulos de Atitude. $\theta_1(0) = 5^\circ$	97
5.16	Taxas de Variação dos Ângulos de Atitude. $\theta_1(0) = 5^\circ$	98
5.17	Deslocamentos Elásticos. $\theta_1(0) = 5^\circ$	98
5.18	Rotação Exigida dos Rotores. $\theta_1(0) = 5^\circ$	98
5.19	Torques Atuantes no Satélite. $\theta_1(0) = 5^\circ$	99
5.20	Rotação dos Rotores em Guinada e Rolamento. $\theta_1(0) = 5^\circ$	99
5.21	Ângulos de Atitude. $\theta_2(0) = 5^\circ$	100
5.22	Taxas de Variação dos Ângulos de Atitude. $\theta_2(0) = 5^\circ$	100
5.23	Deslocamentos Elásticos. $\theta_2(0) = 5^\circ$	101
5.24	Rotação Exigida dos Rotores. $\theta_2(0) = 5^\circ$	101
5.25	Torques Atuantes no Satélite. $\theta_2(0) = 5^\circ$	101
5.26	Ângulos de Atitude. $\theta_3(0) = 5^\circ$	102
5.27	Taxas de Variação dos Ângulos de Atitude. $\theta_3(0) = 5^\circ$	102
5.28	Deslocamentos Elásticos. $\theta_3(0) = 5^\circ$	103
5.29	Rotação Exigida dos Rotores. $\theta_3(0) = 5^\circ$	103
5.30	Torques Atuantes no Satélite. $\theta_3(0) = 5^\circ$	103
5.31	Ângulos de Atitude. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm	104
5.32	Taxas de Variação - Ângulos de Atitude. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(0) = 5 \times 10^{-3}$ mm	104
5.33	Deslocamentos Elásticos em $[0, 1]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm	105
5.34	Deslocamentos Elásticos em $[1, 120]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm	105
5.35	Rotação Exigida dos Rotores. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm	106
5.36	Torques Atuantes no Satélite em $[0, 1]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm	106
5.37	Torques Atuantes no Satélite em $[1, 120]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(0) = 5 \times 10^{-3}$ mm	107
5.38	Ângulos de Atitude. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm	107
5.39	Taxas de Variação - Ângulos de Atitude. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 5 \times 10^{-3}$ mm	108
5.40	Ângulos de Arfagem e Guinada. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm	108
5.41	Deslocamentos Elásticos em $[0, 1]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm	109
5.42	Deslocamentos Elásticos em $[1, 50]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm	109
5.43	Rotação Exigida dos Rotores. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm	110
5.44	Torques Atuantes no Satélite em $[0, 1]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm	110
5.45	Torques Atuantes no Satélite $[1, 50]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm	110
B.1	Localização dos Elementos de Massa a Partir de C	B.2
C.1	Sentidos Positivos das Tensões Normal e de Cisalhamento	C.1
C.2	Elemento de Massa Não Deformado no Ponto P	C.2
C.3	Vista Superior do Deslocamento de P para P'	C.3
C.4	Ação da Tensão Normal σ_x	C.5
D.1	Fluxograma da Rotina CONTROL - Obtenção de K_{Gr}	D.2

D.2	Fluxograma da Subrotina KERNEL – Algoritmo de Porter e D’Azzo (1978b)	D.5
E.1	Esquema Simplificado do Funcionamento do <i>SMA</i>	E.3
E.2	Interdependência dos Programas que Compõe o <i>SMA</i>	E.5

Lista de Tabelas

4.1	Descrição Física do Satélite	52
5.1	Massas dos Rotores e Painéis Solares	82
5.2	Dimensões da Base	82
5.3	Autovalores em Malha Aberta – Sistema Original	89
5.4	Autovalores Pretendidos para o Sistema Reduzido	94
5.5	Autovalores Pretendidos e Conseguidos para o Sistema Original	96
E.1	Conteúdo de DADOS.DAT	E.7

Lista de Símbolos

Os números após os símbolos referem-se ao capítulo, seção e subseção aonde o símbolo aparece pela primeira vez. Assim, por exemplo, 3.5.2 remete o leitor ao capítulo 3, seção 5, subseção 2.

A

- \bar{a} — eixo de arfagem. 2.2.1
 A — 3.2
 A_i — ponto no engaste do i -ésimo painel aberto do satélite. 2.2.1
 A_r — 3.5.2
 $\{A_i, \vec{i}_{A_i}, \vec{j}_{A_i}, \vec{k}_{A_i}\}$ — *Sistema do i -ésimo Painel Aberto.* 2.2.1

B

- B — 3.2
 B_r — 3.5.2
 $\{B, \vec{x}_B, \vec{y}_B, \vec{z}_B\}$ — sistema principal da base do satélite. 4.1

C

- C — centro de massa instantâneo do veículo. 2.2.1
 $\{C, \vec{a}, \vec{g}, \vec{r}\}$ — *Sistema Orbital.* 2.2.1
 $\{C, \vec{i}_c, \vec{j}_c, \vec{k}_c\}$ — *Sistema Instantâneo do veículo.* 2.2.1
 CM_{A_i} — 4.4.3
 CM_{D_k} — 4.4.4

D

- dm_{A_i} — elemento de massa do i -ésimo painel aberto. 2.5
 dm_B — elemento de massa da base. 2.2.1
 dm_{D_k} — elemento de massa do k -ésimo painel em desdobramento. 2.2.1
 dm_{R_j} — elemento de massa do j -ésimo rotor. 2.2.1
 dx, dy, dz — C.2
 dW — trabalho realizado por tensões. C4
 D_i — 2.4.2
 D — subíndice associado as grandezas referentes aos painéis do satélite em estado de desdobramento. 2.2.1
 D_k — ponto solidário à base de um painel 2.2.1
 $\{D_k, \vec{i}_{D_k}, \vec{j}_{D_k}, \vec{k}_{D_k}\}$ — Sistema do k -ésimo Painel em Desdobramento. 2.2.1

E

- \vec{e}_{A_i} — vetor deslocamento elastico. 2.2.2
 E_i — o módulo de elasticidade longitudinal. 2.6

G

- \vec{g} — eixo de guinada. 2.2.1
 G — matriz giroscópica. 2.6
 G_r — matriz giroscópica associada ao sistema reduzido. 2.6

H

- h_i — espessura do i -ésimo painel do satélite. 2.4.2

I

- $\{I, XYZ\}$ — *Sistema Geocêntrico* de referência considerado *Sistema Inercial* para análises de curta duração. 2.2.1

J

- J_R — momentos principais de inércia dos rotores. 3.5.2
- $\overline{J^C}$ — diádica de inércia do satélite, quando ele se apresenta com painéis abertos deformados e painéis em desdobramento, calculada e escrita no *Sistema Instantâneo*. 2.3
- $\overline{J_{Rj}^{Rj}}$ — diádica de inércia do j -ésimo rotor calculada no sistema $\{R_j, \vec{i}_{Rj}, \vec{j}_{Rj}, \vec{k}_{Rj}\}$ e escrita no *Sistema Instantâneo* do satélite. 2.3

K

- K — matriz de rigidez do sistema original. 2.6
- K_r — matriz de rigidez do sistema reduzido. 2.6
- K_G — matriz de ganhos do sistema original. 2.6
- K_{Gr} — matriz de ganhos do sistema reduzido. 2.6
- K_{Gr}^1 — 3.5.2
- K_{Gr}^2 — 3.5.2

L

- l_x, l_y, l_z — cossenos diretores da vertical local. 2.4.1
- L — função Lagrangiana. 2.5
- \vec{L} — vetor formado pelos cossenos diretores da vertical local. 2.4.1
- L_{CAi} — matriz de rotação: $\{A_i, \vec{i}_{A_i}, \vec{j}_{A_i}, \vec{k}_{A_i}\} \rightarrow \{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$. 2.2.2
- L_{CC} — matriz de rotação: $\{C, \vec{r}, \vec{a}, \vec{g}\} \rightarrow \{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$. 2.2.2
- L_{CDk} — matriz de rotação: $\{D_k, \vec{i}_{D_k}, \vec{j}_{D_k}, \vec{k}_{D_k}\} \rightarrow \{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$. 2.2.2
- L_{CRj} — matriz de rotação: $\{R_j, \vec{i}_{R_j}, \vec{j}_{R_j}, \vec{k}_{R_j}\} \rightarrow \{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$. 2.2.2
- L_i — dimensões dos painéis. 4.1

M

- m — massa total do veículo. 2.2.1
- M — matriz de massa. 2.6
- M_r — 3.5.2

Q

q	— coordenadas generalizadas. 2.6
\dot{q}	— velocidades generalizadas. 2.6
Q_{nc}	— vetor de forças generalizadas com origem não conservativa. 2.6

R

\vec{r}	— eixo de rolamento. 2.2.1
\vec{r}_{BS}	— 4.4.1
\vec{r}_{A_i}	— 2.2.2
\vec{r}_B	— 2.2.2
\vec{r}_{Dk}	— 2.2.2
\vec{r}_{R_j}	— 2.2.2
R	— subíndice associado as grandezas referentes aos rotores do satélite. 2.2.1
\vec{R}_C	— 2.2.1
R_C	— $\ \vec{R}_C\ $. B.1
R_j	— centro de massa do j -ésimo rotor. 2.2.1
\vec{R}_{SA_i}	— 2.2.2
\vec{R}_{SC}	— posição do centro de massa instantâneo em relação ao ponto S . 2.2.2
\vec{R}_{SDk}	— 2.2.2
\vec{R}_{SR_j}	— 2.2.2
\vec{R}_{SC}	— velocidade do centro de massa instantâneo em relação ao ponto S . 2.2.2
$\{R_j, \vec{i}_{R_j}, \vec{j}_{R_j}, \vec{k}_{R_j}\}$	— <i>Sistema do j-ésimo Rotor</i> . 2.2.1
R_λ	— equação (3.10). 3.3

S

s_{ij}	—
S	— centro de massa do satélite em sua configuração final, <i>não submetido a deformações elásticas</i>
$\{S, \vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s\}$	— <i>Sistema do Satélite Não Deformado</i> . 2.2.1
S_λ	— equação (3.9). 3.3
$\hat{S}(\lambda_i)$	— <i>Passo 1</i> do Algoritmo de Porter e D'Azzo. 3.4
$\tilde{S}_{12}(\lambda_i)$	— <i>Passo 2</i> do Algoritmo de Porter e D'Azzo. 3.4
$\tilde{S}_{22}(\lambda_i)$	— <i>Passo 2</i> do Algoritmo de Porter e D'Azzo. 3.4

T

$tr(\overline{J^C})$	— traço da diádica de inércia do satélite com relação ao ponto C , escrita no <i>sistema Instantâneo</i> do satélite. 2.4.1
T	— energia cinética do satélite. 2.3
T_B	— energia cinética da base do satélite. A.2.1
T_r	— energia cinética dos rotores do satélite. A.2.2
T_D	— energia cinética dos painéis em desdobramento. A.2.3
T_A	— energia cinética dos painéis abertos. A.2.4

U

u_{A_i}	—
$u(t)$,	— vetor m -dimensional dos torques aplicados sobre os rotores devidos aos seus motores. 3.5.1

V

\vec{v}_{Dk}	— velocidade de abertura do k -ésimo painel em desdobramento. 2.3
V_E	— energia potencial elástica. C.5
V_G	— energia potencial gravitacional do satélite. 2.4.1

\vec{V}	—	velocidade inercial de um elemento de massa genérico. 2.3
\vec{V}_{A_i}	—	velocidade, com relação ao sistema inercial, de um elemento de massa do i -ésimo painel aberto. 2.2.3
\vec{V}_B	—	velocidade, com relação ao sistema inercial, de um elemento de massa da base. 2.2.3
\vec{V}_C	—	velocidade do centro de massa
\vec{V}_{D_k}	—	velocidade, com relação ao sistema inercial, de um elemento de massa do k -ésimo painel em desdobramento. 2.2.3
\vec{V}_{R_j}	—	velocidade, com relação ao sistema inercial, de um elemento de massa do j -ésimo rotor. 2.2.3

W

w_i	—	3.3
$w_{A_i}(x_{A_i}, y_{A_i}, t)$	—	2.2.2

X

\tilde{z}	—	vetor de estado associado ao sistema original. 3.2
x_{A_i}	—	2.2.2
x_r	—	vetor de estado associado ao sistema reduzido. 3.5.2

Y

y	—	vetor de saída. 3.2
y_{A_i}	—	2.2.2

α

α_j	—	ângulo descrito pela rotação do j -ésimo rotor em torno de seu eixo de simetria. 2.6
------------	---	--

β

β_k	—	ângulos de abertura, medidos a partir da base, entre o painel e a face da base que o continha. 4.4.4
-----------	---	--

ϕ

- ϕ_i^a — a -ésimo modo de vibração de uma viga engastada-livre, do i -ésimo painel. 2.5

 ψ

- ψ_i^b — b -ésimo modo de vibração de uma viga livre-livre, do i -ésimo painel. 2.5

 λ

- λ — autovalor em malha fechada. 3.1

 ν

- ν_i — coeficiente de Poisson do i -ésimo painel. 2.4.2
 ν_i — autovetor em malha fechada. 3.1

 ω

- $\vec{\omega}_C$ — velocidade angular do *Sistema Instantâneo* com relação ao *Sistema Inercial*. 2.2.3
 $\vec{\omega}_{R_3}$ — velocidade angular do rotor com relação à base. 2.2.3
 $\vec{\omega}_o$ — velocidade orbital do veículo. 2.2.3

 σ

- σ — tensão normal atuante num elemento de massa. C.1

 τ

- τ — tensão de cisalhamento atuante num elemento de massa. C1

θ

θ_i — ângulos de atitude. 2.6

 ζ

ζ — vetor coordenadas generalizadas proveniente do processo de discretização dos deslocamentos elásticos. 2.6

ζ_i^{ab} — novas *coordenadas generalizadas* associadas ao a -ésimo modo de vibração de uma viga engastada-livre, ϕ_i^a , e ao b -ésimo modo de vibração de uma viga livre-livre, ψ_i^b , do i -ésimo painel. 2.5

$\zeta_1^{11}(t)$ — nova coordenada generalizada associada ao 1º modo de *flexão* e ao 1º de *torção* dos painéis laterais. 4.4.3

$\zeta_1^{12}(t)$ — nova coordenada generalizada associada ao 1º modo de *flexão* e ao 1º de *torção* do painel superior. 4.4.3

Capítulo 1

Introdução

No início da era espacial, quando os veículos lançados tinham pequenas dimensões e configuração simples, as investigações envolvendo procedimentos para o seu controle, quer de forma ativa quer de forma passiva, eram feitas aproximando-os por corpos rígidos.

Como se sabe (Kaplan (1972)), o movimento rotacional de um corpo rígido livre de torque é estável se ele tem como eixo de rotação ou o eixo de maior momento de inércia ou o de menor momento de inércia, sendo o movimento instável em relação ao eixo de momento intermediário. O *Explorer I*, satélite lançado em 1958 pelos EUA, possuía quatro antenas distribuídas de maneira simétrica num plano perpendicular ao seu corpo de forma longilínea (“charuto”). Seu projeto previa que sua estabilização ocorreria de forma passiva, por rotação em torno do eixo de menor momento de inércia (no caso, o eixo ao longo de seu corpo). Surpreendentemente, quando colocado em órbita, fazendo um movimento de cone divergente, ele assumiu como eixo de rotação o eixo de maior momento de inércia. Uma análise feita por Thomson e Reiter (1960), e por Thomson (1963), mostrou que este comportamento foi provocado pela dissipação interna de energia devida à vibração de suas antenas. Posteriormente esta conclusão foi confirmada por Meirovitch (1961). Em ambas as análises, a dissipação de energia foi modelada pelo método denominado *sorvedouro de energia* (energy sink). Da mal sucedida missão do *Explorer I*, estabeleceu-se um critério para tentar “acomodar” os efeitos da dissipação interna de energia na estabilização por rotação, conhecido como *Critério do Maior Momento de Inércia* (veja por exemplo Noll et al. (1969), Hughes e Fung (1971)).

Outro exemplo, que ilustra os efeitos da flexibilidade na estabilização por rotação, é o *Alouette I*, lançado pelo Canadá em setembro de 1962. Este satélite era constituído por um corpo central, simétrico e rígido, do qual pendiam quatro longas antenas extensíveis distribuídas simetricamente. Utilizando-se o critério resultante do vôo do *Explorer I*, o *Alouette I* deveria ser estabilizado em torno do eixo de maior momento de inércia, perpendicular ao plano formado pelas

antenas. No entanto, após uma fase de lançamento e uma fase de abertura bem sucedidas, sua velocidade de rotação diminuiu gradualmente de 1.5 rpm a zero, em cerca de três anos. Este decaimento inesperado, relativamente rápido, só foi explicado por Etkin e Hughes (1967), os quais apontaram como causa a interação entre a flexibilidade e a deformação térmica das antenas causada pela irradiação solar. O gradiente de temperatura provocou a flexão das antenas, resultando numa assimetria do sistema, o que acabou por favorecer o aparecimento de um torque desacelerador devido à pressão de radiação solar.

Além destes, existem vários outros exemplos de veículos lançados, num ou noutro país, os quais apresentaram em órbita um comportamento adverso daquele esperado, relacionado de alguma forma à flexibilidade dos apêndices, como antenas ou coletores solares.

Em um trabalho desenvolvido para a NASA, Noll et al. (1969) discutem as várias formas possíveis de interação da flexibilidade estrutural com a estabilização e com o controle ativo de atitude, analisando diversos casos de satélites que apresentaram comportamento "estranhos".

O cumprimento das missões espaciais exige, freqüentemente, que os satélites possuam apêndices tais como grandes coletores solares, telescópios, longas antenas, etc.. Para conciliar esta exigência às restrições impostas pelo lançador, como por exemplo a limitação do peso do veículo a ser colocado em órbita, do espaço e da energia disponíveis, as configurações dos satélites têm se tornado cada vez mais complexas. As limitações de peso e de energia fazem com que os apêndices sejam, em geral, contruídos de material muito leve. Isto, aliado ao pouco espaço disponível e às grandes acelerações exercidas sobre a estrutura durante a fase de lançamento, acarreta na necessidade dos satélites irem ao espaço carregando seus apêndices recolhidos de forma compacta, só os abrindo em órbita. Todos estes fatores somados fazem com que a configuração final apresente enorme flexibilidade.

Modi e Ibrahim (1984), citam algumas ilustrações destes aspectos:

- painéis solares cada vez maiores têm sido necessários para suprirem a demanda crescente de energia para a operação da instrumentação de bordo, realização de experimentos científicos, manutenção dos sistemas de comunicação, etc.. Um exemplo deste fato é o satélite *CTS/HERMES - Communications Technology Satellite*, lançado em cooperação internacional entre EUA e Canadá em janeiro de 1976. Este satélite tinha dois painéis solares, 1.14 x 7.32 m cada, e uma capacidade de 1.2 kW;
- longas antenas são essenciais para certas missões. Por exemplo, o satélite *RAE - Radio Astronomy Explorer* usava antenas de 228.2 m de comprimento para detectar baixas freqüências.

Com o desenvolvimento e construção dos ônibus espaciais, os *Space Shuttles*, idéias como a construção de gigantescas estações espaciais, que só tinham lugar em contos de ficção científica, e a realização de inúmeros experimentos no espaço, começam a se transformar em realidade. O Laboratório de Física Aplicada da Johns Hopkins University por exemplo, sugeriu o *TOI - Tethered Orbiting Interferometer*, para a localização de fontes emissoras de ondas eletro-magnéticas fora da Terra. Este deveria ser constituído por dois veículos colocados em órbita, ligados por um cabo de 2 a 6 km de comprimento. De fato, a NASA mostrou-se bastante interessada em realizar uma missão com o Space Shuttle e um *subsatélite* ligados por um cabo de 100 km. Os estudos preliminares para a realização do experimento já foram iniciados.

Analisando a evolução das estruturas espaciais, pode-se perceber porque o estudo das interações entre as partes flexíveis e diversos fatores, como por exemplo o sistema de controle ativo, o campo magnético e gravitacional terrestre, as propriedades térmicas do material utilizado em sua construção, a pressão de radiação solar, o arrasto atmosférico, etc., tem adquirido enorme importância nas últimas décadas. A falta de compreensão destes fenômenos pode comprometer seriamente o desempenho das atuais e futuras missões espaciais.

1.1 Objetivos do Trabalho

A flexibilidade, encarada no início apenas como fenômeno responsável pela introdução de perturbações no comportamento dinâmico dos veículos, transformou-se num fator crítico no projeto de sistemas ativos de controle, desenvolvidos atualmente. Existe vasta literatura na área de controle, na área de métodos numéricos, na área de modelagem e na área de análise de estruturas flexíveis; entretanto, os problemas na área espacial transcendem os limites de cada uma destas disciplinas, misturando os tópicos e fazendo com que os problemas a serem resolvidos assumam grande complexidade. Esta característica fez com que a área de dinâmica e controle de atitude de veículos espaciais com partes flexíveis tenha se mantido efervescente durante as últimas décadas. É bastante provável que esta situação perdure ainda por mais algumas.

Outra característica inerente à área de dinâmica de atitude é a dificuldade que se tem em deduzir as equações do movimento, mesmo para configurações não muito sofisticadas. Dependendo do caso, o número de graus de liberdade exigido para a descrição da dinâmica do veículo torna virtualmente impossível a obtenção *artesanal* destas equações. As vezes, com empenho e o desgaste de horas e até mesmo de *dias* de trabalho, obtém-se como *resultado*, “algo” no qual não se pode confiar integralmente.

Neste contexto, tendo em vista a enorme importância do estudo de

problemas relacionados à área de dinâmica de atitude, este trabalho se propõe a:

- sistematizar um procedimento para a obtenção computacional do modelo matemático do comportamento dinâmico de um satélite em órbita circular, contendo painéis solares flexíveis e extensíveis, e rotores para controle ativo de atitude;
- desenvolver um software que, empregando *manipuladores simbólicos*, seja capaz obter em alguns casos as equações do movimento;
- analisar o efeito dinâmico produzido pelo desdobramento dos painéis solares, durante a fase de aquisição da atitude nominal;
- implementar uma lei controle por realimentação de estado, levando em conta o movimento elástico dos painéis, que promova a estabilização de atitude e o amortecimento das vibrações elásticas.

1.2 Revisão da Literatura

Um artigo clássico, fundamental àqueles que pretendem ingressar na área de *dinâmica de atitude de veículos com apêndices flexíveis*, incluindo aspectos de modelamento e controle, foi escrito por Modi (1974). Neste artigo, ele faz uma revisão de mais de 200 referências, cobrindo tópicos como sistemas com apêndices flexíveis estabilizados tanto por gradiente de gravidade quanto por rotação, a análise de apêndices e o controle de sistemas flexíveis.

Contribuições pioneiras nesta área são atribuídas a Likins (1968, 1971, 1973, 1976), Meirovitch (1966, 1970a, 1972, 1973, 1974, 1976) e Hughes (1971, 1973a, 1973b). Os três contribuíram para a formação da base teórica, utilizada nos trabalhos escritos posteriormente, apresentando formulações matemáticas gerais para o problema de modelagem e controle, quer ativo quer passivo, de veículos com apêndices flexíveis.

As equações do movimento são deduzidas a partir da formulação Lagrangiana ou a partir das equações de Newton-Euler. Junkins e Turner (1986) fazem algumas considerações sobre o modelamento pela abordagem Lagrangiana e pelas equações de Newton-Euler, concluindo que a aplicação da formulação Lagrangiana se justifica especialmente no caso de sistemas com muitos graus de liberdade. Neste caso, existem possivelmente diversas forças internas que não realizam trabalho e, portanto, não consideradas nesta abordagem, enquanto que nas equações de Newton-Euler, estas devem ser primeiro incluídas na análise para depois serem eliminadas.

O modelamento das partes flexíveis é feito utilizando-se resultados da teoria de elasticidade. Frequentemente utilizam-se na abordagem Lagrangiana, as

expressões da energia potencial elástica de uma viga em flexão (Meirovitch (1975a)) e de uma placa retangular com flexão e torção (Timoshenko e Goodier (1980), Love (1934)), dependendo da estrutura a ser modelada. Estas expressões envolvem derivadas parciais, o que significa que as equações do movimento se escrevem tanto em termos de equações diferenciais ordinárias quanto em termos de equações a derivadas parciais (o sistema é *híbrido*). Como estas equações não são facilmente manipuladas, nem analítica nem numericamente, costuma-se empregar algum processo de *discretização*, para aproximá-las por equações diferenciais ordinárias. Para isto, podem ser utilizados por exemplo o *Método de Rayleigh-Ritz*, o *Método de Galerkin* ou outros. Meirovitch (1967, 1975a) apresenta uma descrição de alguns destes métodos.

Neste trabalho, o modelo matemático do comportamento dinâmico do satélite será obtido via abordagem Lagrangiana, seguindo-se de perto a linha de pesquisa desenvolvida por Meirovitch (1970a, 1971, 1972, 1973, 1977).

A descrição do movimento de atitude de um satélite não é de forma alguma uma proposta simples, mesmo quando o sistema é rígido. O caráter flexível dos apêndices torna o problema ainda mais complexo. Levando-se em conta esta dificuldade introduzida pela flexibilidade, pode-se entender porque o estudo do comportamento da fase transitória de abertura recebeu pouca atenção durante muitos anos. Embora os efeitos da abertura sejam transitórios, eles podem se fazer presentes por um longo período de tempo.

A análise da fase de abertura tem sido feita de diferentes formas, com hipóteses simplificadoras distintas. Lang e Honeycutt (1967), assim como Cloutier (1968), abordaram o problema de abertura tratando os apêndices como um sistema de massas concentradas. Cherkas (1971, 1974), utilizou as equações de vigas engastada-livre e de membranas flexíveis para o modelamento dos apêndices. Além disso, a hipótese de que estes eram uniformes e se desdobravam com velocidade constante, foi introduzida. Ibrahim e Misra (1982), analisam o caso de um corpo desdobrando dois painéis em posições opostas, dispostos perpendicularmente ao plano da órbita. Ferreira (1984) estuda o problema de captura de um satélite estabilizado por gradiente de gravidade durante e após a fase transitória de abertura de um mastro flexível. Este trabalho apresenta uma análise para condições iniciais sob as quais a captura é possível, variando-se vários parâmetros do sistema, como por exemplo a velocidade de abertura, a posição do centro de massa, os momentos e produtos de inércia, excentricidade da órbita, etc.. Modi e Ibrahim (1984), apresentam uma formulação geral para o estudo da dinâmica rotacional de uma ampla classe de veículos durante a fase de abertura. Seu desenvolvimento se aplica desde a abertura de antenas, mastros e painéis, até a construção de estruturas em treliças com o auxílio do Space Shuttle. Esta formulação é especialmente apropriada para auxiliar a detecção de complicadas interações entre flexibilidade, abertura, dinâmica de atitude e estabilidade, tanto para uma grande variedade de veículos atuais quanto para os da próxima geração.

Neste trabalho, será admitido que o movimento elástico dos painéis pode ser desprezado durante a sua fase de abertura. Isto se justifica pois, nesta fase, não é necessária grande precisão de apontamento e se os painéis não forem excessivamente flexíveis sua deformação pouco influenciará o movimento de atitude do veículo. Por outro lado, na fase de manutenção da atitude nominal, quando se exige um apontamento fino do satélite, a flexibilidade passa a ser um fator decisivo e deve ser levada em consideração para a síntese de controle ativo.

O esquema de controle a ser implementado utilizará uma técnica de controle modal conhecida como *Eigenstructure Assignment*. Esta técnica tem sido desenvolvida nos últimos anos por Wonham (1967), Davison (1970, 1971), Kimura (1975), Moore (1976), Klein e Moore (1977), Porter e D'Azzo (1978a, 1978b), Fahmy e O'Reilly (1982), Burrows e Patton (1989), entre outros. Ela consiste na realocação em malha fechada tanto dos autovalores quanto dos *autovetores* de um sistema linear invariante no tempo com múltiplas entradas, através de realimentação linear de estado ou de saída.

Wonham (1967) demonstra um resultado fundamental para a solução do problema de realocação de autovalores de sistemas lineares com entradas múltiplas e realimentação de estado. Neste trabalho, ele apresenta a equivalência existente entre *controlabilidade* em malha aberta e realocação dos autovalores em malha fechada para um conjunto *arbitrário* de escalares (reais ou complexos), através de uma realimentação "apropriada" de estado. Desde então, muita atenção tem sido dada ao problema de realocação de autovalores de sistemas lineares com entradas múltiplas.

Dando prosseguimento às investigações iniciadas por Wonham, Davison (1970) considera o caso em que se deseja fazer realimentação apenas *parcial* da variável de estado; neste sentido também trabalham Davison e Chatterjee (1971).

Moore (1976) foi o primeiro a identificar a liberdade existente *além* da realocação dos autovalores utilizando realimentação de estado, no caso em que se tem autovalores distintos em malha fechada. Moore deduz condições *necessárias* e *suficientes* para a existência de uma realimentação "conveniente" da variável de estado, de forma que o sistema possua em malha fechada autovalores e *autovetores* pré-determinados. Aparentemente este resultado foi obtido independentemente por Kimura (1975), e utilizado implicitamente na realimentação de saída em sistemas lineares invariantes com entradas múltiplas.

O resultado obtido por Moore (1976) foi prontamente estendido, seguido por resultados que caracterizavam os autovetores e as cadeias de *autovetores generalizados* que poderiam ser obtidos a partir de um conjunto de autovalores em malha fechada não distintos entre si. Neste sentido tem-se os trabalhos desenvolvidos por Klein e Moore (1977), e por Porter e D'Azzo (1978a).

Esta técnica tem se mostrado bastante rica, realmente cheia de possibilidades no que diz respeito ao cálculo computacional da matriz de realimentação de estado.

O algoritmo de MacLane e Birkhoff (1968), para o cálculo de uma base do *Kernel* (Hoffman e Kunze (1979)) de uma transformação linear, é generalizado por Porter e D'Azzo (1978b) e utilizado no cálculo de uma realimentação linear "conveniente" de estado, de forma que se possa realocar autovalores, autovetores e autovetores generalizados.

Burrows e Patton (1989) descrevem duas maneiras *robustas* de se fazer a modificação da estrutura característica através de realimentação de estado, isto é, duas maneiras insensíveis à perturbações nos elementos das matrizes do sistema. Estas maneiras utilizam métodos de *Decomposição em Valores Singulares* (Golub (1983)).

Andry, Shapiro e Chung (1983) apresentam uma pequena revisão da literatura sobre o tema de realocação de autovalores e autovetores. Neste trabalho, após uma breve motivação bastante interessante para o estudo do problema, são colocadas algumas das formas nas quais este se apresenta. Outro trabalho que pode ser citado neste contexto é o de Apkarian (1989), contendo diversos resultados e discussões sobre peculiaridades do problema.

Finalizando a revisão da literatura, e interessante mencionar o fato de que nenhum material relativo à obtenção das equações do movimento via manipuladores simbólicos foi encontrado.

1.3 Apresentação do Trabalho

No Capítulo 2, são obtidas as expressões das energias cinética, potenciais gravitacional e elástica para um satélite constituído por um corpo central rígido contendo rotores e painéis solares flexíveis e extensíveis. Logo após, discute-se a forma de discretização a ser introduzida na função Lagrangiana. Tal discretização será feita utilizando-se o *Método dos Modos Admitidos* (Meirovitch (1967, 1975b)). Logo após, visando a implementação de um esquema de controle ativo para o satélite em sua configuração final, são obtidas as equações linearizadas do movimento.

No Capítulo 3, apresenta-se a técnica de controle *Eigenstructure Assignment* para a realocação dos autovalores e dos *autovetores* do sistema, utilizando realimentação linear de estado. Isto é feito introduzindo-se o importante resultado obtido por Moore (1976), que coloca condições *necessárias e suficientes* para tal realocação. Logo após, é proposto um esquema de controle a ser implementado em duas etapas. Este esquema utiliza o algoritmo desenvolvido por Porter e D'Azzo (1978b).

No Capítulo 4, é introduzido o modelo físico adotado para o satélite utilizado para exemplificar a aplicação dos métodos e das técnicas apresentadas nos Capítulos 2 e 3. Neste capítulo, descreve-se de forma rápida o *Sistema de Manipulação Algébrica - SMA*, desenvolvido tanto para a obtenção das equações não lineares do movimento de abertura quanto para as equações linearizadas da fase posterior. Logo após, são apresentados os *dados* fornecidos a este sistema, necessários à caracterização física do veículo em consideração, e discutidos os históricos de abertura a serem utilizados para os painéis. Em seguida, são analisados os impactos existentes entre os painéis e o corpo central no instante final da fase de abertura. Logo após, para este veículo são apresentadas as matrizes de massa, giroscópica e de rigidez, obtidas pelo *SMA* quando seus painéis estão completamente abertos e flexíveis, necessárias à implementação do esquema de controle. Os passos a serem executados nesta implementação são colocados em forma de itemização.

No Capítulo 5, após uma breve explicação do *software* utilizado para a simulação de abertura e execução do controle, são colocados os dados do modelo físico adotado para teste, descrito no Capítulo 4. Apresentam-se neste capítulo as matrizes de massa, giroscópica e de rigidez, obtidas para este conjunto de dados. São discutidos alguns aspectos do esquema de controle proposto, como restrições físicas e escolha “conveniente” de autovetores. No fim deste capítulo, encontram-se os gráficos que mostram o comportamento dinâmico do sistema em sua fase transitória de abertura e quando submetido à ação da lei de controle. É também visto de que forma condições iniciais nos modos elásticos influenciam, em malha aberta, o movimento de atitude do satélite.

Finalmente no Capítulo 6, confrontam-se objetivos propostos e resultados obtidos. São também indentificadas possíveis linhas de prosseguimento para este trabalho. Alguns comentários relevantes sobre tópicos abordados são colocados.

Capítulo 2

Modelamento Matemático

Neste capítulo, será apresentada toda a formulação básica necessária à obtenção das equações do movimento, via abordagem Lagrangiana, de uma classe particular de veículos espaciais: aqueles constituídos por um núcleo central rígido contendo rotores, também rígidos, e do qual pendem painéis solares extensíveis, com formato retangular, sendo estes considerados flexíveis somente após o seu desdobramento. O histórico de abertura será admitido conhecido.

A abordagem Lagrangiana para a modelagem de problemas na área de ciência espacial, tem sido freqüentemente usada por diversos autores, entre os quais merece ser destacado Meirovitch (1970a, 1971, 1972, 1973, 1977), o qual teve sua linha de pesquisa seguida de perto neste trabalho.

Depois de apresentada, na seção 2.1, a metodologia que se pretende usar na obtenção do modelo matemático para a classe de veículos em consideração, na seção 2.2 são introduzidos os referenciais adotados para a descrição da dinâmica do veículo. Logo após, são definidos os vetores de localização e velocidade dos elementos de massa do satélite, utilizados posteriormente na obtenção das energias cinética e potencial gravitacional, partes da Lagrangiana do sistema.

Nas seções 2.3 e 2.4, são apresentadas respectivamente as expressões das energias cinética, potenciais gravitacional e elástica. O desenvolvimento detalhado destas expressões pode ser encontrado nos Apêndices A, B e C.

Na seção 2.5, após uma breve discussão sobre alguns dos tipos de métodos de discretização disponíveis, executa-se a discretização dos deslocamentos elásticos diretamente na função Lagrangiana, *antes* da obtenção das equações do movimento, conseguindo-se assim equações do movimento livres de derivações parciais.

Finalmente, visando a implementação de um esquema de controle ativo de atitude, na seção 2.6, obtém-se as equações linearizadas do movimento para a fase posterior à abertura dos painéis.

2.1 Metodologia Utilizada

O modelo matemático aqui desenvolvido para a descrição do comportamento dinâmico do satélite, será obtido pela formulação *Lagrangiana*, considerando-se o veículo composto por partes rígidas e por meios elásticos contínuos.

Quando veículos flexíveis são tratados como um meio elástico contínuo, o seu movimento é descrito por um conjunto *híbrido* de equações diferenciais, isto é, um conjunto composto tanto por equações diferenciais ordinárias quanto por equações a derivadas parciais. Às equações diferenciais ordinárias estão associadas as *coordenadas discretas*, as quais descrevem a evolução no tempo das rotações e translações (movimento de corpo rígido), enquanto que às equações a derivadas parciais estão associadas as *coordenadas distribuídas*, as quais descrevem as deformações elásticas sofridas ao longo do tempo, pelas partes flexíveis. Infelizmente, na maioria dos casos práticos, o conjunto híbrido de equações obtido não é manipulável com facilidade, nem analítica nem numericamente.

Um procedimento bastante utilizado para evitar-se a obtenção de sistemas híbridos é recorrer-se à *discretização espacial*. Com isto consegue-se ao invés de equações a derivadas parciais um conjunto *infinito* de equações diferenciais ordinárias. Posteriormente, um modelo de ordem reduzida pode ser selecionado para o sistema de coordenadas distribuídas, truncando-se o conjunto inicial de equações diferenciais ordinárias segundo a necessidade da aplicação.

Assim sendo, o procedimento a ser seguido requer

- o cálculo das energias cinética, potenciais gravitacional e elástica;
- a escolha de um método de discretização, uma vez que a abordagem adotada encara o modelo físico como um meio elástico contínuo.

Uma vez que, após abertos os painéis, pretende-se atuar no movimento de atitude através da implementação de algum esquema de controle, serão obtidas as equações linearizadas do movimento para o sistema.

2.2 Considerações Cinemáticas

Nesta seção, depois de introduzidos os sistemas de referência utilizados na descrição do comportamento dinâmico do veículo, são obtidas as expressões dos vetores de posição e de velocidade de cada um de seus elementos de massa, dados num referencial considerado inercial para estudos de curta duração.

Estes vetores serão posteriormente utilizados no cálculo das energias cinética e potencial gravitacional, necessárias à abordagem Lagrangiana.

2.2.1 Definição dos Sistemas de Referência

Considere o satélite de massa m mostrado na Figura (2.1), constituído por um núcleo central considerado rígido, denominado *Base*, e por um número qualquer de apêndices, os quais podem se apresentar como *Rotores Rígidos*, *Painéis Solares Abertos* e *Painéis Solares em Desdobramento*. Será admitido que os rotores, de formato cilíndrico, estão perfeitamente balanceados tanto dinâmico quanto estaticamente. Os painéis solares, de formato retangular, serão considerados rígidos durante o regime transitório de abertura e flexíveis depois de completamente abertos. Todos os componentes do veículo serão supostos constituídos de material homogêneo, distribuído uniformemente. Às quantidades relativas à base, aos rotores, aos painéis abertos e aos painéis em desdobramento serão acrescentados os subíndices B , R , A e D respectivamente.

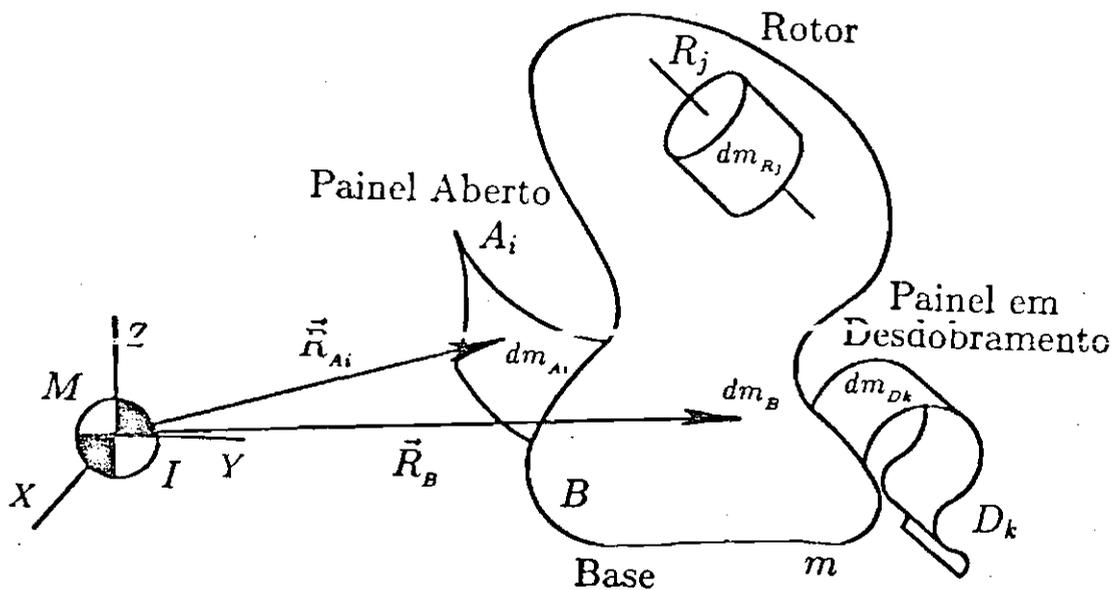


Figura 2.1: Representação do Satélite e do Sistema Geocêntrico $\{I, XYZ\}$

O Sistema Geocêntrico $\{I, XYZ\}$, representado na Figura (2.1), considerado inercial para análises de curta duração (como no caso do movimento de atitude), tem origem em I , centro do campo de atração gravitacional gerado pelo corpo de massa M , e eixos com direções inerciais.

Em sua configuração final, com todos os seus painéis *completamente abertos*, *não deformados* elasticamente, define-se o Sistema do Satélite Não Deformado $\{S, \vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s\}$, onde a origem S coincide com seu centro de massa nesta situação, e os eixos $\vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s$, estão em direções geometricamente convenientes. Numa configuração intermediária, na qual o veículo possui painéis deformados elasticamente e/ou em fase de desdobramento, o movimento de atitude é descrito pelo Sistema

Instantâneo $\{C, \vec{i}_c \vec{j}_c \vec{k}_c\}$, que tem origem em C , centro de massa instantâneo do satélite, e os eixos $\vec{i}_c \vec{j}_c \vec{k}_c$ paralelos aos eixos $\vec{i}_s \vec{j}_s \vec{k}_s$. Tais sistemas estão representados na Figura (2.2).

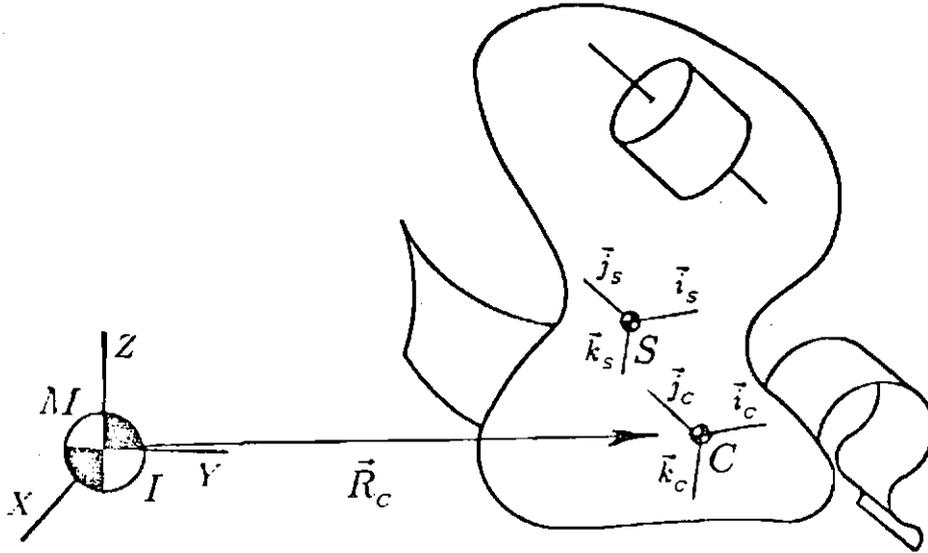


Figura 2.2: Representação dos Sistemas $\{S, \vec{i}_s \vec{j}_s \vec{k}_s\}$ e $\{C, \vec{i}_c \vec{j}_c \vec{k}_c\}$

Para a descrição do movimento dos elementos de massa dos apêndices, é bastante conveniente que sejam colocados os sistemas mostrados na Figura (2.3), definidos a seguir:

- $\{A_i, \vec{i}_{A_i} \vec{j}_{A_i} \vec{k}_{A_i}\}$ – *Sistema do i -ésimo Painel Aberto*: A_i é um ponto no engaste do i -ésimo painel aberto do satélite. Dois eixos quaisquer dentre $\vec{i}_{A_i}, \vec{j}_{A_i}, \vec{k}_{A_i}$, estão contidos no plano determinado pelo i -ésimo painel não deformado, cada um paralelo a um bordo deste, e o terceiro completa a base de maneira destrógiра. Nestes sistemas serão referenciados os deslocamentos elásticos;
- $\{R_j, \vec{i}_{R_j} \vec{j}_{R_j} \vec{k}_{R_j}\}$ – *Sistema do j -ésimo Rotor*: R_j é o centro de massa do j -ésimo rotor, e o eixo de simetria geométrica, em torno do qual ele gira, tem a direção de um dos eixos $\vec{i}_{R_j}, \vec{j}_{R_j}$ ou \vec{k}_{R_j} ;
- $\{D_k, \vec{i}_{D_k} \vec{j}_{D_k} \vec{k}_{D_k}\}$ – *Sistema do k -ésimo Painel em Desdobramento*: D_k é solidário à base. Os eixos $\vec{i}_{D_k} \vec{j}_{D_k} \vec{k}_{D_k}$ são tomados de forma a permitir uma descrição adequada do movimento de abertura dos painéis.

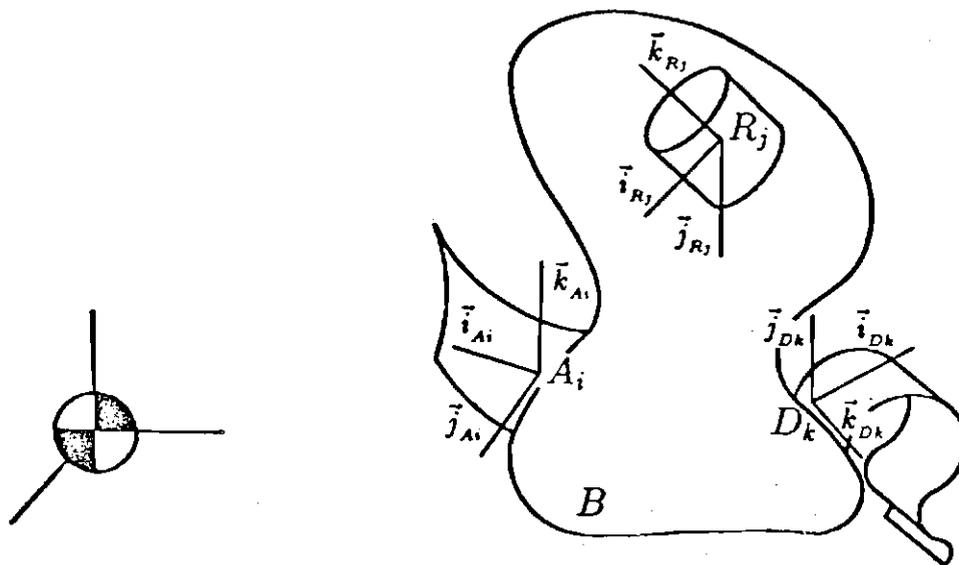


Figura 2.3: Sistemas Utilizados na Descrição do Movimento dos Apêndices

Por fim, o *Sistema Orbital* $\{C, \vec{a} \vec{g} \vec{r}\}$ (Figura (2.4)), com origem em C , tem o eixo \vec{g} (eixo de *guinada*) na direção da vertical local com sentido exterior à trajetória, o eixo \vec{a} (eixo de *arfagem*), na direção normal ao plano da órbita com sentido do movimento angular do satélite visto como ponto de massa, e o eixo \vec{r} (eixo de *rolamento*) completa o sistema de maneira destrógiro. Note que o movimento de atitude do satélite será descrito pela posição relativa entre os sistemas $\{C, \vec{i}_c \vec{j}_c \vec{k}_c\}$ e $\{C, \vec{a} \vec{g} \vec{r}\}$.

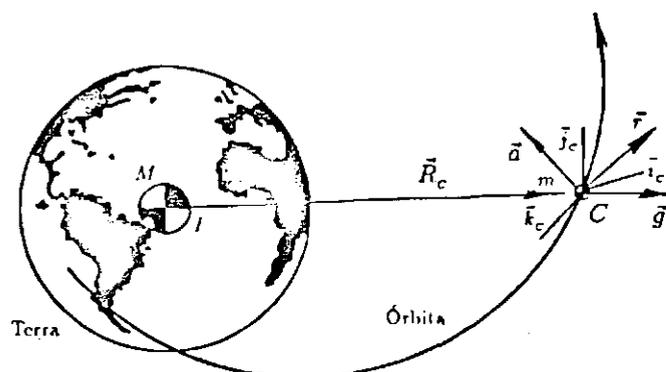


Figura 2.4: Sistema Orbital $\{C, \vec{a} \vec{g} \vec{r}\}$

2.2.2 Localização Inercial dos Elementos de Massa

Será extremamente útil no estudo do movimento de atitude, decompor todos os vetores no *Sistema Instantâneo*, $\{C, \vec{i}_C \vec{j}_C \vec{k}_C\}$. Sendo assim, definem-se as matrizes de rotação:

$$\begin{aligned}
 L_{CR_j} &= \{R_j, \vec{i}_{R_j} \vec{j}_{R_j} \vec{k}_{R_j}\} \longrightarrow \{C, \vec{i}_C \vec{j}_C \vec{k}_C\} \\
 L_{CA_i} &= \{A_i, \vec{i}_{A_i} \vec{j}_{A_i} \vec{k}_{A_i}\} \longrightarrow \{C, \vec{i}_C \vec{j}_C \vec{k}_C\} \\
 L_{CD_k} &= \{D_k, \vec{i}_{D_k} \vec{j}_{D_k} \vec{k}_{D_k}\} \longrightarrow \{C, \vec{i}_C \vec{j}_C \vec{k}_C\} \\
 L_{CC} &= \{C, \vec{a} \vec{g} \vec{r}\} \longrightarrow \{C, \vec{i}_C \vec{j}_C \vec{k}_C\}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sejam os vetores \vec{R}_{SR_j} , \vec{R}_{SA_i} , e \vec{R}_{SD_k} , com origem em S , escritos no *Sistema Instantâneo* $\{C, \vec{i}_C \vec{j}_C \vec{k}_C\}$, os quais localizam os pontos R_j , A_i e D_k respectivamente. Se o vetor que localiza o centro de massa instantâneo C a partir de S for denominado \vec{R}_{SC} , com relação ao *Sistema Inercial*, os vetores que localizam os elementos de massa dos diversos componentes do satélite (Figura (2.5)), escritos no *Sistema Instantâneo*, são dados por:

$$\begin{aligned}
 \text{base: } \vec{R}_B &= L_{CC} \vec{R}_C - \vec{R}_{SC} + \vec{r}_B \\
 j\text{-ésimo rotor: } \vec{R}_{R_j} &= L_{CC} \vec{R}_C - \vec{R}_{SC} + \vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j} \\
 k\text{-ésimo painel em} \\
 \text{desdobramento: } \vec{R}_{D_k} &= L_{CC} \vec{R}_C - \vec{R}_{SC} + \vec{R}_{SD_k} + L_{CD_k} \vec{r}_{D_k} \\
 i\text{-ésimo painel aberto: } \vec{R}_{A_i} &= L_{CC} \vec{R}_C - \vec{R}_{SC} + \vec{R}_{SA_i} + L_{CA_i} (\vec{r}_{A_i} + \vec{e}_{A_i}),
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde \vec{r}_B aponta um elemento de massa da base a partir de S ; \vec{r}_{R_j} aponta um elemento do j -ésimo rotor a partir de R_j e \vec{r}_{D_k} um elemento do k -ésimo painel em desdobramento a partir de D_k , são vetores escritos nos referenciais $\{R_j, \vec{i}_{R_j} \vec{j}_{R_j} \vec{k}_{R_j}\}$ e $\{D_k, \vec{i}_{D_k} \vec{j}_{D_k} \vec{k}_{D_k}\}$ respectivamente.

Observe que nas expressões (2.2), o vetor \vec{R}_{SC} localiza C a partir de S . A localização de S a partir de C , em termos deste vetor foi obtida invertendo-se seu sentido, escrevendo-se $-\vec{R}_{SC}$.

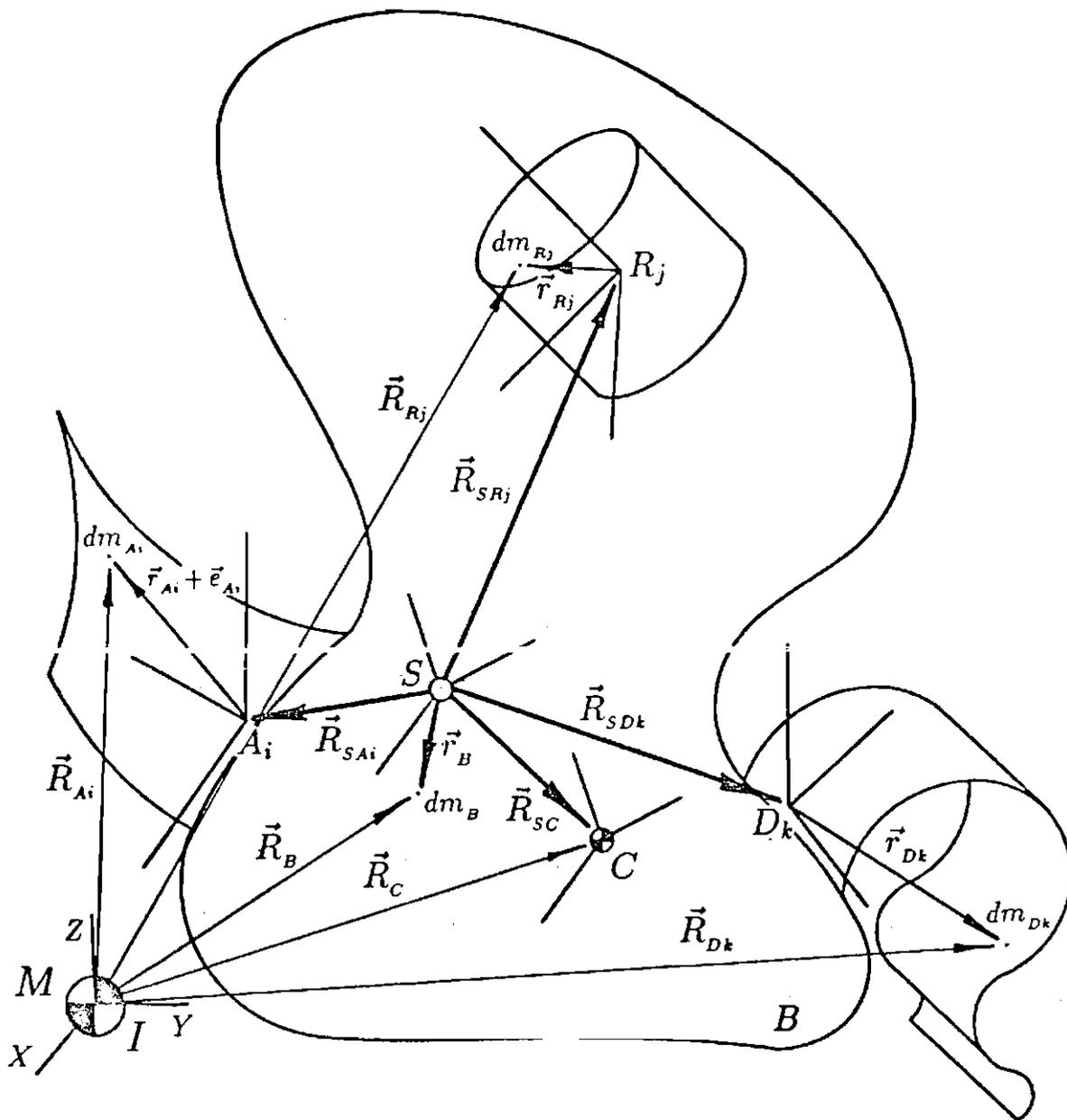


Figura 2.5: Localização Inercial de Alguns Elementos de Massa

A Figura (2.6) apresenta uma visão detalhada dos vetores \vec{r}_{A_i} , que mostra a posição de um elemento de massa do i -ésimo painel no estado não deformado a partir de A_i , e \vec{e}_{A_i} , que mostra o deslocamento elástico ao qual este foi submetido. Escritos no sistema $\{A_i, \vec{i}_{A_i}, \vec{j}_{A_i}, \vec{k}_{A_i}\}$, suas expressões assumem a forma

$$\vec{r}_{A_i} = x_{A_i} \vec{x} + y_{A_i} \vec{y}$$

$$\vec{e}_{A_i} = \vec{e}_{A_i}(x_{A_i}, y_{A_i}, t) = u_{A_i}(x_{A_i}, y_{A_i}, t) \vec{x} + v_{A_i}(x_{A_i}, y_{A_i}, t) \vec{y} + w_{A_i}(x_{A_i}, y_{A_i}, t) \vec{z}$$

onde $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \{\vec{i}_{A_i}, \vec{j}_{A_i}, \vec{k}_{A_i}\}$, sendo \vec{x} paralelo ao bordo longitudinal e \vec{y} paralelo ao bordo transversal do painel; $\vec{z} \in \{\vec{i}_{A_i}, \vec{j}_{A_i}, \vec{k}_{A_i}\}$ é normal ao plano formado pelo i -ésimo painel em repouso (livre de efeitos elásticos). Observe que a componente de \vec{r}_{A_i} na direção \vec{z} foi ignorada pelo fato do painel possuir espessura desprezível quando comparada às outras duas dimensões.

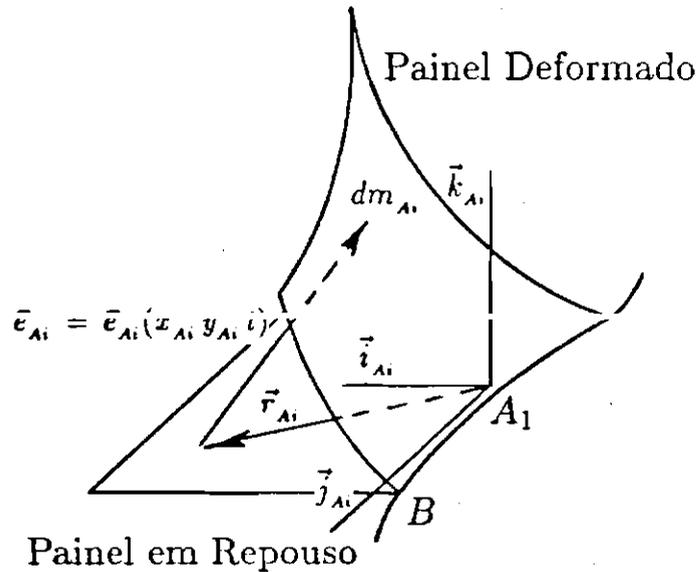


Figura 2.6: Localização dos Elementos de um Painel Deformado

Será admitido que os deslocamentos elásticos são transversais ao plano do painel em repouso, isto é, $u_{A_i} = 0$ e $v_{A_i} = 0$. Conseqüentemente, estes deslocamentos passam a ser escritos

$$\vec{e}_{A_i}(x_{A_i}, y_{A_i}, t) = w_{A_i}(x_{A_i}, y_{A_i}, t) \vec{z}. \quad (2.3)$$

2.2.3 Velocidade Inercial dos Elementos de Massa

Definindo-se $\vec{\omega}_C$, como a velocidade angular do *Sistema Instantâneo*, $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$, com relação ao *Sistema Inercial*, a velocidade angular inercial dos sistemas $\{A_i, \vec{i}_{A_i}, \vec{j}_{A_i}, \vec{k}_{A_i}\}$, $\{D_k, \vec{i}_{D_k}, \vec{j}_{D_k}, \vec{k}_{D_k}\}$ e $\{R_j, \vec{i}_{R_j}, \vec{j}_{R_j}, \vec{k}_{R_j}\}$ serão dadas

respectivamente por $\vec{\omega}_C$, $\vec{\omega}_C$ e $\vec{\omega}_C + \vec{\omega}_{R_j}$, onde $\vec{\omega}_{R_j}$ é velocidade angular do rotor com relação à base. Sendo assim, escritas no *Sistema Instantâneo*, a velocidade dos elementos de massa do satélite, com relação ao *Sistema Inercial*, são:

base:

$$\vec{V}_B = \dot{\vec{R}}_B = \vec{V}_C - \dot{\vec{R}}_{SC} + \vec{\omega}_C \times (\vec{r}_B - \vec{R}_{SC})$$

j -ésimo rotor:

$$\vec{V}_{R_j} = \dot{\vec{R}}_{R_j} = \vec{V}_C - \dot{\vec{R}}_{SC} + \vec{\omega}_C \times (\vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j} - \vec{R}_{SC}) + \vec{\omega}_{R_j} \times L_{CR_j} \vec{r}_{R_j} \quad (2.4)$$

k -ésimo painel em desdobramento:

$$\vec{V}_{D_k} = \dot{\vec{R}}_{D_k} = \vec{V}_C + \vec{v}_{D_k} - \dot{\vec{R}}_{SC} + \vec{\omega}_C \times (\vec{R}_{SD_k} + L_{CD_k} \vec{r}_{D_k} - \vec{R}_{SC})$$

i -ésimo painel aberto:

$$\vec{V}_{A_i} = \dot{\vec{R}}_{A_i} = \vec{V}_C + L_{CA_i} \dot{\vec{e}}_{A_i} - \dot{\vec{R}}_{SC} + \vec{\omega}_C \times [\vec{R}_{SA_i} + L_{CA_i} (\vec{r}_{A_i} + \vec{e}_{A_i}) - \vec{R}_{SC}]$$

onde $\dot{\vec{R}}_\alpha$, $\alpha = B, R, D$ e A , denota a derivada no tempo de \vec{R}_α com relação ao *Sistema Inercial*; e $\dot{\vec{R}}_{SC}$ e \vec{v}_{D_k} , escritos no referencial $\{S, \vec{i}_S, \vec{j}_S, \vec{k}_S\}$, são respectivamente a derivada no tempo de \vec{R}_{SC} com relação ao referencial $\{S, \vec{i}_S, \vec{j}_S, \vec{k}_S\}$ e a velocidade de abertura de um elemento de massa do painel em desdobramento; $\dot{\vec{e}}_{A_i}$ é a derivada de \vec{e}_{A_i} com relação ao referencial $\{A_i, \vec{i}_{A_i}, \vec{j}_{A_i}, \vec{k}_{A_i}\}$ escrita neste sistema c , finalmente,

$$\vec{V}_C = L_{CC} \dot{\vec{R}}_C + \vec{\omega}_0 \times L_{CC} \vec{R}_C,$$

sendo $\dot{\vec{R}}_C$ a derivada de \vec{R}_C com relação ao *Sistema Orbital* e $\vec{\omega}_0$ a velocidade orbital do veículo.

2.3 Energia Cinética

Denominando-se por T a energia cinética do satélite, tem-se como expressão geral

$$T = \frac{1}{2} \int_m \vec{V} \cdot \vec{V} dm, \quad (2.5)$$

onde \vec{V} representa a velocidade inercial de um elemento de massa genérico da configuração e m a massa do satélite.

Mais especificamente, a exemplo de Meirovitch (1977), pode-se escrever (2.5) como a soma da energia cinética de cada uma das partes que compõem

o satélite,

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \int_{m_B} \vec{V}_B \cdot \vec{V}_B dm_B + \sum_j \int_{m_{R_j}} \vec{V}_{R_j} \cdot \vec{V}_{R_j} dm_{R_j} + \sum_k \int_{m_{D_k}} \vec{V}_{D_k} \cdot \vec{V}_{D_k} dm_{D_k} + \sum_i \int_{m_{A_i}} \vec{V}_{A_i} \cdot \vec{V}_{A_i} dm_{A_i} \right\},$$

tornando mais claro o processo de obtenção da energia cinética.

Substituindo-se as expressões das velocidades inerciais obtidas em (2.4) na expressão anterior, após o desenvolvimento apresentado no Apêndice A, a energia cinética assume a forma

$$\begin{aligned} T = & \frac{m}{2} \|\vec{V}_C\|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_C^T \overline{\overline{J^C}} \vec{\omega}_C - \frac{m}{2} \|\vec{R}_{SC}\|^2 + m \vec{\omega}_C \cdot (\vec{R}_{SC} \times \vec{R}_{SC}) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_j \vec{\omega}_{R_j}^T \overline{\overline{J_{R_j}^{R_j}}} \vec{\omega}_{R_j} + \sum_j \int_{m_{R_j}} [\vec{\omega}_{R_j} \times L_{CR_j} \vec{r}_{R_j}] \cdot [\vec{\omega}_C \times (\vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j})] dm_{R_j} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_k \int_{m_{D_k}} \|\vec{v}_{D_k}\|^2 dm_{D_k} + \sum_k \int_{m_{D_k}} \vec{v}_{D_k} \cdot \vec{\omega}_C \times (\vec{R}_{SD_k} + L_{CD_k} \vec{r}_{D_k}) dm_{D_k} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_i \int_{m_{A_i}} \|\vec{e}_{A_i}\|^2 dm_{A_i} + \sum_i \int_{m_{A_i}} L_{CA_i} \vec{e}_{A_i} \cdot \vec{\omega}_C \times [\vec{R}_{SA_i} + L_{CA_i} (\vec{r}_{A_i} + \vec{e}_{A_i})] dm_{A_i}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $\overline{\overline{J^C}}$ é a diádica de inércia do satélite, calculada e escrita no *Sistema Instantâneo* $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$, quando ele se apresenta com painéis abertos deformados elasticamente e painéis em desdobramento, e $\overline{\overline{J_{R_j}^{R_j}}}$ é a diádica de inércia do j -ésimo rotor, calculada no referencial $\{R_j, \vec{i}_{R_j}, \vec{j}_{R_j}, \vec{k}_{R_j}\}$ e escrita no *Sistema Instantâneo* do satélite.

Observe que a energia cinética é composta inicialmente por termos como $\frac{m}{2} \|\vec{V}_C\|^2$, que exprime a energia cinética do movimento de translação do satélite ao longo da órbita, termos como $\frac{1}{2} \vec{\omega}_C^T \overline{\overline{J^C}} \vec{\omega}_C$, devido puramente ao movimento de rotação deste ao redor do seu centro de massa, e termos devidos ao movimento do centro de massa instantâneo com relação ao referencial $\{S, \vec{i}_S, \vec{j}_S, \vec{k}_S\}$, como $\frac{m}{2} \|\vec{R}_{SC}\|^2$ e $m \vec{\omega}_C \cdot (\vec{R}_{SC} \times \vec{R}_{SC})$, com o último exibindo um acoplamento múltiplo entre a velocidade e a posição do centro de massa instantâneo, e a velocidade angular inercial do *Sistema Instantâneo*.

A utilização da definição de centro de massa conduz ao termo quadrático negativo $-\frac{m}{2} \|\vec{R}_{SC}\|^2$, conforme o desenvolvimento apresentado no Apêndice A. Este representa o arranjo interno de energia, como por exemplo a transformação da energia cinética associada aos deslocamentos elásticos em energia potencial elástica.

Na segunda linha da expressão (2.6) vê-se, de maneira bastante clara a contribuição dada pelos rotores com $\frac{1}{2} \vec{\omega}_{R_j}^T \overline{\overline{J_{R_j}^{R_j}}} \vec{\omega}_{R_j}$, termo devido exclusivamente à velocidade de rotação relativa entre cada rotor e a base, e à sua distribuição de

massa em torno de seus eixos de simetria; pode-se observar também o outro termo, resultado do acoplamento entre o movimento de rotação de cada rotor com o movimento de rotação do satélite.

Na terceira linha, surge a contribuição dada pela velocidade de abertura dos painéis, na forma $\frac{1}{2} \int_{m_{Dk}} \|\vec{v}_{Dk}\|^2 dm_{Dk}$, e um outro termo, resultado do acoplamento entre a velocidade de abertura de cada painel e $\vec{\omega}_c$, a velocidade inercial de rotação da configuração. Este último, representa a interação entre abertura dos painéis e o movimento de atitude do satélite.

Por fim, na última linha da expressão da energia cinética, vêm os termos resultantes dos movimentos elásticos, como $\frac{1}{2} \int_{m_{A_i}} \|\vec{e}_{A_i}\|^2 dm_{A_i}$ e o outro, que representa o acoplamento entre as deflexões elásticas \vec{e}_{A_i} , e a atitude do veículo (através de $\vec{\omega}_c$).

2.4 Energia Potencial

A energia potencial do satélite será admitida como sendo composta por duas parcelas, a saber, pela *energia potencial gravitacional*, relacionada basicamente à altitude da órbita e à orientação do veículo em relação à vertical local, e pela *energia potencial elástica*, proveniente da deformação elástica sofrida, e.g. flexão e/ou torção das partes flexíveis, devida às eventuais forças ambientais perturbadoras presentes e às manobras para aquisição e manutenção de atitude.

Em muitos casos, dependendo da configuração do satélite e de sua altitude, os torques gravitacionais podem ser desprezados. Entretanto, tendo em vista o caráter geral a que se propõe o trabalho, isto não será feito aqui. Além disso, sua introdução permite a utilização de vários resultados teóricos bastante conhecidos, como por exemplo o valor das frequências orbitais (Kaplan (1973); Wertz (1978)), tornando mais simples e segura a validação do modelo a ser obtido.

2.4.1 Energia Potencial Gravitacional

O movimento orbital do satélite de massa m é suposto ocorrendo num campo de força central, com origem no centro de massa do corpo atrator, cuja intensidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre sua origem e o satélite. A este campo corresponde o potencial gravitacional (Hughes (1986) e Meirovitch (1970b))

$$V_G = -\mu \int_m \frac{dm}{R}, \quad (2.7)$$

onde $\mu = GM$, sendo G a constante de gravitação universal e M a massa do corpo atrator ($M \gg m$), e $R = \|\vec{R}\|$, com \vec{R} a localização inercial de um elemento de

massa do satélite.

Exprimindo-se a localização inercial dos elementos de massa do satélite em termos da localização inercial do centro de massa instantâneo, tem-se

$$\vec{R} = \vec{R}_C + \vec{\rho}, \quad (2.8)$$

onde $\vec{\rho}$, localiza o elemento a partir de C . Observe que para os diferentes componentes do satélite, a expressão de $\vec{\rho}$ é dada por

$$\text{base: } \vec{\rho}_B = -\vec{R}_{SC} + \vec{r}_B$$

$$\text{j-ésimo rotor: } \vec{\rho}_{R_j} = -\vec{R}_{SC} + \vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j} \quad (2.9)$$

$$\text{k-ésimo painel em desdobramento: } \vec{\rho}_{D_k} = -\vec{R}_{SC} + \vec{R}_{SD_k} + L_{CD_k} \vec{r}_{D_k}$$

$$\text{i-ésimo painel aberto: } \vec{\rho}_{A_i} = -\vec{R}_{SC} + \vec{R}_{SA_i} + L_{CA_i} (\vec{r}_{A_i} + \vec{e}_{A_i}),$$

os quais se encontram representados na Figura (2.7).

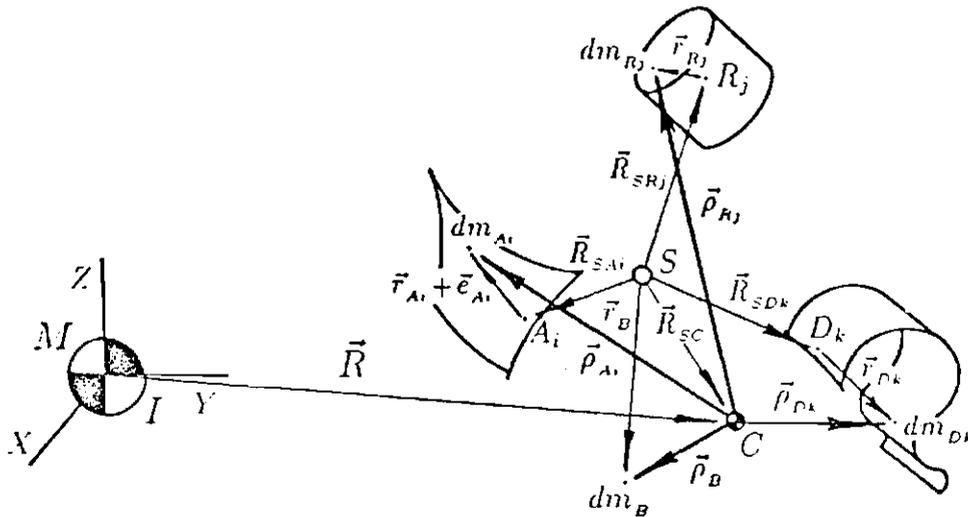


Figura 2.7: Localização dos Elementos de cada Componente a Partir de C

Seguindo o caminho indicado por Lourenção (1981), a substituição de (2.9) no integrando de (2.7), conforme o desenvolvimento apresentado no Apêndice B, resulta numa expressão bastante operacional para a energia potencial gravi-

tacional, que em acordo com Hughes (1986), pode ser escrita como

$$V_G = -\frac{\mu m}{R_C} - \frac{\mu}{2R_C^3} \text{tr}(\overline{\overline{J^c}}) + \frac{3\mu}{2R_C^3} \overline{\overline{L}}^T \overline{\overline{J^c}} \overline{\overline{L}}, \quad (2.10)$$

onde $R_C = \|\vec{R}_C\|$, $\text{tr}(\overline{\overline{J^c}})$ denota o traço da diádica de inércia do satélite com relação ao ponto C , escrita no sistema $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$, e $\overline{\overline{L}} = (l_x, l_y, l_z)$ é o vetor de cossenos diretores da vertical local, sendo

$$l_x = \frac{\vec{R}_C}{R_C} \cdot \vec{i}_C, \quad l_y = \frac{\vec{R}_C}{R_C} \cdot \vec{j}_C \quad \text{e} \quad l_z = \frac{\vec{R}_C}{R_C} \cdot \vec{k}_C.$$

A primeira parcela está relacionada a uma aproximação puntual do corpo (ponto de massa), o que implica na inexistência de torque devido ao gradiente gravitacional. Este torque tem origem no terceiro termo, o qual exprime claramente um acoplamento entre a distribuição de massa, através da diádica de inércia, e sua posição em relação à vertical local (atitude), através do vetor de cossenos diretores $\overline{\overline{L}}$. A segunda parcela pode ser atribuída à distribuição de massa em torno de C . Tanto a segunda quanto a terceira parcela envolvem os movimentos elásticos através da diádica de inércia.

2.4.2 Energia Potencial Elástica

A energia potencial elástica, às vezes denominada de energia de deformação, depende não só da forma geométrica dos apêndices flexíveis como também das propriedades físicas do material que os constitui.

Considerando a crescente demanda de energia requerida nas missões espaciais atuais, julgou-se conveniente adotar como apêndices flexíveis, painéis solares.

Alguns trabalhos, como por exemplo o de Cherchas et al. (1974), tratam os painéis solares como se fossem *membranas esticadas entre duas hastes flexíveis*. Em algumas missões entretanto, nas quais a elasticidade dos apêndices representa um fator crítico, o comportamento dinâmico do satélite possuindo painéis solares é melhor descrito se eles forem tratados como sendo *placas flexíveis*. Uma vez que se pretende estudar a influência dos deslocamentos elásticos no movimento de atitude, pareceu mais apropriado neste instante, optar-se pelo modelamento dos painéis como sendo placas flexíveis, a exemplo do que fazem Ibrahim e Misra (1982).

Supondo-se que o material com o qual são feitos os painéis solares é homogêneo e está distribuído continuamente em seu volume, pelo desenvolvimento apresentado no Apêndice C, a energia potencial elástica armazenada no sistema,

quando estes são submetidos à pequenas deflexões, é dada por

$$V_E = -\frac{1}{2} \sum_i \mathcal{D}_i \int_{PS_i} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu_i) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dPS_i, \quad (2.11)$$

onde, $\mathcal{D}_i = E_i h_i^3 / [12(1 - \nu_i^2)]$, E_i é o módulo de elasticidade longitudinal, ν_i o coeficiente de Poisson e h_i a espessura do i -ésimo painel. Note que

$$w = w_{A_i}(x_{A_i}, y_{A_i}, t),$$

é a componente do deslocamento elástico normal ao plano formado pelo painel em repouso, dada pela expressão (2.3). A expressão (2.11) está em acordo com Leissa (1969) e com Timoshenko e Goodier (1980).

2.5 Discretização do Sistema

Uma vez obtidas as energias cinética, potenciais gravitacional e elástica, expressões (2.6), (2.10) e (2.11) respectivamente, a função Lagrangiana pode ser escrita como

$$\bar{L} = \bar{T} - V = T - (V_G + V_E). \quad (2.12)$$

Pelo desenvolvimento apresentado nas seções anteriores, o modelamento de um veículo constituído tanto por partes rígidas quanto por partes flexíveis, resulta numa função Lagrangiana que depende, através da energia potencial elástica, de derivações parciais dos deslocamentos elásticos com relação às variáveis de espaço.

A aplicação do *Princípio de Hamilton* (Lanczos (1970)) a esta função conduziria a um conjunto *híbrido* de equações do movimento, na medida em que haveria equações com termos mistos, resultado do produto de fatores com e sem derivações parciais, provenientes do acoplamento entre os deslocamentos elásticos e as outras coordenadas generalizadas.

Infelizmente, na maioria dos casos de interesse prático, um modelo matemático nestas condições não é manipulável com facilidade, nem analítica nem numericamente.

Assim sendo, é necessária a utilização de métodos versáteis que conduzam a aproximações mais tratáveis das equações do movimento, pelo menos do ponto de vista numérico.

Existe alguma controvérsia entre os dinamicistas no que diz respeito à “melhor” descrição da “realidade”: esta é melhor descrita pelos modelos dados por *variáveis discretas*, representados por equações diferenciais ordinárias, ou pelos modelos dados por *variáveis contínuas*, representados por equações a derivadas parciais?

Na verdade, afirma Junkins (1986), nenhuma das abordagens garante de partida uma “boa” representação do sistema dinâmico real. Ambas requerem muita experiência e “arte” do dinamicista. Não restam dúvidas no entanto, de que uma grande parte dos casos práticos necessita da utilização de algum *método de discretização*.

Considerando a abordagem matemática adotada para um sistema físico, Meirovitch (1967) divide os métodos de discretização disponíveis basicamente em duas classes. A primeira, aplicável aos sistemas modelados como um meio elástico contínuo, assume que a solução para os deslocamentos elásticos seja dada por uma série na qual um número finito de funções dependentes do espaço e independentes entre si, são multiplicadas por coordenadas generalizadas dependentes do tempo.

Alguns exemplos desta classe de métodos são o de *Rayleigh-Ritz* e o de *Galerkin*. No Método de Rayleigh-Ritz, a discretização é feita a nível da função Lagrangiana, *antes* de serem obtidas as equações diferenciais que descrevem o problema. Já no Método de Galerkin, parte-se das equações diferenciais, utilizando-se a idéia de *resíduos ponderados*.

A segunda classe é aplicável aos sistemas nos quais o meio elástico contínuo original foi substituído por um conjunto *finito* de *massas*, colocadas em posições pré-determinadas, unidas por *molas*. Esta classe de métodos é representada por exemplo pelo *Método da Concentração dos Parâmetros (Lumped-Parameter Method)*.

Numa situação especial encontra-se o *Métodos dos Elementos Finitos*. Este método (Junkins (1986) e Meirovitch (1975b)), aplicável a uma ampla variedade de problemas, principalmente aos de geometria intrincada, “enxerga” a estrutura original como uma “colagem” de um número *finito* de subestruturas *contínuas*. Um exemplo de aplicação deste método é encontrado em Meirovitch (1984), onde é apresentado o desenvolvimento de um modelo para um corpo flexível.

Levando em conta que o modelamento matemático do veículo estudado foi feito considerando-o como um meio elástico contínuo e que, por simplicidade, pretende-se discretizar os deslocamentos elásticos já na Lagrangiana, *antes* da obtenção das equações do movimento, será utilizado o Método de Rayleigh-Ritz.

A geometria bastante particular dos apêndices flexíveis (painéis solares com formato retangular), sugere que os deslocamentos elásticos sejam mo-

delados como sendo a composição dos movimentos de uma viga *engastada-livre e livre-livre*.

Assim sendo, serão empregadas como funções dependentes do espaço, o produto das autofunções provenientes da solução dos problemas da viga engastada-livre e livre-livre (Leissa (1969)). Aplicado desta forma, este método é comumente chamado de *Método dos Modos Admitidos*.

Desta forma, a solução admitida para o deslocamento elástico do *i*-ésimo painel em repouso, dado pela expressão (2.3), se escreve

$$\bar{e}_{A_i}(x_{A_i}, y_{A_i}, t) = \sum_{a=1}^{p_i} \sum_{b=1}^{q_i} \phi_i^a(x_{A_i}) \psi_i^b(y_{A_i}) \zeta_i^{ab}(t) \bar{z}, \quad (2.13)$$

onde x_{A_i} e y_{A_i} são as coordenadas do elemento de massa dm_{A_i} , medidas no *Sistema do i-ésimo Painel Aberto*, respectivamente no sentido longitudinal e transversal, e ζ_i^{ab} são as novas *coordenadas generalizadas* associadas ao *a*-ésimo modo de vibração de uma viga engastada-livre, ϕ_i^a , e ao *b*-ésimo modo de vibração de uma viga livre-livre, ψ_i^b , do *i*-ésimo painel.

Os modos de vibração de uma viga engastada-livre e livre-livre são resultados clássicos bastante conhecidos, sendo que os de uma viga engastada-livre são dados por (Meirovitch (1967), Leissa (1969))

$$\phi^a(x) = \cosh\left(\frac{\lambda_a}{l_x} x\right) - \cos\left(\frac{\lambda_a}{l_x} x\right) - \sigma_a \left[\sinh\left(\frac{\lambda_a}{l_x} x\right) - \sin\left(\frac{\lambda_a}{l_x} x\right) \right], \quad a = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

onde l_x é a dimensão da viga engastada em $x = 0$ e livre em $x = l_x$, λ_a é uma raiz da equação transcendental

$$\cos \lambda_a \cosh \lambda_a + 1 = 0,$$

e σ_a é um parâmetro dependente de λ_a .

Os modos de vibração de um viga livre-livre, por sua vez, são dados por (Meirovitch (1967), Leissa (1969))

$$\psi^1(y) = 1$$

$$\psi^2(y) = \sqrt{3} [1 - y(2/l_y)] \quad (2.15)$$

$$\psi^b(y) = \cosh\left(\frac{\mu_b}{l_y} y\right) + \cos\left(\frac{\mu_b}{l_y} y\right) - \delta_b \left[\sinh\left(\frac{\mu_b}{l_y} y\right) + \sin\left(\frac{\mu_b}{l_y} y\right) \right], \quad b = 3, 4, \dots,$$

onde l_y é a dimensão da viga livre em $y = 0$ e em $y = l_y$, μ_b é uma raiz da equação transcendental

$$\cos \mu_b \cosh \mu_b - 1 = 0,$$

e δ_b é um parâmetro dependente de μ_b .

É interessante observar que, uma vez feita a substituição dos deslocamentos elásticos (2.13) em (2.12), o sistema passa a ter $\sum_i p_i q_i$ novas coordenadas generalizadas, destinadas à descrição do comportamento flexível do veículo.

2.6 Equações Linearizadas do Movimento

Nesta seção serão obtidas as equações linearizadas do movimento, visando-se a implementação de um esquema de controle ativo para o veículo após a abertura de seus painéis solares.

Sendo o movimento de atitude do veículo descrito pelos ângulos de rotação θ_1 , θ_2 e θ_3 , utilizados na mudança do referencial $\{C, \vec{a} \vec{g} \vec{r}\}$ para o referencial $\{C, \vec{i}_c \vec{j}_c \vec{k}_c\}$, e o movimento do j -ésimo rotor descrito pelo ângulo de rotação α_j em torno de seu eixo de simetria, a Lagrangiana do sistema discretizado se escreve

$$L = L(\dot{q}, q), \quad (2.16)$$

onde o vetor n -dimensional $q = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \zeta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, com ζ as coordenadas generalizadas provenientes do processo de discretização dos deslocamentos elásticos.

A expansão de (2.16) em série de Taylor ao redor de (\dot{q}_e, q_e) , ponto de equilíbrio do sistema, se escreve

$$\begin{aligned} L(\dot{q}, q) = & L(\dot{q}_e, q_e) + \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{q}_e, q_e) \\ \frac{\partial L}{\partial q}(\dot{q}_e, q_e) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta \dot{q} \\ \delta q \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta \dot{q} \\ \delta q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}(\dot{q}_e, q_e) & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q}(\dot{q}_e, q_e) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}}(\dot{q}_e, q_e) & \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial q}(\dot{q}_e, q_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \dot{q} \\ \delta q \end{bmatrix} + \dots, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde $\delta \dot{q} = \dot{q} - \dot{q}_e$, $\delta q = q - q_e$ e, se α e β são dois vetores n -dimensionais, os operadores diferenciais $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}$ são dados por

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \end{bmatrix} \quad e \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \beta_n} \\ \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \partial \beta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial \alpha_n \partial \beta_1} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha_n \partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \alpha_n \partial \beta_n} \end{bmatrix},$$

respectivamente.

Do *Princípio Estendido de Hamilton* (Lanczos (1970)), as equações de Lagrange podem ser escritas na forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_{nc}, \quad (2.18)$$

onde Q_{nc} são as forças generalizadas com origem *não conservativa*.

Aplicando-se (2.18) à expressão (2.17), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{q}_e, q_e) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}(\dot{q}_e, q_e) \delta \dot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}(\dot{q}_e, q_e) \delta \dot{q} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}(\dot{q}_e, q_e) \right]^T \delta \dot{q} + \\ &- \frac{\partial L}{\partial q}(\dot{q}_e, q_e) - \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}}(\dot{q}_e, q_e) \delta q - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}}(\dot{q}_e, q_e) \delta \dot{q} + \\ &- \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}}(\dot{q}_e, q_e) \right]^T \delta \dot{q} + \dots \\ &= Q_{nc}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Como (\dot{q}_e, q_e) é um ponto de equilíbrio do sistema, então ele satisfaz (Juang e Balas (1980), Meirovitch e Juang (1976))

$$\frac{\partial L}{\partial q}(\dot{q}_e, q_e) = 0, \quad (2.20)$$

e como $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{q}_e, q_e)$ é constante ao longo do tempo, tem-se

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{q}_e, q_e) = 0. \quad (2.21)$$

Se além disso forem introduzidas as matrizes

$$M(i, j) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}(\dot{q}_e, q_e), \quad S(i, j) = \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j}(\dot{q}_e, q_e) \quad \text{e} \quad K(i, j) = -\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j}(\dot{q}_e, q_e),$$

a expressão (2.19), após conservados apenas os termos de até ordem 2, se reescreve na forma matricial

$$M \delta \ddot{q} + G \delta \dot{q} + K \delta q = Q_{nc}, \quad (2.22)$$

onde $G = S^T - S$.

Na equação (2.22), M é denominada *matriz de massa* e é sempre definida positiva, K é a *matriz de rigidez* e é no mínimo semidefinida positiva e a *matriz giroscópica* G , é sempre anti-simétrica se não forem introduzidos termos relacionados ao amortecimento modal.

Finalmente, vale a pena observar que para *pequenos desvios* $\delta\dot{q}$ e δq da posição de equilíbrio (\dot{q}_e, q_e) , a resolução das equações linearizadas (2.22), fornece para o sistema não linear gerado por (2.18), a solução aproximada

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_e + \delta\mathbf{q}.$$

Capítulo 3

Síntese de Controle

Neste capítulo é apresentada a técnica de controle conhecida como *Eigenstructure Assignment*. Esta técnica tem sido desenvolvida nos últimos anos por Wonham (1967), Davison (1970, 1971), Kimura (1975), Moore (1976), Klein e Moore (1977), Porter e D'Azzo (1978a, 1978b), Fahmy e O'Reilly (1982), Burrows e Patton (1989), entre outros, e consiste na realocação tanto dos autovalores quanto dos *autovetores* de um sistema linear invariante no tempo com múltiplas entradas, através da realimentação de estado ou de saída.

Para o sistema linear proveniente da aplicação do método apresentado no Capítulo 2, é bastante simples associar a cada coordenada generalizada um modo do sistema em malha aberta (autovalor e autovetor em malha aberta).

Isto permite que, em particular, os modos do sistema possam ser divididos em dois subconjuntos:

- o dos *Modos Orbitais*, reunindo os autovalores e autovetores que regem o comportamento dos ângulos de arfagem, guinada e rolamento e
- o dos *Modos Flexíveis*, reunindo os autovalores e autovetores que exercem influência principalmente sobre as coordenadas generalizadas associadas aos deslocamentos elásticos.

Esta característica, peculiar ao sistema em estudo, levou à escolha desta técnica de controle. Se escolhidos “convenientemente”, os autovetores em malha fechada podem realçar ainda mais aquela característica, forçando um desacoplamento dinâmico entre as diversas coordenadas do sistema.

Isto possibilita a implementação de leis de controle que alterem preferencialmente o comportamento de determinadas coordenadas generalizadas, preservando o de outras. Assim sendo, pode-se tentar alterar a dinâmica dos modos orbitais sem que seja alterada a dinâmica dos modos flexíveis, ou alterar a dinâmica

de ambos os modos, ou ainda qualquer outra combinação pertinente que se queira. Certamente esta possibilidade é altamente atraente.

Na seção 3.1, apresenta-se a solução de um sistema linear como função de seus autovalores e autovetores a fim de se observar quais características da resposta são alteradas quando são modificados os autovalores e quando são modificados os autovetores.

Na seção 3.2, coloca-se o problema de controle de sistemas lineares invariantes no tempo com entradas múltiplas, visto sob dois enfoques diferentes: um por realimentação linear de estado e outro por realimentação linear de saída.

Na seção 3.3, a realocação da *estrutura característica* (autovalores/autovetores) é apresentada utilizando-se realimentação linear de estado. Nesta seção, é colocado o importante resultado obtido por Moore (1976), no caso de autovalores distintos em malha fechada.

Após a apresentação da teoria envolvida nesta técnica, na seção 3.4, segue a descrição de um algoritmo devido a Porter e D'Azzo (1978b), que permite o cálculo direto da *matriz de ganhos* quando se emprega realimentação linear de estado. Este algoritmo será posteriormente utilizado na implementação computacional desta técnica de controle (Apêndice D).

Por fim, na seção 3.5 propõe-se um esquema de controle para os veículos pertencentes à classe considerada, a ser realizado em duas etapas. Na primeira exclui-se da dinâmica do sistema os atuadores, objetivando-se descobrir qual é a lei de controle (*matriz de ganhos*) a que devem ser submetidos os modos orbitais e flexíveis para que, em malha fechada, se obtenha o resultado pretendido. Na segunda etapa, trabalha-se com o sistema completo, incluindo-se os atuadores. Esta inclusão tem por objetivo a verificação de possíveis interações entre os diversos componentes do satélite sob a ação da lei de controle imposta.

As discussões acerca de como associar a cada coordenada generalizada um modo do sistema e de como escolher "convenientemente" os autovetores em malha fechada, de maneira a forçar um desacoplamento dinâmico entre as diversas coordenadas, foram reservadas ao Capítulo 5.

3.1 Preliminares

Os detalhes apresentados nesta seção, apesar de bem conhecidos, estão sendo colocados em benefício da clareza e complementação do texto.

Considere o sistema dinâmico descrito pelas n equações diferenciais

lineares de 1ª ordem

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde A é uma matriz real $n \times n$, invariante no tempo.

Da teoria de equações diferenciais ordinárias (Sotomayor (1979), Oliva (1973)), sabe-se que a solução de (3.1) pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}_0 \quad (3.2)$$

onde e^{tA} representa a exponencial da matriz tA , e pode ser obtida através do cálculo da série

$$I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n A^n}{n!} + \cdots,$$

cuja convergência está garantida e sua prova pode ser encontrada em Oliva (1973).

É muito comum proceder-se a uma mudança de variáveis

$$\mathbf{x}(t) = P \mathbf{y}(t),$$

P uma matriz não singular com coeficientes constantes, donde

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \mathbf{x}(t) = AP \mathbf{y}(t) = P \dot{\mathbf{y}}(t) \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathcal{A} \mathbf{y}(t),$$

onde $\mathcal{A} = P^{-1}AP$, é *semelhante*¹ à A .

Se a escolha de P for feita de forma que \mathcal{A} seja relativamente “simples”, o sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathcal{A} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(0) = \mathcal{A} \mathbf{x}_0 \end{cases},$$

em geral, é mais fácil de ser integrado que o sistema original (3.1). Um processo usual para se obter uma expressão “simples” para uma matriz semelhante \mathcal{A} , é reduzir-se A à sua forma canônica de Jordan (Hoffman e Kunze (1979)).

A fim de ilustrar a afirmação feita, considere o caso particular em que os autovalores de A são distintos dois a dois. Assim sendo, tomando-se a matriz

¹Duas matrizes quadradas A e B são semelhantes se existe uma matriz M não singular tal que $AM = MB$.

formada pelos autovetores de A , $P = [\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n]$, a matriz $\mathcal{A} = P^{-1}AP$, assume a forma diagonal

$$\mathcal{A} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n],$$

onde λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são os autovalores de A .

Para o novo sistema obtido

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathcal{A} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(0) = \mathcal{A} \mathbf{x}_0 \end{cases}, \quad (3.3)$$

a solução na forma (3.2) se escreve

$$\mathbf{y}(t) = e^{t\mathcal{A}} \mathbf{y}_0.$$

Como a matriz \mathcal{A} é diagonal, sua exponencial $e^{t\mathcal{A}}$, assume a forma

$$e^{t\mathcal{A}} = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]. \quad (3.4)$$

Retornando ao sistema original utilizando-se a transformação inversa, $\mathbf{y}(t) = P^{-1} \mathbf{x}(t)$, obtém-se

$$\mathbf{x}(t) = P e^{t\mathcal{A}} P^{-1} \mathbf{x}_0,$$

que com a utilização de (3.4) e a substituição de P , se escreve

$$\mathbf{x}(t) = [e^{\lambda_1 t} \nu_1 \quad e^{\lambda_2 t} \nu_2 \quad \dots \quad e^{\lambda_n t} \nu_n] \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.5)$$

onde $\boldsymbol{\alpha} = P^{-1} \mathbf{x}_0 = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n]^T$.

Desenvolvendo-se o produto dado pela expressão (3.5), obtém-se

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} \nu_i. \quad (3.6)$$

A expressão (3.6) evidencia a excitação da *estrutura característica* (autovalores/autovetores), na solução do sistema. Pode-se observar que a solução de um sistema como (3.1), de uma forma geral, depende

- dos autovetores, os quais definem o *formato* da solução;
- dos autovalores, os quais determinam a *taza de crescimento/decaimento* da solução;
- da condição inicial \mathbf{x}_0 , que determina o grau de *participação* de cada modo.

3.2 Apresentação do Problema

Considere o sistema dinâmico dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) \quad (3.8)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$, são respectivamente o *estado*, o *controle* e a *saída* do sistema; $A_{n \times n}$, $B_{n \times m}$, $C_{r \times n}$, são matrizes reais, invariantes no tempo.

Assim, dois problemas são naturalmente postos:

- **Problema 1. Realimentação de Saída**

Dados um conjunto *auto-conjugado*² de números complexos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, e um conjunto auto-conjugado de vetores $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$, em que condições existe para o sistema dado por (3.7) e (3.8), uma matriz real de ganhos K_G , $m \times r$, tal que se tenha

$$\mathbf{u} = K_G \mathbf{y} = K_G C \mathbf{x}$$

de forma que os autovalores de $A + BK_G C$ sejam precisamente $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, $r \leq n$, com correspondentes autovetores $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$?

- **Problema 2. Realimentação de Estado**

Dados um conjunto auto-conjugado de números complexos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, e um conjunto auto-conjugado de vetores $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$, em que condições existe para o sistema (3.7) uma matriz real de ganhos K_G , $m \times n$, tal que se tenha

$$\mathbf{u} = K_G \mathbf{x}$$

e de forma que os autovalores de $A + BK_G$ sejam precisamente $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, com correspondentes autovetores $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$?

O primeiro dos problemas postos foi tratado por Shah, Fisher e Seborg (1975), e Srinathkumar (1978), entre outros. Parte deste problema, o da

²Um conjunto é auto-conjugado se todos os seus elementos complexos aparecem em pares conjugados.

realocação *apenas* dos autovalores de sistemas lineares invariantes no tempo com múltipla entrada, usando realimentação de saída, foi estudado por exemplo por Sridhar e Lindorff (1973), e Kimura (1975). Um algoritmo para a resolução deste problema parcial foi desenvolvido por Davison e Chow (1973).

Davison (1970) estuda um problema diferente, relacionado com o segundo dos problemas postos. É o problema que se põe quando se pretende fazer a realocação de autovalores através da realimentação *parcial* da variável de estado \mathbf{x} . Davison e Chatterjee (1971) concluem que o número de autovalores que pode ser arbitrariamente realocado desta forma é igual ao *máximo* entre o número de entradas e de saídas não triviais.

Apenas o segundo dos problemas postos será aqui tratado. Lidaram com este problema autores como Srinathkumar e Rhoten (1975), Moore (1976), e Fahmy e O'Reilly (1982).

3.3 Realocação de Autovalores/Autovetores por Realimentação de Estado

Uma das técnicas mais empregadas na alteração das características da resposta do sistema dinâmico dado em (3.7), é a da realimentação linear das variáveis de estado. Se o sistema (3.7) for controlável (Chen (1970), Kwakernaak e Sivan (1972)), esta forma de realimentação pode ser utilizada para alocar os autovalores em malha fechada para qualquer conjunto auto-conjugado de escalares.

Este resultado, para os sistemas com entrada única, é conhecido a bastante tempo. Para os sistemas com entradas múltiplas este resultado foi obtido pela primeira vez por Wonham (1967).

Moore (1976) foi o primeiro a determinar qual é exatamente a liberdade existente para realocação dos autovetores do sistema (3.7), no caso em que os autovalores em malha fechada são distintos. Utilizando realimentação de estado em seu trabalho, Moore caracteriza o conjunto dos vetores que podem ser *autovetores* em malha fechada. Ele faz isso mostrando que a cada autovalor em malha fechada está associado um subespaço vetorial particular, do qual qualquer vetor selecionado será o correspondente autovetor em malha fechada³.

As condições *necessárias e suficientes* obtidas por Moore (1976) para a realocação dos autovalores e obtenção de vetores que podem ser, em malha fechada, os respectivos autovetores, serão apresentadas e utilizadas neste trabalho

³Segundo o autor, este resultado foi obtido independentemente por Kimura (1975) e usado implicitamente em seu trabalho, usando realimentação de saída em sistemas lineares invariantes com entradas múltiplas.

para a implementação de um esquema de controle, no caso de realimentação linear de estado e autovalores distintos em malha fechada.

Para isto, considere λ complexo e a matriz $n \times (n + m)$

$$S_\lambda \doteq [\lambda I - A \mid B] \quad (3.9)$$

e a matriz compativelmente particionada $(n + m) \times s$, $s \geq m$,

$$R_\lambda \doteq \begin{bmatrix} N_\lambda \\ M_\lambda \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

onde as colunas de R_λ formam uma base para o *Kernel*⁴ de S_λ . Pode-se mostrar que se o posto de B é m , as colunas de N_λ são linearmente independentes e que, $N_{\lambda^*} = N_\lambda^*$, onde a estrela denota a conjugação.

Com as definições dadas em (3.9) e (3.10), tem-se (Moore (1976))

Teorema 1 *Seja $\{\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ um conjunto auto-conjugado de números complexos distintos. Existe uma matriz real K_G , $m \times n$, tal que*

$$(A + BK_G)\nu_i = \lambda_i\nu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

se e somente se vale, para cada i , as três condições seguintes

1. os vetores ν_i são linearmente independentes em \mathbb{C}^n ;
2. $\nu_i = \nu_j^*$ se $\lambda_i = \lambda_j^*$;
3. ν_i pertence ao espaço gerado pelas colunas de N_{λ_i} .

Se K_G existe e o posto de B é m , então K_G é única.

Prova: *Suficiência*

Suponha que ν_i satisfaça as três condições do Teorema. De 3 segue que existe um vetor z_i em \mathbb{R}^m (ou \mathbb{C}^m) tal que

$$\nu_i = N_{\lambda_i} z_i.$$

Das definições de S_{λ_i} e R_{λ_i} , (3.9) e (3.10) respectivamente, tem-se

$$(\lambda_i I - A)N_{\lambda_i} + BM_{\lambda_i} = 0$$

⁴Veja a definição em Hoffman e Kunze (1979).

e portanto, multiplicando-se por z_i ,

$$(\lambda_i I - A) \nu_i + B M_{\lambda_i} z_i = 0.$$

Se uma matriz K_G pode ser escolhida tal que

$$-M_{\lambda_i} z_i = K_G \nu_i,$$

então

$$[\lambda_i I - (A + B K_G)] \nu_i = 0.$$

Resta provar a matriz real K_G satisfazendo

$$K_G [\nu_1 \ \nu_2 \ \dots \ \nu_n] = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n],$$

onde $w_i = -M_{\lambda_i} z_i$, sempre existe.

Se todos os autovalores são reais, então ν_i e w_i são vetores reais e a matriz $[\nu_1 \ \nu_2 \ \dots \ \nu_n]$ não é singular pela condição 1. Neste caso

$$K_G = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n] [\nu_1 \ \nu_2 \ \dots \ \nu_n]^{-1}. \quad (3.11)$$

Considere o caso de autovalores complexos, ou seja, suponha que $\lambda_1 = \lambda_2^*$. Da segunda condição tem-se $\nu_1 = \nu_2^*$ e, conseqüentemente, $w_1 = w_2^*$. Neste caso, a equação a ser resolvida é

$$K_G [\nu_{1R} + i\nu_{1I} \ \nu_{1R} - i\nu_{1I} \ | \ V] = [w_{1R} + iw_{1I} \ w_{1R} - iw_{1I} \ | \ W], \quad (3.12)$$

onde V e W são as colunas ν_i , $i = 3, \dots, n$, e w_i , $i = 3, \dots, n$, respectivamente.

A multiplicação de ambos os lados de (3.12) à direita, por

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -i\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & +i\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right]$$

conduz à equação equivalente

$$K_G [\nu_{1R} \ \nu_{1I} \ | \ V] = [w_{1R} \ w_{1I} \ | \ W]. \quad (3.13)$$

Uma vez que ν_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são independentes as colunas de $[\nu_{1R} \ \nu_{1I} \ | \ V]$ são linearmente independentes. Havendo outros pares de autovalores complexos conjugados o processo pode ser repetido.

Necessidade

A necessidade das condições 1 e 2 vem da teoria de álgebra linear. Se vale $(A + BK_G)\nu_i = \lambda_i \nu_i$, então $(\lambda_i I - A)\nu_i = BK_G \nu_i$, que pode ser reescrita em forma matricial

$$S_{\lambda_i} \begin{bmatrix} \nu_i \\ -K_G \nu_i \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Uma vez que R_{λ_i} forma uma base para o Kernel de S_{λ_i} , segue que ν_i pertence ao subespaço gerado por N_{λ_i} .

Como $A + BK_G$ é univocamente determinada pelos seus autovalores e autovetores, é claro que K_G é única sempre que B possuir posto máximo. ■

Optou-se pela apresentação da prova do Teorema 1 por tratar-se de um resultado bastante importante. Fica com ela bastante clara a caracterização do conjunto de vetores que podem ser, em malha fechada, autovetores.

É interessante notar que a controlabilidade do sistema (3.7) não foi mencionada no teorema. A equivalência entre realocação de autovalores e controlabilidade (Wonham (1967)), implica que as três condições postas no teorema só estarão satisfeitas se os autovalores associados aos modos não controláveis fizerem parte do conjunto de autovalores em malha fechada, ou seja, uma vez que eles não são controláveis não se tentará atuar sobre eles.

Klein e Moore (1977), e Porter e D'Azzo (1978a) estendem este resultado investigando a realocação da *estrutura característica generalizada*, isto é, em que condições podem ser obtidos autovalores repetidos, autovetores e *autovetores generalizados* em malha fechada.

A leitura do Teorema 1 e de sua prova, faz com que naturalmente seja levantada a questão: "Como calcular uma base do Kernel de S_{λ} ?" Esta questão foi respondida por Porter e D'Azzo (1978b), com a apresentação de um algoritmo que fornece meios para o cálculo do Kernel de (3.9) quando se deseja inclusive realocar autovetores e autovetores generalizados, associados a um conjunto de autovalores em malha fechada não necessariamente distintos entre si. Isto é feito para o caso de realimentação de estado em sistemas lineares invariantes no tempo, com entradas múltiplas.

Será apresentada uma versão simplificada deste algoritmo, reduzindo-o ao caso de autovalores distintos em malha fechada.

3.4 Algoritmo de Porter e D'Azzo Simplificado

O algoritmo desenvolvido por Porter e D'Azzo (1978b) é uma generalização do algoritmo apresentado por MacLane e Birkhoff (1968) para o cálculo de uma base do *Kernel* de uma transformação linear. Este algoritmo é particularmente apropriado para implementação computacional (Apêndice D).

Apesar de poder ser empregado na realocação de autovetores e autovetores generalizados, associados a autovalores repetidos em malha fechada, ele será apresentado aqui numa versão simplificada, para o caso em que se tem autovalores distintos entre si. Neste caso, ele se reduz a

<i>Passo 1</i>	<p>Construa a matriz</p> $\hat{S}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} A - \lambda_i I_n & & B \\ \hline & & I_{n+m} \end{bmatrix}$ <p>para cada $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$;</p>
<i>Passo 2</i>	<p>Execute operações elementares de <i>coluna</i> em $\hat{S}(\lambda_i)$ até que se tenha</p> $\hat{S}(\lambda_i) \sim \tilde{S}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11}(\lambda_i) & \tilde{S}_{12}(\lambda_i) \\ \tilde{S}_{21}(\lambda_i) & \tilde{S}_{22}(\lambda_i) \end{bmatrix},$ <p>onde $\tilde{S}_{12}(\lambda_i) = \mathbf{0}$ e $\tilde{S}_{11}(\lambda_i) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, tendo esta última posto n.</p>

Figura 3.1: Algoritmo Simplificado de Porter e D'Azzo (1978b)

Executados os *Passos 1 e 2*, o *Kernel* de $[A - \lambda_i I_n \mid B]$, R_{λ_i} , é gerado pelas colunas de $\tilde{S}_{22}(\lambda_i)$. Note que se λ_i não é um dos autovalores de A então $\tilde{S}_{11}(\lambda_i)$ tem posto n .

Para $\lambda = \lambda_i$, colocando-se em termos das matrizes N_λ e M_λ da expressão (3.10), $\tilde{S}_{22}(\lambda_i)$ se escreve

$$\tilde{S}_{22}(\lambda_i) = R_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Após o cálculo do autovetor ν_i e do respectivo vetor w_i , obtidos tomando-se uma combinação linear das colunas de $\tilde{S}_{22}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, a matriz de realimentação de estado K_G pode ser obtida com o auxílio da expressão (3.11) ou (3.13), caso existam ou não autovalores complexos em malha fechada.

O Apêndice D mostra como computacionalmente foram executadas as operações elementares mencionadas no *Passo 2* e como foi tomada uma combinação linear das colunas de $\tilde{S}_{22}(\lambda_i)$.

3.5 Implementação do Controle

Esta seção tem por objetivo propor um esquema de controle para os satélites pertencentes à classe de veículos em consideração, apresentada no Capítulo 2, empregando a técnica de realocação de autovalores e autovetores apresentada.

Para a implementação do esquema de controle, supôs-se que o satélite só será submetido ao controle ativo de atitude *após* a fase transitória de abertura dos painéis solares. Admitiu-se como hipótese de trabalho que o satélite será injetado em órbita com condições iniciais de velocidade e posição tais que ao final da abertura dos painéis solares ele tenha adquirido sua posição nominal de atitude. Caso isto não seja possível, um outro procedimento de controle deverá ser utilizado para este fim. A análise deste procedimento, no entanto, é considerada estar além do escopo deste trabalho.

Assim sendo, os rotores (*atuadores*) permanecem inativos durante o lançamento do veículo e a abertura de seus painéis solares.

A atitude nominal será tomada como uma *solução de equilíbrio* do sistema e deverá ser mantida ativamente através da atuação dos rotores.

3.5.1 Equações de 1ª Ordem do Sistema

Para a utilização da técnica de realocação da estrutura característica, o conjunto de equações de 2ª ordem do movimento, linearizadas em torno da posição nominal de atitude (ponto de equilíbrio do sistema), será transformado num conjunto equivalente de equações de 1ª ordem.

Seja

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_k \\ \zeta_i^{ab} \\ \alpha_j \end{bmatrix},$$

o vetor adotado de coordenadas generalizadas, o qual representa o desvio da posição nominal de atitude, sendo

- θ_k o desvio nos ângulos de atitude, $k = 1, 2$ e 3 ,
- ζ_i^{ab} o desvio na coordenada generalizada do i -ésimo painel aberto, associada ao a -ésimo modo de vibração da viga *engastada-livre* e ao b -ésimo modo de vibração da viga *livre-livre* e
- α_j o desvio no ângulo de rotação do j -ésimo rotor.

Assim sendo, retomando-se as equações linearizadas do movimento (2.22), tem-se, em notação matricial,

$$M \ddot{\mathbf{q}} + G \dot{\mathbf{q}} + K \mathbf{q} = \mathbf{Q}_{nc}, \quad (3.15)$$

onde \mathbf{Q}_{nc} é o vetor de forças generalizadas com origem *não conservativa*.

Na equação (3.15), a *matriz de massa* M é sempre definida positiva, a *matriz de rigidez* K é no mínimo semidefinida positiva e a *matriz giroscópica* G é sempre anti-simétrica, $G = S^T - S$, com M , S e K dadas por

$$M(l, c) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_c}, \quad S(l, c) = \frac{\partial^2 L}{\partial q_l \partial \dot{q}_c} \quad \text{e} \quad K(l, c) = -\frac{\partial^2 L}{\partial q_l \partial q_c},$$

onde $1 \leq l, c \leq n = (3 + \sum_i p_i q_i + \sum_j 1)$.

A parcela $G \dot{\mathbf{q}}$ além dos termos giroscópicos, em geral, pode também conter termos dissipativos quando se trabalha com veículos flexíveis. Estes termos podem ser tomados por exemplo proporcionais à frequência natural do 1º modo de vibração (amortecimento modal).

As forças generalizadas com origem não conservativa, \mathbf{Q}_{nc} , serão admitidas como sendo da forma

$$\mathbf{Q}_{nc} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times 1} \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

onde m é o número total de rotores e $\mathbf{u}(t)$, vetor m -dimensional, representa os torques aplicados sobre os rotores devidos aos seus motores.

O conjunto de n equações de 2ª ordem (3.15), pode ser transformado num conjunto de $2n$ equações de 1ª ordem, pondo-se

$$\mathbf{x}^T(t) = [\dot{\mathbf{q}}^T(t) \quad \mathbf{q}^T(t)]^T \quad (3.17)$$

e introduzindo-se as matrizes $2n$ -dimensionais

$$A = \begin{bmatrix} -M^{-1}G & -M^{-1}K \\ I_n & \mathbf{0}_{n \times n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{n \times m} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Utilizando-se as expressões (3.17) e (3.18), o sistema de 1ª ordem se escreve

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \mathbf{x}(t) + B \mathbf{u}(t). \quad (3.19)$$

3.5.2 Esquema de Controle

Normalmente, para proceder-se à implementação de um esquema de controle, costuma-se desvincular a dinâmica dos atuadores da dinâmica do restante do sistema. Isto oferece uma certa liberdade na escolha dos atuadores a serem utilizados, tanto com relação a seu tipo quanto com relação a suas dimensões. Assim sendo, o esquema de controle adotado imporá a (3.19) um desacoplamento entre as coordenadas generalizadas dos rotores e as demais.

Este desacoplamento dá origem a um sistema, aqui denominado *reduzido*, cujo vetor de estado tem a forma

$$\mathbf{x}_r(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_k \\ \zeta_i^{ab} \\ \theta_k \\ \zeta_i^{ab} \end{bmatrix}.$$

Definindo-se as matrizes reais A_r , quadrada de ordem $2(n-m)$, e B_r , $2(n-m) \times m$,

$$A_r = \begin{bmatrix} -M_r^{-1}G_r & -M_r^{-1}K_r \\ I_{(n-m)} & \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_r = \begin{bmatrix} M_r^{-1}R_{(n-m) \times m} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

onde M_r , G_r e K_r são submatrizes tomadas de M , G e K de forma a excluir as coordenadas generalizadas associadas aos rotores dadas por

$$M_r(l, c) = M(l, c) \quad G_r(l, c) = G(l, c) \quad \text{e} \quad K_r(l, c) = K(l, c),$$

onde $1 \leq l, c \leq (n-m)$, e $R_{(n-m) \times m}$ representa as *reações* aos torques exercidos sobre os rotores, atuantes nas outras coordenadas. Como se vê, é importante neste ponto fazer-se uso da troca *ação/reação* existente entre os rotores e o resto do sistema.

Considerando-se a nova variável de estado $\mathbf{x}_r(t)$ e as matrizes apresentadas em (3.20), o sistema reduzido assume a forma

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = A_r \mathbf{x}_r(t) + B_r \mathbf{u}(t), \quad (3.21)$$

onde $\mathbf{u}(t)$, vetor m dimensional, representa os torques exercidos sobre os rotores.

Deve ser notado que, após a redução do sistema (3.19) ao sistema (3.21), as equações da dinâmica dos rotores se escrevem

$$M_a \ddot{\alpha} + G_a \dot{\alpha} + K_a \alpha = \mathbf{u}(t), \quad (3.22)$$

onde, M_a , G_a e K_a são as submatrizes tomadas de M , G e K , associadas apenas às coordenadas generalizadas dos rotores.

Uma interpretação física pode ser dada ao conjunto de equações (3.21) e (3.22). Para que o sistema (3.21) tenha a resposta desejada em termos de autovalores (autovetores), determina-se a que lei de controle ele deve ser submetido (um $\mathbf{u}(t)$ conveniente). A seguir, esta exigência é imposta aos rotores através das equações (3.22).

O esquema de controle implementado foi desenvolvido em duas etapas. Na primeira etapa será aplicada a técnica de realocação da estrutura característica descrita anteriormente, para a realização do controle no sistema reduzido (3.21). A segunda etapa consistirá na realização do controle para o sistema original (3.19), utilizando a lei de controle obtida para o sistema reduzido (validação do controlador).

1ª Etapa da Implementação do Controle

Na primeira etapa, uma vez escolhido o conjunto auto-conjugado de complexos $\{\lambda_i, i = 1, 2, \dots, 2(n-m)\}$, autovalores em malha fechada para o sistema reduzido, a utilização do algoritmo de Porter e D'Azzo (1978b) na versão simplificada apresentada, permite a escolha de vetores \mathbf{v}_i e \mathbf{w}_i satisfazendo as condições 2 e 3 do Teorema 1, de forma que \mathbf{v}_i seja um autovetor em malha fechada do sistema

reduzido, $i = 1, 2, \dots, 2(n - m)$. Observe que os autovalores e autovetores associados aos modos *não controláveis* em malha aberta, devem obrigatoriamente fazer parte da estrutura característica pretendida. A escolha dos outros autovetores pretendidos em malha fechada será discutida mais adiante, no Capítulo 5.

Com o auxílio das expressões (3.11) ou (3.13), dependendo se o conjunto de autovalores em malha fechada possui ou não números complexos, pode-se calcular a matriz de realimentação de estado para o sistema reduzido, K_{Gr} , $m \times 2(n - m)$, de forma que o vetor de controle gerado por

$$u(t) = K_{Gr} x_r, \quad (3.23)$$

seja tal, que o sistema reduzido em malha fechada

$$\dot{x}_r(t) = (A_r + B_r K_{Gr}) x_r(t), \quad (3.24)$$

possui autovalores e autovetores dados por λ_i e ν_i respectivamente, $i = 1, 2, \dots, 2(n - m)$.

O diagrama de blocos para a primeira etapa utilizada na implementação do controle, assume a forma (Houpis e D'Azzo (1981))

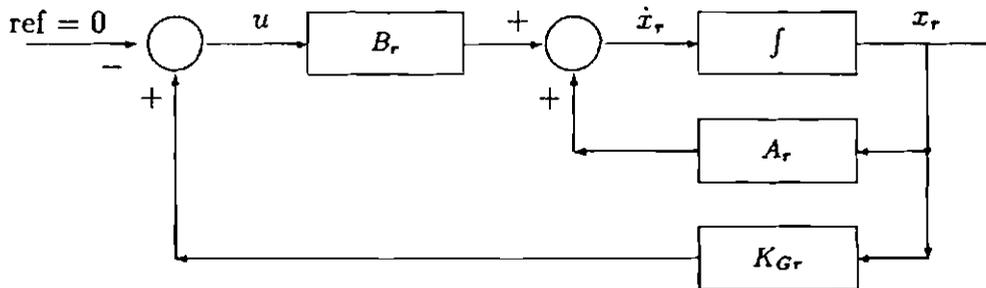


Figura 3.2: Diagrama de Blocos da 1ª Etapa de Controle

Considerando-se o vetor de controle dado em (3.23), conclui-se que a dinâmica imposta aos rotores ao longo do tempo é descrita através das equações

$$M_a \ddot{\alpha}(t) + G_a \dot{\alpha}(t) + K_a \alpha(t) = K_{Gr} x_r. \quad (3.25)$$

Não deve ser esquecido no entanto, que o sistema dado por (3.24) e (3.25), é resultado de um desacoplamento forçado entre a dinâmica dos atuadores

e a dinâmica do restante do sistema, representando portanto, uma aproximação do que se deseja do sistema original (3.19). Sendo assim, na segunda etapa será feita a implementação do controle no sistema original (3.19), utilizando-se a matriz de realimentação de estado do sistema reduzido, K_{Gr} .

2ª Etapa da Implementação do Controle

Para obter-se K_G , $m \times 2n$, matriz de ganhos para a realimentação de estado do sistema (3.19), basta observar que a lei de controle que se deseja já foi obtida em (3.23), e que ela não envolve a realimentação das coordenadas generalizadas associadas aos rotores.

Assim sendo, para que o vetor de controle $u(t)$ possa ser escrito como função do estado x e não mais do estado reduzido x_r , a matriz de realimentação K_G deve ter a forma

$$K_G = [K_{Gr}^1 \mid \mathbf{0}_{m \times m} \mid K_{Gr}^2 \mid \mathbf{0}_{m \times m}], \quad (3.26)$$

onde K_{Gr}^1 é formada pelas $n - m$ primeiras colunas de K_{Gr} e K_{Gr}^2 por suas $n - m$ colunas restantes.

Espera-se que sob a lei de controle

$$u(t) = K_G x, \quad (3.27)$$

a estrutura característica do sistema (3.19) em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A + BK_G) x(t), \quad (3.28)$$

contenha autovalores e autovetores “próximos” aos selecionados para o sistema reduzido, λ_i e ν_i , $i = 1, 2, \dots, 2(n - m)$. Os outros autovalores e autovetores estão associados à dinâmica dos atuadores.

O diagrama de blocos para esta segunda etapa da implementação de controle assume a forma

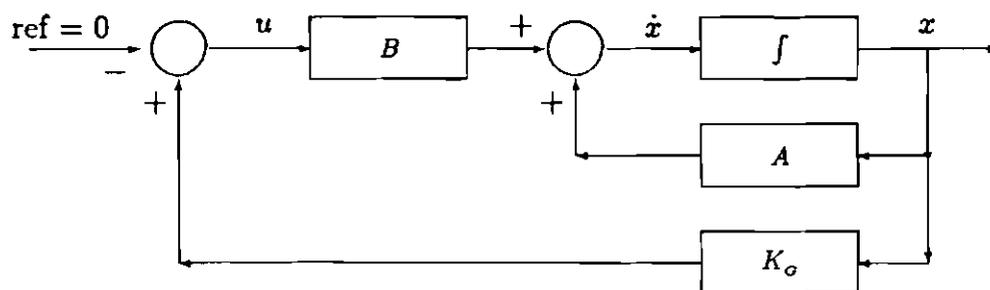


Figura 3.3: Diagrama de Blocos da 2ª Etapa de Controle

A título de complementação do trabalho, encontram-se no Apêndice D as listagens e uma descrição sucinta dos algoritmos das principais subrotinas empregadas na implementação do controle.

Capítulo 4

Aplicação do Método

Objetivando-se exemplificar a aplicação das técnicas de modelagem e de controle vistas anteriormente, neste capítulo é apresentado um satélite-exemplo constituído por um núcleo rígido, rotores e painéis solares que se desdobram, após o que, são considerados flexíveis. Será admitido que não existem simultaneamente painéis abertos e em fase de abertura.

Primeiramente, na seção 4.1, descreve-se o modelo físico adotado e definem-se as características da órbita e da atitude nominal.

Logo após, na seção 4.2, é apresentado de forma esquemática o funcionamento do *Sistema de Manipulação Algébrica – SMA*, desenvolvido para a obtenção das equações do movimento. Este sistema utiliza o poderoso manipulador simbólico *Reduce* (Hearn (1987)), e é formado por diversos programas, cada qual destinado ao cálculo de certo conjunto de grandezas físicas associadas ao veículo, tais como diádica de inércia, velocidades dos elementos de massa e *função Lagrangiana*.

A obtenção das equações não lineares da fase de abertura dos painéis solares e das equações linearizadas da fase posterior, está vinculada aos *dados* fornecidos ao *SMA*. Estes *dados* caracterizam fisicamente o veículo, utilizando para descrever a sua configuração informações como número de apêndices, seus tipos e sua localização. Visando a utilização do *SMA*, nas seções 4.3 e 4.4 obtém-se estes *dados* para o satélite-exemplo.

Na seção 4.5, são deduzidos os históricos de abertura dos painéis. Uma vez que foi admitido que não existem simultaneamente painéis completamente abertos e em desdobramento, os painéis iniciam e concluem juntos sua abertura. Este fato permite que se estudem históricos de abertura com impactos no instante final. Uma breve apresentação do método utilizado no estudo destes impactos é feita na seção 4.6 .

Por fim, na seção 4.7 discute-se a implementação do esquema de controle ativo. Uma vez que se fará realimentação linear de estado e intenciona-se

atuar também sobre os modos flexíveis, é apresentada a forma matricial das equações linearizadas do movimento, expressão (2.22), para o veículo em sua configuração final com deformações elásticas.

4.1 Modelo Físico e Atitude Nominal

O satélite-exemplo é admitido como sendo composto por um núcleo rígido, cujo formato é o de um prisma reto de base retangular, contendo três rotores em seu interior e três painéis solares engastados em faces diferentes. Tal núcleo será denominado *base*. A Figura (4.1) esboça o modelo físico adotado para o satélite-exemplo em sua configuração final, na ausência de deformações elásticas (painéis em repouso).

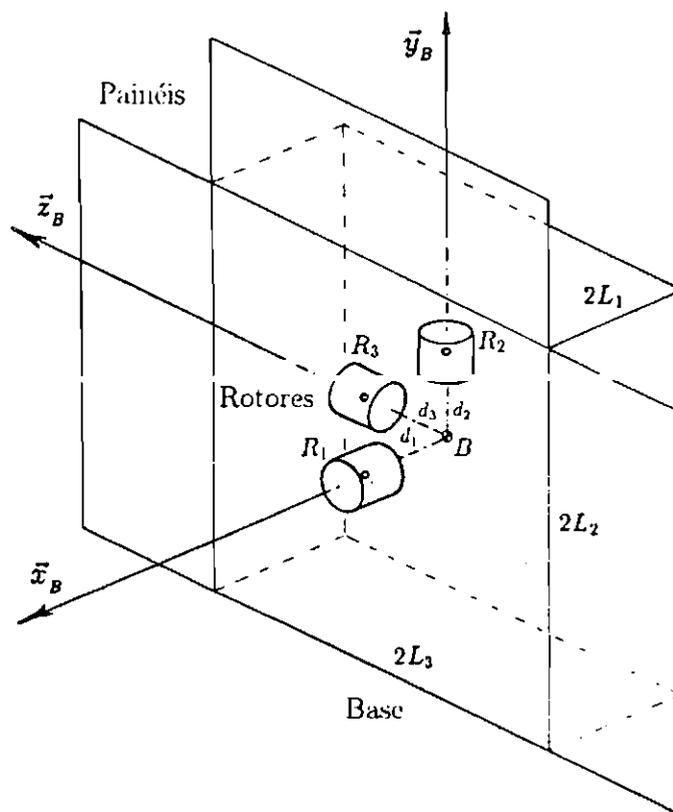


Figura 4.1: Modelo Físico Adotado – Painéis em Repouso

Na figura anterior, o referencial $\{B, \vec{x}_B, \vec{y}_B, \vec{z}_B\}$ tem a origem B colocada no centro de massa da base e os eixos paralelos às suas direções principais de inércia; d_j , $j = 1, 2, 3$ é a distância entre B e R_j , o centro de massa do j -ésimo rotor, e $2L_i$, $i = 1, 2, 3$ são a largura, a altura e o comprimento da base respectivamente.

Cada rotor, admitido balanceado tanto dinamicamente quanto estaticamente, tem como eixo de rotação um dos eixos principais de inércia da base. Durante a fase de abertura dos painéis eles permanecem inativos (velocidade de rotação nula). Nesta fase, os painéis são supostos rígidos.

Quando completamente abertos e sem deformações elásticas, os painéis ficam contidos num mesmo plano. Quando admitidos flexíveis, seu comportamento dinâmico será suposto como sendo semelhante ao de uma placa sujeita apenas ao movimento de flexão (sem torção nem compressão). Será suposta também a existência de uma pequena dissipação de energia devida ao amortecimento modal.

Supõe-se que o satélite em questão deva coletar algum tipo de informação a respeito da superfície terrestre. A intenção é representar um satélite de *sensoriamento remoto*. Assim sendo, é razoável admitir-se que sua órbita seja polar. Por simplicidade, ela também será suposta circular. A Figura (4.2), mostra o satélite estabilizado em sua órbita.

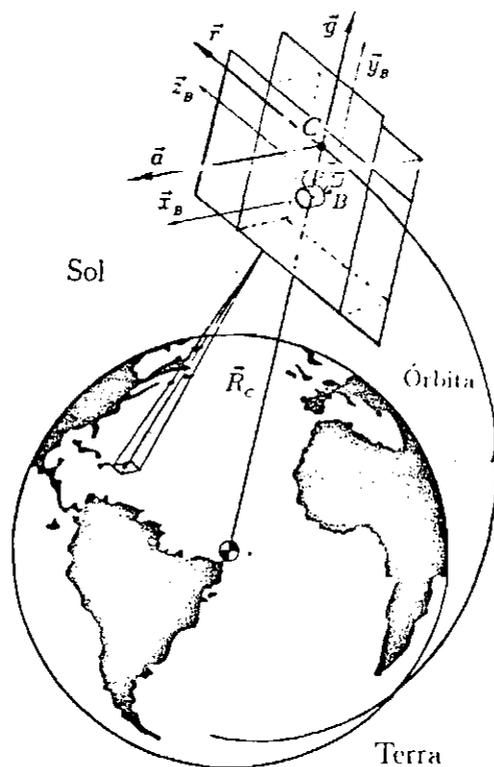


Figura 4.2: Satélite-Exemplo Estabilizado em Órbita Circular Polar

Como mostra a Figura (4.2), a estabilização do satélite-exemplo será feita de forma que a face sem painel permaneça voltada para a Terra, mantendo os três painéis exteriores à sua órbita. Esta face deverá conter o equipamento utilizado no monitoramento da superfície. Na posição nominal de atitude, os eixos $\vec{x}_B \vec{y}_B \vec{z}_B$ são paralelos aos eixos do *Sistema Orbital* $\{C, \vec{a} \vec{g} \vec{r}\}$.

Cabe lembrar que o posicionamento dos painéis e dos rotores influem na posição do centro de massa instantâneo do veículo, C , fazendo com que os referenciais $\{C, \vec{a} \vec{g} \vec{r}\}$ e $\{B, \vec{x}_B \vec{y}_B \vec{z}_B\}$, em geral, não possuam origem comum.

4.2 Sistema de Manipulação Algébrica

O *Sistema de Manipulação Algébrica - SMA*, foi desenvolvido procurando-se torná-lo o mais abrangente possível, diretamente aplicável aos satélites em órbita circular, constituídos por componentes de mesmo tipo e formato encontrados no satélite-exemplo, a saber, base - *paralelepípedo*, rotores - *cilindros* e painéis solares - *retângulos*. Seu funcionamento, de forma *bastante* simplificada, pode ser visto na Figura (4.3).

O *SMA* é formado por um conjunto de programas escritos em *Reduce* (Hearn (1987)). O *Reduce* é um poderoso manipulador simbólico com capacidade de fazer integrações e derivações, operar diretamente com matrizes e vetores, realizar substituições em expressões algébricas. além de permitir ao usuário o desenvolvimento de suas próprias funções e procedimentos.

Como pode ser observado no esquema mostrado pela Figura (4.3), é fornecida a *Seqüência de Rotações* que leva o *Sistema Orbital* $\{C, \vec{a} \vec{g} \vec{r}\}$ para o *Sistema Instantâneo* $\{C, \vec{i}_c \vec{j}_c \vec{k}_c\}$, definido na seção 2.2.1 do Capítulo 2. A esta seqüência estão associados os *Ângulos de Atitude* $\theta_i, i = 1, 2$ e 3 , normalmente denominados *Ângulos de Euler*. Estes ângulos são coordenadas generalizadas do sistema e descrevem o desvio relativo entre os *Sistemas Instantâneo* e *Orbital*.

O bloco *Descrição Física do Satélite* leva em conta a quantidade e o tipo de cada componente existente, fazendo a caracterização do veículo em estudo. Ele contém, entre outras, informações como massa (densidade), diádica principal de inércia e posição do centro de massa de cada componente. Mais adiante será mostrada uma tabela na qual encontram-se as informações utilizadas pelo *SMA* para a caracterização dos componentes do veículo.

Em última análise, os dois primeiros blocos fornecem *dados* suficientes para que, na etapa seguinte, sejam calculadas as expressões das energias cinética, potenciais gravitacional e elástica, e finalmente a expressão da *função Lagrangiana*. A partir deste ponto, podem ser obtidas:

- as equações não linearizadas da fase transitória de abertura,

- ou as equações linearizadas do movimento de corpo rígido do satélite (painéis abertos supostos rígidos),
- ou as equações linearizadas do movimento de corpo flexível do satélite (painéis abertos supostos flexíveis).

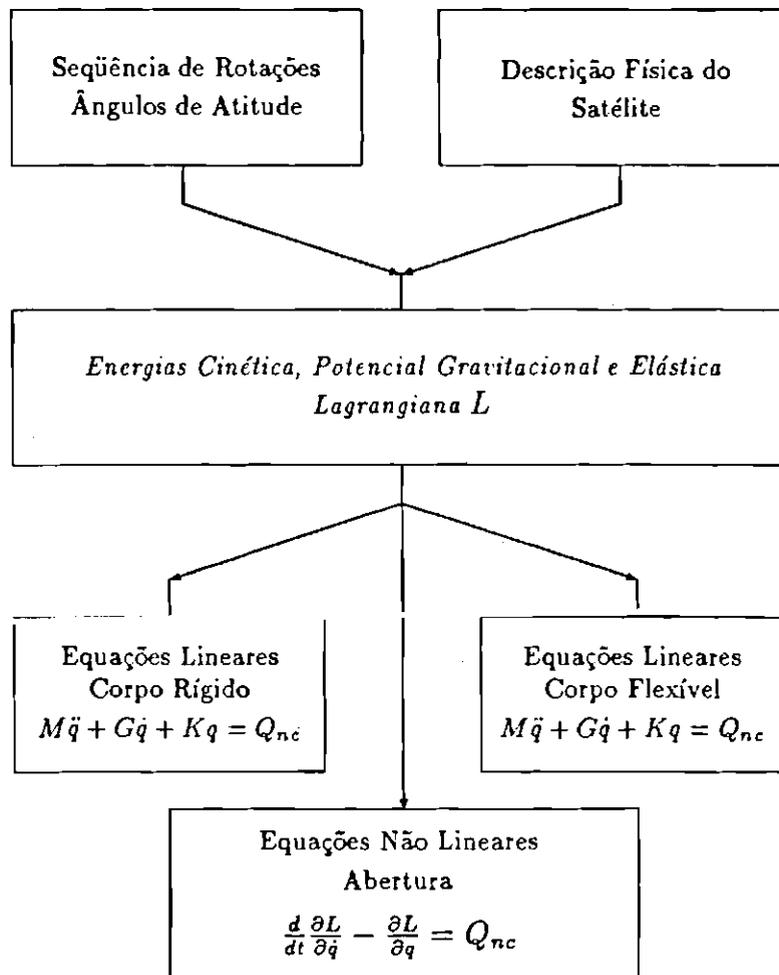


Figura 4.3: Esquema Simplificado do Funcionamento do SMA

Embora não haja restrições nem quanto ao número de apêndices (rotores e painéis) nem quanto ao seu posicionamento, na sua atual versão, o SMA não prevê a existência simultânea de painéis abertos e em desdobramento. Esta e outras possíveis generalizações são discutidas no Apêndice E, no qual também são encontrados o conjunto de programas em *Reduce* que o constitui, além de uma descrição detalhada de seu funcionamento, mostrando como os dados contidos nos dois primeiros blocos do esquema acima foram processados.

Fazendo-se uso das notações introduzidas nas expressões (2.1), Figuras (2.5) e (2.6), a Tabela (4.1) apresenta, para cada componente a informação contida no bloco *Descrição Física do Satélite* do esquema da Figura (4.3), utilizada em sua caracterização.

Tabela 4.1: Descrição Física do Satélite

Componente	Informação Utilizada Para Caracterização
<i>Base</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1. massa, diádica principal de inércia e 2. posição de seu centro de massa, B, a partir de S.
<i>Rotor</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1. massa, diádica principal de inércia, 2. matriz de rotação L_{CR_j}, 3. \vec{R}_{SR_j}, posição de seu centro de massa a partir de S, e $\vec{\omega}_{R_j}$, velocidade angular com relação à base.
<i>Painel Aberto</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1. densidade superficial, dimensões, diádica principal de inércia, 2. \vec{r}_{A_i}, posição de um elemento do painel não deformado a partir de A_i e CM_{A_i}, centro de massa, 3. \vec{e}_{A_i}, deslocamento elástico em termos de autofunções da viga <i>engastada-livre e livre-livre</i>, 4. matriz de rotação L_{CA_i}, e a posição de A_i a partir de S, \vec{R}_{SA_i}.
<i>Painel em Desdobramento</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1. densidade superficial, dimensões, diádica principal de inércia, 2. \vec{r}_{D_k} e CM_{D_k}, respectivamente a posição de um elemento do painel em desdobramento e do centro de massa, e 3. matriz de rotação L_{CD_k} e a posição de D_k a partir de S, \vec{R}_{SD_k}.

A seguir, visando a utilização do *SMA* para a obtenção das equações do movimento, serão apresentadas para o satélite-exemplo as informações contidas nos dois primeiros blocos do esquema mostrado pela Figura (4.3). Primeiro, na seção 4.3, será definida a *Seqüência de Rotações* e escolhidos os respectivos *Ângulos de Atitude*. Logo após, na seção 4.4, é desenvolvida a informação contida no bloco *Descrição Física do Satélite*, necessária à caracterização de cada um dos componentes do satélite-exemplo. Este desenvolvimento será feito seguindo-se a Tabela (4.1) como roteiro.

4.3 Seqüência de Rotações e Ângulos de Atitude

Quando foram definidos os sistemas de referência, seção 2.2.1 do Capítulo 2, foi dito que o *Sistema do Satélite Não Deformado*, $\{S, \vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s\}$, teria seus eixos colocados em direções geometricamente convenientes. No caso do satélite-exemplo adotado, levando em conta a geometria particular da base e a atitude nominal requerida, escolheu-se as direções dos eixos principais de inércia da base, \vec{x}_B, \vec{y}_B e \vec{z}_B . Isto foi feito para facilitar a orientação da instrumentação na face inferior. É interessante observar que com esta escolha, automaticamente ficam determinadas as direções do *Sistema Instantâneo* $\{C, \vec{i}_c, \vec{j}_c, \vec{k}_c\}$.

A seqüência de rotações escolhida para a transferência do *Sistema Orbital* $\{C, \vec{a}, \vec{g}, \vec{r}\}$ para o *Sistema Instantâneo* $\{C, \vec{i}_c, \vec{j}_c, \vec{k}_c\}$, representada na Figura (4.4), foi

1. rotação de um ângulo θ_1 em torno do eixo de *arfagem* \vec{a} , dada por

$$RT_a(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ 0 & -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix}.$$

Esta rotação leva o eixo de *rolamento* ao plano formado por \vec{k}_c e \vec{a} .

2. rotação de um ângulo θ_2 em torno do eixo de *guinada* \vec{g} , dada por

$$RT_g(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & -\sin(\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) \end{bmatrix}.$$

Esta rotação leva o eixo de *rolamento* a coincidir com \vec{k}_c .

3. rotação de uma ângulo θ_3 em torno do eixo de *rolamento* \vec{r} , dada por

$$RT_r(\theta_3) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) & 0 \\ -\sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta rotação leva o eixo de *arfagem* a coincidir com \vec{i}_c .

Os ângulos de atitude θ_i , $i = 1, 2$ e 3 são denominados ângulos de *arfagem*, *guinada* e *rolamento* respectivamente.

Tal escolha fornece L_{CC} , a matriz de transferência do *Sistema Orbital* para o *Sistema Instantâneo* do veículo, dada por $L_{CC} = RT_r(\theta_3)RT_g(\theta_2)RT_a(\theta_1)$,

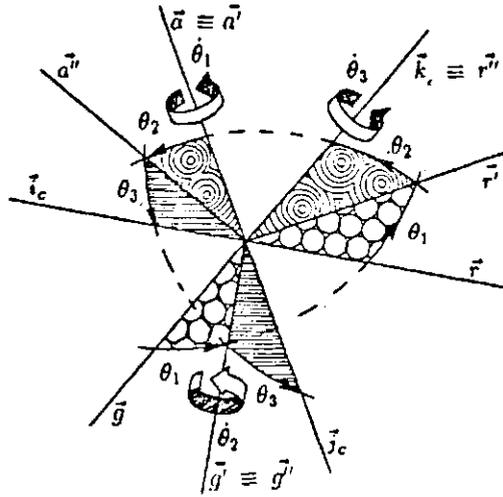


Figura 4.4: Seqüência de Rotações e Ângulos de Atitude

a qual se escreve

$$L_{CC} = \begin{bmatrix} c\theta_2 c\theta_3 & s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3 & s\theta_1 s\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 \\ -c\theta_2 s\theta_3 & c\theta_1 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & s\theta_1 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\ s\theta_2 & -s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Por simplicidade, na expressão anterior $\cos(\theta_i)$ e $\sin(\theta_i)$ foram denotados por $c\theta_i$ e $s\theta_i$, $i = 1, 2$ e 3 , respectivamente.

Os ângulos de atitude podem ser obtidos a partir da matriz (4.1), pelas relações

$$\text{arfagem} \quad : \quad \theta_1 = - \arctan\left(\frac{L_{CC}(3,2)}{L_{CC}(3,3)}\right)$$

$$\text{guinada} \quad : \quad \theta_2 = \arcsin(L_{CC}(3,1))$$

$$\text{rolamento} \quad : \quad \theta_3 = - \arctan\left(\frac{L_{CC}(2,1)}{L_{CC}(1,1)}\right).$$

Observe que quando $\sin(\theta_2) \neq \pm 1$, podemos determinar univocamente θ_1 através da primeira expressão e dos sinais de $\sin(\theta_1)$ e $\cos(\theta_1)$, colhidos de $L(3,2)$ e de $L(3,3)$, respectivamente. Para o ângulo θ_3 procede-se de forma semelhante, utilizando-se a terceira das expressões acima e os coeficientes $L(1,1)$ e $L(2,1)$.

Quando $\sin(\theta_2) = \pm 1$, surge uma indeterminação facilmente identificável na primeira e terceira expressões. Esta indeterminação para $\theta_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ é evitada tomando-se como domínio de validade para as rotações feitas

$$\begin{aligned} -\pi &< \theta_1 \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} &< \theta_2 < \frac{\pi}{2} \\ -\pi &< \theta_3 \leq \pi. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A seqüência escolhida de rotações e de ângulos de atitude, contidas no primeiro dos blocos do esquema da Figura (4.3), é utilizada na obtenção das expressões da velocidade angular absoluta do veículo, $\vec{\omega}_c$, e do vetor cossenos diretores da vertical local, \vec{L} , ambas escritas no *Sistema Instantâneo* do veículo, $\{C, \vec{i}_c, \vec{j}_c, \vec{k}_c\}$. Estes vetores, calculados abaixo, são usados pelo *SMA* na obtenção das expressões (2.4), que dão as velocidades dos elementos de massa do veículo (seção 2.2.3, Capítulo 2), e na obtenção da expressão (2.10), da energia potencial gravitacional (seção 2.4.1, Capítulo 2).

4.3.1 Obtenção da Velocidade Angular Absoluta

Respeitando as restrições (4.2), a velocidade angular absoluta do satélite com relação ao *Sistema Inercial*, $\vec{\omega}_c$, se escreve no *Sistema Instantâneo* em forma matricial

$$\vec{\omega}_c = RT_r(\theta_3)RT_g(\theta_2) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + RT_r(\theta_3) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + L_{cc} \begin{bmatrix} \omega_o \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

onde ω_o é o módulo da velocidade orbital.

O desenvolvimento de (4.3) fornece

$$\vec{\omega}_c = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 c\theta_2 c\theta_3 + \dot{\theta}_2 s\theta_3 + \omega_o c\theta_2 c\theta_3 \\ -\dot{\theta}_1 c\theta_2 s\theta_3 + \dot{\theta}_2 c\theta_3 - \omega_o c\theta_2 s\theta_3 \\ \dot{\theta}_1 s\theta_2 + \dot{\theta}_3 + \omega_o s\theta_2 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

4.3.2 Obtenção dos Cossenos Diretores da Vertical Local

Para tal seqüência de rotações e ângulos de atitude, a expressão matricial do vetor de cossenos diretores da vertical local, \vec{L} , escrito no *Sistema Instantâneo*, é dada por

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix} = L_{CC} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 \\ c\theta_1 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\ -s\theta_1 c\theta_2 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

4.4 Descrição Física do Satélite

A descrição física do veículo requer a utilização dos referenciais, $\{R_j, \vec{i}_{R_j}, \vec{j}_{R_j}, \vec{k}_{R_j}\}$, $\{A_i, \vec{i}_{A_i}, \vec{j}_{A_i}, \vec{k}_{A_i}\}$ e $\{D_k, \vec{i}_{D_k}, \vec{j}_{D_k}, \vec{k}_{D_k}\}$, respectivamente *Sistema do j-ésimo Rotor*, *Sistema do i-ésimo Painel Aberto* e *Sistema do k-ésimo Painel em Desdobramento*, definidos na seção 2.2.1 do Capítulo 2. Para o satélite-exemplo em estudo, estes sistemas foram adotados como sendo paralelos ao sistema $\{B, \vec{x}_B, \vec{y}_B, \vec{z}_B\}$, como mostra a Figura (4.5), abaixo. Conseqüentemente as matrizes de rotação L_{CR_j} , L_{CA_i} e L_{CD_k} das expressões (2.1), reduzem-se à identidade.

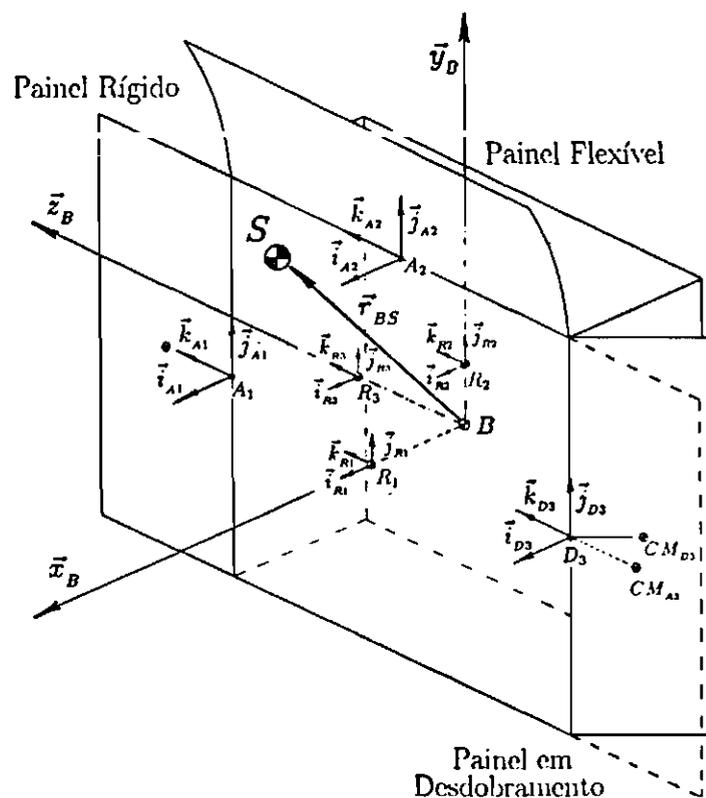


Figura 4.5: Referenciais Adotados

4.4.1 Caracterização da Base

Para a caracterização da base, o *Sistema de Manipulação Algébrica* necessita

- de sua massa, de sua diádica principal de inércia e
- da posição de seu centro de massa, B , a partir do centro de massa do veículo sem deformações, S .

Massa e Diádica Principal de Inércia

Utiliza-se como massa o símbolo m_B e como diádica principal

$$\bar{\bar{J}}_B = \begin{bmatrix} J_{BX} & 0 & 0 \\ & J_{BY} & 0 \\ & & J_{BZ} \end{bmatrix}.$$

Note que a diádica $\bar{\bar{J}}_B$, calculada com relação ao ponto B , já está escrita no referencial $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$, pois este foi tomado paralelo ao referencial $\{B, \vec{x}_B, \vec{y}_B, \vec{z}_B\}$.

Posição do Centro de Massa da Base a Partir do Centro de Massa do Veículo sem Deformações

A localização do centro de massa da base, B , a partir do centro de massa do veículo sem deformações, S , pode ser obtida utilizando-se a definição deste último. Assim sendo, observando Figura (4.6), conclui-se que

$$m\vec{r}_{BS} = r_{BS}(1)\vec{i}_C + r_{BS}(2)\vec{j}_C + r_{BS}(3)\vec{k}_C, \quad (4.6)$$

onde

$$\begin{aligned} r_{BS}(1) &= m_{R1}d_1 + L_1 \sum_{i=1}^3 m_{A_i} \\ r_{BS}(2) &= m_{R2}d_2 + m_{A_2}(L_1 + L_2) \\ r_{BS}(3) &= m_{R3}d_3 + (m_{A_1} - m_{A_3})(L_1 + L_3), \end{aligned}$$

com L_1 , L_2 e L_3 definidos na Figura (4.1). Desta forma a posição de B a partir de S é $-\vec{r}_{BS}$.

4.4.2 Caracterização dos Rotores

Para a caracterização física de cada rotor, são utilizadas

- a sua massa, a sua diádica principal de inércia,
- a matriz de rotação $L_{CR_j} : \{R_j, \vec{i}_{R_j}, \vec{j}_{R_j}, \vec{k}_{R_j}\} \rightarrow \{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$,

- a localização de seu centro de massa a partir de S , \vec{R}_{SR_j} , e sua velocidade angular com relação à base, $\vec{\omega}_{R_j}$, ambas escritas no *Sistema Instantâneo* $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$.

Massa e Diádica Principal de Inércia

Fornece-se como massa o símbolo m_{R_j} e como diádica principal

$$\bar{\bar{J}}_{R_j} = \begin{bmatrix} J_{RX_j} & 0 & 0 \\ \triangle & J_{RY_j} & 0 \\ & & J_{RZ_j} \end{bmatrix}.$$

Note que a diádica $\bar{\bar{J}}_{R_j}$, calculada com relação ao ponto R_j , já se encontra escrita no referencial $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$, pois este é paralelo ao referencial do j -ésimo rotor, $\{R_j, \vec{i}_{R_j}, \vec{j}_{R_j}, \vec{k}_{R_j}\}$; as matrizes L_{CR_j} são a identidade.

Posição do Centro de Massa de cada Rotor a Partir do Centro de Massa do Veículo sem Deformações e Velocidade Angular Relativa

A Figura (4.6) destaca os vetores \vec{R}_{SR_j} e $\vec{\omega}_{R_j}$, a posição do centro de massa do j -ésimo rotor a partir de S e a velocidade angular relativa à base.

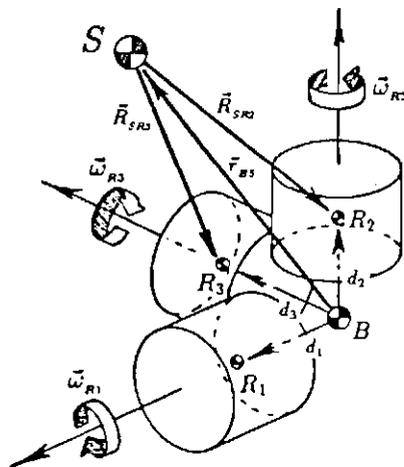


Figura 4.6: Parte interna do Satélite

Por observação da Figura (4.6) podem ser escritas, no *Sistema Instantâneo*, as seguintes expressões para \vec{R}_{SR_j} , $j = 1, 2$ e 3 ,

$$\vec{R}_{SR1} = [d_1 - r_{BS}(1)] \vec{i}_C - r_{BS}(2) \vec{j}_C - r_{BS}(3) \vec{k}_C$$

$$\vec{R}_{SR2} = -r_{BS}(1) \vec{i}_C + [d_2 - r_{BS}(2)] \vec{j}_C - r_{BS}(3) \vec{k}_C$$

$$\vec{R}_{SR3} = -r_{BS}(1) \vec{i}_C - r_{BS}(2) \vec{j}_C + [d_3 - r_{BS}(3)] \vec{k}_C$$

onde $r_{BS}(i)$, $i = 1, 2$ e 3 , são as componentes do vetor \vec{r}_{BS} , dado na expressão (4.6).

As velocidades angulares dos rotores relativas à base, no *Sistema Instantâneo*, são dadas por

$$\vec{\omega}_{R1} = \omega_{R1} \vec{i}_C, \quad \vec{\omega}_{R2} = \omega_{R2} \vec{j}_C \quad \text{e} \quad \vec{\omega}_{R3} = \omega_{R3} \vec{k}_C,$$

onde $\omega_{Rj} = \dot{\alpha}_j$, $j = 1, 2$ e 3 , com α_j as coordenadas generalizadas associadas ao movimento de rotação dos rotores.

4.4.3 Caracterização dos Painéis Abertos

Para a caracterização de cada painel aberto, o *Sistema de Manipulação Algébrica* necessita

- da sua densidade superficial, de suas dimensões, de sua diádica principal de inércia,
- de \vec{r}_{Ai} , posição de um elemento do painel sem deformações elásticas a partir de A_i , do seu centro de massa CM_{Ai} , ambos escritos no *Sistema do i -ésimo Painel Aberto* $\{A_i, \vec{i}_{Ai}, \vec{j}_{Ai}, \vec{k}_{Ai}\}$,
- do deslocamento elástico \vec{e}_{Ai} , em termos das autofunções da viga *engastada-livre e livre-livre*,
- da matriz de rotação L_{CAi} , que leva o referencial $\{A_i, \vec{i}_{Ai}, \vec{j}_{Ai}, \vec{k}_{Ai}\}$ para o referencial $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$, e da localização do ponto A_i a partir de S , \vec{R}_{SAi} .

Densidade Superficial, Dimensões e Diádica Principal de Inércia

O primeiro dos itens é suprido utilizando-se como densidade e dimensões os símbolos ρ_{Ai} e $2L_i$, $i = 1, 2, 3$, e como diádica principal de inércia

$$\bar{\bar{J}}_{Ai} = \begin{bmatrix} J_{AXi} & 0 & 0 \\ \triangle & J_{AYi} & 0 \\ & & J_{AZi} \end{bmatrix}.$$

Note que a diádica $\bar{\bar{J}}_{Ai}$, calculada a partir do centro de massa do i -ésimo painel aberto, se encontra escrita no referencial dos eixos principais de inércia do painel.

Posição de um Elemento do Painel Não Deformado e de seu Centro de Massa

A Figura (4.7) mostra os painéis deformados elasticamente, enfatizando para o painel A3 a posição do centro de massa, a posição de elementos no estado não deformado e dos deslocamentos elásticos.

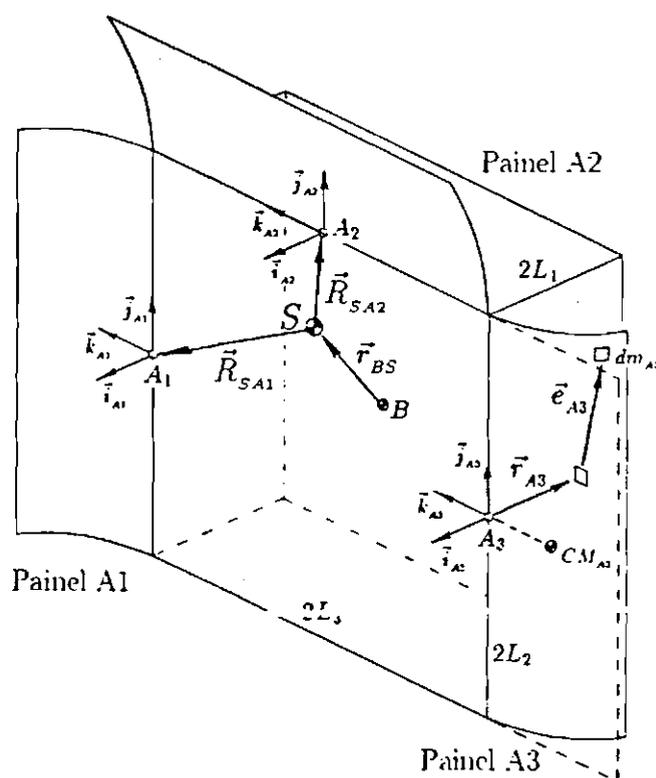


Figura 4.7: Satélite-Exemplo com Painéis Deformados Elasticamente

Denotando-se por x e y as coordenadas no sistema $\{A_i, \vec{i}_{A_i}, \vec{j}_{A_i}, \vec{k}_{A_i}\}$ de um elemento dm_{A_i} do painel não deformado nas direções longitudinal e transversal respectivamente, as expressões de \vec{r}_{A_i} e CM_{A_i} , escritas neste referencial, assumem a forma

1. Painel A_1 :

$$\begin{aligned}\vec{r}_{A_1} &= 0\vec{i}_{A_1} + y\vec{j}_{A_1} + x\vec{k}_{A_1} \\ CM_{A_1} &= (0, 0, L_1),\end{aligned}$$

onde $0 \leq x \leq 2L_1$ e $-L_2 \leq y \leq L_2$, são as coordenadas de dm_{A_1} .

2. Painel A_2 :

$$\begin{aligned}\vec{r}_{A_2} &= 0\vec{i}_{A_2} + x\vec{j}_{A_2} + y\vec{k}_{A_2} \\ CM_{A_2} &= (0, L_1, 0),\end{aligned}$$

onde $0 \leq x \leq 2L_1$ e $-L_3 \leq y \leq L_3$, são as coordenadas de dm_{A_2} .

3. Painel A_3 :

$$\begin{aligned}\vec{r}_{A_3} &= 0\vec{i}_{A_3} + y\vec{j}_{A_3} + x\vec{k}_{A_3} \\ CM_{A_3} &= (0, 0, -L_1),\end{aligned}$$

onde $-2L_1 \leq x \leq 0$ e $-L_2 \leq y \leq L_2$, são as coordenadas de dm_{A_3} .

Deslocamentos Elásticos em Termos de Autofunções

Supondo-se que os painéis solares estejam sujeitos apenas a movimentos transversais e que a *solução admitida* para cada painel seja formada apenas pelo 1º modo da viga *engastada-livre* e pelo 1º modo da viga *livre-livre* (expressões (2.14) e (2.15)), os deslocamentos elásticos, no *Sistema do i-ésimo Painel Aberto*, podem ser escritos na forma (expressão (2.13))

$$\begin{aligned}\vec{e}_{A_1}(t) &= \phi_1^1(x)\zeta_1^{11}(t)\vec{i}_{A_1} \\ \vec{e}_{A_2}(t) &= \phi_2^1(x)\zeta_2^{11}(t)\vec{i}_{A_2} \\ \vec{e}_{A_3}(t) &= \phi_3^1(x)\zeta_3^{11}(t)\vec{i}_{A_3},\end{aligned}\tag{4.7}$$

onde $\zeta_i^{11}(t)$, $i = 1, 2$ e 3 , são as novas coordenadas generalizadas associadas ao 1º modo de *flexão* e ao 1º de *torção* do *i-ésimo* painel, e as autofunções $\phi_i^1(x)$, $i = 1, 2$ e 3 , são idênticas e iguais a

$$\phi^1(x) = \cosh\left(\frac{1.875}{2L_1}x\right) - \cos\left(\frac{1.875}{2L_1}x\right) - 0.735\left[\sinh\left(\frac{1.875}{2L_1}x\right) - \sin\left(\frac{1.875}{2L_1}x\right)\right].$$

Outros modos de flexão e torção não foram tomados pois, por terem frequência mais alta, são mais difíceis de serem excitados. Isto significa que é razoável admitir que o movimento de atitude dificilmente seria por eles afetado de forma significativa.

Os deslocamentos elásticos dos painéis A_1 e A_3 serão supostos antissimétricos, como mostra a Figura (4.7). Isto é feito por que são estes os modos que afetam o movimento de atitude em *guinada*. Esta hipótese implica na redução do número de coordenadas generalizadas elásticas, pois tem-se $\zeta_3^{11}(t) = -\zeta_1^{11}(t)$.

Localização da Origem do Sistema do *i-ésimo* Painel Aberto a Partir do Centro de Massa do Veículo sem Deformações

A observação da Figura (4.7), permite que se escreva a posição de A_i , origem do referencial $\{A_i, \vec{i}_{A_i}, \vec{j}_{A_i}, \vec{k}_{A_i}\}$, a partir de S no referencial $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$, sendo esta dada por

$$\begin{aligned}\vec{R}_{SA1} &= [L_1 - r_{BS}(1)]\vec{i}_C - r_{BS}(2)\vec{j}_C + [L_3 - r_{BS}(3)]\vec{k}_C \\ \vec{R}_{SA2} &= [L_1 - r_{BS}(1)]\vec{i}_C + [L_2 - r_{BS}(2)]\vec{j}_C - r_{BS}(3)\vec{k}_C \\ \vec{R}_{SA3} &= [L_1 - r_{BS}(1)]\vec{i}_C - r_{BS}(2)\vec{j}_C - [L_3 + r_{BS}(3)]\vec{k}_C\end{aligned}$$

onde $r_{BS}(i)$, $i = 1, 2, 3$ são as componentes do vetor \vec{r}_{BS} , dado na expressão (4.6). Observe que a escolha feita para os referenciais (Figura (4.5)), faz com que L_{CAi} reduzam-se à identidade.

4.4.4 Caracterização dos Painéis em Desdobramento

No estudo da fase de abertura, será admitido que os rotores permanecem inativos ($\vec{\omega}_{R_j} = \vec{0}$) e que os painéis são rígidos. Isto se justifica, uma vez que neste período o esquema de controle fino de atitude ainda não terá sido ativado e que a alteração na atitude devida à flexibilidade dos painéis pode ser desprezada quando comparada à alteração provocada por sua abertura. Não há painéis completamente abertos nesta fase. A Figura (4.8) mostra o veículo em fase de abertura.

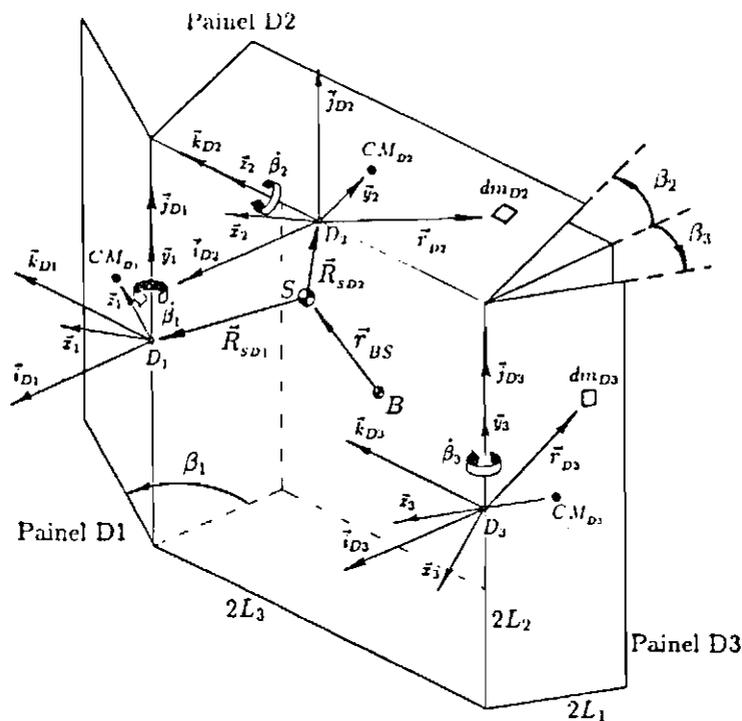


Figura 4.8: Satélite-Exemplo com Painéis em Desdobramento

Na Figura (4.8), $\beta_k, k = 1, 2, 3$, são os *ângulos de abertura*, medidos a partir da base, entre o painel e a face da base que o continha. Estes ângulos não serão considerados coordenadas generalizadas. Serão supostos conhecidos ao longo do tempo, isto é, será admitido *histórico de abertura* conhecido ($\beta_k = \beta_k(t), k = 1, 2$ e 3).

Os sistemas auxiliares $\{D_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k\}, k = 1, 2, 3$, representados na Figura (4.8), foram definidos de forma que seus eixos coincidam em direção e sentido com os dos sistemas $\{D_k, \vec{i}_{Dk}, \vec{j}_{Dk}, \vec{k}_{Dk}\}, k = 1, 2, 3$, quando o painel esta completamente aberto.

Para a caracterização de cada painel em desdobramento, são utilizadas

- a sua densidade superficial, as suas dimensões, a sua diádica principal de inércia,
- as posições de seu centro de massa e de seus elementos (Figura (4.8)), CM_{Dk} e \vec{r}_{Dk} respectivamente, e
- da matriz de rotação L_{CDk} , que leva o referencial $\{D_k, \vec{i}_{Dk}, \vec{j}_{Dk}, \vec{k}_{Dk}\}$ para o referencial $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$, e da localização do ponto D_k a partir de S ; \vec{R}_{SDk} .

Densidade Superficial, Dimensões e Diádica Principal de Inércia

Utiliza-se como densidade e dimensões os *símbolos* ρ_{Dk} e $2L_i, i = 1, 2, 3$, e como diádica principal

$$\bar{\bar{J}}_{Dk} = \begin{bmatrix} J_{DXk} & 0 & 0 \\ \triangle & J_{DYk} & 0 \\ & & J_{DZk} \end{bmatrix}.$$

A diádica $\bar{\bar{J}}_{Dk}$, calculada a partir do centro de massa do k -ésimo painel em desdobramento, se encontra escrita no referencial dos eixos principais de inércia do painel.

Posição de um Elemento do Painel em Desdobramento e de seu Centro de Massa

Denotando-se por x e y as coordenadas no referencial auxiliar $\{D_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k\}$ de um elemento dm_{Dk} do painel em desdobramento nas direções longitudinal e transversal respectivamente, as expressões de \vec{r}_{Dk} e CM_{Dk} , no referencial

$\{D_k, \vec{i}_{D_k}, \vec{j}_{D_k}, \vec{k}_{D_k}\}$, assumem a forma

1. Painel D_1 :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{D_1} &= x \sin(3\frac{\pi}{2} + \beta_1) \vec{i}_{D_1} + y \vec{j}_{D_1} + x \cos(3\frac{\pi}{2} + \beta_1) \vec{k}_{D_1} \\ CM_{D_1} &= (L_1 \sin(3\frac{\pi}{2} + \beta_1), 0, L_1 \cos(3\frac{\pi}{2} + \beta_1)), \end{aligned}$$

onde $0 \leq x \leq 2L_1$ e $-L_2 \leq y \leq L_2$.

2. Painel D_2 :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{D_2} &= x \sin(\beta_2 - \frac{\pi}{2}) \vec{i}_{D_2} + x \cos(\beta_2 - \frac{\pi}{2}) \vec{j}_{D_2} + y \vec{k}_{D_2} \\ CM_{D_2} &= (L_1 \sin(\beta_2 - \frac{\pi}{2}), L_1 \cos(\beta_2 - \frac{\pi}{2}), 0), \end{aligned}$$

onde $0 \leq x \leq 2L_1$ e $-L_3 \leq y \leq L_3$.

3. Painel D_3 :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{D_3} &= x \sin(\frac{\pi}{2} - \beta_3) \vec{i}_{D_3} + y \vec{j}_{D_3} + x \cos(\frac{\pi}{2} - \beta_3) \vec{k}_{D_3} \\ CM_{D_3} &= (-L_1 \sin(\frac{\pi}{2} - \beta_3), 0, -L_1 \cos(\frac{\pi}{2} - \beta_3)), \end{aligned}$$

onde $-2L_1 \leq x \leq 0$ e $-L_2 \leq y \leq L_2$.

Localização da Origem do Sistema do k -ésimo Painel em Desdobramento a Partir do Centro de Massa do Veículo sem Deformações

Os vetores que ligam S ao ponto $D_k, k = 1, 2, 3$, em termos das dimensões do satélite e da posição do centro de massa da base, no referencial $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$, são dados por

$$\begin{aligned} \vec{R}_{SD_1} &= [L_1 - r_{BS}(1)] \vec{i}_C - r_{BS}(2) \vec{j}_C + [L_3 - r_{BS}(3)] \vec{k}_C \\ \vec{R}_{SD_2} &= [L_1 - r_{BS}(1)] \vec{i}_C + [L_2 - r_{BS}(2)] \vec{j}_C - r_{BS}(3) \vec{k}_C \\ \vec{R}_{SD_3} &= [L_1 - r_{BS}(1)] \vec{i}_C - r_{BS}(2) \vec{j}_C - [L_3 + r_{BS}(3)] \vec{k}_C \end{aligned}$$

Cabe lembrar que as matrizes de rotação $L_{C D_k}$ reduzem-se à identidade devido a escolha feita para os sistemas de referência (Figura (4.5)).

Uma peculiaridade do estudo desenvolvido é o fato de que se pretende levar em conta o impacto que ocorre entre os painéis e a base do veículo no final da abertura. Na seção 4.5 a seguir, apresentam-se os históricos utilizados e logo após, na seção 4.6, é discutido brevemente o modelamento destes impactos.

4.5 Históricos de Abertura dos Painéis Solares

Para a dedução dos históricos de abertura, será suposto que os painéis solares são inteiriços, isto é, não são formados por diversas partes interligadas pelos extremos. Assim sendo, a descrição do movimento de abertura de cada um deles envolve apenas um grau de liberdade, como mostra a Figura (4.9).

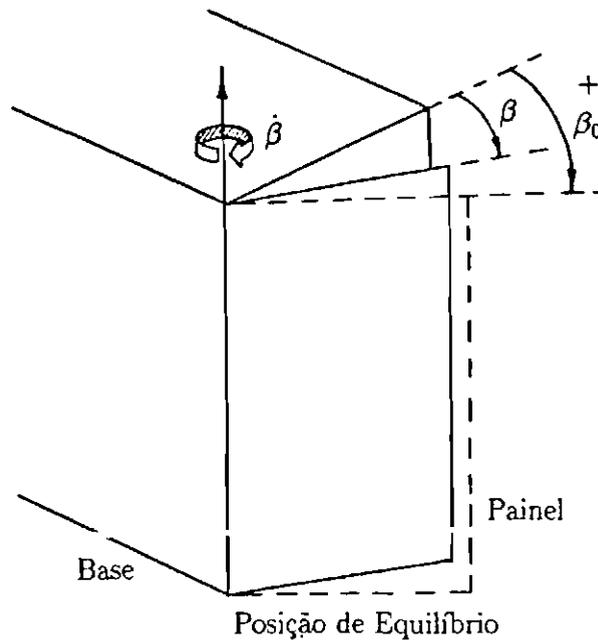


Figura 4.9: Ângulo de Abertura e Posição de Equilíbrio do Painel

Será admitido que, com relação ao eixo de rotação do painel, o momento de inércia da base seja muito maior que o momento de inércia do painel, de forma que pode ser desprezada a interferência do movimento da base no desdobramento dos painéis solares, durante a fase transitória de abertura. Nesta fase, eles serão supostos rígidos. Esta aproximação se justifica se for levado em conta que durante a sua abertura não há exigência de precisão no apontamento. Além disso, o movimento de atitude induzido pela abertura dos painéis prevalece sobre o movimento induzido por sua flexibilidade.

A evolução dos ângulos de abertura no tempo, foi obtida supondo-se que os painéis se abrem sob a ação de um mecanismo que exerce em sua base um torque do tipo

$$\Upsilon = -k(\beta - \beta_0),$$

onde k é uma constante positiva, β é o ângulo de abertura e β_0 é a posição de

equilíbrio do painel, mostrados na Figura (4.9).

Em tais condições, o histórico de abertura pode ser descrito pela equação diferencial

$$\begin{cases} \ddot{\beta}(t) + \omega_D^2 (\beta(t) - \beta_0) = 0 \\ \beta(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\beta}(t_0) = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

onde ω_D é uma função de k e da diádica de inércia do painel em torno de seu eixo de rotação. A solução da equação (4.8) é dada por

$$\beta(t) = \beta_0 [1 - \cos(\omega_D(t - t_0))]. \quad (4.9)$$

Por simplicidade, será admitido que os três painéis iniciam e terminam seu desdobramento *simultaneamente*, tendo, portanto, históricos com os mesmos parâmetros t_0 , β_0 e ω_D , apresentados na expressão (4.9).

4.6 Impactos no Final da Fase de Abertura

Dependendo da escolha feita para os parâmetros β_0 e ω_D , expressão (4.9), é possível que os painéis possuam velocidade angular diferente de zero no final do movimento de abertura, isto é,

$$\beta(t_F) = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \dot{\beta}(t_F) \neq 0,$$

onde t_F é o instante final da abertura.

Neste caso, há o aparecimento de forças impulsivas neste instante, isto é, forças com grande intensidade que agem em curtos intervalos de tempo, uma vez que seu movimento deve ser interrompido bruscamente por algum tipo de trava. Aqui, estas forças tem origem interna, não sendo provocadas por agentes do meio exterior.

Note que o modelo obtido no Capítulo 2 não prevê a existência de forças impulsivas, não podendo ser utilizado em sua presença na forma em que se encontra. Havendo painéis que completam sua abertura em instantes de tempo diferentes, se o histórico de abertura for admitido conhecido e dado por (4.9), então o modelo só poderá ser utilizado diretamente, se os parâmetros β_0 e ω_D forem tais que

$$\beta(t_F) = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \dot{\beta}(t_F) = 0, \quad (4.10)$$

o que implica numa abertura *suave* dos painéis.

Porém, este não é o caso que se deseja levar em consideração. Como foi visto na seção anterior, para o satélite-exemplo estudado, os painéis terão o mesmo instante final de abertura. Isto permitirá utilizar-se simultaneamente a metodologia apresentada no Capítulo 2 e os históricos dados por (4.9) com parâmetros β_0 e ω_D , escolhidos de forma diferente da exposta em (4.10), provocando o impacto dos painéis.

Devida a curta duração do impacto entre o painel e a base, as mudanças nas coordenadas generalizadas podem ser consideradas nulas, enquanto que as velocidades generalizadas mudam instantaneamente.

Seguindo o desenvolvimento apresentado por Thomson (1963) e Meirovitch (1970b), as equações de Lagrange (2.18) podem ser modificadas para que possam abranger as variações nas velocidades generalizadas devidas à forças internas impulsivas.

Supondo-se a inexistência de forças generalizadas com origem não conservativa, as integrais das equações de Lagrange ao longo do tempo de duração do impacto, escrevem-se

$$\int_t^{t+\epsilon} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\tau - \int_t^{t+\epsilon} \frac{\partial L}{\partial q_k} d\tau = 0, \quad (4.11)$$

para $k = 1, 2, \dots, n$.

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, o primeiro termo transforma-se no limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_t^{t+\epsilon} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \Big|_t^{t+\epsilon} = \Delta p_k,$$

onde $p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ é o *momento generalizado* e Δp_k é a diferença entre o momento generalizado *imediatamente antes e imediatamente após* o impacto.

Como o integrando da segunda parcela de (4.11) permanece finito independentemente da duração do choque (Thomson (1963), Meirovitch (1970b)), o limite para $\epsilon \rightarrow 0$ da segunda integral resulta nulo.

Assim, o procedimento a ser adotado para estudo do impacto simultâneo dos painéis no caso do satélite-exemplo, envolve a resolução das equações

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^+ - \mathbf{p}^- = \mathbf{0}, \quad (4.12)$$

onde \mathbf{p}^- e \mathbf{p}^+ são os vetores formados pelos momentos generalizados imediatamente antes e após os impactos, respectivamente. Nesta resolução as coordenadas

generalizadas não se alteram e as incógnitas são apenas as velocidades generalizadas ou antes ou após os impactos, dependendo do instante no qual se conhece completamente o estado (coordenadas e velocidades generalizadas).

Supondo-se que é conhecido o estado após os impactos e que se tem a matriz de massa do sistema, M , as velocidades generalizadas *antes* dos impactos, $\dot{\mathbf{q}}^-$, poderão ser obtidas resolvendo-se o sistema abaixo, proveniente da expressão (4.12),

$$M(t^-)\dot{\mathbf{q}}^- + \mathcal{R}(\mathbf{q}^-, t^-) = \mathbf{p}^+, \quad (4.13)$$

onde a soma $M(t^-)\dot{\mathbf{q}}^- + \mathcal{R}(\mathbf{q}^-, t^-)$ é resultado da decomposição do momento generalizado antes do choque, \mathbf{p}^- , em termos da matriz de massa e dos termos restantes, $\mathcal{R}(\mathbf{q}^-, t^-)$.

Assim, com base na equação (4.13), o vetor de velocidades generalizadas antes dos impactos é dado por

$$\dot{\mathbf{q}}^- = M^{-1}(t^-)[\mathbf{p}^+ - \mathcal{R}(\mathbf{q}^-, t^-)]. \quad (4.14)$$

Note que este tratamento só foi possível porque todos os painéis existentes no satélite-exemplo, tem abertura e impacto simultâneos. Se não fosse esse o caso, seria necessária uma análise mais profunda para se determinar as conseqüências causadas pelo impacto de um painel no movimento de abertura de um outro.

4.7 Implementação do Controle

Será admitido que o satélite é injetado em órbita de forma que, no final da abertura de seus painéis solares, ele esteja em sua posição nominal de atitude com velocidades angulares nulas, isto é, $\theta_i = 0$ e $\dot{\theta}_i = 0$, $i = 1, 2$ e 3 , ou que um procedimento de controle seja desenvolvido para levá-lo a esta posição. A análise deste procedimento será considerado fora dos objetivos deste trabalho.

No instante final da fase de abertura, os rotores tornam-se ativos atuando, sob uma lei de controle que leva em consideração o movimento elástico dos painéis, simultaneamente sobre o movimento de atitude e os deslocamentos elásticos. Será, em princípio, tolerado um pior desempenho nestes últimos. Esta preocupação deve-se ao fato de que se está interessado em estudar o problema de controle fino de atitude do satélite.

Para a implementação do esquema de controle proposto no Capítulo 3, é necessária a obtenção das equações linearizadas do satélite-exemplo, incluindo

a flexibilidade dos painéis. Isto requer apenas que seja feita uma descrição apropriada do veículo. Seguindo a Tabela (4.1) como roteiro e utilizando a caracterização apresentada nos itens anteriores para a base, rotores e painéis abertos, obtém-se imediatamente as equações desejadas com o auxílio do *Sistema de Manipulação Algébrica*.

A seguir, considerando-se que o vetor de coordenadas generalizadas tem a forma

$$\mathbf{q}^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \zeta_1^{11} \ \zeta_2^{11} \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T, \quad (4.15)$$

serão colocadas as matrizes M , G e K do sistema de 2^o ordem linearizado, dadas pela expressão (2.22), obtidas para o veículo com painéis flexíveis e com rotores ativos.

4.7.1 Matriz de Massa Generalizada

A matriz de massa obtida pelo *SMA* para o satélite-exemplo, foi

$$M = \begin{bmatrix} J_{xx}^S & -J_{xy}^S & -J_{xz}^S & 0 & 0 & J_R & 0 & 0 \\ & J_{yy}^S & -r_{yz}^S & M_{24} & M_{25} & 0 & J_R & 0 \\ & & J_{zz}^S & 0 & M_{35} & 0 & 0 & J_R \\ & & & 2 \int_{m_{A1}} (\phi^1)^2 dm_{A1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \int_{m_{A2}} (\phi^1)^2 dm_{A2} - \frac{(\int_{m_{A2}} \phi^1 dm_{A2})^2}{m} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & J_R & 0 \\ & & & & & & & J_R \\ & & & & & & & & J_R \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Simétrica

onde

$$M_{24} = 2 \int_{m_{A1}} \phi^1 \cdot x dm_{A1} + 2 L_3 \int_{m_{A1}} \phi^1 dm_{A1}$$

$$M_{25} = \int_{m_{A2}} \phi^1 \cdot y dm_{A2} - r_{BS}(3) \int_{m_{A2}} \phi^1 dm_{A2}$$

$$M_{35} = (r_{BS}(2) - L_2) \int_{m_{A2}} \phi^1 dm_{A2} - \int_{m_{A2}} \phi^1 \cdot x dm_{A2},$$

e $J_{\alpha\beta}^S$, $\alpha = x, y$ ou z e $\beta = x, y$ ou z , são as componentes da diádica de inércia do veículo em seu estado *não deformado*, e J_R são os momentos principais dos rotores, tomados todos iguais. Observe que a variação introduzida pelo movimento do centro de massa instantâneo na diádica de inércia do veículo, acabou sendo descartada pelo processo de linearização.

Os elementos M_{24} , M_{25} e M_{35} , têm origem em

$$\sum_i^2 \int_{m_{A_i}} L_{CA_i} \vec{e}_{A_i} \cdot \vec{\omega}_C \times [\vec{R}_{SA_i} + L_{CA_i} (\vec{r}_{A_i} + \vec{e}_{A_i})] dm_{A_i},$$

parcela da energia cinética proveniente do acoplamento entre as deflexões elásticas e a atitude do veículo (através de $\vec{\omega}_C$).

Como pode ser visto na expressão (4.16), a influência do movimento do centro de massa se faz presente no elemento M_{55} , associado ao deslocamento elástico do painel superior, através da parcela

$$- \frac{(\int_{m_{A_2}} \phi^1 dm_{A_2})^2}{m}, \quad (4.17)$$

vinda do termo da energia cinética $-\frac{m}{2} \|\vec{R}_{SC}\|^2$, relativo à velocidade do centro de massa instantâneo. A outra parcela de M_{55} está associada a $\int_{m_{A_2}} \|\vec{e}_{A_2}\|^2 dm_{A_2}$.

Note que não há termo semelhante ao dado pela expressão (4.17) em M_{44} , associado aos deslocamentos elásticos dos painéis laterais, devido à hipótese de vibração antissimétrica feita para estes painéis. É claro que a única parcela presente em M_{44} , provém de $\int_{m_{A_1}} \|\vec{e}_{A_1}\|^2 dm_{A_1}$.

4.7.2 Matriz Giroscópica

A matriz giroscópica para o satélite-exemplo, é dada por

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -2\omega_o J_{xz}^s & 2\omega_o J_{xz}^s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \omega_o (J_{xx}^s - J_{yy}^s - J_{zz}^s) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_o J_R \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_o J_R & 0 \\ & & & G_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & G_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Anti-simétrica

onde as grandezas G_{ii} , $i = 4, 5$, são positivas e representam a dissipação de energia vinda do amortecimento modal admitido para os painéis. Estes elementos foram acrescentados à matriz G obtida pelo SMA, posteriormente.

Os elementos G_{12} , G_{13} , G_{23} , G_{28} e G_{37} , são provenientes da parcela da energia cinética $\frac{1}{2} \bar{\omega}_c^T \bar{J}^c \bar{\omega}_c$, devida puramente ao movimento de rotação do satélite em torno de seu centro de massa.

Note que o movimento do centro de massa não afetou a matriz giroscópica e os deslocamentos elásticos só a afetaram devido ao amortecimento modal introduzido *a posteriori* no modelo.

4.7.3 Matriz de Rigidez Generalizada

A matriz de rigidez obtida pelo SMA para o satélite-exemplo, foi

$$K = \begin{bmatrix} 3\omega_0^2 (J_{zz}^s - J_{yy}^s) & -3\omega_0^2 J_{xy}^s & 3\omega_0^2 J_{xz}^s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \omega_0^2 (J_{xx}^s - J_{zz}^s) & -\omega_0^2 J_{yz}^s & K_{24} & K_{25} & 0 & 0 & 0 \\ & & 4\omega_0^2 (J_{xx}^s - J_{yy}^s) & 0 & K_{35} & 0 & 0 & 0 \\ & & & K_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & K_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Simétrica

onde

$$K_{24} = 2\omega_0^2 \left(\int_{m_{A1}} \phi^1 \cdot x \, dm_{A1} + L_3 \int_{m_{A1}} \phi^1 \, dm_{A1} \right)$$

$$K_{25} = \omega_0^2 \left[\int_{m_{A2}} \phi^1 \cdot y \, dm_{A2} - r_{BS}(3) \int_{m_{A2}} \phi^1 \, dm_{A2} \right]$$

$$K_{35} = 4\omega_0^2 \left\{ - \int_{m_{A2}} \phi^1 \cdot x \, dm_{A2} + [r_{BS}(2) - L_2] \int_{m_{A2}} \phi^1 \, dm_{A2} \right\}$$

$$K_{44} = 2\omega_0^2 \int_{m_{A1}} (\phi^1)^2 \, dm_{A1} + 4 \mathcal{D}_1 \int_{PS_1} \left(\frac{\partial \phi^1}{\partial x} \right)^2 \, dPS_1$$

$$K_{55} = \omega_0^2 \left\{ \int_{m_{A2}} (\phi^1)^2 \, dm_{A2} - \frac{(\int_{m_{A2}} \phi^1 \, dm_{A2})^2}{m} \right\} + 2 \mathcal{D}_2 \int_{PS_2} \left(\frac{\partial \phi^1}{\partial x} \right)^2 \, dPS_2.$$

Os elementos K_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$, provêm da soma do termo da energia cinética $\frac{1}{2} \bar{\omega}_c^T \bar{J}^c \bar{\omega}_c$ com o termo da energia potencial gravitacional $\frac{3\mu}{2R_c^3} \bar{L}^T \bar{J}^c \bar{L}$, responsável pelos torques gravitacionais e que exprime um acoplamento entre distribuição de massa (através da diádica de inércia) e a posição do satélite com relação à vertical local (atitude), através do vetor de cossenos diretores \bar{L} .

Os elementos K_{24} , K_{25} e K_{35} , assim como as parcelas que envolvem a velocidade orbital ω_o , nos elementos K_{44} e K_{55} , têm também sua origem na parcela da energia cinética $\frac{1}{2}\bar{\omega}_C^T \bar{J}^C \bar{\omega}_C$, evidenciando a participação tanto dos deslocamentos elásticos quanto do *movimento do centro de massa* na diádica de inércia do veículo. As outras parcelas de K_{44} e K_{55} são provenientes da energia potencial elástica.

Vale a pena observar que o elemento da diagonal M_{55} da expressão (4.16), deve ser positivo, uma vez que a matriz de massa é sempre definida positiva, e que o elemento da diagonal K_{55} da expressão (4.19), deve ser positivo ou nulo, uma vez que a matriz de rigidez é no mínimo semidefinida positiva. Assim sendo, naturalmente se coloca a questão: "*Será que estes termos não podem em algum instante assumir um valor negativo, uma vez que eles envolvem uma diferença?*". A resposta para esta pergunta é *negativa*. No Apêndice F encontra-se a demonstração da consistência do resultado obtido, validando de certa forma o "estranho" termo quadrático negativo da energia cinética (expressão (2.6)), $-\frac{m}{2} \|\bar{R}_{sc}\|^2$, proveniente do movimento do centro de massa do veículo.

4.7.4 Etapas de Controle

A partir das matrizes (4.16), (4.18) e (4.19), são construídas as matrizes A e B (expressão (3.18)) do sistema original de 1ª ordem (3.19) e, seguindo-se o procedimento descrito na seção 3.5.2 do Capítulo 3, constroem-se as matrizes A_r e B_r (expressão (3.20)) do sistema reduzido, dado pela expressão (3.21).

Na primeira etapa de implementação do controle, são escolhidos os autovalores e os autovetores em malha fechada. Esta escolha permite o cálculo da matriz de realimentação de estado para o sistema reduzido através das equações (3.11) ou (3.13), dependendo se existem ou não autovalores complexos na nova estrutura característica.

Cabe lembrar que dentre os modos pretendidos em malha fechada devem estar os modos não controláveis. Isto significa que uma pequena análise da controlabilidade do sistema é requerida. Esta análise encontra-se no Apêndice D.

Como já foi mencionado na introdução do Capítulo 3, para o sistema em estudo, é particularmente simples associar a um par (\dot{q}_i, q_i) um modo do sistema, quer em malha aberta quer em malha fechada. Para isto, basta observar a posição da componente de módulo máximo dos autovetores. Aquele que possuir na i -ésima ou $(n+i)$ -ésima posição a componente de maior valor absoluto, é o autovetor associado ao par (\dot{q}_i, q_i) .

Isto permite uma escolha peculiar de autovetores, visando o desacoplamento dinâmico entre as coordenadas. Se λ_i é o autovalor em malha fechada ao qual se quer associar a i -ésima coordenada generalizada, q_i , então ν_i , seu cor-

respondente autovetor em malha fechada, deve ser escolhido, *se possível*, de forma a possuir em sua i -ésima ou $(n + i)$ -ésima posição, a componente de maior valor absoluto.

Na segunda etapa de controle, a partir da matriz de realimentação do sistema reduzido, é construída a matriz de realimentação para o sistema original, como descrito na seção 3.5.2 do Capítulo 3, expressão (3.26).

De maneira sintetizada, a implementação do esquema de controle, requer:

1. construção das matrizes A_r e B_r do sistema reduzido dadas pela expressão (3.20);
2. verificação da controlabilidade do par (A_r, B_r) (Apêndice D);
3. inclusão dos modos não controláveis na estrutura característica pretendida em malha fechada (Apêndice D);
4. especificação dos outros modos em malha fechada (seleção dos autovalores e respectivos autovetores pretendidos – Capítulo 5);
5. cálculo da matriz de ganhos para o sistema reduzido através das expressões (3.11) ou (3.13);
6. cálculo da matriz de ganhos para o sistema original através da expressão (3.26).

No Apêndice D, encontram-se as listagens e os algoritmos das principais subrotinas empregadas na implementação do esquema de controle proposto. Neste apêndice, podem ser encontrados também maiores detalhes sobre a verificação da controlabilidade do sistema reduzido e a forma de inclusão dos modos não controláveis do sistema.

Capítulo 5

Resultados Obtidos

Neste capítulo, são mostrados os resultados numéricos obtidos para o satélite-exemplo adotado no Capítulo 4, considerando-se um certo conjunto de *dados numéricos*.

Na seção 5.1, descrevem-se através de fluxogramas os *softwares* desenvolvidos para a simulação das equações do movimento durante a fase de abertura dos painéis, incluindo-se os impactos no instante final, e para a simulação do sistema em sua configuração final em malha fechada, sob a ação do esquema de controle proposto, e em malha aberta.

Na seção 5.2, são introduzidos os *dados numéricos* utilizados para modelo físico do satélite-exemplo.

Na seção 5.3, são apresentados os resultados obtidos na simulação da fase de abertura dos painéis solares. Esta simulação foi feita com o modelo não linearizado, supondo-se que os rotores estavam inativos ($\vec{\omega}_{R_i} = 0$) e com abertura simultânea dos painéis. Nesta seção, encontram-se os gráficos da evolução da diádica de inércia ao longo do tempo e do movimento de atitude induzido pelo desdobramento dos painéis.

Na seção 5.4, faz-se a análise do movimento do satélite, com seus painéis completamente abertos e flexíveis, tanto em malha aberta quanto em malha fechada. Para o sistema original em malha aberta, são apresentados os autovalores e seu comportamento quando submetido a condições iniciais nas coordenadas elásticas. Isto foi feito com o intuito de se observar qual é a ordem de grandeza do movimento de atitude induzido por perturbações nos painéis.

Para o sistema original em malha fechada, apresentam-se as restrições físicas impostas ao problema de realocação dos autovalores e autovetores. É apresentado o critério utilizado para a seleção da estrutura característica, discutindo-se “boas” e “más” escolhas para o conjunto de autovetores em malha fechada do sistema reduzido. Logo após, são comparados os autovalores *pretendidos* e os *obtidos*

em malha fechada para sistema original. Em seguida, são dadas condições iniciais nos ângulos de atitude e nos deslocamentos elásticos, objetivando-se avaliar as respostas do sistema original em malha fechada com o uso controlador sintetizado a partir do modelo reduzido. Este caminho foi adotado para validar o esquema de controle proposto.

5.1 Softwares de Simulação e de Controle

Os programas desenvolvidos para a simulação da fase de abertura e impacto dos painéis solares, e para a simulação do sistema na fase posterior, em malha aberta e em malha fechada, foram feitos em *Fortran IV*. Estes programas, utilizaram com plenitude a força da biblioteca de rotinas matemáticas do *IMSL*, instalada no UNISYS B7900 do *Centro de Computação Eletrônica - CCE* da USP.

5.1.1 Software para a Simulação da Fase de Abertura

O fluxograma da Figura (5.1), mostra como foi feita a simulação do sistema durante a fase de abertura dos painéis solares.

Os DADOS utilizados são os parâmetros do sistema físico, como massa total, densidade dos painéis, especificação dos históricos de abertura através das constantes β_0 e ω_D (expressão (4.9)), etc.

Como não se sabe quais são as condições em que o satélite deve ser injetado em órbita para que ao final da abertura de seus painéis solares ele esteja na posição nominal de atitude, resolveu-se executar a simulação desta fase integrando-se o conjunto de equações do movimento com passo negativo (em direção ao passado). Isto pode ser feito por que se sabe em que posição deve estar o satélite e seus painéis no término da abertura, isto é,

$$\begin{cases} \dot{\theta}^+ = \theta^+ = 0, \\ \dot{\beta}^+ = 0 \quad \text{e} \quad \beta^+ = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Assim, conhecidas as condições após o impacto, através da utilização da variação do momento generalizado (seção 4.6, Capítulo 4), impondo-se que as coordenadas generalizadas permaneçam inalteradas ($\theta^- = \theta^+ = 0$), com o auxílio das expressões (4.9) e (4.14), obtém-se as condições imediatamente antes do impacto dos painéis,

$$\begin{cases} \dot{\theta}^- \neq 0 \quad \text{e} \quad \theta^- = 0, \\ \dot{\beta}^- \neq 0 \quad \text{e} \quad \beta^- = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

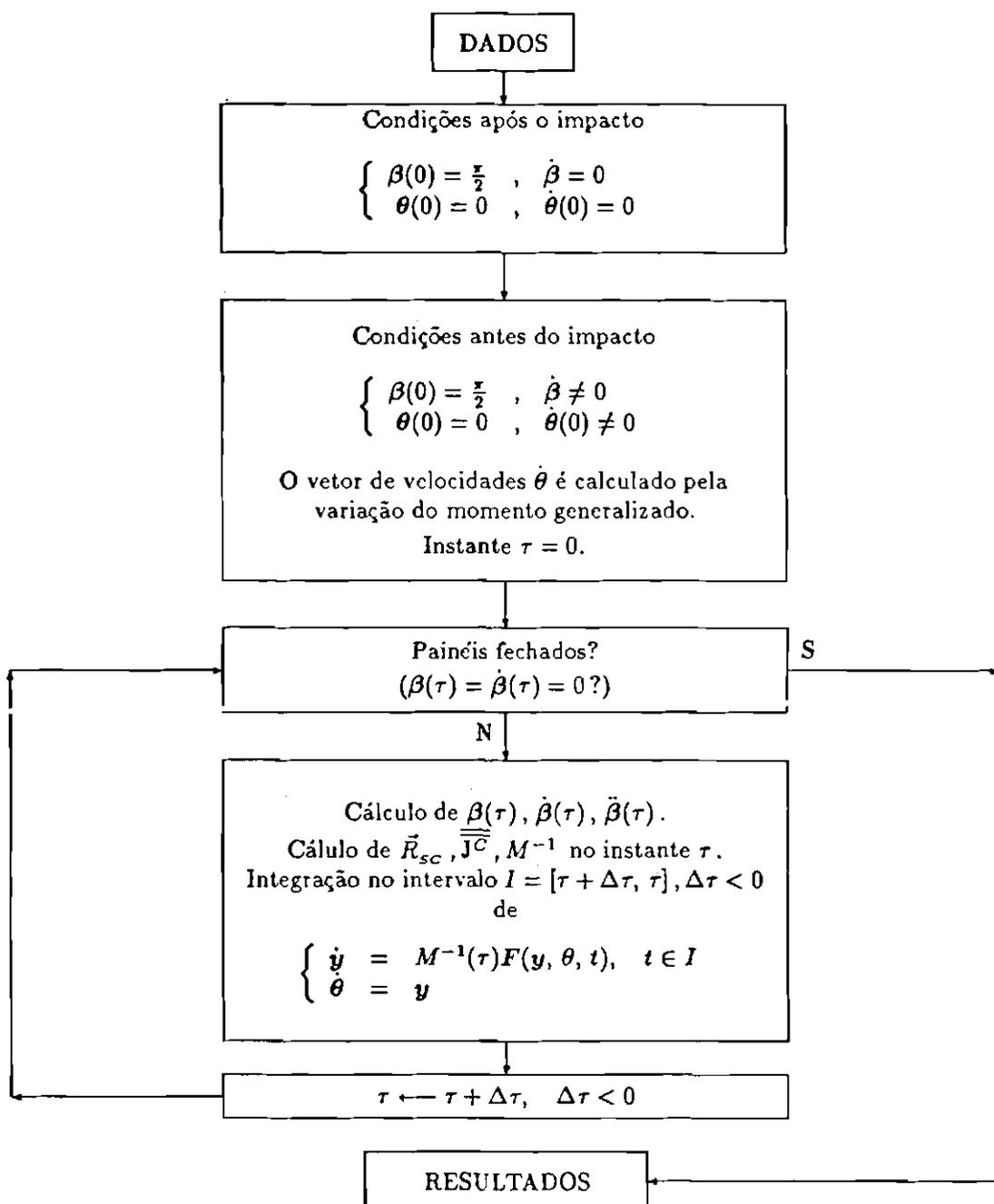


Figura 5.1: Fluxograma do Programa de Abertura

Tendo sido calculadas estas condições, integra-se o conjunto não linear de equações do movimento até que os painéis estejam completamente fechados. Mais uma vez não deve ser esquecido que foi suposto que os painéis iniciam e terminam sua abertura juntos, não havendo simultaneamente painéis completamente abertos e em desdobramento.

Com este procedimento, automaticamente no fim da simulação ficam determinadas as condições em que deve se encontrar o satélite para que, concluída a fase de abertura, ele esteja posicionado segundo a atitude nominal.

Como pode ser visto no fluxograma da Figura (5.1), são integradas as equações de 1ª ordem do movimento, obtidas utilizando-se a matriz de massa do sistema. Assim, é integrado o sistema de 6ª ordem, dado por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = M^{-1}(t)F(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, t) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t_0) \neq 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta}(t_0) = 0, \end{cases}$$

onde F é uma função não linear que depende do tempo através dos históricos de abertura, das coordenadas e velocidades generalizadas, e a matriz de massa, 3×3 , possui elementos

$$M(i, j) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\theta}_i \partial \dot{\theta}_j}, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

também dependentes do tempo através dos históricos de abertura.

Como nesta fase a diádica do veículo e a matriz de massa mudam ao longo do tempo, elas foram atualizadas juntamente com o histórico de abertura dos painéis, em cada passo de integração. A função F , foi chamada constantemente pela rotina de integração do *IMSL*.

5.1.2 Software para a Simulação do Sistema com Painéis Completamente Abertos e Flexíveis

O fluxograma apresentado na Figura (5.2), mostra como foi implementado esquema de controle e realizada a simulação em malha aberta e em malha fechada do sistema original, contendo painéis abertos e flexíveis.

Parte do conteúdo de DADOS é utilizado no bloco 1, calculando-se a diádica de inércia do sistema no seu estado não deformado, $\overline{J^s}$, das matrizes de massa generalizada, M , giroscópica, G , e de rigidez generalizada, K , respectivamente dadas pelas expressões (4.16), (4.18) e (4.19). Estas matrizes definem o sistema linear original de 2ª ordem, dado pela expressão (2.22), e são utilizadas na construção das matrizes A e B do sistema linear de 1ª ordem equivalente, utilizando-se

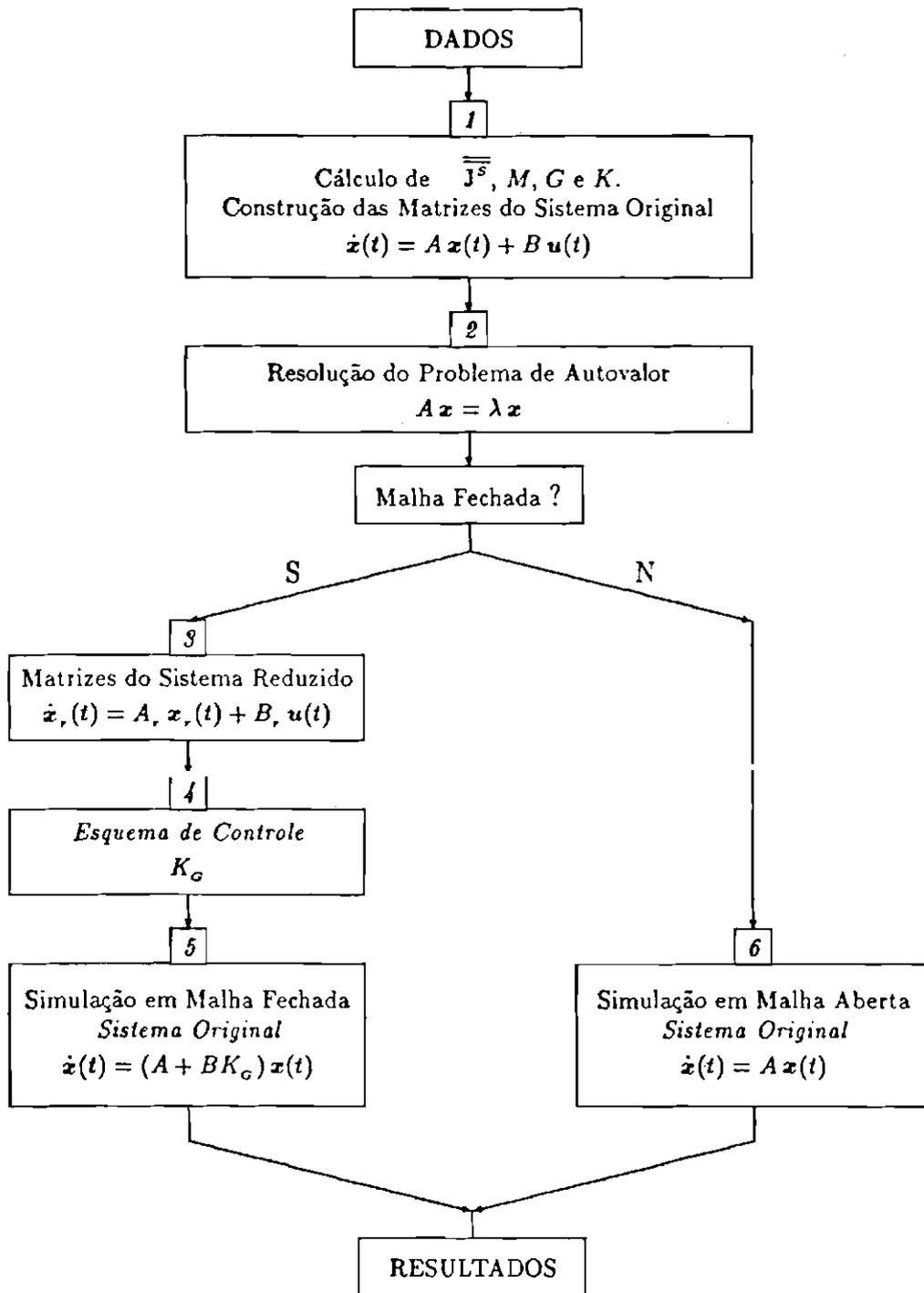


Figura 5.2: Fluxograma para Simulação e Controle do Satélite – Painéis Abertos e Flexíveis

a expressão (3.18). Este sistema é utilizado posteriormente para a realização das simulações em malha aberta e em malha fechada, tendo por objetivo a validação do esquema de controle proposto em duas etapas, no Capítulo 3.

O restante do conteúdo de DADOS é utilizado na execução do controle e na simulação: novos autovalores, quantidade de pontos gerados, instantes inicial e final, etc. .

No bloco 2, é resolvido o problema de autovalor à direita, associado ao sistema original em malha aberta. Se for requerida a simulação em malha aberta, integra-se o sistema original com as condições iniciais requeridas, num intervalo de tempo conveniente.

Se for requerida a simulação em malha fechada, no bloco 3 são construídas as matrizes A_r e B_r do sistema reduzido, expressão (3.20), e no bloco 4 é executado o esquema de controle, obtendo-se a matriz de ganhos para o sistema original, K_G .

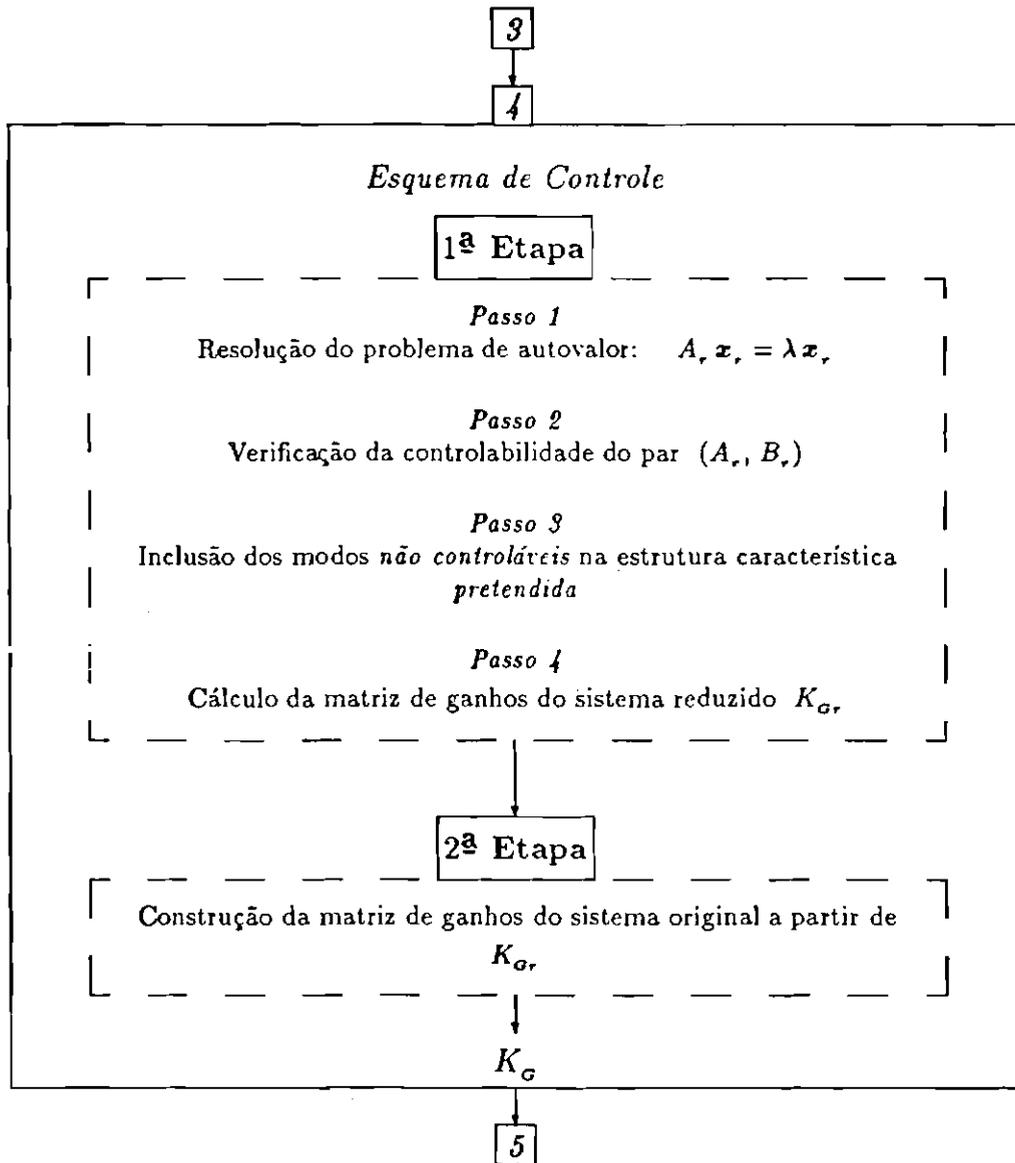
Finalmente, no bloco 5, fecha-se a malha para o sistema original e executa-se a simulação, enviando os resultados para um arquivo que posteriormente será utilizado para a geração dos gráficos.

O bloco 4, *Esquema de Controle*, pode ser melhor analisado observando-se o fluxograma da Figura (5.3), colocado na próxima página.

Observe no fluxograma que, após a construção das matrizes do sistema reduzido (bloco 3, Figura (5.2)), no *Passo 1* da 1ª Etapa do *Esquema de Controle*, resolve-se o problema de autovalor em malha aberta para o sistema reduzido.

Logo a seguir, nos *Passos 2* e *3*, é verificada a controlabilidade do par (A_r, B_r) (Porter e Crossley (1972), p. 45) e os modos não controláveis são inseridos na estrutura característica pretendida em malha fechada. Isto é feito, acrescentando-se os autovalores associados a estes modos no conjunto autoconjugado de autovalores pretendidos e os autovetores na nova matriz modal. Este procedimento é adotado uma vez que eles não podem ser modificados.

No último passo da 1ª Etapa, a matriz de ganhos para o sistema reduzido, K_{Gr} , é calculada através das expressões (3.11) ou (3.13), dependendo se não ocorrem ou ocorrem autovalores complexos em malha fechada. É crucial neste ponto, lembrar que o método utilizado requer, para cada autovalor pretendido em malha fechada, o cálculo da base dos vetores *candidatos* a autovetores em malha fechada. Como já foi mencionado, isto é feito através da aplicação do algoritmo desenvolvido por Porter e D'Azzo (1978b). Sua importância justificou a inserção no Apêndice D, da subrotina que o utiliza; neste apêndice encontra-se também a subrotina que calcula a matriz de ganhos para o sistema reduzido, a partir dos

Figura 5.3: Detalhamento do *Esquema de Controle*

subrotina que calcula a matriz de ganhos para o sistema reduzido, a partir dos autovetores pretendidos em malha fechada.

A seguir, na 2ª Etapa do *Esquema de Controle*, calcula-se a matriz de ganhos para o sistema original, dada pela expressão (3.26), utilizando-se a matriz obtida na etapa anterior para o sistema reduzido, K_{Gr} .

5.2 Dados do Modelo Físico Adotado

Os dados preliminares do atual satélite brasileiro em desenvolvimento, inspiraram muitos dos dados utilizados no satélite-exemplo. A massa total do veículo foi tomada como sendo 200 kg. As massas utilizadas para os rotores e painéis solares, encontram-se na Tabela (5.1).

Tabela 5.1: Massas dos Rotores e Painéis Solares

	Rotores	Painéis Solares		
		Painel 1	Painel 2	Painel 3
Massa (kg)	7,000	2,143	1,320	2,143

Naturalmente, a massa adotada para a base foi a diferença entre a massa total e a somatória das massas dos rotores e dos painéis solares.

As dimensões da base encontram-se na Tabela (5.2).

Tabela 5.2: Dimensões da Base

Largura (m)	Altura (m)	Comprimento (m)
$2 L_1 = 0,665$	$2 L_2 = 1,070$	$2 L_3 = 0,659$

A espessura dos painéis solares foi admitida como sendo $h = 1,315 \times 10^{-2}$ m. As outras duas dimensões de cada um deles, ficam imediatamente determinadas observando-se conteúdo da Tabela (5.2). Foram ainda admitidos para os painéis:

- *Módulo de Young*: $E = 1,3 \times 10^{10}$ Pa,
- *Coefficiente de Poisson*: $\nu = 0,3$ e
- *Densidade Superficial*: $\rho = 3,01$ kg/m².

Os três rotores foram supostos idênticos, com momentos principais de inércia iguais a $J_R = 0,016 \text{ kg.m}^2$. Seus centros de massa R_j foram tomados coincidentes com o centro de massa da base, isto é, $d_j = 0$. As diádicas de inércia utilizadas pelo SMA foram calculadas internamente pelos programas de simulação e controle como função das massas e das dimensões já fornecidas.

Por fim, a velocidade orbital do satélite foi suposta como sendo $\omega_o = 1,1 \times 10^{-3} \text{ rd/s}$, o que corresponde a uma órbita cujo semi-eixo maior vale aproximadamente $7,0 \times 10^3 \text{ km}$.

5.3 Análise da Fase de Abertura dos Painéis

Supôs-se que o tempo de abertura dos painéis é da ordem de 3 segundos. Assim, foram tomados os parâmetros

$$\begin{cases} \beta_0 = 0,8 \text{ rd} \\ \omega_D = 1,0 \frac{\text{rd}}{\text{s}}. \end{cases}$$

Com tais parâmetros, o intervalo de tempo tomado pela abertura é dado por

$$\Delta t = \frac{1}{\omega_D} \arccos\left(1 - \frac{\pi}{2\beta_0}\right).$$

Lembrando que a integração será feita com passo negativo, colocando o instante final $t_F = 0 \text{ s}$, tem-se para $t_0 = -\Delta t = -2,87 \text{ s}$.

A análise da fase abertura será feita observando-se a evolução da diádica de inércia ao longo do tempo e o movimento de atitude induzido pelo desdobramento dos painéis.

5.3.1 Evolução da Diádica de Inércia

Durante o desdobramento dos painéis, a diádica de inércia do veículo muda de

$$\overline{\overline{J}}_{t_0}^s = \begin{bmatrix} 2,42 \text{ E}+1 & 0 & 0 \\ \triangle & 1,34 \text{ E}+1 & 0 \\ & & 2,40 \text{ E}+1 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

no instante $t_0 = -2,87 \text{ s}$, para

$$\overline{\overline{J}}_{t_F}^s = \begin{bmatrix} 2,639 \text{ E}+1 & -3,700 \text{ E}-1 & 0 \\ \triangle & 1,540 \text{ E}+1 & 0 \\ & & 2,503 \text{ E}+1 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

no instante $t_f = 0$ s, onde elementos com ordem de grandeza inferior a 10^{-10} foram desprezados.

Observe que, apesar da massa dos painéis corresponder a apenas cerca de 2% da massa do satélite, as expressões (5.1) e (5.2) mostram que, quando abertos, eles introduzem uma variação de aproximadamente 9% nos momentos principais de inércia.

Os gráficos das Figuras (5.4) e (5.5), mostram de que maneira ocorre a transição da diádica da expressão (5.1) para a da expressão (5.2), à medida em que se desdobram os painéis.

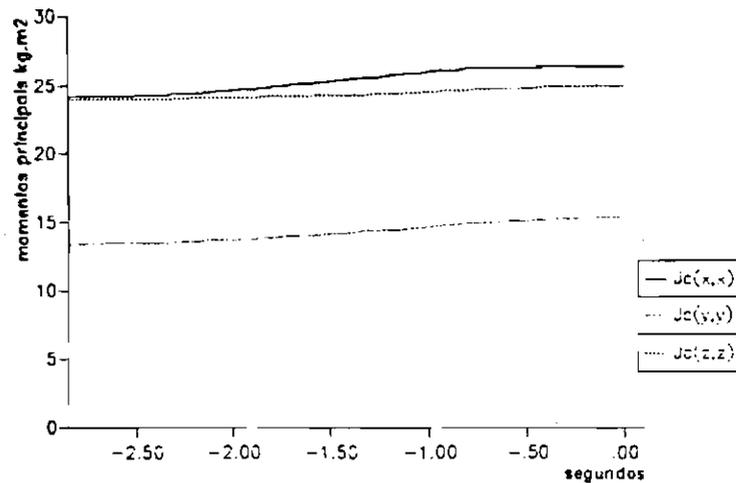


Figura 5.4: Evolução dos Momentos Principais de Inércia

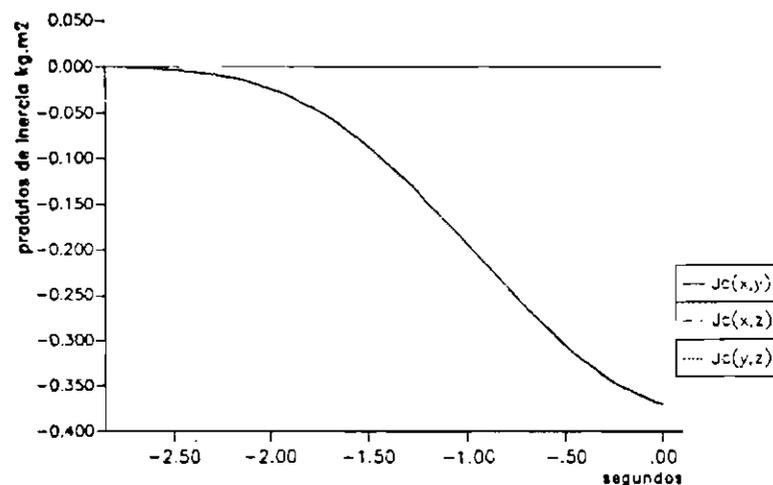


Figura 5.5: Evolução dos Produtos de Inércia

5.3.2 Movimento de Atitude Induzido pela Abertura dos Painéis

O gráfico da Figura (5.6), mostra a variação nos ângulos de atitude, induzida pela abertura dos painéis.

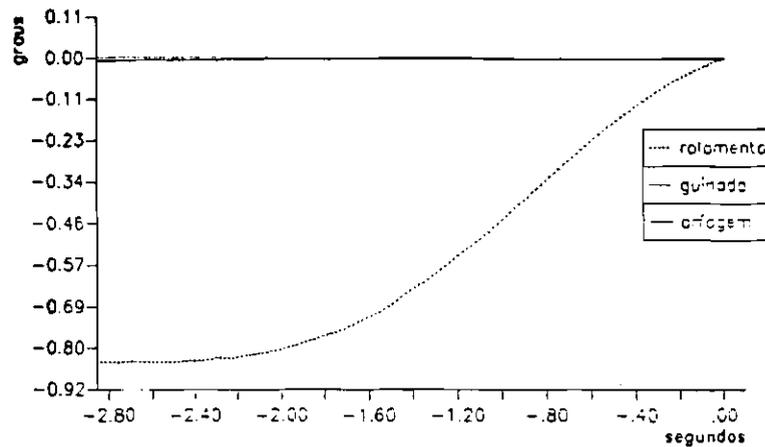


Figura 5.6: Movimento Induzido nos Ângulos de Atitude

Observa-se nitidamente que o movimento induzido no ângulo de rolamento é bem superior que nos outros ângulos de atitude. Isto é bastante razoável, uma vez que o movimento de abertura é simultâneo e os painéis laterais se abrem de forma simétrica. O movimento induzido nos ângulos de arfagem e de guinada é resultado do acoplamento dinâmico entre as equações. O acoplamento entre guinada e rolamento vem da seqüência de rotações e ângulos escolhidos, e a existência do produto de inércia não nulo $J_{xy}^s(t)$ acaba por acoplar arfagem e guinada. A Figura (5.7) apresenta separadamente os movimentos em arfagem e em guinada, devido a sua ordem de grandeza ser bem menor.

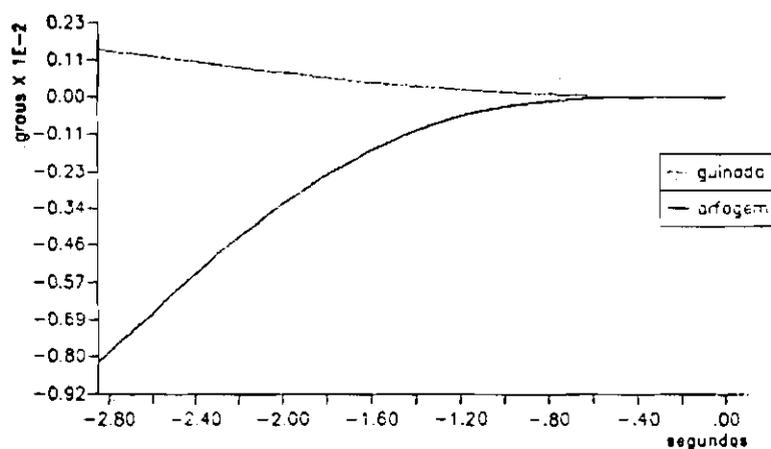


Figura 5.7: Movimento Induzido nos Ângulos de Arfagem e Guinada

Vale a pena notar que o movimento em arfagem supera o movimento em guinada, devido ao fato de que $J_{xx}^S(t)$ ser consideravelmente maior que $J_{yy}^S(t)$.

Os gráficos seguintes, Figuras (5.8) e (5.9), mostram a taxa de variação dos ângulos de atitude durante o movimento de abertura dos painéis.

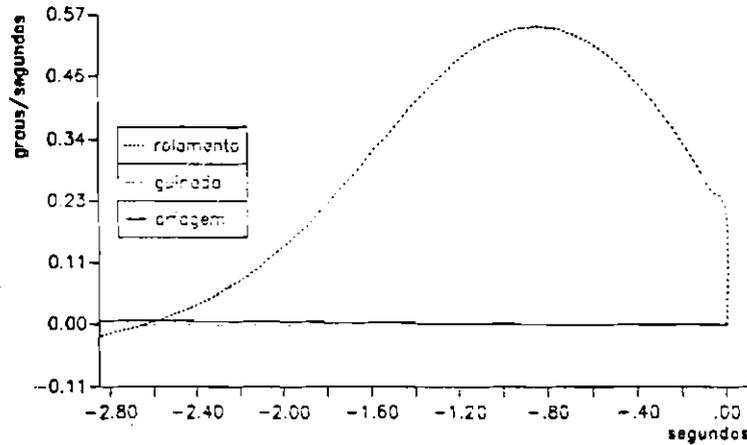


Figura 5.8: Taxa de Variação dos Ângulos de Atitude

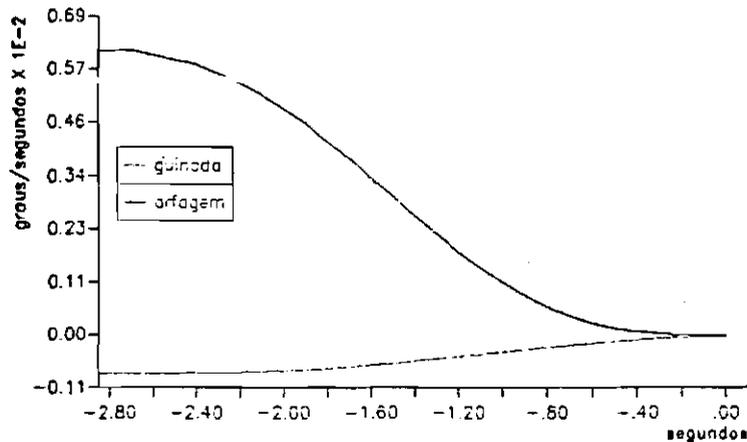


Figura 5.9: Taxa de Variação dos Ângulos de Arfagem e Guinada

Mais uma vez, como era de se esperar, a taxa de variação no ângulo de rolamento supera a dos demais. O gráfico (5.8) revela que o impacto do painel superior é o que mais influencia as taxas de variação dos ângulos de atitude. O impacto dos outros painéis não causa nenhuma influência marcante. Isto se deve mais uma vez ao movimento simétrico de abertura e ao impacto simultâneo dos painéis laterais.

Da forma como foi executada a simulação de abertura, fazendo-se a integração com o tempo decrescendo, obtém-se automaticamente as condições em que deve se encontrar o satélite para que, no término do desdobramento e choque dos painéis solares, tenha-se adquirido a posição nominal de atitude. Para os dados adotados, conclui-se que o satélite deveria ter no início da fase de abertura, vetor de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0,00 \times 10^{+0} & \text{rd/s} \\ 0,00 \times 10^{+0} & \text{rd/s} \\ -2,00 \times 10^{-2} & \text{rd/s} \\ 0,00 \times 10^{+0} & \text{rd} \\ 0,00 \times 10^{+0} & \text{rd} \\ 1,00 \times 10^{+0} & \text{rd} \end{bmatrix}.$$

Por fim, resta observar que a ordem de grandeza do movimento de rotação induzido na base pela abertura dos painéis, é pequena o suficiente para que seja considerada boa aproximação feita na seção 4.5, Capítulo 4, a qual supõe que o movimento de desdobramento dos painéis não é afetado pelo movimento da base.

5.4 Análise da Fase Posterior a de Abertura dos Painéis

Nesta seção, primeiramente serão colocadas as matrizes \bar{M} , \bar{G} e \bar{K} do sistema original de 2ª ordem (2.22), dadas pelas expressões (4.16), (4.18) e (4.19), para o conjunto de dados adotados.

Logo após, são apresentados os resultados obtidos na simulação do sistema em malha aberta e malha fechada.

5.4.1 Matrizes de Massa, Giroscópica e de Rigidez

Utilizando-se a diádica obtida no instante final de abertura, dada pela expressão (5.2), o cálculo da expressão (4.16), fornece

$$M = \begin{bmatrix} 2,639 \text{ E}+1 & -3,700 \text{ E}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_R & 0 & 0 \\ & 1,540 \text{ E}+1 & 0 & 2,727 \text{ E}+1 & 0 & 0 & 0 & J_R & 0 \\ & & 2,503 \text{ E}+1 & 0 & -1,046 \text{ E}+0 & 0 & 0 & 0 & J_R \\ & & & 4,285 \text{ E}+0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1,320 \text{ E}+0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & J_R & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & J_R & 0 & 0 \\ & & & & & & & J_R & 0 \\ & & & & & & & & J_R \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Simétrica

onde $J_R = 0,016 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, é o momento principal de inércia dos rotores.

As matrizes G e K obtidas, dadas pelas expressões (4.18) e (4.19) respectivamente, foram

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8,610E-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,633E-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,862E-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,862E-5 & 0 \\ 7,538E-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7,538E-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Anti-simétrica

e, por fim,

$$K = \begin{bmatrix} 3,911E-5 & -1,503E-6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,850E-6 & 0 & 3,692E-6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5,955E-5 & 0 & -5,666E-6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,435E+4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7,499E+3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Simétrica

Não é demais lembrar que o vetor de coordenadas generalizadas q associado a estas matrizes, é aquele da expressão (4.15).

5.4.2 Sistemas de Primeira Ordem

Considerou-se desnecessária a apresentação das matrizes obtidas do sistema linear de 1ª ordem associado ao modelo original, A e B , dado por (3.19), utilizadas na simulação em malha aberta e na validação do esquema de controle proposto. Estas matrizes podem facilmente ser obtidas através da expressão (3.18), seção 3.5.1 do Capítulo 3, utilizando-se as matrizes de massa (5.3), giroscópica (5.4) e de rigidez (5.5).

Pelas mesmas razões expostas anteriormente, não serão apresentadas as matrizes obtidas A_r e B_r do sistema reduzido, dado por (3.21), utilizado na implementação do esquema de controle. Estas matrizes são dadas pela expres-

são (3.20). No cálculo da matriz B_r foi empregada a *matriz de reações*

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.4.3 Estudo do Sistema Original em Malha Aberta

Aqui são apresentados o conjunto dos autovalores obtidos para o sistema associado ao modelo original, livre da ação dos torques de controle, e os gráficos que mostram a influência dos modos elásticos sobre os modos orbitais.

Autovalores

A Tabela (5.3) mostra cada um dos modos do sistema em estudo e seu respectivo autovalor em malha aberta.

Tabela 5.3: Autovalores em Malha Aberta – Sistema Original

Modo	Autovalores em Malha Aberta	
θ_1	$+0,000 \times 10^{+0}$	$\pm 1,217 \times 10^{-3} \cdot i$
θ_2	$+0,000 \times 10^{+0}$	$\pm 3,011 \times 10^{-4} \cdot i$
θ_3	$+0,000 \times 10^{+0}$	$\pm 1,761 \times 10^{-3} \cdot i$
ζ_1^{11}	$-9,914 \times 10^{-2}$	$\pm 8,003 \times 10^{+1} \cdot i$
ζ_2^{11}	$-2,954 \times 10^{-1}$	$\pm 7,666 \times 10^{+1} \cdot i$

Para se fazer a associação entre coordenada generalizada e os modos do sistema foi empregado o procedimento descrito na seção 4.7,4 do Capítulo 4. Não se achou necessária a inclusão dos autovalores associados aos rotores, pois esta informação não será utilizada.

Note que os três primeiros modos apresentados pela Tabela (5.3), são bastante conhecidos e dão as freqüências orbitais de oscilação em arfagem, guinada e rolamento. Os dois últimos dão respectivamente as freqüências naturais de vibração e a taxa de amortecimento modal dos painéis laterais e superior, obtidos empregando-se coeficiente de amortecimento 0,005.

As freqüências orbitais obtidas aproximam-se bastante dos valores previstos por outros modelos como os apresentados por Kaplan (1976) e por

Wertz (1978). Além de generalizar o modelo obtido, a introdução do gradiente de gravidade teve por objetivo justamente este tipo de validação dos resultados.

Além disso, os valores estimados teoricamente para as frequências dos modos elásticos, utilizando-se modelos de vigas fornecidos por Meirovitch (1967), se assemelham àqueles obtidos.

Resposta a Condições Iniciais

A simulação em malha aberta teve por objetivo verificar a influência da flexibilidade dos painéis no movimento de atitude do satélite. Ela foi feita utilizando-se o modelo original com rotores em giro livre (*torque free*), introduzindo-se condições iniciais não nulas apenas nas coordenadas elásticas. Não foram dadas condições iniciais em nenhuma de suas velocidades generalizadas.

A Figura (5.10) mostra o comportamento das coordenadas generalizadas elásticas $\zeta_1^{11}(t)$ e $\zeta_2^{11}(t)$, associadas respectivamente ao movimento antisimétrico dos painéis laterais e ao movimento do painel superior, quando a deflexão inicial na extremidade livre dos painéis A1 e A3 é de um milímetro ($\phi^1(2L_1) - \zeta_1^{11}(0) = 10^{-3}$ m).

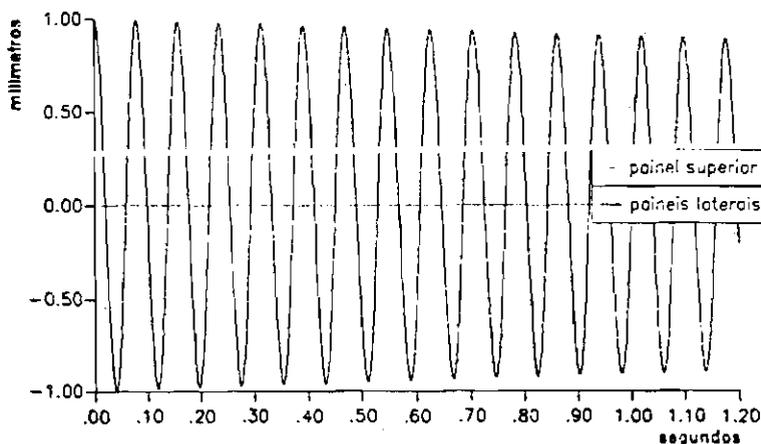


Figura 5.10: Deslocamentos Elásticos na Extremidade dos Painéis

Como pode ser notado o movimento dos painéis laterais não afeta de forma perceptível o movimento do painel superior. A Figura (5.11), mostra o movimento de atitude induzido nesta situação.

Vê-se claramente que o movimento dos painéis laterais induz movimento nos ângulos de guinada e de arfagem, com nítido acoplamento com o primeiro. Em guinada a amplitude inicial tem cerca de 1×10^{-2} graus, enquanto que em arfagem ela é muito menor. Vale a pena observar que o movimento em arfagem é

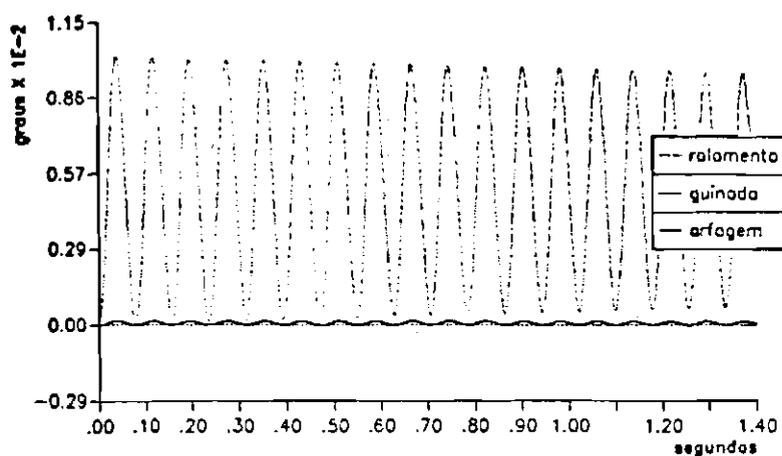


Figura 5.11: Movimento Induzido nos Ângulos de Atitude

resultado do acoplamento entre as equações de arfagem e guinada, causado pela existência do produto de inércia não nulo J_{xy}^S .

Para a ordem de grandeza considerada no gráfico da Figura (5.11), não é percebido movimento no ângulo de rolamento. Note que a amplitude do movimento dos ângulos de atitude afetados, decai ao longo do tempo devido à introdução de amortecimento modal nos painéis laterais.

A próxima figura mostra o comportamento das coordenadas elásticas $\zeta_1^{11}(t)$ e $\zeta_2^{11}(t)$, quando a extremidade livre do painel superior é submetida a um desvio de um milímetro da posição de repouso ($\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 10^{-3}$ m).

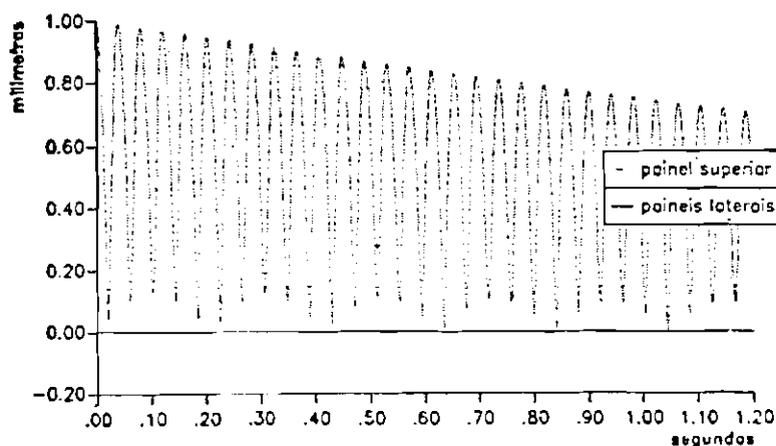


Figura 5.12: Deslocamentos Elásticos na Extremidade dos Painéis

Pela Figura (5.12) nota-se que, mais uma vez, o movimento de um painel não induz movimento perceptível no outro.

O deslocamento elástico do painel superior induz um movimento observável apenas no ângulo de rolamento como pode ser visto na Figura (5.13).

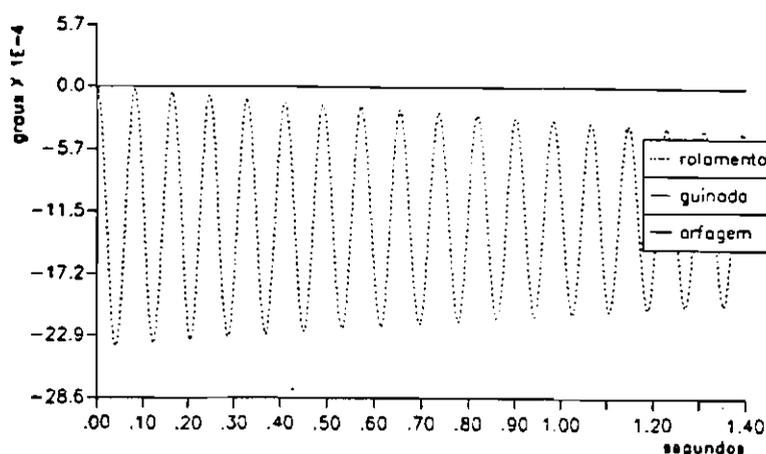


Figura 5.13: Movimento Induzido nos Ângulos de Atitude

Os resultados obtidos, dados pelas Figuras (5.11) e (5.13), mostram que o modelo consegue expressar de forma bastante clara o acoplamento existente entre o movimento dos painéis laterais e movimento em guinada, e entre o movimento do painel superior e o movimento em rolamento. Pode ser observado também, comparando-se a ordem de grandeza da amplitude de vibração do painel superior e dos painéis laterais, que a ação do gradiente de gravidade é muito maior em rolamento do que em guinada.

5.4.4 Estudo do Sistema Reduzido em Malha Fechada

Nesta seção, primeiramente verifica-se a controlabilidade do sistema reduzido utilizando-se o método descrito no Apêndice D.

Logo a seguir, tendo-se em conta as restrições físicas impostas aos atuadores do sistema original, especifica-se a dinâmica pretendida em malha fechada para o sistema reduzido, mostrando-se como foi feita a seleção dos autovalores e dos autovetores.

Finalmente, coloca-se a matriz de ganhos K_{Gr} obtida para o sistema reduzido, utilizada na construção da matriz de ganhos K_G , dada por (3.26).

Controlabilidade do Sistema Reduzido

Chamando de P a matriz modal, 10×10 , formada pelos autovetores em malha aberta do sistema reduzido, a controlabilidade de cada modo foi verificada

fazendo-se o produto $P^{-1}B_r$ (Porter e Crossley (1972, p. 45)), onde B_r é a matriz, dada pela expressão (3.20).

Utilizando-se como zero o valor 10^{-6} , concluiu-se que todos os modos do sistema linear de primeira ordem, para este conjunto de dados, são controláveis.

Maiores detalhes sobre esta verificação podem ser obtidos no Apêndice D.

Restrições Físicas e Seleção da Estrutura Característica

Apesar do sistema reduzido ser totalmente controlável para o conjunto de parâmetros físicos escolhidos, existem limitações para a velocidade de rotação dos rotores (*atuadores*) e para o torque ao qual eles estão sujeitos. Assim sendo, nem toda estrutura característica que se deseja em malha fechada pode, na prática, ser atingida.

Supondo-se que os rotores podem fornecer uma quantidade de movimento angular de 5 N.m/s no máximo, isto é,

$$J_{R_j} \omega_{R_j} = 5 \text{ N.m/s}, \quad j = 1, 2 \text{ e } 3,$$

conclui-se que sua velocidade de rotação não deve exceder o limite de 3×10^3 rpm, uma vez que foram tomados $J_{R_j} = 0,016 \text{ kg.m}^2$, $j = 1, 2 \text{ e } 3$. Quanto ao torque máximo exercido no sistema, admitiu-se que ele deva ficar ao redor de 2×10^{-1} N.m.

A escolha dos autovalores e autovetores pretendidos em malha fechada influencia decisivamente na especificação dos atuadores a serem utilizados. Naturalmente, as limitações acima restringem a liberdade de escolha da estrutura característica.

Como a forma da resposta está intimamente ligada aos autovetores do sistema (expressão (3.6)), deve-se escolhê-los com um "certo cuidado". Uma escolha "mal" feita pode acabar produzindo resultados inesperados, fazendo com que a resposta exiba acoplamentos indesejados, de forte intensidade entre os diversos modos do sistema.

Além de poder introduzir estes "fortes" acoplamentos, uma má seleção dos autovetores poderia impor um crescimento "intolerável", em alguma das coordenadas do sistema (orbitais ou elásticas), antes de fazê-las decair a zero. Poderiam ser conseqüências deste crescimento, rupturas na estrutura dos painéis e um pior apontamento do satélite durante um certo período de tempo, até o controle trazê-lo de novo para a posição de atitude nominal.

Tentando contornar estes problemas, foi feita uma escolha de autovetores visando o desacoplamento entre os modos do sistema em malha fechada.

Eurísticamente, este desacoplamento pode ser produzido se para o autovalor em malha fechada λ_i , associado às coordenadas generalizadas \dot{q}_i e q_i , for selecionado dentre todos os vetores $2n$ -dimensionais do espaço atingível gerado por $\tilde{S}_{22}(\lambda_i)$ (expressão (3.14)), um para o qual as componentes i ou $n+i$ tenham ordem de grandeza destacadamente maior do que as outras.

Fisicamente, esta escolha significa que se está tentando “forçar” o sistema em malha fechada a responder *somente* com o par (λ_i, ν_i) , descrevendo o comportamento dinâmico da i -ésima coordenada generalizada em malha fechada.

Espera-se que esta escolha seja “boa” o suficiente para que com ela, não só sejam minimizados os efeitos de *acoplamento dinâmico* em malha fechada, como também os efeitos de *crescimento inesperado* antes do decaimento até a posição nominal de atitude.

É claro que está implícito em toda a discussão apresentada acima, o fato de que se tem alguma idéia da ordem de grandeza das condições iniciais (perturbações), às quais o veículo está submetido. Estas ponderam a participação de cada um dos modos na resposta do sistema, como mostra a expressão (3.6).

Estrutura Característica Especificada

A escolha do conjunto de autovalores *pretendidos* em malha fechada foi feita através de simulações, de forma que os atuadores pudessem responder às exigências de momento angular e torque sobre eles impostas. Assim, respeitando-se as restrições físicas do problema, colocadas anteriormente, este conjunto encontra-se na Tabela (5.4).

Tabela 5.4: Autovalores Pretendidos para o Sistema Reduzido

Modo	Autovalores Pretendidos	
θ_1	$-1,492 \times 10^{-1}$	$\pm 1,492 \times 10^{-1} \cdot i$
θ_2	$-3,705 \times 10^{-2}$	$\pm 3,706 \times 10^{-2} \cdot i$
θ_3	$-2,174 \times 10^{-1}$	$\pm 2,175 \times 10^{-1} \cdot i$
ζ_1^{11}	$-4,001 \times 10^{+1}$	$\pm 6,931 \times 10^{+1} \cdot i$
ζ_2^{11}	$-3,833 \times 10^{+1}$	$\pm 6,639 \times 10^{+1} \cdot i$

Os autovetores foram escolhidos de acordo com o critério colocado anteriormente, procurando-se desacoplar dinamicamente os diversos modos do sistema. Por exemplo, os autovetores *pretendidos* selecionados para o modo associado

à arfagem, foram

$$\nu_{1,2} = \begin{bmatrix} +1,270 \times 10^{-1} & \pm 1,270 \times 10^{-1} \cdot i \\ +3,051 \times 10^{-3} & \pm 3,052 \times 10^{-3} \cdot i \\ +2,011 \times 10^{-9} & \pm 1,594 \times 10^{-5} \cdot i \\ -1,521 \times 10^{-8} & \pm 1,521 \times 10^{-8} \cdot i \\ +0,000 \times 10^{+0} & \pm 0,000 \times 10^{+0} \cdot i \\ +2,288 \times 10^{-4} & \pm 8,513 \times 10^{-1} \cdot i \\ +7,669 \times 10^{-6} & \pm 2,045 \times 10^{-2} \cdot i \\ -5,344 \times 10^{-5} & \pm 5,341 \times 10^{-5} \cdot i \\ +1,020 \times 10^{-7} & \pm 0,000 \times 10^{+0} \cdot i \\ +0,000 \times 10^{+0} & \pm 0,000 \times 10^{+0} \cdot i \end{bmatrix}.$$

Os resultados obtidos para o sistema reduzido em malha fechada, não serão apresentados nem discutidos, uma vez que os autovalores conseguidos foram *muito* próximos aos que se pretendia (coincidência até a terceira casa depois da vírgula) e obteve-se, com tal escolha de autovetores, o desacoplamento dinâmico desejado entre os diversos modos do sistema. É importante que seja salientado que apesar disso, os autovetores conseguidos foram distintos dos selecionados. Por exemplo, os autovetores obtidos para o sistema reduzido, associados à arfagem (e portanto ao autovetor selecionado acima), foram

$$\nu_{1,2} = \begin{bmatrix} +2,827 \times 10^{+2} & + 5,206 \times 10^{+2} \cdot i \\ +6,791 \times 10^{+0} & \pm 1,251 \times 10^{+1} \cdot i \\ +1,493 \times 10^{-2} & \pm 5,042 \times 10^{-2} \cdot i \\ -6,234 \times 10^{-5} & \pm 3,387 \times 10^{-5} \cdot i \\ -3,132 \times 10^{-7} & \pm 9,282 \times 10^{-8} \cdot i \\ +7,977 \times 10^{+2} & \pm 2,692 \times 10^{+2} \cdot i \\ +1,917 \times 10^{+1} & \pm 6,467 \times 10^{+1} \cdot i \\ -2,190 \times 10^{-1} & \pm 1,189 \times 10^{-1} \cdot i \\ +3,224 \times 10^{-4} & \pm 9,548 \times 10^{-5} \cdot i \\ +7,386 \times 10^{-7} & \pm 1,360 \times 10^{-6} \cdot i \end{bmatrix}.$$

Matriz de Ganhos para o Sistema Reduzido

A matriz de ganhos obtida para o sistema reduzido em malha fechada, foi

$$K_{Gr} = [K_{Gr}^1 \mid K_{Gr}^2],$$

onde

$$K_{Gr}^1 = \begin{bmatrix} +7,87 E+0 & -1,11 E-1 & -4,08 E-4 & -2,73 E-5 & +6,04 E-5 \\ -3,44 E-2 & +1,05 E+0 & +1,77 E-3 & -1,64 E+3 & +4,90 E-4 \\ +1,57 E-2 & -6,11 E-1 & +1,19 E+1 & -2,94 E-2 & +2,42 E+3 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

e

$$K_{Gr}^2 = \begin{bmatrix} +1,18 E+0 & -1,65 E-2 & +8,06 E-5 & +6,02 E-2 & -3,60 E-2 \\ -2,33 E-3 & +3,88 E-2 & -9,21 E-4 & +1,12 E+4 & -1,37 E+0 \\ +9,98 E-4 & -3,77 E-2 & +2,58 E+0 & +6,92 E+1 & +1,71 E+4 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

a partir das quais obtêm-se a matriz de ganhos K_G para o sistema original, dada pela expressão (3.26).

5.4.5 Estudo do Sistema Original em Malha Fechada

Visando validar o esquema de controle e verificar seu desempenho, nesta seção são apresentados os autovalores *conseguidos* em malha fechada para o sistema original e a resposta deste sistema a condições iniciais. Terá especial importância a verificação dos efeitos giroscópicos produzidos pelos rotores.

Autovalores

Os autovalores *pretendidos* e os *conseguidos* para o sistema original em malha fechada são encontrados na Tabela (5.5).

Tabela 5.5: Autovalores Pretendidos e Conseguidos para o Sistema Original

Modo	Autovalores Pretendidos		Autovalores Conseguidos	
θ_1	$-1,492 \times 10^{-1}$	$\pm 1,492 \times 10^{-1} \cdot i$	$-1,436 \times 10^{-1}$	$\pm 1,491 \times 10^{-1} \cdot i$
θ_2	$-3,705 \times 10^{-2}$	$\pm 3,706 \times 10^{-2} \cdot i$	$-3,337 \times 10^{-2}$	$\pm 3,685 \times 10^{-2} \cdot i$
θ_3	$-2,174 \times 10^{-1}$	$\pm 2,175 \times 10^{-1} \cdot i$	$-2,242 \times 10^{-1}$	$\pm 2,170 \times 10^{-1} \cdot i$
ζ_1^{11}	$-4,001 \times 10^{+1}$	$\pm 6,931 \times 10^{+1} \cdot i$	$-2,550 \times 10^{+1}$	$\pm 7,352 \times 10^{+1} \cdot i$
ζ_2^{11}	$-3,833 \times 10^{+1}$	$\pm 6,639 \times 10^{+1} \cdot i$	$-7,247 \times 10^{+0}$	$\pm 7,692 \times 10^{+1} \cdot i$

A Figura (5.14) abaixo, mostra estes valores no plano complexo.

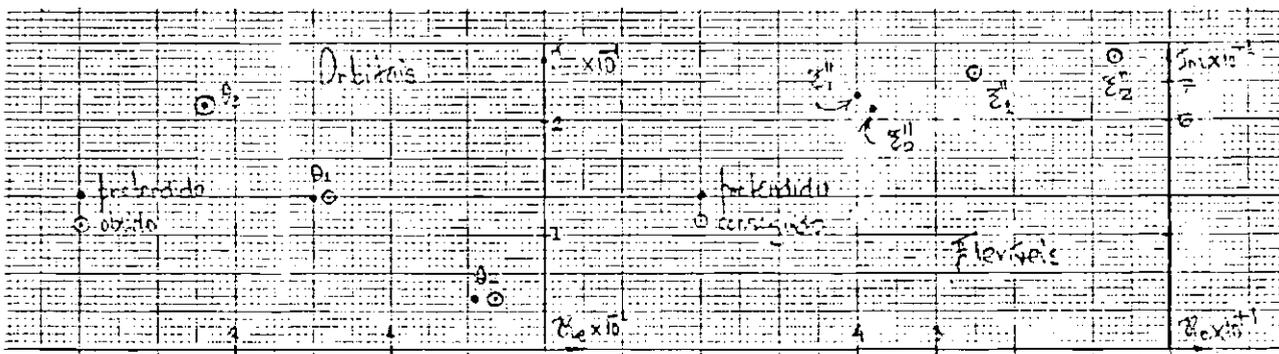


Figura 5.14: Posição dos Autovalores Pretendidos e Conseguidos no Plano Gaussiano

Apesar dos modos orbitais e flexíveis serem controláveis, a observação da Tabela (5.5) mostra que se tem uma autoridade maior sobre os modos orbitais. Apesar disso, consegue-se aumentar consideravelmente o amortecimento dos deslocamentos elásticos dos painéis.

Resposta a Condições Iniciais

Para cada condição inicial, a resposta do sistema original em malha fechada será mostrada através de seqüências de cinco gráficos: (1) Resposta dos Ângulos de Atitude, (2) Resposta das Taxas de Variação dos Ângulos de Atitude, (3) Resposta dos Deslocamentos Elásticos, (4) Rotação Exigida dos Rotores e (5) Torques Atuantes no Satélite.

Cada condição inicial excitará uma coordenada por vez. A *Resposta dos Deslocamentos Elásticos* se refere aos deslocamentos da extremidade dos painéis solares laterais e superior, respectivamente $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(t)$ e $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(t)$.

Acreditou-se ser conveniente trabalhar-se em *graus* e *graus/segundo* como unidades de medida para os deslocamentos angulares e taxas de variação; devido a ordem de grandeza dos deslocamentos elásticos, eles foram colocados em *milímetros*. Finalmente, a exigências de velocidade e torque impostas aos rotores, foram medidas em *rotações por minuto* – rpm e *Newtons.metro* – N.m, respectivamente.

Seqüência 01: Condição Inicial no Ângulo de Arfagem

As Figuras (5.15) e (5.16) a seguir, mostram a resposta dos ângulos de atitude e sua taxa de variação ao longo do tempo.

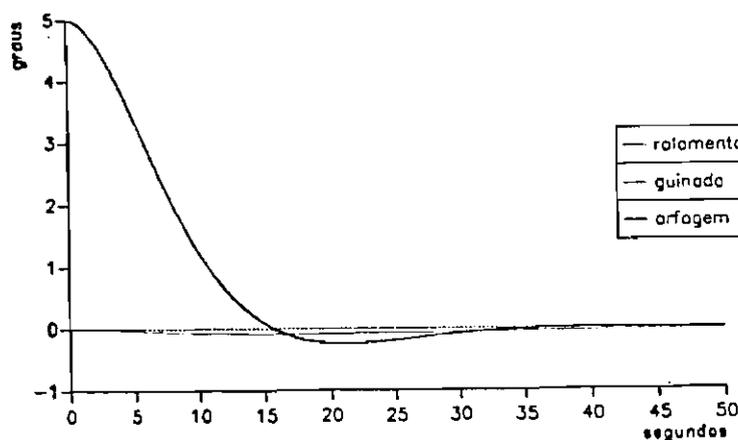


Figura 5.15: Ângulos de Atitude. $\theta_1(0) = 5^\circ$

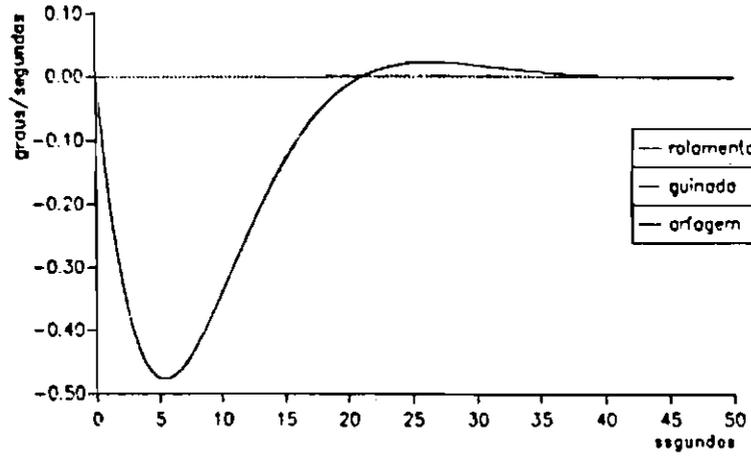


Figura 5.16: Taxas de Variação dos Ângulos de Atitude. $\theta_1(0) = 5^\circ$

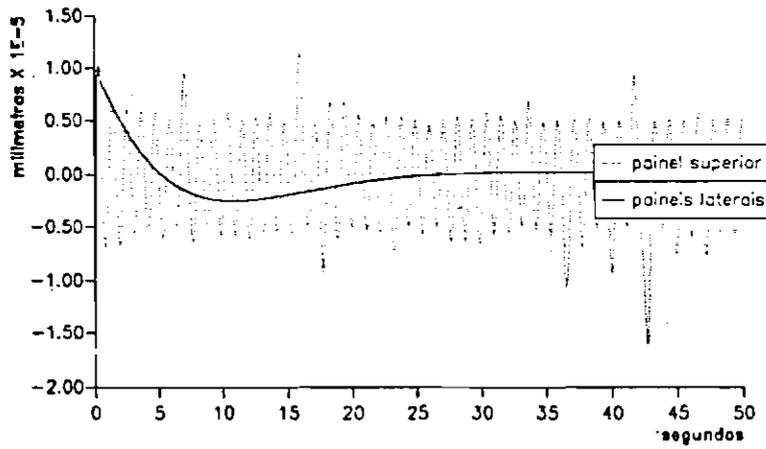


Figura 5.17: Deslocamentos Elásticos. $\theta_1(0) = 5^\circ$

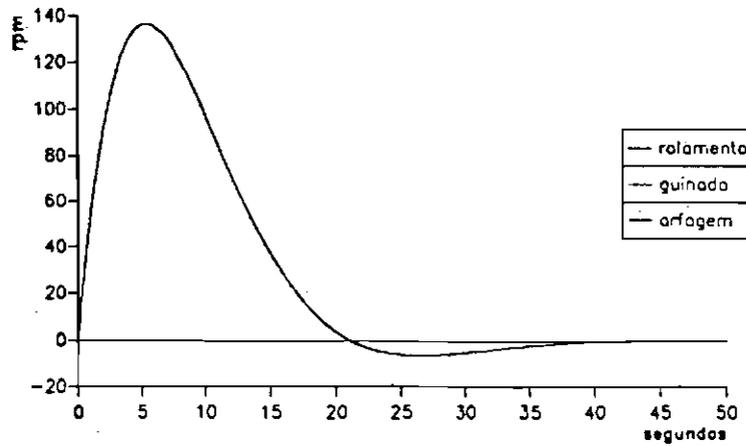


Figura 5.18: Rotação Exigida dos Rotores. $\theta_1(0) = 5^\circ$

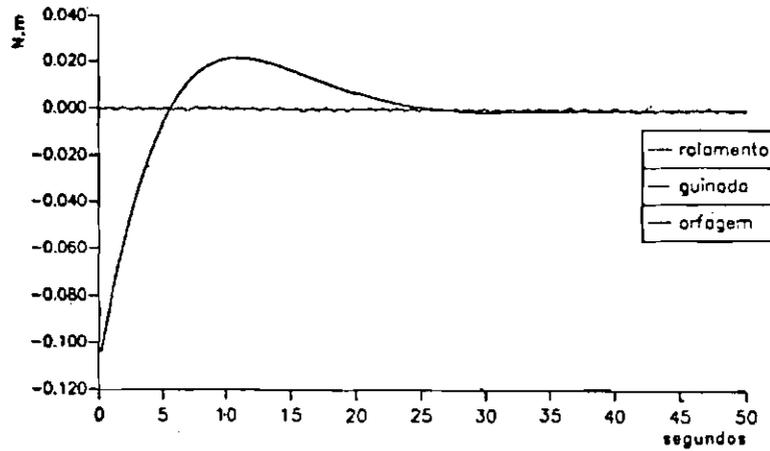


Figura 5.19: Torques Atuantes no Satélite. $\theta_1(0) = 5^\circ$

É interessante observar que as Figuras (5.18) e (5.19), mostram que o controle em arfagem exige prioritariamente a atuação do rotor em arfagem, permanecendo a velocidade de rotação e o torque requeridos, dentro dos limites colocados. Os deslocamentos elásticos dos painéis solares, Figura (5.17), permanecem restritos a valores insignificantes, havendo atuação do controle sobre os painéis laterais. O movimento oscilatório verificado no painel superior surge da interação com o rotor em rolamento. Isto pode ser confirmado pela Figura (5.20), que mostra separadamente as rotações nos rotores em guinada e rolamento.

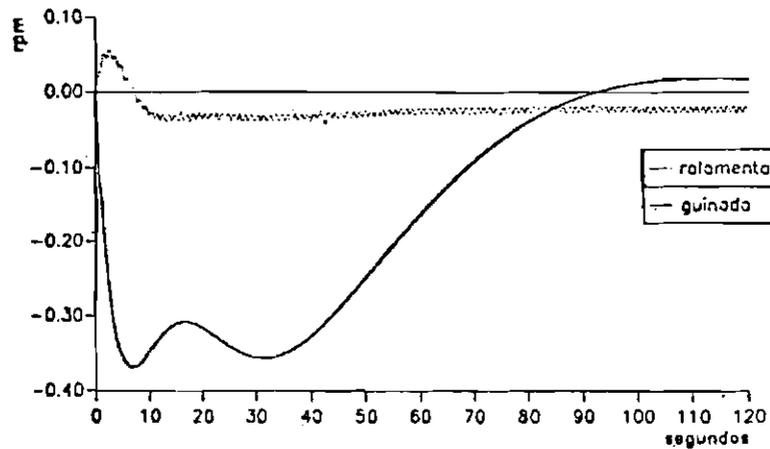


Figura 5.20: Rotação dos Rotores em Guinada e Rolamento. $\theta_1(0) = 5^\circ$

Observando-se o gráfico dado pela Figura (5.20), nota-se que o rotor em rolamento acelera e desacelera de forma periódica, resultado da interação com o painel superior.

Seqüência 02: Condição Inicial no Ângulo de Guinada

A Figura (5.21) a seguir, mostra a resposta dos ângulos de atitude quando é dada condição inicial não nula no ângulo de guinada.

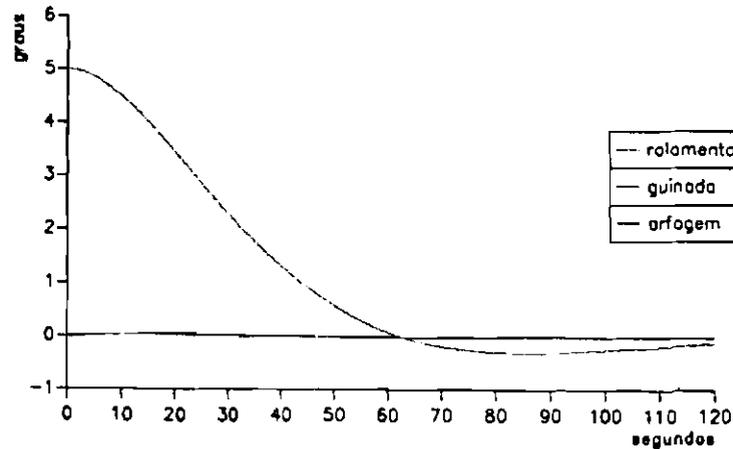


Figura 5.21: Ângulos de Atitude. $\theta_2(0) = 5^\circ$

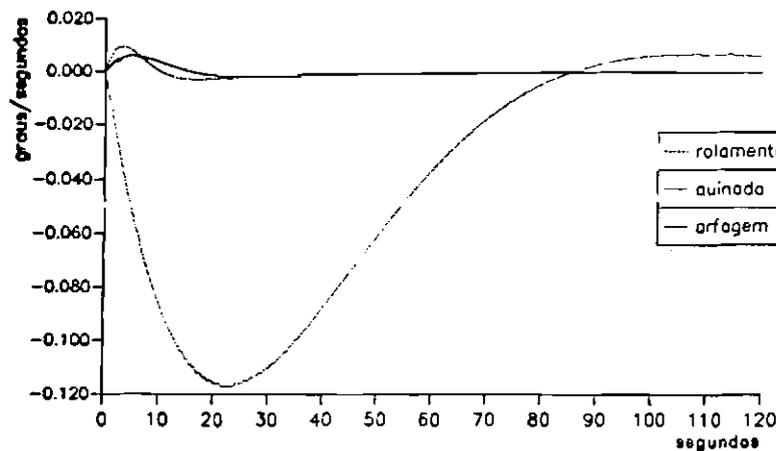


Figura 5.22: Taxas de Variação dos Ângulos de Atitude. $\theta_2(0) = 5^\circ$

Neste caso, há um pequeno acoplamento entre os modos orbitais, indetectável através da Figura (5.22). Este acoplamento também pode ser notado pelas Figuras (5.24) e (5.25). Por observação da Figura (5.23) (próxima página), conclui-se que o controle atua nos painéis laterais e que a amplitude do movimento flexível nas extremidades dos painéis também neste caso é desprezável. Os limites de rotação dos rotores e de torque foram mais uma vez respeitados. Verifica-se ainda o movimento oscilatório do painel superior. Desta vez, a interação entre o rotor em rolamento e o painel superior é percebido através dos torques exercidos no satélite em rolamento, Figura (5.25).

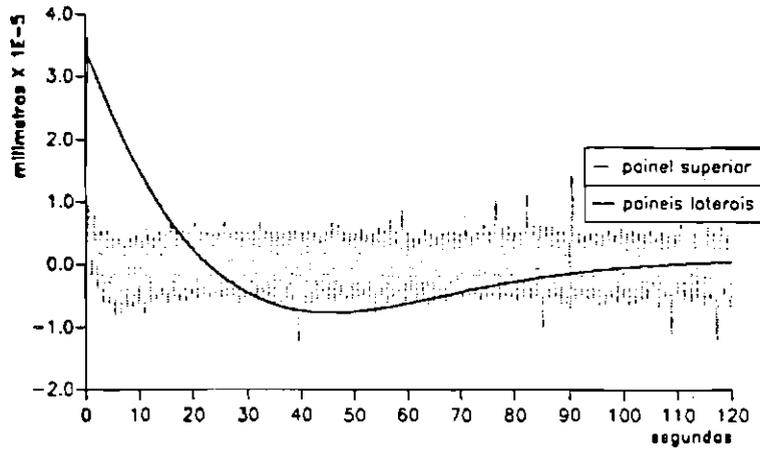


Figura 5.23: Deslocamentos Elásticos. $\theta_2(0) = 5^\circ$

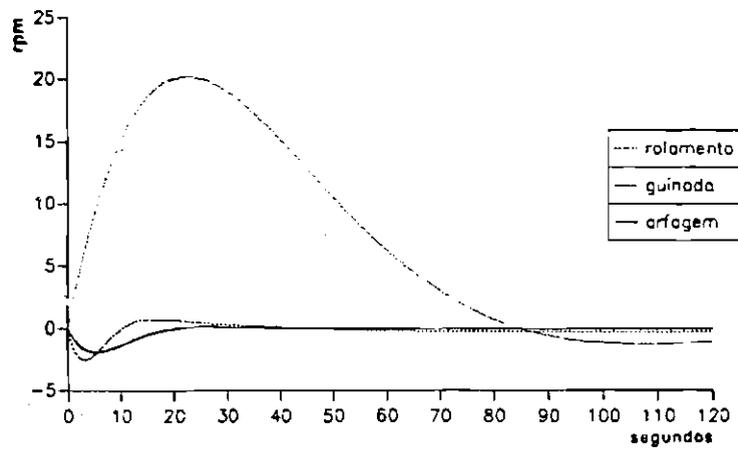


Figura 5.24: Rotação Exigida dos Rotores. $\theta_2(0) = 5^\circ$

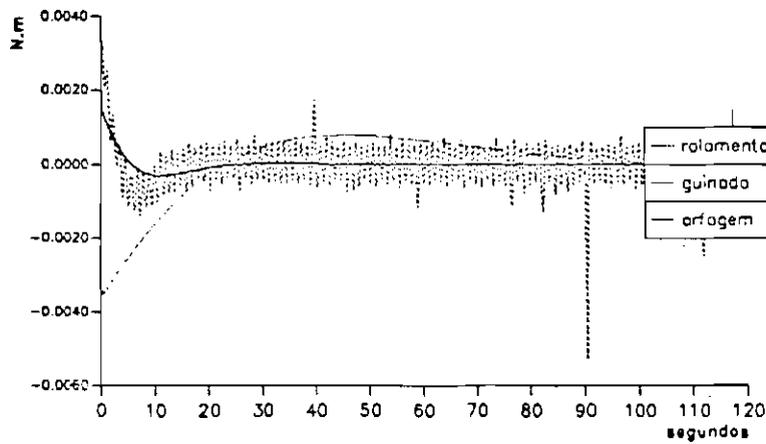


Figura 5.25: Torques Atuantes no Satélite. $\theta_2(0) = 5^\circ$

Seqüência 03: Condição Inicial no Ângulo de Rolamento

As Figuras (5.26) e (5.27) a seguir, mostram a resposta dos ângulos de atitude e sua taxa de variação ao longo do tempo quando o sistema está sujeito a uma condição inicial não nula no ângulo de rolamento.

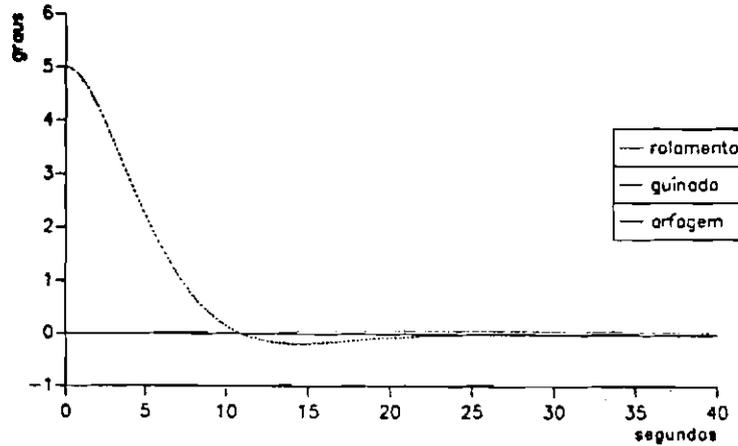


Figura 5.26: Ângulos de Atitude. $\theta_3(0) = 5^\circ$

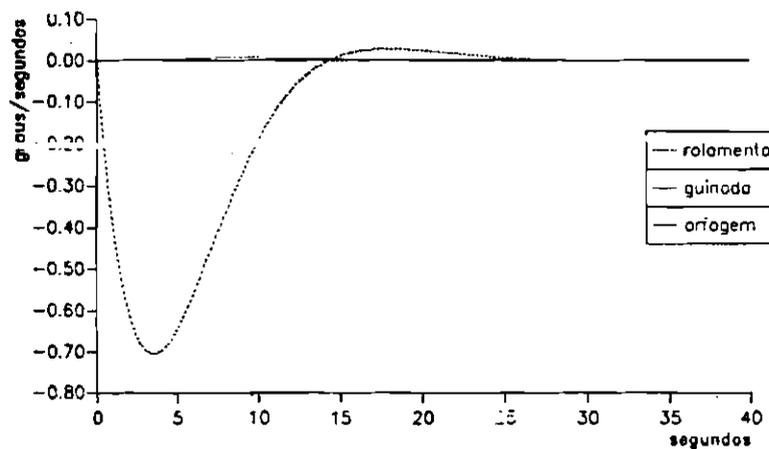


Figura 5.27: Taxas de Variação dos Ângulos de Atitude. $\theta_3(0) = 5^\circ$

Note que, perturbações no ângulo de rolamento não propiciam o aparecimento de qualquer espécie de acoplamento perceptível entre as variáveis do sistema. O movimento do painel superior (Figura (5.28)) é controlado, decaindo em cerca de 15 s, permanecendo um movimento oscilatório residual não amortecido de amplitude desprezável. A Figura (5.30) mostra uma certa exigência na capacidade de acelerar e desacelerar rapidamente o rotor em rolamento. Mais uma vez, tanto o torque quanto a velocidade de rotação do rotor estão dentro de limites aceitáveis.

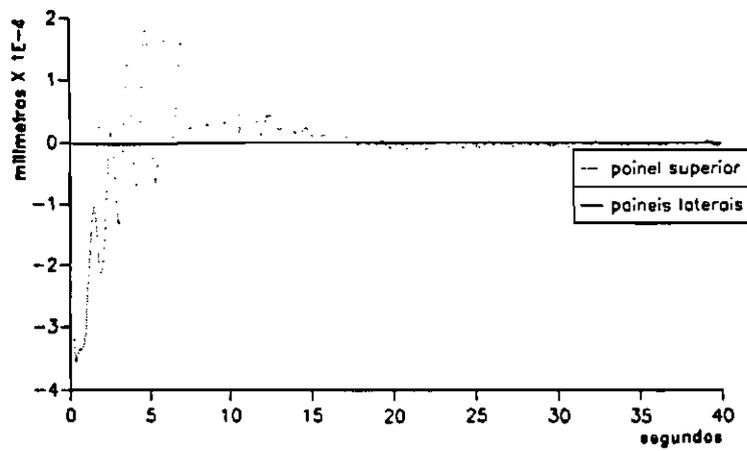


Figura 5.28: Deslocamentos Elásticos. $\theta_3(0) = 5^\circ$

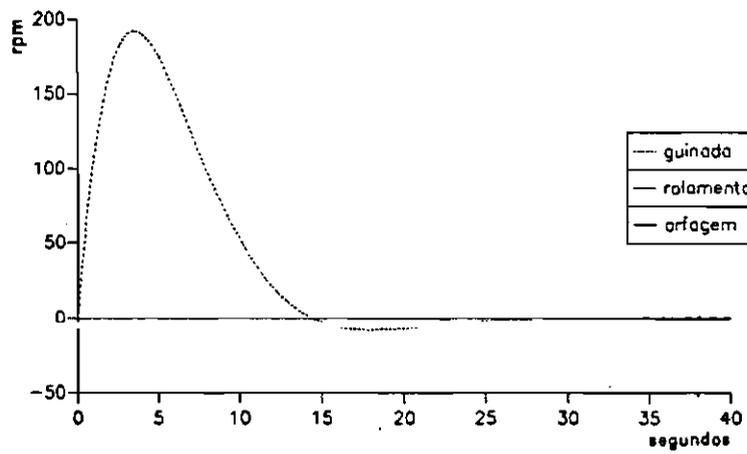


Figura 5.29: Rotação Exigida dos Rotores. $\theta_3(0) = 5^\circ$

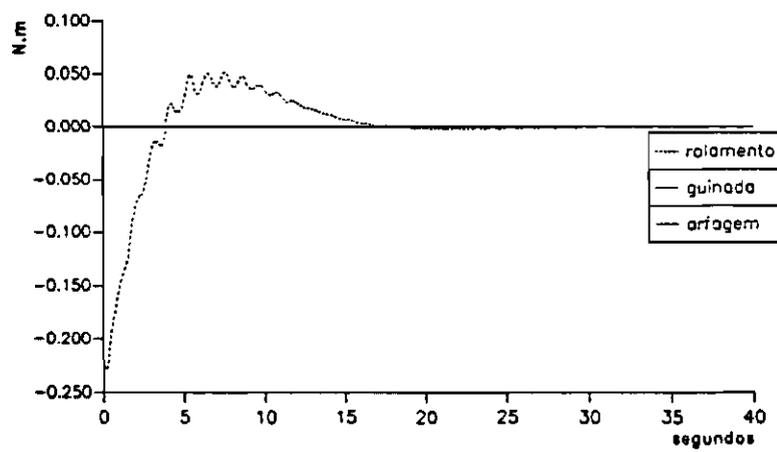


Figura 5.30: Torques Atuantes no Satélite. $\theta_3(0) = 5^\circ$

Seqüência 04: Condição Inicial na Extremidade dos Painéis Laterais

A próxima seqüência mostra o efeito de perturbações nos painéis laterais. Estes foram submetidos a uma condição inicial de $0,5 \times 10^{-2}$ mm em sua extremidade livre ($\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(0) = 0,5 \times 10^{-2}$ mm).

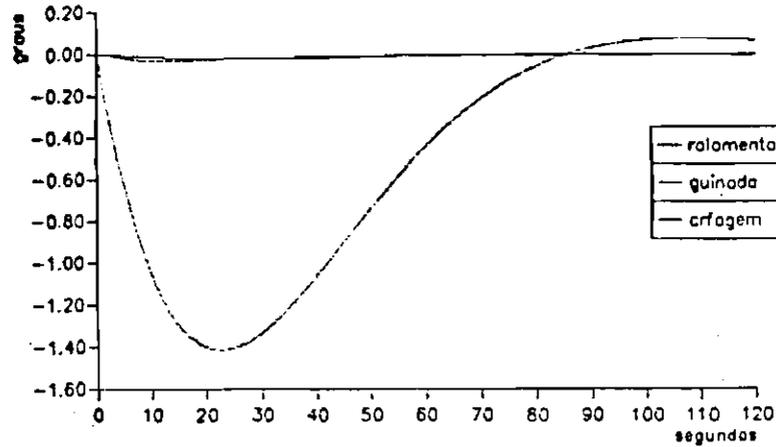


Figura 5.31: Ângulos de Atitude. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(0) = 0,5 \times 10^{-2}$ mm

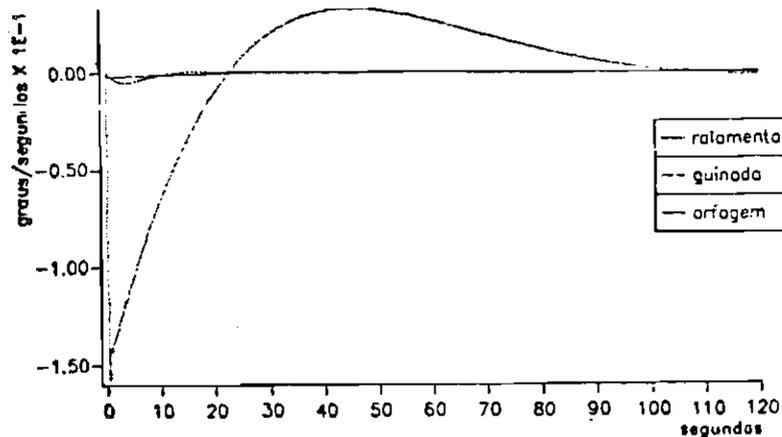


Figura 5.32: Taxas de Variação - Ângulos de Atitude. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(0) = 5 \times 10^{-3}$ mm

Os gráficos das Figuras (5.31) e (5.32), mostram que o movimento de atitude induzido pelos painéis laterais é controlado, sendo que o ângulo de guinada decai em cerca de 120 s. Os movimentos induzidos nos ângulos de arfagem e rolamento, de intensidade bem menor, decaem mais rapidamente. A Figura (5.33), mostra que o movimento dos painéis laterais é controlado, caindo a aproximadamente zero em 1 s! O comportamento dos deslocamentos elásticos no intervalo de tempo [1, 120] s, por ter amplitude muito menor, foram plotados em separado no gráfico da Figura (5.34).

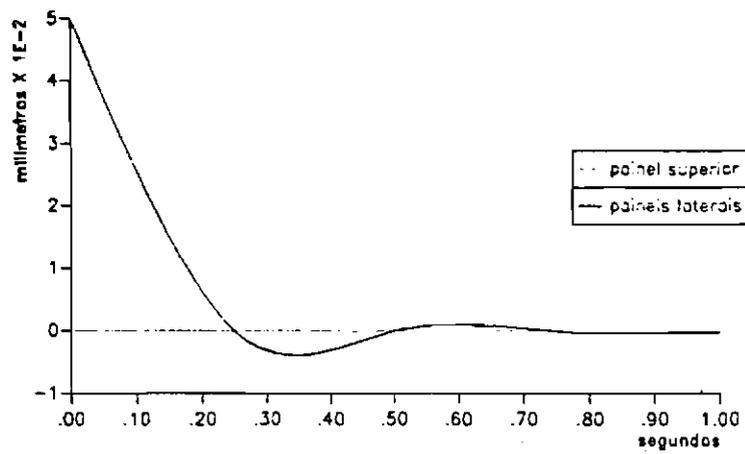


Figura 5.33: Deslocamentos Elásticos em $[0, 1]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm

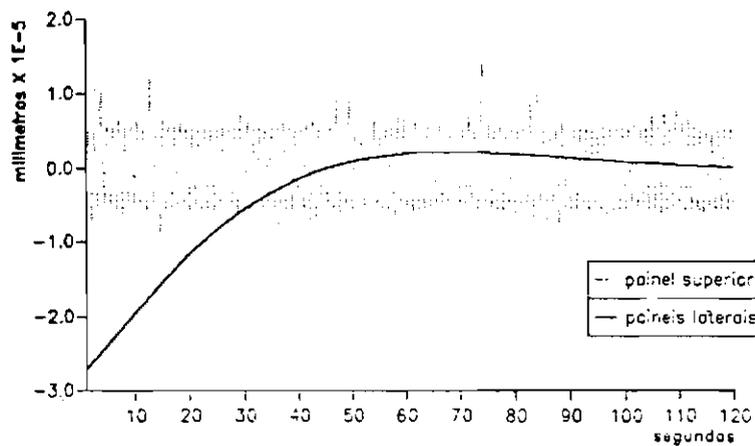


Figura 5.34: Deslocamentos Elásticos em $[1, 120]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm

Observe que mais uma vez pode ser identificado o movimento vibratório residual não amortecido no painel superior, resultado da interação entre este e o rotor em rolamento. Nota-se também que o movimento dos painéis laterais vai a zero no restante do tempo.

As Figuras (5.35) e (5.36), mostram a exigência sobre os atuadores. Pode-se notar que a rotação máxima exigida dos rotores é menor que 3×10^3 rpm, ficando assim dentro de limites aceitáveis. Observe porém, que para controlar uma perturbação da ordem de 10^{-2} mm, nos painéis laterais foi requerido um torque máximo maior que 0,3 N.m . Assim, conclui-se que a exigência imposta sobre os atuadores no controle dos deslocamentos elásticos, foi exagerada.

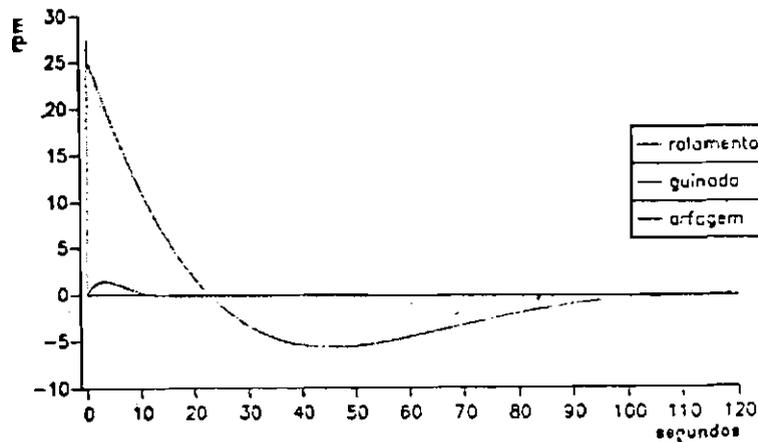


Figura 5.35: Rotação Exigida dos Rotores. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(0) = 0,5 \times 10^{-2}$ mm

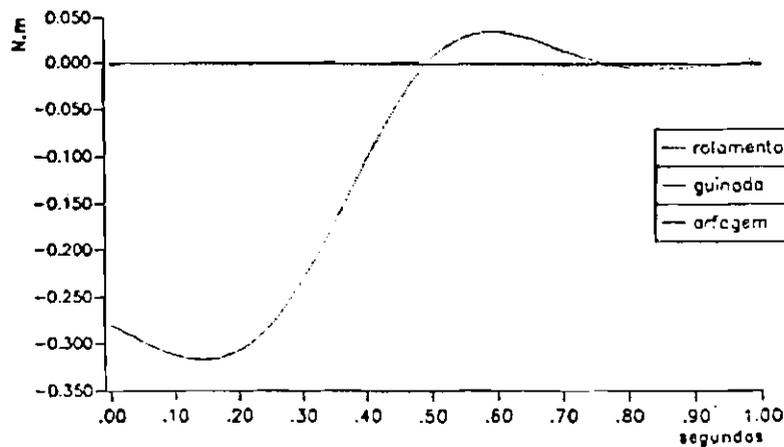


Figura 5.36: Torques Atuantes no Satélite em $[0, 1]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(0) = 0,5 \times 10^{-2}$ mm

A Figura (5.37), mostra o comportamento do torque requerido no intervalo de tempo $[1, 120]$ s.

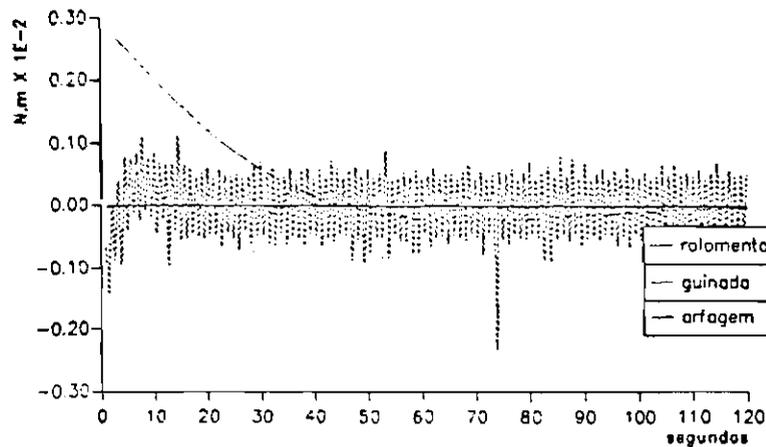


Figura 5.37: Torques Atuantes no Satélite em $[1, 120]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_1^{11}(0) = 5 \times 10^{-3}$ mm

A figura anterior revela que, enquanto não é exigido nenhum torque em arfagem a partir de 1 s e o torque em guinada vai a zero, em rolamento, mostrando mais uma vez a interação com painel superior, vê-se uma ação contínua e de caráter periódico do rotor colocado neste eixo.

Seqüência 05: Condição Inicial na Extremidade do Painel Superior

A próxima seqüência mostra o efeito de perturbações no painel superior. Este foi submetido a uma condição inicial de 0.5×10^{-4} mm em sua extremidade livre ($\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm).

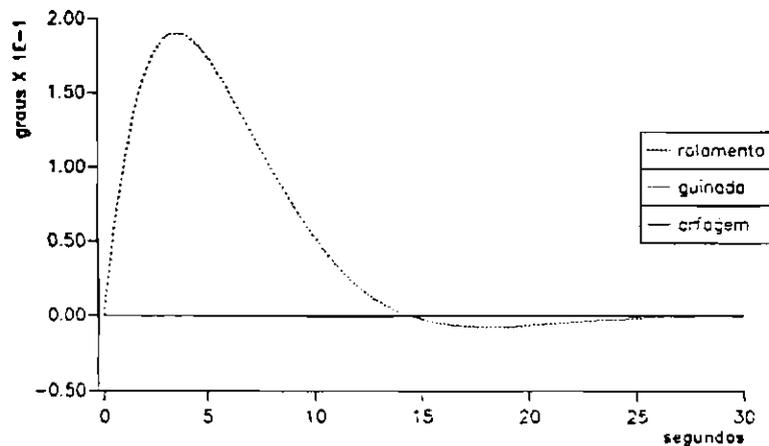


Figura 5.38: Ângulos de Atitude. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm

Pelas Figuras (5.38) e (5.39), vê-se que o movimento induzido em rolamento, com amplitude máxima de aproximadamente 0.17 graus (bem maior que a os demais), é controlado e vai a zero em cerca de 30 s.

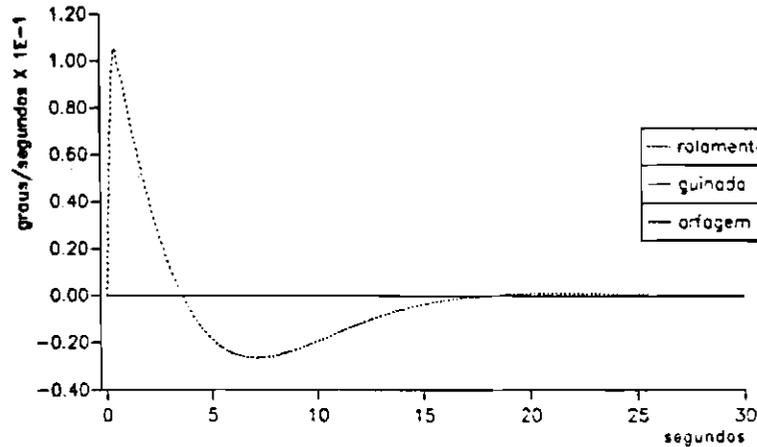


Figura 5.39: Taxas de Variação - Ângulos de Atitude. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 5 \times 10^{-3}$ mm

A Figura (5.40), mostra em separado o comportamento dos ângulos de atitude de arfagem e guinada.

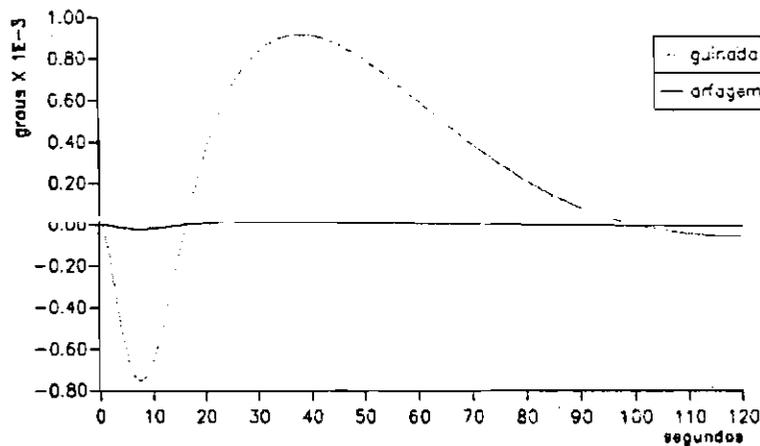


Figura 5.40: Ângulos de Arfagem e Guinada. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm

Pode-se concluir pela Figura (5.40) que não há movimento perceptível induzido no ângulo de Arfagem, e o movimento induzido no ângulo de Guinada tem amplitude máxima inferior a 1×10^{-3} graus, indo a zero em 120 s.

A Figura (5.41) mostra os deslocamentos elásticos durante o primeiro segundo de atuação do controle.

Conclui-se através da observação da Figura (5.41) que em menos de um segundo, a atuação do controle leva a vibração do painel superior a níveis desprezáveis, sendo que não constata-se indução perceptível de movimentos elásticos nos painéis laterais. A Figura (5.42) mostra o comportamento do deslocamento

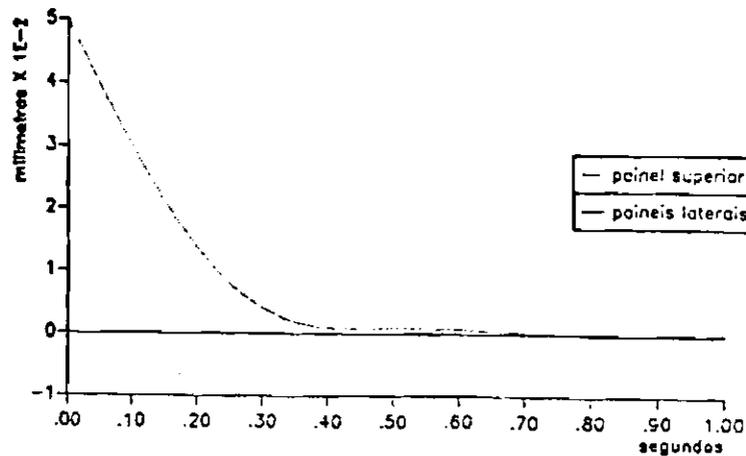


Figura 5.41: Deslocamentos Elásticos em $[0, 1]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 0,5 \times 10^{-2}$ mm

elástico do painel superior no intervalo de tempo $[1, 50]$ s.

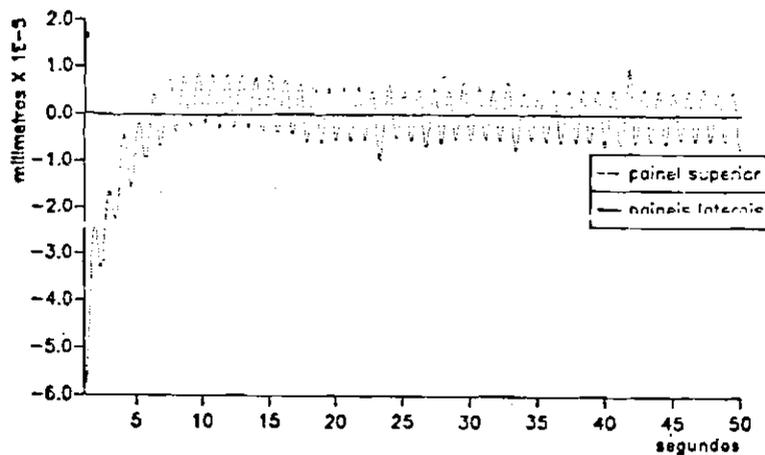


Figura 5.42: Deslocamentos Elásticos em $[1, 50]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 0,5 \times 10^{-2}$ mm

Outra vez pode ser verificado o movimento oscilatório não amortecido de amplitude aproximada 1×10^{-5} na extremidade do painel superior.

A Figura (5.43) mostra a exigência de rotação sobre os rotores.

As Figuras (5.44) e (5.45), mostram os torques necessários nos intervalos de tempo $[0, 1]$ s e $[1, 50]$ s, respectivamente.

Nota-se novamente, que para controlar o sistema sujeito a uma condição inicial no painel superior da ordem de 10^{-2} mm, o torque máximo requerido foi superior ao limite estabelecido, indicando que há uma exigência de atuação sobre este painel foi exagerada.

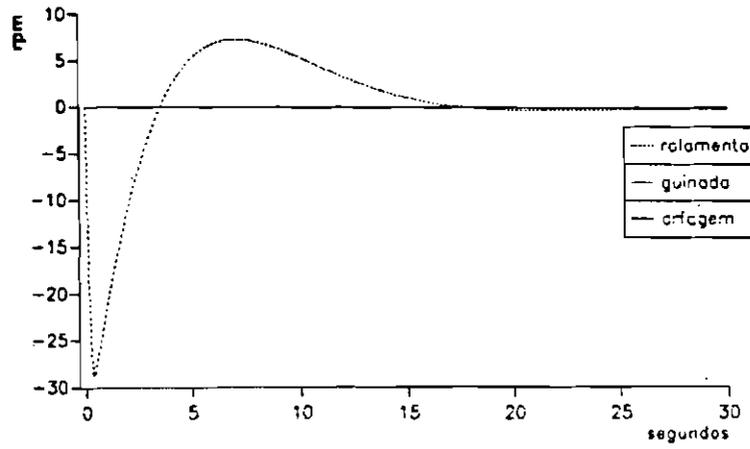


Figura 5.43: Rotação Exigida dos Rotores. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm

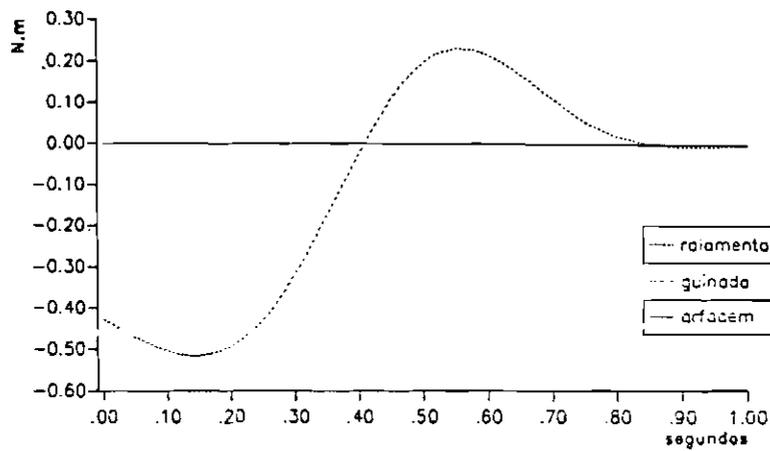


Figura 5.44: Torques Atuantes no Satélite em $[0, 1]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm

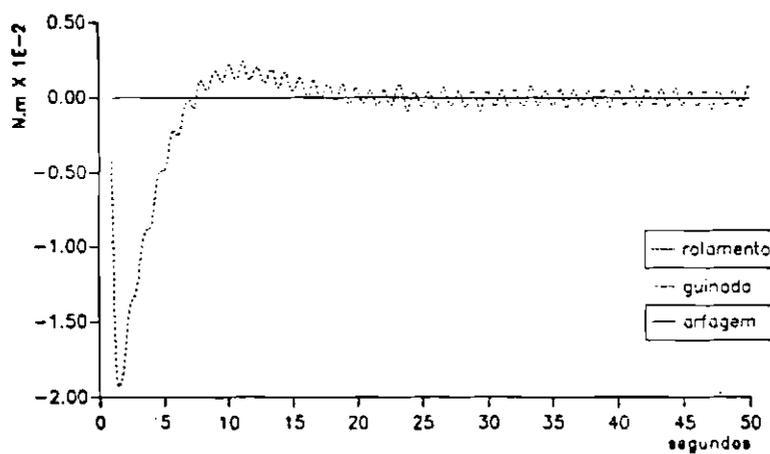


Figura 5.45: Torques Atuantes no Satélite $[1, 50]$ s. $\phi^1(2L_1) \cdot \zeta_2^{11}(0) = 0.5 \times 10^{-2}$ mm

Pela Figura (5.45), vê-se que persiste a oscilação não amortecida no painel superior, devida à interação entre este painel e o rotor em rolamento.

A correção da oscilação não amortecida verificada no painel superior, resultado da interação entre este e o rotor em rolamento, deve levar em consideração a modelagem e a malha de controle dos rotores. Isto porém, não foi objeto de estudo neste trabalho.

Capítulo 6

Conclusões e Comentários

6.1 Conclusões

Este trabalho teve por objetivos:

1. A apresentação de um procedimento que sistematizasse a obtenção computacional do modelo matemático do movimento de atitude de satélites artificiais, contendo painéis solares flexíveis e extensíveis, e rotores para controle ativo de atitude.
2. O desenvolvimento de um software constituído por manipuladores simbólicos para obtenção das equações do movimento para algumas configurações específicas.
3. A análise da fase transitória de abertura dos painéis solares.
4. A implementação de uma lei controle por realimentação de estado que, levando em conta o movimento elástico dos painéis, atuasse simultaneamente no movimento de atitude e nos deslocamentos elásticos dos painéis.

Tendo em vista os resultados obtidos, conclui-se que:

1. Foi apresentado um procedimento que sistematiza a obtenção computacional do modelo matemático que descreve o movimento de atitude para a classe de veículos em consideração. Isto foi feito utilizando-se abordagem Lagrangiana e o *Método dos Modos Admitidos* para a discretização espacial dos deslocamentos elásticos.
2. Utilizando-se o manipulador simbólico *Reduce*, foi desenvolvido um software para a obtenção computacional das equações do movimento de satélites cujo núcleo tem a forma de um prisma reto de base retangular, contendo um número qualquer de painéis solares e de rotores, posicionados em qualquer parte. Existem algumas restrições quanto ao seu uso, discutidas mais adiante.

3. Foi analisada a fase transitória de abertura dos painéis, incluindo-se, para o satélite-exemplo estudado, o impacto entre estes e o núcleo do veículo no instante final da abertura. Para esta fase foram apresentados os gráficos da evolução da diádica de inércia ao longo do tempo e o movimento induzido sobre atitude pelo desdobramento dos painéis. Foi obtido ainda o vetor de estado no instante inicial do desdobramento dos painéis para que, ao final da fase de abertura, o satélite estivesse posicionado segundo sua atitude nominal.
4. Com relação à fase posterior a da abertura dos painéis solares, pode se dizer que:
 - (a) Para o sistema original contendo painéis completamente abertos e flexíveis, foram obtidas as equações linearizadas do movimento com o auxílio do *Sistema de Manipulação Algebrica* desenvolvido. Empregando-se estas equações na simulação deste sistema, livre da ação da lei de controle (malha aberta), verificou-se quanto a flexibilidade dos painéis pode influenciar o movimento de atitude do satélite.
 - (b) Para o sistema reduzido, obtido a partir do sistema original excluindo-se a dinâmica dos atuadores, foi implementada, com o auxílio do algoritmo de Porter e D'Azzo (1978b), uma lei de controle baseada na técnica *Eigenstructure Assignment*. Devido à excelente qualidade dos resultados obtidos com relação à realocação dos autovalores em malha fechada para este sistema, a apresentação dos resultados neste caso foi considerada desnecessária, passando-se diretamente à análise do sistema original em malha fechada.
 - (c) Visando-se a validação do controlador proposto, observou-se que para o sistema original em malha fechada, a lei de controle obtida a partir do controle implementado para o sistema reduzido, atuou muito bem nos modos orbitais (com *alta autoridade*) e satisfatoriamente sobre os modos elásticos (com *baixa autoridade*), para os dados empregados. Deve ser salientado que perturbações da ordem de 10^{-2} mm nos painéis exigiram mais torque do que o que podia ser fornecido. Isto revela que a exigência imposta de amortecimento das vibrações elásticas foi excessiva.

6.2 Comentários

O trabalho desenvolvido apresenta diversas faces do mesmo problema: *dinâmica de atitude de satélites artificiais*. Alguns pontos cruciais abordados que merecem ser destacados são a modelagem do movimento de atitude e seus aspectos algébricos, e o controle dos veículos espaciais.

Com relação à manipulação algébrica, pode ser dito que o sistema desenvolvido com o auxílio do manipulador *Reduce* é um verdadeiro "sorvedouro

de energia”. Todo tempo e esforço gasto no sentido de desenvolvê-lo é altamente válido e certamente recompensador. Este sistema, ainda muito longe de ser operacional, se bem trabalhado pode se transformar numa ferramenta bastante útil à toda comunidade envolvida na área espacial.

A implementação computacional feita para o algoritmo de Porter e D’Azzo (1978b), utiliza o princípio do *Método de Eliminação de Gauss*, com aritmética de complexos em precisão simples. É possível que esta idéia possa ainda ser bem aproveitada, tentando-se fazer com que os autovetores *obtidos* em malha fechada fiquem mais “próximos” dos autovetores selecionados (*pretendidos*).

Neste contexto, talvez seja interessante apontar algumas das contribuições deste trabalho:

- Na parte de modelamento do problema, deve ser citado o fato de que, em nenhum instante, foi desprezada a influência exercida pelo movimento do centro de massa instantâneo. Sua consideração levou ao “estranho” termo quadrático negativo da expressão (2.6), na seção 2.3, do Capítulo 2. Este termo dá origem à elementos posicionados na diagonal das matrizes de massa e de rigidez generalizadas (expressões (4.16) e (4.19)), formados pela diferença entre certas parcelas. Foi demonstrado (Apêndice F) que, apesar desta diferença, quando considerados apenas o 1º modo de flexão e de torção do painel, estes elementos são sempre positivos.
- Na parte algébrica associada ao modelamento do problema, o *Sistema de Manipulação Algébrica* desenvolvido, além da confiabilidade nas equações obtidas, propicia uma economia *fantástica* de tempo ao dinamicista.
- Com relação à modelagem, ainda é preciso citar que foram considerados, para o satélite-exemplo estudado, os impactos entre os painéis e o núcleo do veículo, no instante final da fase de abertura.
- Na parte de controle, apesar da “filosofia” utilizada ser bastante conhecida (desacoplamento da dinâmica dos atuadores do resto do sistema), a “forma” com que ela foi empregada é bastante peculiar. Neste sentido, destacam-se a elaboração da *matriz de reações* (veja expressão (3.20), seção 3.5.2, Capítulo 3), e a exigência imposta sobre os atuadores como mostra a expressão (3.22).

Muito do que foi feito neste trabalho pode ser estendido. Neste sentido, a seguir serão apresentadas algumas sugestões para investigação futura.

A princípio, com relação ao *Sistema de Manipulação Algébrica*, talvez mais que sua generalização, seja importante descobrir uma forma *inteligente* de organização da informação a ser manipulada. Feito isto, algumas alterações devem ser introduzidas para que ele possa ser utilizado em configurações que tenham base

e painéis solares com formas diferentes das adotadas. A possibilidade de existência simultânea de painéis abertos flexíveis e painéis em desdobramento deve ser levada em consideração. Outra generalização interessante é a introdução de desbalanceamentos nos rotores visando o estudo do *efeito jitter* (Fonseca (1989)), assim como novos tipos de apêndices.

Ainda com relação ao *SMA*, outras formas de descrição do veículo devem ser procuradas, com o objetivo de diminuir a quantidade de *dados* requerida. No cálculo das equações linearizadas, pode ser desenvolvido, com o auxílio de programas em *Fortran*, um módulo capaz de obter numericamente o ponto de equilíbrio para a linearização.

Com relação à fase de abertura dos painéis solares, seria interessante considerar-se os ângulos de abertura como coordenadas generalizadas a fim de se estudar a intensidade dos acoplamentos dinâmicos entre estes e as demais coordenadas do sistema. Isto poderia ser útil na elaboração de novas expressões para os históricos de abertura admitidos conhecidos. Talvez seja importante introduzir-se os impactos do final da fase de abertura diretamente na função Lagrangiana, utilizando-se a teoria de distribuições no princípio do trabalho virtual. Ainda neste sentido, uma análise cuidadosa deve ser feita para determinar-se exatamente qual é a influência destes impactos no movimento de abertura de outros painéis.

Com relação ao sistema original em malha aberta, poderiam ser feitas simulações com a ação do gradiente de gravidade a fim de verificar o ordem de grandeza de sua influência no movimento de atitude.

Com relação ao esquema de controle proposto, a validação do controlador poderia ser feita contra as equações não linearizadas do sistema original, envolvendo forças externas de origem não conservativa como arrasto atmosférico e pressão de radiação solar. Pode-se ainda pensar em aprimorar a implementação computacional feita para a técnica *Eigenstructure Assignment*, de forma a obter-se autovetores mais "próximos" aos selecionados.

Outro motivo de investigação, é a extensão do resultado apresentado no Apêndice F, o qual valida as matrizes de massa e de rigidez generalizadas. "*Como se escreveria este resultado para outros modos de flexão e torção tomados na aplicação do Método dos Modos Admitidos?*"

A correção das oscilações não amortecidas verificadas, resultado da interação entre painéis e rotores, deve levar em conta não só a modelagem do comportamento dinâmico dos rotores, como também a malha interna de controle. Estes também, sem dúvida, são temas importantes e que devem ser pesquisados.

Referências Bibliográficas

- ANDRY, A.N.; SHAPIRO, E.Y.; CHUNG, J.C. Eigenstructure Assignment for Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AES – 19(5):711-729, Sept. 1983.
- APKARIAN, P.R. *Comando Modal e Robustez de Sistemas Multivariacionais*. Notas de curso. São José dos Campos, Instituto de Fomento e Coordenação Industrial-CTA, 1989.
- BURROWS, S.P.; PATTON, R.J. Robust Eigenstructure Assignment for Flight Control Using the CTRL-C Design Package. *AIAA Journal*, pp. 1489-1494, 1989.
- CHEN, C.T. *Introduction to Linear Sistem Theory*. New York, Holt, Rineart and Winston, 1970.
- CHERCHAS, D.B. Dynamics of Spin-Stabilized Satellites During Extension of Long Flexible Boom. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 8(7):802-804, July 1971.
- CHERCHAS, D.B.; GOSSAIN, D.M. Dynamics of a Flexible Solar Array During Deployment from Spinning Spacecraft. *CASI Transactions*, 7:10-18, July 1974.
- CLOUTIER, G.J. Dynamics of Deployment of Extendible Booms from Spinning Space Vehicles. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 5(5):547-552, May 1968.
- DAVISON, E.J. On Pole Assignment in Linear Systems with Incomplete State Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC – 15:348-351, June 1970.
- DAVISON, E.J.; CHATTERJEE, R. A Note on Pole Assignment in Linear Systems with Incomplete State Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC – 16:98-99, Feb. 1971.
- DAVISON, E.J.; CHOW, S.G. An Algorithm for the Assignment of Closed Loop Poles Using Output Feedback in Large Linear Multivariable Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC – 18:74-75, Feb. 1973.

- ETKIN, B.; HUGHES, P.C. Explanation of the Anomalous Spin Behavior of Satellites with Long Flexible Antennae. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 4(9):1139-1145, Sept. 1967.
- FAHMY, M.M.; O'REILLY, J. On Eigenstructure Assignment in Linear Multivariable Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC - 27(3):691-693, June 1982.
- FERREIRA, D.L. *Análise do Problema de Captura de um Satélite Estabilizado por Gradiente de Gravidade com Mastro Extensível Durante e Após a Fase de Esticamento*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, Julho 1984. (INPE-3321-TDL/181).
- FONSECA, I.M. *Estudo do "Jitter" na Atitude de um Satélite Artificial com Painéis Flexíveis Estabilizado por Rotação Dual*. São José dos Campos, INPE, Dezembro 1989. (INPE-4744-PRE/1418).
- GOLUB, G.; VAN LOAN, C. *Matrix Computations*. North Oxford Academic, 1983.
- FORTRAN *Reference Manual*. Michigan, Burroughs Corporation, 1985.
- HEARN, A.C. *Reduce User's Manual*. California, The RAND Corporation, 1987.
- HOFFMAN, R.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1979.
- HÖNIG, C.S. *Análise Funcional e Aplicações*. São Paulo, Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1970.
- HOUPIS, C.; D'AZZO, J.J. *Linear Control System Analysis and Design*. McGraw-Hill Book, 1981.
- HUGHES, P.C. Recent Advances in the Attitude Dynamics of Spacecraft with Flexible Solar Arrays. *Canadian Aeronautics and Space Journal*, 19(4):165-171, April 1973a.
- HUGHES, P.C. *Spacecraft Attitude Dynamics*. John Wiley & Sons, 1986.
- HUGHES, P.C.; FUNG, J.C. Liapounov Stability of Spinning Satellites with Long Flexible Appendages. *Celestial Mechanics*, 4: 295-308, 1971.
- HUGHES, P.C.; NGUYEN, K. Oscillations of a Spinning Satellite Due to Small Deflections of Its Dipole Antennae. *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.*, 16(32):113-128, 1973b.
- IBRAHIM, A.E.; MISRA, A.K. Attitude Dynamics of a Satellite During Deployment of Large Plate-Type Structures. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 5(5):442-447, Sept.- Oct. 1982.
- IMSL LIBRARY *Fortran Subroutines for Mathematics and Statistics*. Texas, IMSL Inc., 1984. Vol. 1 a 4.

- JUANG, J.N.; BALAS, M.J. Dynamics and Control of Large Spinning Spacecraft. *The Journal of Astronautical Sciences*, 28(1):31-48, Jan.- March 1980.
- JUNKINS, J.L.; TURNER, J.D. *Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers*. New York, Elsevier Science Publishing Company Inc., 1986.
- KAPLAN, M.H. *Modern Spacecraft Dynamics & Control*. USA, John Wiley & Sons Inc., 1973.
- KIMURA, H. Pole Assignment by Gain Output Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC - 20(4):509-516, Aug. 1975.
- KLEIN G.; MOORE, B.C. Eigenvalue-Generalized Eigenvector Assignment with State Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC - 22:140-141, Feb. 1977.
- KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. *Linear Optimal Control Systems*. New York, Wiley-Interscience, 1972.
- LANCZOS, C. *The Variational Principles of Mechanics*. Toronto, Toronto University Press, 1949.
- LANG, W.; HONEYCUTT, G.H. *Simulation of Deployment Dynamics of Spinning Spacecraft*. Washington, D.C. NASA, 1967. (NASA TN-D-4074).
- LEISSA, A.W. *Vibration of Plates*. Washington, D.C. NASA, 1969, p. 331-353. (NASA SP-160)
- LIKINS, P.W.; WIRSCHING, P.H. Use of Synthetic Modes in Hybrid Coordinate Dynamic Analysis. *AIAA Journal*, 6(10):1867-1872, Oct. 1968.
- LIKINS, P.W.; BARBERA, F.J. Mathematical Modeling of Spinning Elastic Bodies for Modal Analysis. *AIAA Journal*, 11(9):1251-1253, 1973.
- LIKINS, P.W.; FLEISCHER, G.E. Results of Flexible Spacecraft Attitude Control Studies Utilizing Hybrid Coordinates. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 8(3):264-273, March 1971.
- LIKINS, P.W.; OHKAMI, Y.; WONG, C. Appendage Modal Coordinate Truncation Criteria in Hybrid Coordinate Dynamic Analysis. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 13(10):611-617, Oct. 1976.
- LINDBERG JR., R.E.; LONGMAN, R.W. On the Number and Placement of Actuators for Independent Modal Space Control. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 7(2):215-221, March-April 1984.
- LOURENÇÃO, P.T.M. *Análise de Estabilidade Dinâmica de um Satélite com Mastro Flexível Utilizando o Método Direto de Liapunov*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Aeronáutica. São José dos Campos, ITA, Maio 1981.

- LOVE, A.E.H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. London, Cambridge University Press, 1934, p.97. (4 e.)
- MacLANE, S.; BIRKHOFF, G. *Algebra*. New York, MacMillan, 1968.
- MEIROVITCH, L. Attitude Stability of an Elastic Body of Revolution in Space. *The Journal of Astronautical Sciences*, 8(7): 110-113, 1961.
- MEIROVITCH, L. On the High-Spin Motion of a Satellite Containing Elastic Parts. *Journal of Spacecraft*, 3(11):1597-1602, 1966.
- MEIROVITCH, L. *Analytical Methods in Vibrations*. New York, McMillan, 1967.
- MEIROVITCH, L. Stability of a Spinning Body Containing Elastic Parts via Liapunov's Direct Method. *AIAA Journal*, 8(7):1193-1200, July 1970a.
- MEIROVITCH, L. *Methods of Analytical Dynamics*. New York, McGraw-Hill Book, 1970b.
- MEIROVITCH, L. A Method for the Liapunov Stability Analysis of a Force-Free Hybrid Dynamical Systems. *AIAA Journal*, 9(9):1695-1701, Sept. 1971.
- MEIROVITCH, L. Liapunov Stability Analysis of Hybrid Dynamical Systems with Multi-elastic Domains. *Journal of Non-linear Mechanics*, 7:425-443, 1972.
- MEIROVITCH, L.; CALICO, R.A. A Comparative Study of Stability Methods for Flexible Satellites. *AIAA Journal*, 11(1):91-98, Jan. 1973.
- MEIROVITCH, L. A New Method of Solution of the Eigenvalue Problem for Gyroscopic Systems. *AIAA Journal*, 12(10):1337-1342, Oct. 1974.
- MEIROVITCH, L. *Elements of Vibration Analysis*. Tokio, McGraw-Hill Kogakusha, 1975a.
- MEIROVITCH, L. A Modal Analysis for the Response of Structures Rotating in Space. *Journal of Applied Mechanics*, 42:446-450, June 1975b.
- MEIROVITCH, L. A Stationary Principle for the Eigenvalue Problem for Rotating Structures. *AIAA Journal*, 14(10):1387-1394, Oct. 1976.
- MEIROVITCH, L.; JUANG, J.N. Natural Modes of Oscillation of Rotating Flexible Structures About a Nontrivial Equilibrium. *Journal of Spacecrafts and Rockets*, 13:35-44, 1976.
- MEIROVITCH, L. Control of Spinning Flexible Spacecraft by Modal Synthesis. *Acta Astronautica*, 4:985-1010, 1977.
- MEIROVITCH, L.; SHENHAR, J. *Control of Large Flexible Spacecraft by Independent Modal-Space Control Method*. Washington, D.C. NASA, Jan. 1984. (NASA CR-3760).

- MODI, V.J. Attitude Dynamics of Satellites with Flexible Appendages - A Brief Review. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 11(11):743-751, Nov. 1974.
- MODI, V.J.; IBRAHIM, A.M. A General Formulation for Librational Dynamics of Spacecraft with Deploying Appendages. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 7(5):563-569, Sept.- Oct. 1984.
- MOORE, B.C. On the Flexibility Offered by State Feedback in Multivariable Systems Beyond Closed Loop Eigenvalue Assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC - 21:689-692, Oct. 1976.
- NOLL, R.B.; ZVARA, J.; DEYST, J.J. *Effects of Structural Flexibility on Spacecraft Control Systems*. Washington, D.C. NASA, April, 1969. (NASA SP-8016).
- OLIVA, W.M. *Equações Diferenciais Ordinárias*. São Paulo, Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1973.
- PORTER, B.; CROSSLEY, T.R. *Modal Control- Theory and Applications*. London, Taylor & Francis Ltd., 1972.
- PORTER, B.; D'AZZO J.J. Closed Loop Eigenstructure Assignment By State Feedback in Multivariable Linear Systems. *International Journal of Control*, 27(3):487-492, 1978a.
- PORTER, B.; D'AZZO J.J. Algorithm for Closed Loop Eigenstructure Assignment By State Feedback in Multivariable Linear Systems. *International Journal of Control*, 27:487-492, 1978b.
- SHAH, S.L.; FISHER, D.G.; SEBORG, D.E. Eigenvalue/Eigenvector Assignment for Multivariable Systems and Further Results for Output Feedback Control. *Electronics Letters*, 11(16):388-389, 1975.
- SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro, IMPA, 1979.
- SRIDHAR, B.; LINDORFF, D.P. Pole-Placement with Constant Gain Output Feedback. *International Journal of Control*, 18(5):993-1003, 1973.
- SRINATHKUMAR, S. Eigenvalue/Eigenvector Assignment Using Output Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC - 23(1):79-80, 1978.
- SRINATHKUMAR, S.; RHOTEN, R.P. Eigenvalue/Eigenvector Assignment for Multivariable Systems. *Electronics Letters*, 11(6):125-127, 1975.
- TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. *Teoria da Elasticidade*. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1980, p.1-9, 237-239.
- THOMSON, W.T. *Introduction to Space Dynamics*. New York, John Wiley & Sons Inc., 1963.

- THOMSON, W.T.; REITER, G.S. Attitude Drift of Space Vehicles. *The Journal of Astronautical Sciences*, 7(2):29-36, 1960.
- WERTZ, J.R. *Spacecraft Attitude Determination and Control*. London, D. Reidel Publishing Company, 1978.
- WONHAM, W.M. On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC - 12(6):660-665, 1967.

Apêndice A

Energia Cinética Total

Neste apêndice apresenta-se o desenvolvimento necessário à obtenção da expressão da energia cinética do veículo.

Primeiramente é descrito o movimento do centro de massa instantâneo do veículo, C , com relação ao referencial $\{S, \vec{i}_S, \vec{j}_S, \vec{k}_S\}$, definido no Capítulo 2, seção 2.2.1, através dos seus vetores de posição e de velocidade, \vec{R}_{SC} e $\dot{\vec{R}}_{SC}$ respectivamente.

Logo após, obtém-se a expressão da energia cinética de cada um dos componentes do satélite: *Base, Rotores Rígidos, Painéis Solares Abertos e Painéis Solares em Desdobramento*. A soma destas expressões e a utilização da definição do centro de massa instantâneo C , fornecerão a expressão procurada.

A.1 Movimento do Centro de Massa Instantâneo

A posição e a velocidade do centro de massa instantâneo C com relação ao sistema $\{S, \vec{i}_S, \vec{j}_S, \vec{k}_S\}$, são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} m \vec{R}_{SC} &= \sum_j \int_{m_{R_j}} (\vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j}) dm_{R_j} + \sum_k \int_{m_{D_k}} (\vec{R}_{SD_k} + L_{CD_k} \vec{r}_{D_k}) dm_{D_k} + \\ &+ \int_{m_B} \vec{r}_B dm_B + \sum_i \int_{m_{A_i}} [\vec{R}_{SA_i} + L_{CA_i} (\vec{r}_{A_i} + \vec{e}_{A_i})] dm_{A_i} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} m \dot{\vec{R}}_{SC} &= \sum_j \vec{\omega}_{R_j} \times L_{CR_j} \int_{m_{R_j}} \vec{r}_{R_j} dm_{R_j} + \sum_k \int_{m_{D_k}} \vec{v}_{D_k} dm_{D_k} + \\ &+ \sum_i L_{CA_i} \int_{m_{A_i}} \vec{e}_{A_i} dm_{A_i}. \end{aligned}$$

Observe que se R_j é o centro de massa do j -ésimo rotor, as primeiras parcelas no segundo membro de cada uma das equações resumem-se a $\sum_j m_{R_j} \vec{R}_{SR_j}$ e a $\vec{0}$, respectivamente.

A.2 Energia Cinética dos Componentes

No cálculo da energia cinética de cada componente, é utilizada a velocidade inercial de seus elementos de massa, dada pelas expressões (2.4), apresentadas no Capítulo 2, seção 2.2 - *Considerações Cinemáticas*.

A.2.1 Energia Cinética da Base

Seja

$$T_B = \frac{1}{2} \int_{m_B} \vec{V}_B \cdot \vec{V}_B dm_B,$$

onde $\vec{V}_B = \vec{V}_C - \vec{R}_{SC} + \vec{\omega}_C \times (\vec{r}_B - \vec{R}_{SC})$.

O desenvolvimento da expressão anterior fornece

$$\begin{aligned} T_B &= \frac{m_B}{2} \|\vec{V}_C\|^2 + \frac{m_B}{2} \|\vec{R}_{SC}\|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_C^T \overline{\overline{J_B^C}} \vec{\omega}_C + \\ &- m_B \vec{V}_C \cdot \vec{R}_{SC} + \vec{V}_C \cdot \vec{\omega}_C \times \int_{m_B} (\vec{r}_B - \vec{R}_{SC}) dm_B + \\ &- \vec{R}_{SC} \cdot \vec{\omega}_C \times \int_{m_B} (\vec{r}_B - \vec{R}_{SC}) dm_B, \end{aligned} \quad (A.2)$$

onde $\overline{\overline{J_B^C}} = \int_{m_B} \|\vec{r}_B - \vec{R}_{SC}\|^2 \overline{\overline{1}} - [\vec{r}_B - \vec{R}_{SC}][\vec{r}_B - \vec{R}_{SC}] dm_B$, é a diádica de inércia da base com relação ao ponto C , escrita no referencial $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$, e $\overline{\overline{1}}$ é a diádica unitária neste referencial.

A.2.2 Energia Cinética dos Rotores

Seja

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_j \int_{m_{R_j}} \vec{V}_{R_j} \cdot \vec{V}_{R_j} dm_{R_j},$$

onde $\vec{V}_{R_j} = \vec{V}_C - \vec{R}_{SC} + \vec{\omega}_C \times (\vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j} - \vec{R}_{SC}) + \vec{\omega}_{R_j} \times L_{CR_j} \vec{r}_{R_j}$.

O desenvolvimento da expressão anterior fornece

$$\begin{aligned}
T_R = & \sum_j \left\{ \frac{m_{R_j}}{2} \|\vec{V}_C\|^2 + \frac{m_{R_j}}{2} \|\vec{R}_{SC}\|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_C^T \overline{\overline{J_{R_j}^C}} \vec{\omega}_C + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{R_j}^T \overline{\overline{J_{R_j}^{R_j}}} \vec{\omega}_{R_j} + \right. \\
& - m_{R_j} \vec{V}_C \cdot \vec{R}_{SC} + \vec{V}_C \cdot \vec{\omega}_C \times \int_{m_{R_j}} (\vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j} - \vec{R}_{SC}) dm_{R_j} + \\
& + \vec{V}_C \cdot \vec{\omega}_{R_j} \times L_{CR_j} \int_{m_{R_j}} \vec{r}_{R_j} dm_{R_j} - \vec{R}_{SC} \cdot \vec{\omega}_{R_j} \times L_{CR_j} \int_{m_{R_j}} \vec{r}_{R_j} dm_{R_j} + \quad (A.3) \\
& - \vec{R}_{SC} \cdot \vec{\omega}_C \times \int_{m_{R_j}} (\vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j} - \vec{R}_{SC}) dm_{R_j} + \\
& \left. + \int_{m_{R_j}} [\vec{\omega}_{R_j} \times L_{CR_j} \vec{r}_{R_j}] \cdot [\vec{\omega}_C \times \int_{m_{R_j}} (\vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j} - \vec{R}_{SC})] dm_{R_j} \right\},
\end{aligned}$$

onde

$$\overline{\overline{J_{R_j}^C}} = \int_{m_{R_j}} \|\vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j} - \vec{R}_{SC}\|^2 \overline{\overline{1}} - [\vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j} - \vec{R}_{SC}][\vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j} - \vec{R}_{SC}] dm_{R_j}$$

é a diádica de inércia do j -ésimo rotor com relação ao ponto C , e

$$\overline{\overline{J_{R_j}^{R_j}}} = \int_{m_{R_j}} \|L_{CR_j} \vec{r}_{R_j}\|^2 \overline{\overline{1}} - [L_{CR_j} \vec{r}_{R_j}][L_{CR_j} \vec{r}_{R_j}] dm_{R_j}$$

é a diádica de inércia do j -ésimo rotor com relação ao ponto R_j , ambas escritas no referencial $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$.

A.2.3 Energia Cinética dos Painéis em Desdobramento

Seja

$$T_D = \frac{1}{2} \sum_k \int_{m_{Dk}} \vec{V}_{Dk} \cdot \vec{V}_{Dk} dm_{Dk},$$

onde $\vec{V}_{Dk} = \vec{V}_C + \vec{v}_{Dk} - \vec{R}_{SC} + \vec{\omega}_C \times (\vec{R}_{SDk} + L_{CDk} \vec{r}_{Dk} - \vec{R}_{SC})$.

O desenvolvimento da expressão anterior fornece

$$\begin{aligned}
T_D = & \sum_k \left\{ \frac{m_{Dk}}{2} \|\vec{V}_C\|^2 + \frac{m_{Dk}}{2} \|\vec{R}_{SC}\|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_C^T \overline{\overline{J_{Dk}^C}} \vec{\omega}_C + \frac{1}{2} \int_{m_{Dk}} \|\vec{v}_{Dk}\|^2 dm_{Dk} + \right. \\
& - m_{Dk} \vec{V}_C \cdot \vec{R}_{SC} + \vec{V}_C \cdot \vec{\omega}_C \times \int_{m_{Dk}} (\vec{R}_{SDk} + L_{CDk} \vec{r}_{Dk} - \vec{R}_{SC}) dm_{Dk} + \\
& + \vec{V}_C \cdot \int_{m_{Dk}} \vec{v}_{Dk} dm_{Dk} - \vec{R}_{SC} \cdot \int_{m_{Dk}} \vec{v}_{Dk} dm_{Dk} + \quad (A.4) \\
& - \vec{R}_{SC} \cdot \vec{\omega}_C \times \int_{m_{Dk}} (\vec{R}_{SDk} + L_{CDk} \vec{r}_{Dk} - \vec{R}_{SC}) dm_{Dk} + \\
& \left. + \int_{m_{Dk}} \vec{v}_{Dk} \cdot \vec{\omega}_C \times (\vec{R}_{SDk} + L_{CDk} \vec{r}_{Dk} - \vec{R}_{SC}) dm_{Dk} \right\},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \overline{\overline{J_{Dk}^C}} &= \int_{m_{Rj}} \|\vec{R}_{SDk} + L_{CDk} \vec{r}_{Dk} - \vec{R}_{SC}\|^2 \overline{\overline{1}} + \\ &- [\vec{R}_{SDk} + L_{CDk} \vec{r}_{Dk} - \vec{R}_{SC}] [\vec{R}_{SDk} + L_{CDk} \vec{r}_{Dk} - \vec{R}_{SC}] dm_{Dk}, \end{aligned}$$

é a diádica de inércia do k -ésimo painel em desdobramento com relação ao ponto C , escrita no referencial $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$.

A.2.4 Energia Cinética dos Painéis Abertos

Seja

$$T_A = \frac{1}{2} \sum_i \int_{m_{Ai}} \vec{V}_{Ai} \cdot \vec{V}_{Ai} dm_{Ai},$$

onde $\vec{V}_{Ai} = \vec{V}_C + L_{CAi} \vec{e}_{Ai} - \vec{R}_{SC} + \vec{\omega}_C \times [\vec{R}_{SAi} + L_{CAi}(\vec{r}_{Ai} + \vec{e}_{Ai}) - \vec{R}_{SC}]$.

A expressão anterior desenvolvida, resulta em

$$\begin{aligned} T_A &= \sum_i \left\{ \frac{m_{Ai}}{2} \|\vec{V}_C\|^2 + \frac{m_{Ai}}{2} \|\vec{R}_{SC}\|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_C^T \overline{\overline{J_{Ai}^C}} \vec{\omega}_C + \frac{1}{2} \int_{m_{Ai}} \|\vec{e}_{Ai}\|^2 dm_{Ai} + \right. \\ &- m_{Ai} \vec{V}_C \cdot \vec{R}_{SC} + \vec{V}_C \cdot \vec{\omega}_C \times \int_{m_{Ai}} [\vec{R}_{SAi} + L_{CAi}(\vec{r}_{Ai} + \vec{e}_{Ai}) - \vec{R}_{SC}] dm_{Ai} + \\ &+ \vec{V}_C \cdot L_{CAi} \int_{m_{Ai}} \vec{e}_{Ai} dm_{Ai} - \vec{R}_{SC} \cdot L_{CAi} \int_{m_{Ai}} \vec{e}_{Ai} dm_{Ai} + \\ &- \vec{R}_{SC} \cdot \vec{\omega}_C \times \int_{m_{Ai}} [\vec{R}_{SAi} + L_{CAi}(\vec{r}_{Ai} + \vec{e}_{Ai}) - \vec{R}_{SC}] dm_{Ai} + \\ &\left. + \int_{m_{Ai}} L_{CAi} \vec{e}_{Ai} \cdot \vec{\omega}_C \times [\vec{R}_{SAi} + L_{CAi}(\vec{r}_{Ai} + \vec{e}_{Ai}) - \vec{R}_{SC}] dm_{Ai} \right\}, \end{aligned} \quad (A.5)$$

onde

$$\begin{aligned} \overline{\overline{J_{Ai}^C}} &= \int_{m_{Ai}} \|\vec{R}_{SAi} + L_{CAi}(\vec{r}_{Ai} + \vec{e}_{Ai}) - \vec{R}_{SC}\|^2 \overline{\overline{1}} + \\ &- [\vec{R}_{SAi} + L_{CAi}(\vec{r}_{Ai} + \vec{e}_{Ai}) - \vec{R}_{SC}] [\vec{R}_{SAi} + L_{CAi}(\vec{r}_{Ai} + \vec{e}_{Ai}) - \vec{R}_{SC}] dm_B \end{aligned}$$

é a diádica de inércia do i -ésimo painel em aberto com relação ao ponto C , escrita no referencial $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$.

A.3 Energia Cinética do Veículo

A energia cinética total vale

$$T = T_B + T_R + T_D + T_A.$$

Substituindo-se as expressões de (A.2) a (A.5) na expressão acima,

obtem-se

$$\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2} \|\vec{V}_C\|^2 + \frac{m}{2} \|\vec{R}_{SC}\|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_C^T \{ \overline{J}_B^C + \sum_j \overline{J}_{R_j}^C + \sum_k \overline{J}_{D_k}^C + \sum_i \overline{J}_{A_i}^C \} \vec{\omega}_C + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_j \vec{\omega}_{R_j}^T \overline{J}_{R_j}^C \vec{\omega}_{R_j} + \frac{1}{2} \sum_k \int_{m_{D_k}} \|\vec{v}_{D_k}\|^2 dm_{D_k} + \frac{1}{2} \sum_i \int_{m_{A_i}} \|\vec{e}_{A_i}\|^2 dm_{A_i} + \\
&+ \vec{V}_C \cdot \{ \sum_j \vec{\omega}_{R_j} \times L_{CR_j} \int_{m_{R_j}} \vec{r}_{R_j} dm_{R_j} + \sum_i L_{CA_i} \int_{m_{A_i}} \vec{e}_{A_i} dm_{A_i} + \\
&+ \sum_k \int_{m_{D_k}} \vec{v}_{D_k} dm_{D_k} \} - m \vec{V}_C \cdot \vec{R}_{SC} + \\
&+ (\vec{V}_C - \vec{R}_{SC}) \cdot \vec{\omega}_C \times \{ \int_{m_B} \vec{r}_B dm_B + \sum_i \int_{m_{A_i}} [\vec{R}_{SA_i} + L_{CA_i} (\vec{r}_{A_i} + \vec{e}_{A_i})] dm_{A_i} + \\
&+ \sum_j \int_{m_{R_j}} (\vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j}) dm_{R_j} + \sum_k \int_{m_{D_k}} (\vec{R}_{SD_k} + L_{CD_k} \vec{r}_{D_k}) dm_{D_k} \} + \\
&- (\vec{V}_C - \vec{R}_{SC}) \cdot \vec{\omega}_C \times m \vec{R}_{SC} + \tag{A.6} \\
&- \vec{R}_{SC} \cdot \{ \sum_j \vec{\omega}_{R_j} \times L_{CR_j} \int_{m_{R_j}} \vec{r}_{R_j} dm_{R_j} + \sum_k \int_{m_{D_k}} \vec{v}_{D_k} dm_{D_k} \} + \\
&\quad + \sum_i L_{CA_i} \int_{m_{A_i}} \vec{e}_{A_i} dm_{A_i} + \\
&+ \sum_j \int_{m_{R_j}} [\vec{\omega}_{R_j} \times L_{CR_j} \vec{r}_{R_j}] \cdot [\vec{\omega}_C \times \int_{m_{R_j}} (\vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j} - \vec{R}_{SC})] dm_{R_j} + \\
&+ \sum_k \int_{m_{D_k}} \vec{v}_{D_k} \cdot \vec{\omega}_C \times [\vec{R}_{SD_k} + L_{CD_k} \vec{r}_{D_k} - \vec{R}_{SC}] dm_{D_k} + \\
&+ \sum_i \int_{m_{A_i}} L_{CA_i} \vec{e}_{A_i} \cdot \vec{\omega}_C \times [\vec{R}_{SA_i} + L_{CA_i} (\vec{r}_{A_i} + \vec{e}_{A_i}) - \vec{R}_{SC}] dm_{A_i}.
\end{aligned}$$

As três últimas parcelas de (A.6) podem ser reescritas sob a forma

$$\begin{aligned}
&\sum_j \int_{m_{R_j}} [\vec{\omega}_{R_j} \times L_{CR_j} \vec{r}_{R_j}] \cdot [\vec{\omega}_C \times \int_{m_{R_j}} (\vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j})] dm_{R_j} + \\
&+ \sum_k \int_{m_{D_k}} \vec{v}_{D_k} \cdot \vec{\omega}_C \times [\vec{R}_{SD_k} + L_{CD_k} \vec{r}_{D_k}] dm_{D_k} + \\
&+ \sum_i \int_{m_{A_i}} L_{CA_i} \vec{e}_{A_i} \cdot \vec{\omega}_C \times [\vec{R}_{SA_i} + L_{CA_i} (\vec{r}_{A_i} + \vec{e}_{A_i})] dm_{A_i} + \tag{A.7} \\
&+ \vec{\omega}_C \cdot [\sum_j \vec{\omega}_{R_j} \times L_{CR_j} \int_{m_{R_j}} \vec{r}_{R_j} dm_{R_j} + \sum_k \int_{m_{D_k}} \vec{v}_{D_k} dm_{D_k} + \\
&\quad + \sum_i L_{CA_i} \int_{m_{A_i}} \vec{e}_{A_i} dm_{A_i}] \times \vec{R}_{SC}.
\end{aligned}$$

Substituindo-se (A.7) em (A.6) e utilizando-se no resultado obtido a definição da posição e da velocidade do centro de massa instantâneo, dadas por (A.1),

chega-se a seguinte expressão para a energia cinética total

$$\begin{aligned}
T = & \frac{m}{2} \|\vec{v}_C\|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_C^T \overline{\overline{J}}^C \vec{\omega}_C - \frac{m}{2} \|\vec{R}_{SC}\|^2 + m \vec{\omega}_C \cdot (\vec{R}_{SC} \times \vec{R}_{SC}) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_j \vec{\omega}_{R_j}^T \overline{\overline{J}}_{R_j}^C \vec{\omega}_{R_j} + \sum_j \int_{m_{R_j}} [\vec{\omega}_{R_j} \times L_{CR_j} \vec{r}_{R_j}] \cdot [\vec{\omega}_C \times (\vec{R}_{SR_j} + L_{CR_j} \vec{r}_{R_j})] dm_{R_j} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_k \int_{m_{D_k}} \|\vec{v}_{D_k}\|^2 dm_{D_k} + \sum_k \int_{m_{D_k}} \vec{v}_{D_k} \cdot \vec{\omega}_C \times (\vec{R}_{SD_k} + L_{CD_k} \vec{r}_{D_k}) dm_{D_k} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_i \int_{m_{A_i}} \|\vec{e}_{A_i}\|^2 dm_{A_i} + \sum_i \int_{m_{A_i}} L_{CA_i} \vec{e}_{A_i} \cdot \vec{\omega}_C \times [\vec{R}_{SA_i} + L_{CA_i} (\vec{r}_{A_i} + \vec{e}_{A_i})] dm_{A_i},
\end{aligned} \tag{A.8}$$

onde $\overline{\overline{J}}^C = \overline{\overline{J}}_B^C + \sum_j \overline{\overline{J}}_{R_j}^C + \sum_k \overline{\overline{J}}_{D_k}^C + \sum_i \overline{\overline{J}}_{A_i}^C$, representa a diádica inércia do veículo a partir do ponto C , escrita no referencial $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$.

Esta é a expressão para a energia cinética colocada na seção 2.3 do Capítulo 2, utilizada para o cálculo da Lagrangiana do sistema.

Apêndice B

Energia Potencial Gravitacional

Neste apêndice é desenvolvida a expressão da energia potencial gravitacional do veículo, objetivando-se a obtenção de uma fórmula operacional.

Depois de certa manipulação algébrica efetuada em algumas das parcelas do resultado obtido, a utilização da definição do centro de massa do sistema, conduz a uma fórmula operacional para a energia potencial gravitacional, dada em termos da diádica de inércia do veículo e dos cossenos diretores da vertical local com relação ao sistema instantâneo do centro de massa $\{C, \vec{i}_c, \vec{j}_c, \vec{k}_c\}$.

O desenvolvimento aqui apresentado segue de perto os passos de Lourenção (1981).

B.1 Expansão da Energia Potencial Gravitacional em Série de Taylor

Admite-se que o campo gravitacional, ao qual o satélite de massa m está submetido, seja dado por¹

$$V_G = -\mu \int_m \frac{dm}{R}, \quad (\text{B.1})$$

onde $\mu = GM$, sendo G a constante de gravitação universal, M a massa do corpo atrator ($M \gg m$) e $R = \|\vec{R}\|$, com \vec{R} a localização inercial de um elemento de massa do satélite.

A localização inercial dos elementos de massa do satélite pode ser escrita em termos da localização inercial do centro de massa instantâneo, de forma

¹Hughes (1986, p. 234).

que se tenha

$$\vec{R} = \vec{R}_c + \vec{\rho}, \quad (\text{B.2})$$

onde $\vec{\rho}$ é o vetor que localiza o elemento a partir do ponto C (Figura B.1). No Capítulo 2, seção 2.4.1 - *Energia Potencial Gravitacional*, as expressões (2.9) apresentam $\vec{\rho}$ para elementos nos diversos componentes do satélite.

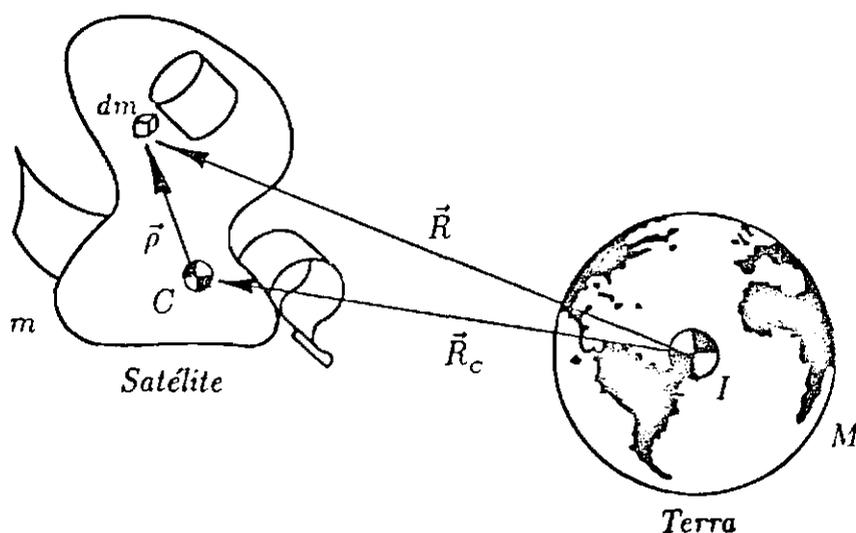


Figura B.1: Localização dos Elementos de Massa a Partir de C

Substituindo-se (B.2) no integrando de (B.1), este se reescreve sob a forma

$$R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}}} = \frac{1}{\sqrt{R_c^2 + 2\vec{R}_c \cdot \vec{\rho} + \vec{\rho} \cdot \vec{\rho}}}, \quad \text{onde } R_c = \|\vec{R}_c\|. \quad (\text{B.3})$$

Aplicando a expansão em Série de Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^2 + \dots$$

feita em torno de $x = 0$, à expressão (B.3), tem-se

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \frac{1}{R_c \sqrt{1 + 2\frac{\vec{R}_c \cdot \vec{\rho}}{R_c^2} + \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}}{R_c^2}}} = \\ &= R_c^{-1} \left\{ 1 - \frac{\vec{R}_c \cdot \vec{\rho}}{R_c^2} - \frac{1}{2} \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}}{R_c^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \left[\frac{2\vec{R}_c \cdot \vec{\rho}}{R_c^2} \right]^2 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Note que a ordem de grandeza de R_c é, em geral, por volta de 10^7 metros e de $\|\vec{\rho}\|$, cerca de 10 metros. Com isto, na expressão (B.4), não se levando em conta o termo em evidência $1/R_c$, estão representados termos com ordem até 10^{-12} . Apenas estes serão considerados. Os próximos termos teriam ordem inferior a 10^{-24} , desprezíveis por hipótese, quando comparados às outras magnitudes envolvidas no modelo.

Substituindo-se a expressão (B.4) em (B.1), obtém-se

$$V_G = -\frac{\mu m}{R_c} + \mu \int_m \frac{\vec{R}_c}{R_c^3} \cdot \vec{\rho} dm + \frac{\mu}{2R_c^3} \int_m \vec{\rho} \cdot \vec{\rho} dm - \frac{3\mu}{2R_c^5} \int_m (\vec{R}_c \cdot \vec{\rho})^2 dm. \quad (B.5)$$

B.2 Introdução da Diádica de Inércia e dos Cossenos Diretores da Vertical Local

A substituição de $\vec{\rho}$ por $\rho_x \vec{i}_c + \rho_y \vec{j}_c + \rho_z \vec{k}_c$, onde ρ_x , ρ_y e ρ_z são as componentes de $\vec{\rho}$ nas direções de \vec{i}_c , \vec{j}_c e \vec{k}_c respectivamente, na soma dos dois últimos termos de (B.5), resulta em

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu}{2R_c^3} \int_m [\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2 + 3\rho_x^2 (\frac{\vec{R}_c}{R_c} \cdot \vec{i}_c)^2 + 3\rho_y^2 (\frac{\vec{R}_c}{R_c} \cdot \vec{j}_c)^2 + 3\rho_z^2 (\frac{\vec{R}_c}{R_c} \cdot \vec{k}_c)^2 + \\ & + 6\rho_x\rho_y (\frac{\vec{R}_c}{R_c} \cdot \vec{i}_c)(\frac{\vec{R}_c}{R_c} \cdot \vec{j}_c) + 6\rho_x\rho_z (\frac{\vec{R}_c}{R_c} \cdot \vec{i}_c)(\frac{\vec{R}_c}{R_c} \cdot \vec{k}_c) + 6\rho_y\rho_z (\frac{\vec{R}_c}{R_c} \cdot \vec{j}_c)(\frac{\vec{R}_c}{R_c} \cdot \vec{k}_c)] dm. \end{aligned}$$

Se os cossenos diretores de \vec{R}_c com relação ao sistema instantâneo do satélite $\{C, \vec{i}_c, \vec{j}_c, \vec{k}_c\}$ forem denominados l_x , l_y e l_z , onde $l_x = \frac{\vec{R}_c}{R_c} \cdot \vec{i}_c$, $l_y = \frac{\vec{R}_c}{R_c} \cdot \vec{j}_c$ e $l_z = \frac{\vec{R}_c}{R_c} \cdot \vec{k}_c$, a expressão acima torna-se

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu}{2R_c^3} \int_m [(3l_x^2-1)\rho_x^2 + (3l_y^2-1)\rho_y^2 + (3l_z^2-1)\rho_z^2] dm + \\ & -\frac{\mu}{2R_c^3} [6l_x l_y J_{xy}^C + 6l_x l_z J_{xz}^C + 6l_y l_z J_{yz}^C], \end{aligned} \quad (B.6)$$

onde $J_{xy}^C = \int_m \rho_x \rho_y dm$, $J_{xz}^C = \int_m \rho_x \rho_z dm$ e $J_{yz}^C = \int_m \rho_y \rho_z dm$, são os produtos de inércia de \vec{J}^C , a diádica de inércia com relação ao ponto C do satélite no seu estado

deformado, escrita no sistema $\{C, \vec{i}_C, \vec{j}_C, \vec{k}_C\}$. Note que $\overline{\overline{J^C}}$ é dada por

$$\overline{\overline{J^C}} = \begin{bmatrix} J_{xx}^C & -J_{xy}^C & -J_{xz}^C \\ & J_{yy}^C & -J_{yz}^C \\ & & J_{zz}^C \end{bmatrix},$$

onde $J_{xx}^C = \int_m (\rho_y^2 + \rho_z^2) dm$, $J_{yy}^C = \int_m (\rho_x^2 + \rho_z^2) dm$ e $J_{zz}^C = \int_m (\rho_x^2 + \rho_y^2) dm$, são seus momentos principais de inércia.

Desde que $l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1$, no integrando do primeiro termo da expressão (B.6), tem-se

$$\begin{aligned} & (3l_x^2 - 1)\rho_x^2 + (3l_y^2 - 1)\rho_y^2 + (3l_z^2 - 1)\rho_z^2 = \\ & (2 - 3l_y^2 - 3l_z^2)\rho_x^2 + (2 - 3l_x^2 - 3l_z^2)\rho_y^2 + (2 - 3l_x^2 - 3l_y^2)\rho_z^2 = \\ & (1 - 3l_y^2)(\rho_x^2 + \rho_z^2) + (1 - 3l_x^2)(\rho_x^2 + \rho_y^2) + (1 - 3l_x^2)(\rho_y^2 + \rho_z^2) \end{aligned}$$

e, portanto

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu}{2R_c^3} [(1 - 3l_x^2)J_{xx}^C + (1 - 3l_y^2)J_{yy}^C + (1 - 3l_z^2)J_{zz}^C] + \\ & -\frac{\mu}{2R_c^3} [\hat{0} i_x i_y J_{xy}^C + \hat{0} i_x i_z J_{xz}^C + \hat{0} i_y i_z J_{yz}^C] = \\ & -\frac{\mu}{2R_c^3} tr(\overline{\overline{J^C}}) + \frac{3\mu}{2R_c^3} [l_x^2 J_{xx}^C + l_y^2 J_{yy}^C + l_z^2 J_{zz}^C - 2l_x l_y J_{xy}^C - 2l_x l_z J_{xz}^C - 2l_y l_z J_{yz}^C], \end{aligned}$$

onde $tr(\overline{\overline{J^C}})$ denota o traço da diádica de inércia do satélite.

Colocando-se os cossenos diretores l_x , l_y e l_z em notação vetorial, pode-se compactar ainda mais a última expressão, o que faz com que a soma dos dois últimos termos de (B.5), assumam finalmente a forma

$$-\frac{\mu}{2R_c^3} tr(\overline{\overline{J^C}}) + \frac{3\mu}{2R_c^3} \vec{L}^T \overline{\overline{J^C}} \vec{L}, \quad (B.7)$$

onde $\vec{L} = l_x \vec{i}_C + l_y \vec{j}_C + l_z \vec{k}_C$.

A substituição de (B.7) em (B.5), resulta como expressão

$$V_G = -\frac{\mu m}{R_c} + \mu \int_m \frac{\vec{R}_c}{R_c^3} \cdot \vec{\rho} dm - \frac{\mu}{2R_c^3} tr(\overline{\overline{J^C}}) + \frac{3\mu}{2R_c^3} \vec{L}^T \overline{\overline{J^C}} \vec{L}. \quad (B.8)$$

Como C é o centro de massa instantâneo do satélite, decorre que

$$\mu \int_m \frac{\vec{R}_c}{R_c^3} \cdot \vec{\rho} dm = \mu \frac{\vec{R}_c}{R_c^3} \int_m \vec{\rho} dm = 0,$$

sendo nulo, portanto, o segundo termo de (B.8).

B.3 Expressão Operacional para a Energia Potencial Gravitacional

Por fim, em acordo com Hughes (1986, p. 238), chega-se à expressão para a energia potencial gravitacional

$$V_G = -\frac{\mu m}{R_c} - \frac{\mu}{2R_c^3} \text{tr}(\overline{\overline{J^c}}) + \frac{3\mu}{2R_c^3} \vec{L}^T \overline{\overline{J^c}} \vec{L}. \quad (\text{B.9})$$

Esta é a expressão para a energia potencial gravitacional colocada na seção 2.4.1 do Capítulo 2, utilizada para o cálculo da Lagrangiana do sistema.

Apêndice C

Energia Potencial Elástica

Neste apêndice, será obtida a energia potencial elástica de uma placa devida à sua deformação elástica, sem compressão, utilizando-se a teoria clássica de elasticidade para pequenas deflexões. O material com o qual são feitas as placas será considerado homogêneo e distribuído continuamente em seu volume.

C.1 Tensões Atuantes num Elemento de Massa

Nesta seção, a notação e as convenções adotadas são as de Timoshenko e Goodier (1980).

As tensões *normal* e de *cisalhamento*, denotadas respectivamente por σ e τ , atuantes num elemento de massa no ponto P com arestas paralelas aos eixos coordenados x , y e z ¹, terão subíndices indicando a direção do plano no qual agem. Os sentidos positivos serão os da Figura (C.1).

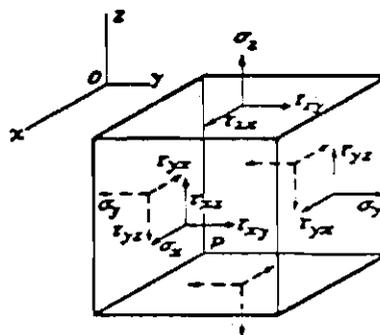


Figura C.1: Sentidos Positivos das Tensões Normal e de Cisalhamento

¹Os eixos x e y estão contidos no plano da placa, cada um com a direção de um bordo, e z tem a direção da normal.

A tensão normal será considerada positiva se for de tração e negativa se for de compressão. Seu subíndice indica a qual eixo ela é paralela.

A tensão de cisalhamento será decomposta em duas componentes paralelas aos eixos coordenados. Neste caso a primeira letra do subíndice determina a direção de atuação da normal ao plano considerado e a segunda letra determina a qual eixo a tensão de cisalhamento é paralela. Suas componentes serão positivas se orientadas no sentido positivo de um dos eixos coordenados x , y ou z , e atuarem em *faces positivas*, isto é, as três faces que não possuem arestas contidas nos planos formados pelos eixos coordenados ou, se orientadas no sentido negativo e atuarem nas outras faces.

Por comodidade, será admitido sem prova (Timoshenko e Goodier (1980)), que as tensões de cisalhamento satisfazem as relações

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \text{e} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

C.2 Deformações Sofridas por um Elemento de Massa

Considere o elemento de massa não deformado de dimensões dx , dy e dz , colocado no ponto P como mostra a Figura (C.2).

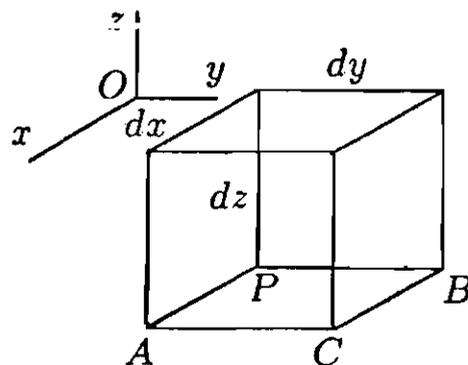


Figura C.2: Elemento de Massa Não Deformado no Ponto P

Quando submetido às tensões provenientes da deformação elástica, o ponto P se desloca de $\vec{\epsilon} = (u, v, w)$ da posição inicial, para a posição P' (*deslocamento elástico*).

Em consequência do deslocamento de P , o ponto A , seu adjacente, na direção x , se desloca de aproximadamente

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Portanto, devido à deformação elástica, o tamanho da aresta PA passou a ser aproximadamente $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ e não mais dx . Usualmente, $\frac{\partial u}{\partial x}$ é denominado *alongamento unitário* ou *deformação linear unitária*, sendo denotado por ϵ_x . Para as outras direções, analogamente, teremos ϵ_y e ϵ_z .

Note que além dos alongamentos unitários ϵ_x , ϵ_y e ϵ_z , ocorrem outras deformações. Observando a vista superior do deslocamento do ponto P para o ponto P' mostrada pela Figura (C.3), vê-se que o ponto A sofre também um deslocamento na direção y dado por $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ e o ponto B , além do alongamento unitário na direção y , ϵ_y , sofre um deslocamento na direção x dado por $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$.

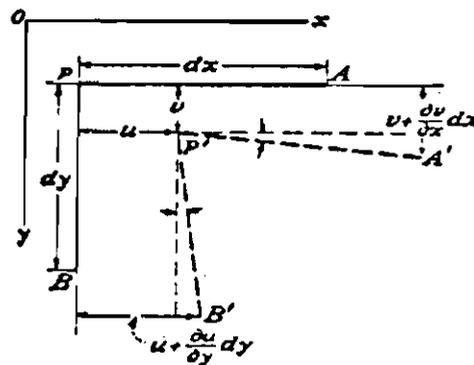


Figura C.3: Vista Superior do Deslocamento de P para P'

Resulta dos deslocamentos dos pontos A e B , uma pequena *deformação angular* entre os segmentos originais PA e PB e os segmentos $P'A'$ e $P'B'$ no estado deformado. Admitindo-se que $\frac{\partial v}{\partial x} dx$ e $\frac{\partial u}{\partial y} dy$ sejam suficientemente pequenos, podemos admitir que o ângulo entre os segmentos PA e $P'A'$ vale aproximadamente $\frac{\partial v}{\partial x}$ e entre PB e $P'B'$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Com isto, o ângulo inicialmente reto APB sofre uma *distorção* de $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$.

As deformações angulares entre os planos xy e xz e entre os planos yx e yz podem ser obtidas da mesma maneira. Utilizando a letra γ para representar as deformações angulares, das considerações acima, as componentes de deformação são escritas:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (C.1)$$

C.3 Lei de Hooke

Na teoria clássica de elasticidade, costuma-se supor que as relações existentes entre tensões e deformações satisfazem a Lei de Hooke na sua forma geral (Love (1934)), ou seja,

Cada uma das seis componentes da tensão em qualquer ponto do corpo é uma função linear das seis componentes da deformação naquele ponto.

Matematicamente, tem-se

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

onde os a_{ij} compõem uma matriz simétrica.

Considerando-se as tensões normais independentes das deformações angulares e admitindo-se que as tensões transversais à placa σ_z, τ_{xz} e τ_{yz} são desprezíveis quando comparadas às tensões atuantes no plano da placa por ser desprezível a sua espessura (Leissa (1969)), a expressão (C.2) se reduz a

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}.$$

Quando o material possui as mesmas propriedades elásticas em todas direções, pode-se exprimir os coeficientes acima como uma função simples das constantes características do material utilizado (Leissa (1969)), tendo-se

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \end{cases}, \quad (\text{C.3})$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, ν é uma constante chamada coeficiente de Poisson e G é o módulo de rigidez, sendo $G = E/[2(1 + \nu)]$.

C.4 Trabalho Realizado pelas Tensões

Supondo-se que a força que age numa face é igual ao produto da tensão no ponto central pela área da face, por exemplo o trabalho realizado pela tensão normal σ_x , admitida constante ao longo do elemento de massa representado na Figura (C.4), vale

$$\frac{1}{2} \sigma_x [(u)_1 - (u)_2] dydz,$$

onde $(u)_i$, $i = 1$ ou 2 , representa o deslocamento da face de centro i , perpendicular ao eixo x .

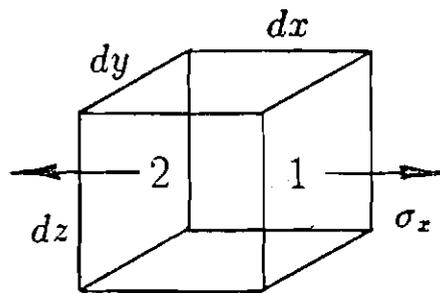


Figura C.4: Ação da Tensão Normal σ_x

No limite, a expressão torna-se

$$\frac{1}{2} \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz.$$

Considerando-se a tensão de cisalhamento τ_{xy} , para as faces 1 e 2, o trabalho realizado é escrito como sendo

$$\frac{1}{2} \left(\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy dz.$$

Portanto, para o elemento de massa, levando-se em conta todas as faces e não se esquecendo que foi admitida a igualdade $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, o trabalho realizado pelas tensões assume a forma

$$dW = \frac{1}{2} \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy dz.$$

C.5 Energia Potencial Elástica

Como a força elástica é conservativa, pode-se exprimir a energia potencial elástica armazenada na placa, na forma

$$V_E = - \int dW = -\frac{1}{2} \iiint \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy dz ,$$

a qual, utilizando-se (C.1) e (C.3), se escreve

$$V_E = -\frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \iiint \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dx dy dz .$$

Em termos da deflexão w da placa, os deslocamentos do elemento de massa colocado em P nas direções x e y são dados respectivamente por

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad e \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} , \quad (C.4)$$

onde z é a distância acompanhada de sinal, de P até o plano médio do painel, tendo sinal positivo se acima deste e negativo se abaixo.

Substituindo-se (C.4) na expressão de V_E , tem-se

$$V_E = -\frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \iiint z^2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy dz ,$$

que integrada em z de $-h/2$ a $h/2$, onde h é a espessura da placa, torna-se, em acordo com Leissa (1969),

$$V_E = -\frac{1}{2} \mathcal{D} \int_{PS} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] d_{PS} ,$$

onde $\mathcal{D} = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$.

Esta é a expressão para a energia potencial elástica colocada na seção 2.3.2 do Capítulo 2, utilizada para o cálculo da Lagrangiana do sistema.

Apêndice D

Rotinas de Controle

Neste apêndice será mostrada em detalhes a implementação computacional do esquema de controle proposto no Capítulo 3. Supondo-se que o *Sistema Reduzido* dado pela expressão (3.21) já tenha sido construído, esta implementação é realizada em duas etapas.

Na 1ª etapa é obtida a matriz de realimentação de estado do sistema reduzido, K_{Gr} , utilizando-se a expressão (3.11), no caso de autovalores reais, ou a expressão (3.13), no caso de autovalores complexos. Para isto, a controlabilidade deste sistema é verificada e os modos *não controláveis* incluídos na estrutura característica pretendida em malha fechada.

Logo após, a utilização do algoritmo de Porter e D'Azzo (1978b), descrito na seção 3.4 do Capítulo 3, fornece para cada autovalor associado a um modo *controlável*, os vetores que geram o respectivo espaço característico. Deste espaço é selecionado de forma *conveniente* um vetor *candidato* a autovetor em malha fechada. Uma vez completada a seleção dos autovetores em malha fechada, obtém-se a matriz de ganhos do sistema reduzido, K_{Gr} .

Em seguida é discutida a 2ª etapa de implementação do esquema de controle, quando é obtida a matriz de realimentação K_G do sistema original, a partir de K_{Gr} .

Foram inseridas no fim deste apêndice as duas rotinas em *Fortran*, utilizadas para a execução do esquema de controle: `CNTROL` e `KERNEL`.

D.1 Implementação do Controle: 1ª Etapa

O fluxograma da Figura (D.1), mostra a seqüência de passos executados pela rotina `CNTROL` na 1ª etapa do esquema de controle. Sua listagem encontra-se na seção D.3.1.

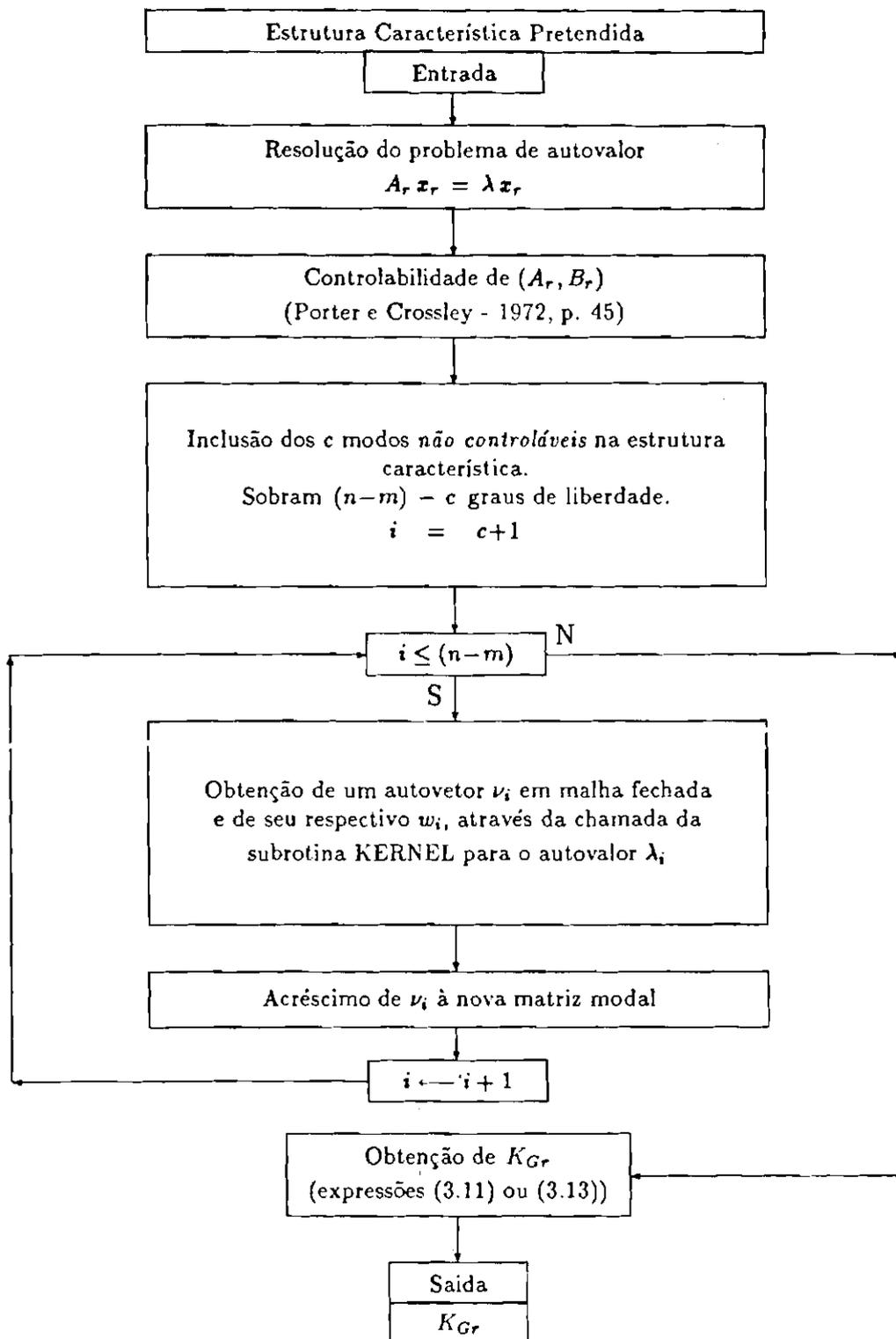


Figura D.1: Fluxograma da Rotina CONTROL - Obtenção de K_{Gr}

D.1.1 Controlabilidade do Sistema Reduzido

A controlabilidade para sistemas com autovalores distintos pode ser verificada como mostra Porter e Crossley (1972, p. 45).

Seja o sistema reduzido

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t),$$

onde $\mathbf{u}(t)$, é um vetor m -dimensional de controle e as matrizes \mathbf{A}_r e \mathbf{B}_r são aquelas dadas pela expressão (3.20). Suponha que este sistema possua em malha aberta matriz modal P e autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-m}$, com n o número de coordenadas generalizadas do sistema original. Procedendo-se à mudança de variáveis

$$\mathbf{x}_r(t) = P \mathbf{y}(t),$$

obtem-se, no espaço modal, o sistema

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{y}(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t),$$

onde $\mathbf{A}_r = P^{-1} \mathbf{A}_r P$ e $\mathbf{B}_r = P^{-1} \mathbf{B}_r$, donde se conclui que para cada modo pode ser escrito

$$\dot{y}_i(t) = \lambda_i y_i(t) + \sum_{j=1}^m B_{ij} u_j(t), \quad (\text{D.1})$$

onde $i = 1, 2, \dots, n - m$.

Na expressão (D.1), os coeficientes B_{ij} indicam a participação da j -ésima variável de controle no i -ésimo modo do sistema. Assim sendo, se $B_{ij} \neq 0$ para algum j , o i -ésimo modo do sistema é controlável.

Na subrotina CONTROL foi utilizado $zero = 10^{-6}$.

Inclusão dos Modos Não Controláveis na Estrutura Característica

Após a verificação da controlabilidade de cada modo, os não controláveis são incluídos na estrutura característica *pretendida*. Assim, os autovalores não controláveis são inseridos no conjunto dos autovalores pretendidos em malha fechada e seus autovetores na nova matriz modal. Para estes autovalores, os vetores \mathbf{w} associados (veja Teorema 1, seção 3.3, Capítulo 3), são tomados nulos. Desta forma, garante-se que o espaço dos modos não controláveis é mantido invariante.

D.1.2 Construção da Matriz de Realimentação para o Sistema Reduzido

A matriz de ganhos do sistema reduzido, K_{Gr} , é construída com o auxílio da subrotina KERNEL, responsável pela obtenção dos geradores do espaço característico associado a cada autovalor pretendido. Isto é feito empregando-se o algoritmo de Porter e D'Azzo (1978b) (Figura (3.1), seção 3.4, Capítulo 3). Esta subrotina devolve um vetor que deverá ser o novo autovetor em malha fechada, o qual é formado por uma combinação linear "conveniente" destes geradores.

A combinação linear efetuada é baseada numa análise prévia destes geradores. Para isto, primeiramente o programa é executado e os geradores obtidos. Em seguida são introduzidas, como dados, as constantes "convenientes" utilizadas nas combinações lineares.

O fluxograma da subrotina KERNEL é dado na Figura (D.2), visto na próxima página.

Convém salientar que na obtenção da matriz nula $\tilde{S}_{12}(\lambda_i)$ (segundo bloco o fluxograma da Figura (D.2)), as *operações elementares* utilizadas foram as do *Método de Eliminação de Gauss*, adaptado para este caso. Foi utilizada aritmética de complexos em precisão simples.

A listagem da subrotina KERNEL encontra-se na seção D.3.2.

D.2 Implementação do Controle: 2ª Etapa

Uma vez obtida a matriz de realimentação para o sistema reduzido, K_{Gr} , para que o vetor $u(t)$ possa ser escrito como função do estado x e não mais do estado reduzido x_r , a matriz de realimentação K_G deve ter a forma

$$K_G = [K_{Gr}^1 \mid \mathbf{0}_{m \times m} \mid K_{Gr}^2 \mid \mathbf{0}_{m \times m}],$$

onde K_{Gr}^1 é formada pelas $n - m$ primeiras colunas de K_{Gr} e K_{Gr}^2 por suas $n - m$ colunas restantes.

Espera-se que sob a lei de controle

$$u(t) = K_G x(t),$$

a estrutura característica do sistema original em malha fechada

$$x(t) = (A + BK_G) x(t),$$

contenha autovalores e autovetores "próximos" aos selecionados para o sistema reduzido. Os outros autovalores e autovetores estão associados à dinâmica dos atuadores.

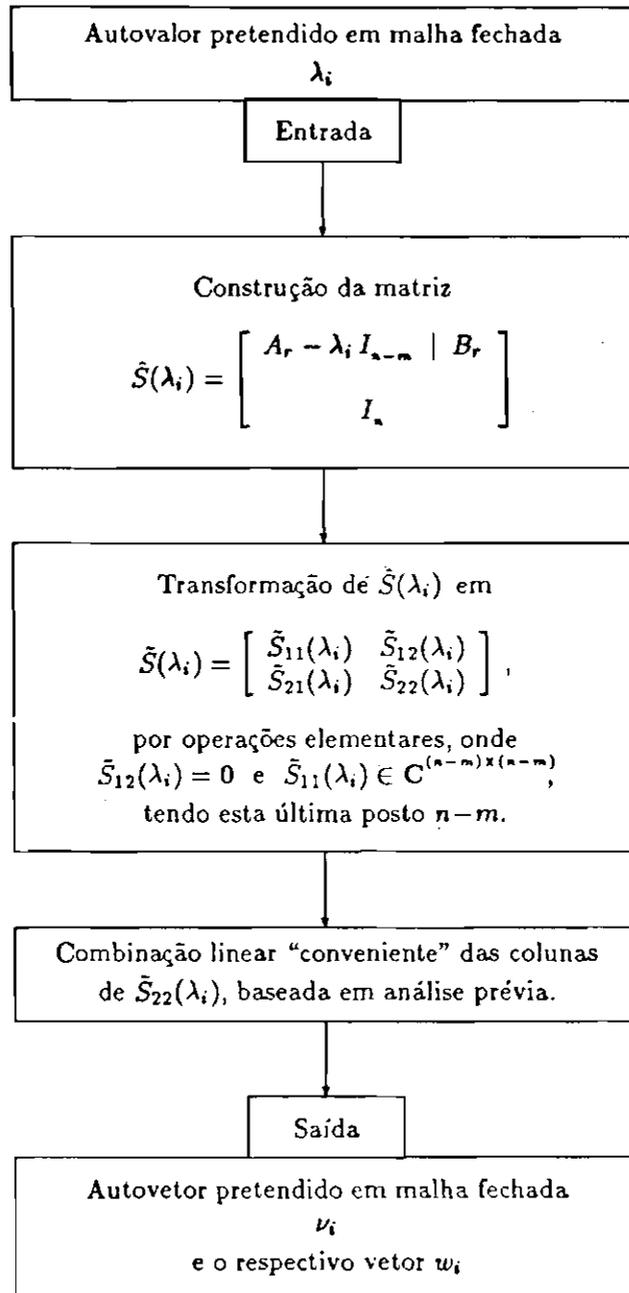


Figura D.2: Fluxograma da Subrotina KERNEL – Algoritmo de Porter e D’Azzo (1978b)


```

      GO TO 111
120 CONTINUE
      CAU2=C

C -----
C 4 CONSTRUÇÃO DA MATRIZ DE GANHOS EM USO DA
C SUBROTINA BERR2.)

C -----
      S=0
      IER=1
125 IF (15 GT 10) OR (IER EQ 0) GO TO 147
      S=S+1
      IER=0
      C=CAU2
130 IF (C GE 81 GO TO 141
      CALL BERR2(A,R,BR,R,AUTVAL,C,STE,VA,WA)
      DO 133 L=1,B
          V(L,C)=REAL(VA(L))
          W(L,C)=REAL(WA(L))
133 CONTINUE
      IF (ATRAC(AUTVAL(C)) EQ 0) GO TO 139
      C=C+1
      DO 136 L=1,B
          V(L,C)=ATRAC(VA(L))
          W(L,C)=ATRAC(WA(L))
136 CONTINUE
139 CONTINUE
      CALL USVFR('MATRIZ V ',S,V,40,R,B,3)
      C=C+1
      GO TO 130
141 CONTINUE

      DO 143 L=1,B
          DO 140 C=1,B
              TST(L,C)=V(L,C)
143 CONTINUE
145 CONTINUE
      CALL LSVDF(TST,40,R,B,BR,40,-1,VS,VA,IER)
      GO TO 125
147 CONTINUE
      IF (IER EQ 0) GO TO 150
      WRITE(6,/) 'EM 10 TENTATIVAS NAO FOI OBTIDA V INVERSIVEL.'
      GO TO 190
150 CONTINUE

      WRITE(6,/) ' '
      WRITE(6,/) 'EM ',S,' TENTATIVAS(S) FOI OBTIDA V INVERSIVEL.'

      WRITE(6,/) ' '
      CALL USVFR('NOVA MAT. MODAL (V)',19,V,40,R,B,3)

      WRITE(6,/) ' '
      CALL USVFR('MAT. DE ENTRADA (W)',19,W,40,R,B,3)

      CALL LIBW2F(V,B,40,INV,O,VA,IER)
      IF (IER EQ 0) GO TO 155
      WRITE(6,/) 'ERRO: CTRL0, LIBW2F-INSL, IER = ',IER
      GO TO 190
155 CONTINUE
      CALL FMULTF(W,INV,R,B,40,40,RR,20,IER)

      WRITE(6,/) ' '
      CALL USVFR('MAT.DE REALIMENTAÇÃO',20,FR,20,R,B,3)

190 CONTINUE
195 FORMAT('O AUTO VALOR ',2(E13.5),', BAO E CONTROLAVEL !!!')
200 FORMAT('O AUTO VALOR ',2(E13.5),', E CONTROLAVEL ')

      RETURN
      END

```


Apêndice E

Sistema de Manipulação Algébrica

Neste apêndice é apresentado o *Sistema de Manipulação Algébrica* - *SMA* desenvolvido para a obtenção das equações do movimento de uma classe particular de satélites artificiais: aqueles constituídos por um núcleo central rígido com o formato de um *paralelepípedo*, contendo rotores *cilíndricos* e painéis solares *retangulares*.

Na seção E.1 apresenta-se a concepção do sistema através de um esquema bastante simples. Este esquema mostra o conjunto de idéias centrais que norteiam toda a estrutura de programas em *Reduce* que compõe o *SMA*.

Na seção E.2, são colocadas as condições de aplicabilidade do *SMA*, enumerando-se todas as suposições feitas durante seu desenvolvimento, fazendo com que fiquem claros os casos em que se pode ou não utilizá-lo diretamente.

Na seção E.3, é apresentado e discutido o conjunto de programas utilizados. Isto será feito através de um *grafo hierárquico*, o qual conterá basicamente programas de dois tipos: os de extensão *.RED* (*REDuce*) e os de extensão *.ANS* (*ANSwer*).

A seção E.4 aponta possíveis generalizações do sistema, tentando ampliar a quantidade de configurações tratáveis computacionalmente.

Logo após, na seção E.5 são feitos alguns comentários e colocadas algumas curiosidades, como máquina utilizada, mensagens de erro, etc.. A intenção desta seção é transmitir um pouco da pouca experiência vivida na área de manipulação simbólica.

Por fim, a título de complementação do trabalho, são listados os programas que foram utilizados na composição do *SMA*.

E.1 Apresentação do SMA

O SMA foi gerado a partir de algumas idéias centrais, as quais foram se sofisticando com o tempo. Basicamente o que se pretendia era desenvolver um sistema que não fugisse aos objetivos do trabalho e ao mesmo tempo pudesse ser, talvez, o embrião de algo bem maior e útil à toda a comunidade. Com estas ambições em mente, foi concebido um sistema escrito em *Reduce* tendo-se as seguintes preocupações:

- caracterizar, descrever com a mínima quantidade de informações possível uma certa configuração básica, contendo componentes conhecidos, utilizada como ponto de partida;
- viabilizar qualquer seqüência de rotações e ângulos de atitude escolhidos, não fixando nenhuma seqüência em especial;
- aproximar o sistema ao máximo do método de modelagem apresentado, preservando quando possível as notações adotadas na teoria;
- introduzir uma certa versatilidade, isto é, poder deduzir a qualquer instante ou as equações de abertura, ou as equações de corpo rígido ou as equações do corpo considerando os deslocamentos elásticos das partes flexíveis. É claro que para estas últimas, deve haver a possibilidade de providenciar a linearização em torno de algum ponto adequado.

A Figura (E.1), na próxima página, mostra como ficam estas idéias num diagrama de blocos.

E.2 Condições de Aplicabilidade

A configuração básica adotada como ponto de partida, prevê a existência de componentes de quatro tipos:

1. o núcleo central, rígido com forma de prisma reto de base retangular,
2. os rotores, cilíndricos e rígidos, perfeitamente balanceados tanto dinâmica quanto estaticamente,
3. os painéis abertos, retangulares e flexíveis, e
4. os painéis em desdobramento, retangulares e rígidos, cuja forma de abertura é semelhante a de uma “porta”, isto é, eles são formados por apenas um elemento retangular e não por um conjunto deles se abrindo como “sanfona”.

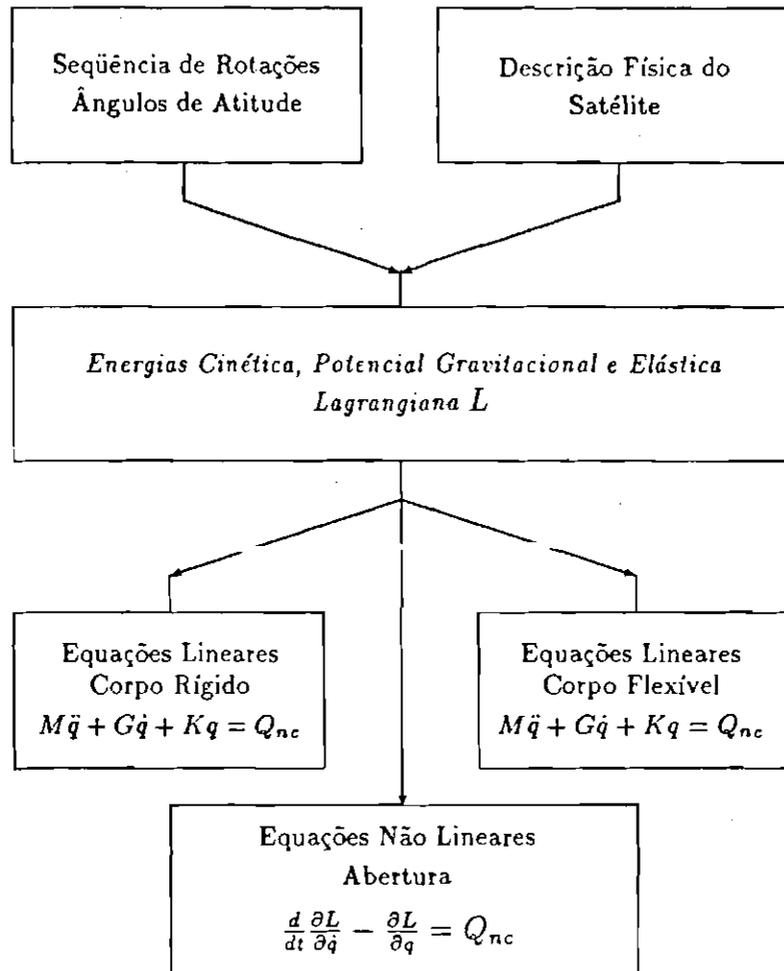


Figura E.1: Esquema Simplificado do Funcionamento do SMA

Há a restrição de que painéis flexíveis abertos e painéis rígidos em desdobramento *não podem existir simultaneamente*. A história de abertura dos painéis foi suposta conhecida e os rotores, a título de generalização, podem ou não estar em funcionamento durante seu desdobramento.

Em particular, a base foi admitida no formato especificado, simplesmente porque neste caso é muito simples o cálculo da posição de seu centro de massa e de seus eixos principais de inércia, e é particularmente simples localizar os elementos de massa dos outros componentes do veículo em seu sistema principal de inércia.

A escolha feita para a forma dos painéis solares e rotores, foi a escolha óbvia. A suposição de que os painéis são rígidos durante seu desdobramento foi feita para simplificar o modelo a ser deduzido e não o desenvolvimento do SMA. As hipóteses sobre o balanceamento dos rotores evita que se estude o movimento de vibração introduzido na estrutura por desalinhamentos em seu eixo de rotação ou de seu centro de massa (*efeito jitter* – Fonseca (1989)).

Outro fato importante é que a órbita do veículo foi admitida circular. Isto implica que a parcela da energia cinética $\frac{m}{2} \|\vec{V}_c\|^2$, onde m é a massa total do veículo e \vec{V}_c é a velocidade de seu centro de massa ao longo da órbita, é constante, podendo ser desprezada na abordagem Lagrangiana.

Não existem quaisquer restrições quanto ao número e ao posicionamento dos rotores, painéis abertos e em desdobramento. É interessante salientar que *não foram* desprezadas em nenhum instante a velocidade e o deslocamento do centro de massa instantâneo.

Nenhuma das simplificações feitas foi consequência de alguma eventual limitação indentificada no manipulador simbólico utilizado, o *Reduce* (Hearn (1987)). Elas visaram simplificar o modelo ou o desenvolvimento do SMA.

E.3 Composição

O SMA é um conjunto de programas em *Reduce*, os quais pertencem basicamente a dois subconjuntos distintos: os de extensão RED (REDuce) e os de extensão ANS (ANSwer).

Cada programa, assim como a *saída* por ele gerada, foi elaborado de forma que alterações em seu algoritmo ou na forma de sua saída, repercutissem o mínimo possível no resto da estrutura, isto é, gerassem o menor número possível de alterações nos demais programas do sistema.

O *grafo hierárquico* da Figura (E.2), mostra a interdependência entre os programas que compõe o *Sistema de Manipulação Algébrica*.

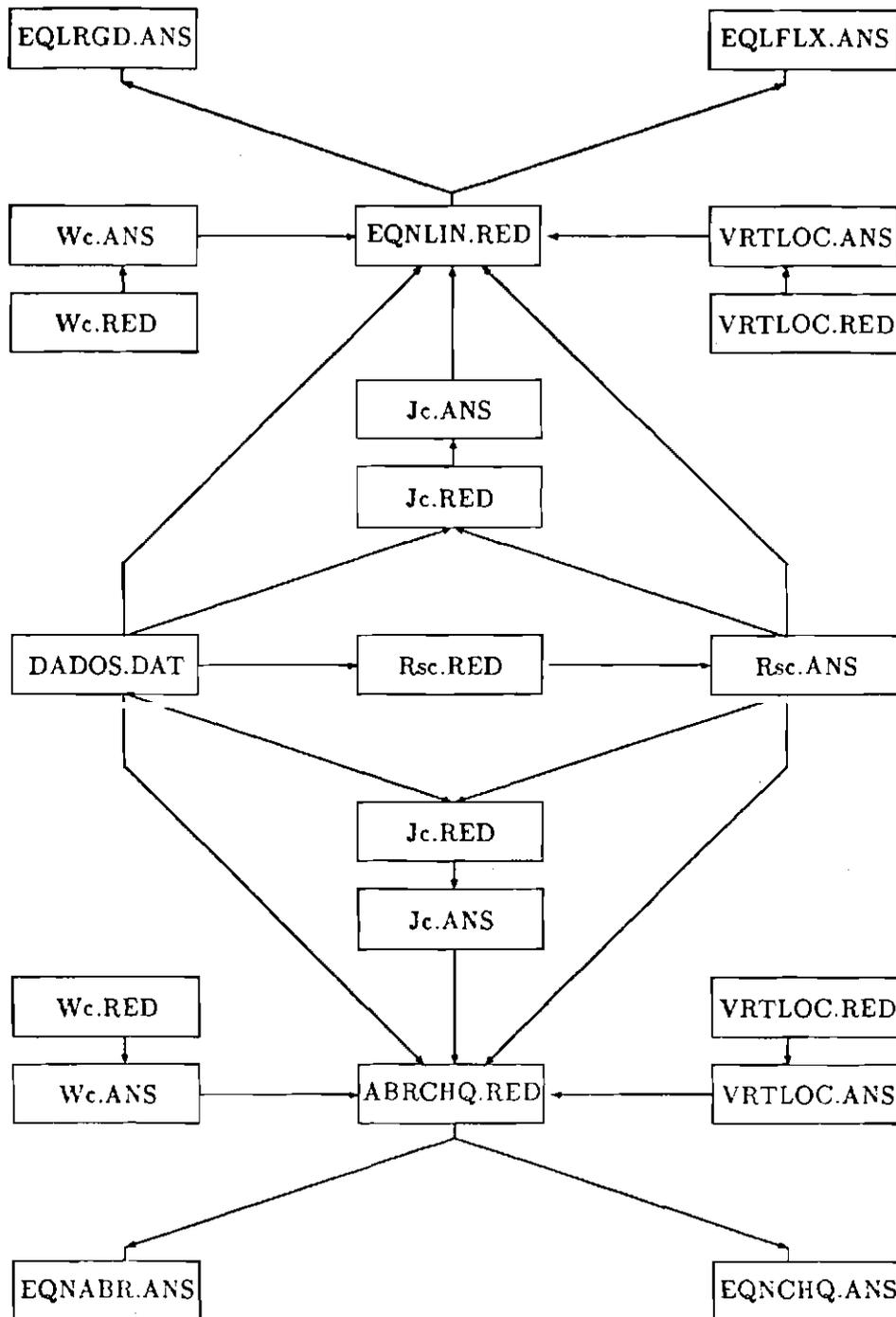


Figura E.2: Interdependência dos Programas que Compõe o SMA

O programa DADOS.DAT, no centro do diagrama à esquerda, é talvez o mais importante de todo o sistema. Ele contém não só informações como tipo e número de apêndices do satélite, como também a sua localização e as coordenadas generalizadas envolvidas na sua descrição dinâmica.

Os programas de extensão .RED fornecem resultados (programas do tipo .ANS) que podem ser utilizados ou em programas de simulação e controle escritos em *Fortran*, ou em outros programas de manipulação simbólica do tipo .RED.

A seguir é dada uma descrição detalhada do uso e do conteúdo de cada um destes programas, e de como é feita a manipulação da informação.

E.3.1 DADOS.DAT

A primeira informação contida neste arquivo é a quantidade existente de cada tipo de apêndice e o número de graus de liberdade usados em sua descrição dinâmica.

Com o auxílio da notação introduzida no Capítulo 2, a Tabela (E.1) colocada na próxima página, apresenta para cada componente a informação contida no arquivo DADOS.DAT.

A localização do centro de massa de cada componente foi introduzida para facilitar o cálculo do centro de massa instantâneo do veículo, tornando necessárias apenas as integrações no domínio dos painéis abertos.

O uso desta estratégia possibilita a utilização do *Teorema de Steiner* no cálculo da diádica de inércia do veículo, fazendo com que sejam necessárias apenas as integrações no domínio dos painéis abertos. Isto permitiu um cálculo mais rápido da diádica do veículo no seu estado deformado, isto é, com painéis sujeitos a abetura ou flexibilidade.

Os outros dados utilizados já foram discutidos ao longo do Capítulo 2.

E.3.2 Rsc.RED e Rsc.ANS

O programa Rsc.RED calcula a posição do centro de massa instantâneo do satélite como uma função do tempo. Os resultados são armazenados no arquivo Rsc.ANS, utilizado posteriormente no cálculo da diádica de inércia do veículo e no cálculo da velocidade do centro de massa instantâneo, necessária à obtenção da energia cinética total.

Se existirem painéis em desdobramento, estes resultados são escritos também utilizando-se o modo *Fortran*, o que torna as expressões diretamente

Tabela E.1: Conteúdo de DADOS.DAT

Componente	Informação Utilizada Para Caracterização
<i>Base</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1. massa, diádica principal de inércia e 2. posição de seu centro de massa, B, a partir de S.
<i>Rotor</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1. massa, diádica principal de inércia, 2. matriz de rotação L_{CR_j}, 3. \vec{R}_{SR_j}, posição de seu centro de massa a partir de S, e $\vec{\omega}_{R_j}$, velocidade angular com relação à base.
<i>Painel Aberto</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1. densidade superficial, dimensões, diádica principal de inércia, 2. r_{A_i}, posição de um elemento do painel não deformado a partir de A_i e CM_{A_i}, centro de massa, 3. \vec{e}_{A_i}, deslocamento elástico em termos de autofunções da viga engastada-livre e livre-livre, 4. matriz de rotação L_{CA_i} e a posição de A_i a partir de S, \vec{R}_{SA_i}.
<i>Painel em Desdobramento</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1. densidade superficial, dimensões, diádica principal de inércia, 2. \vec{r}_{D_k} e CM_{D_k}, respectivamente a posição de um elemento do painel em desdobramento e do centro de massa, e 3. matriz de rotação L_{CD_k} e a posição de D_k a partir de S, \vec{R}_{SD_k}.

aproveitáveis para avaliação numérica.

Não são desprezados os deslocamentos elásticos dos painéis já abertos.

E.3.3 Jc.RED e Jc.ANS

O programa Jc.RED calcula a diádica de inércia do satélite como função do tempo. Os resultados, armazenados em Jc.ANS, são utilizados no cálculo da energia cinética total do veículo e de sua energia potencial gravitacional. Aqui também *não são desprezados* os deslocamentos elásticos.

Havendo painéis em desdobramento, equações apropriadas à avaliação numérica em um programa em *Fortran*, são fornecidas.

E.3.4 Wc.RED, Wc.ANS, VRTLOC.RED, VRTLOC.ANS

Os programas Wc.RED e VRTLOC.RED são independentes dos demais. Sua importância só é superada pelo arquivo DADOS.DAT. O primeiro calcula a velocidade angular absoluta do sistema instantâneo do satélite e o segundo a vertical local. Ambos contêm a seqüência de rotações e os ângulos de atitude escolhidos.

A velocidade $\vec{\omega}_c$ e o vetor \vec{L} são armazenados em Wc.ANS e VRTLOC.ANS respectivamente, e utilizados posteriormente no cálculo das energias cinética e potencial gravitacional.

E.3.5 ABRCHQ.RED, EQNABR.ANS e EQNCHQ.ANS

O programa ABRCHQ.RED é hierarquicamente inferior a qualquer outro programa com extensão .RED, exceto EQNLIN.RED discutido mais adiante. Nele são construídas as expressões das energias cinética e potencial gravitacional, associadas à fase de desdobramento dos painéis. Estas expressões dão origem à Lagrangiana a partir da qual, em seguida, são obtidas as equações não linearizadas da fase da abertura.

São também calculadas as expressões da variação do impulso generalizado, necessárias ao cálculo das velocidades generalizadas após o impacto dos painéis.

Este programa fornece saída aproveitável para avaliação numérica nos arquivos EQNABR.ANS e EQNCHQ.ANS, os quais contêm respectivamente, as equações da fase de abertura e as equações da variação do impulso generalizado.

E.3.6 EQNLIN.RED, EQLRGD.ANS E EQLFLX.ANS

O programa EQNLIN.RED é hierarquicamente inferior a qualquer outro programa com extensão .RED, exceto ABRCHQ.RED . Nele são construídas as expressões das energias cinética, potenciais gravitacional e elástica, associadas ao veículo após a abertura dos painéis. Estas expressões dão origem à Lagrangiana, que em seguida pode ser utilizada na obtenção das equações linearizadas do movimento, considerando ou os painéis flexíveis ou não.

Este programa pode fornecer saída em dois arquivos: EQLRGD.ANS e EQLFLX.ANS . O primeiro contém as equações de corpo rígido do veículo, diretamente aproveitáveis num programa em *Fortran*.

O segundo fornece as equações do movimento para o satélite envolvendo os graus de liberdade associados à flexibilidade dos painéis, deixando indicadas as integrações. Isto foi feito para facilitar a interpretação dos resultados obtidos. Assim sendo, este arquivo não se encontra pronto para uso direto num programa de simulação, sendo necessária, após a sua obtenção, alguma manipulação algébrica numa nova sessão de *Reduce*, não indicada no grafo da Figura (E.2).

E.4 Possíveis Alterações

Certamente as restrições que mais saltam à vista são com relação ao formato da base e à órbita admitida.

Na verdade, qualquer outra base para a qual se saiba calcular o centro de massa, os eixos principais de inércia e a diádica principal, pode ser usada.

Para a modificação na órbita basta a introdução do termo $\frac{m}{2} \|\vec{V}_c\|^2$, na expressão da energia cinética. Este termo deve, de alguma forma ser dado em função das coordenadas generalizadas e do tempo .

Talvez seja interessante introduzir novos tipos de componentes, por exemplo antenas e mastros. Isto requeriria a introdução de sua energia potencial elástica e da descrição de seus deslocamentos elásticos para a obtenção das velocidades elásticas e, conseqüentemente, da energia cinética associada a estes deslocamentos.

Possivelmente será útil generalizar a forma de abertura dos painéis. Permitir que eles sejam compostos, em geral, por diversos elementos retangulares é uma abordagem que parece ser o início. Seus históricos não necessariamente precisam ser conhecidos. Com muito pouco esforço é possível transformar-se os ângulos de abertura em coordenadas generalizadas, bastando para isto incluí-lo nas derivações da equação de Lagrange.

Para que possam existir simultaneamente painéis abertos flexíveis e painéis em desdobramentos, basta modificar um dos arquivos, ou EQNLIN.RED ou ABRCHQ.RED, incluindo-se as parcelas da Lagrangiana e as regras de derivação que faltam. Isto não foi feito apenas para simplificar e diminuir o tamanho dos programas.

Como se encontra, o arquivo DADOS.DAT requer um tratamento prévio da localização dos elementos de massa. Novas formas de descrição física do veículo devem ser investigadas.

E.5 Comentários e Curiosidades

Talvez alguém tenha se perguntado: “Por que o manipulador simbólico utilizado foi o *Reduce*?”

A princípio, havia dois manipuladores à disposição: o *Reduce*, instalado no UNISYS B7900 do CCE-USP, e o *Mumath* numa versão para PC. Como era sabido que os cálculos deveriam ser extensos, optou-se pelo *Reduce*.

Uma outra vantagem na utilização do *Reduce* é que ele pode imprimir em arquivo as expressões prontas para uso num programa escrito em *Fortran*.

Estes fatores levaram à sua escolha. Para fazer-se o “ensaio” dos programas foi utilizada uma versão de 1987, desenvolvida para microcomputadores com sistema operacional do tipo MS-DOS. Utilizando um micro com 704k de RAM, apesar do pouco espaço de memória que sobra para as manipulações, em cerca de 40 minutos consegue-se as equações linearizadas do movimento de atitude de um corpo rígido (apenas 3 graus de liberdade).

Com tal espaço, apesar de todos os truques utilizados para economizar memória, nenhum outro resultado foi conseguido.

Qual não foi a surpresa quando, após dois meses de “ensaios” no micro, descobriu-se que a versão no UNISYS era tão ultrapassada que era virtualmente impossível de ser utilizada!

Depois de muito esforço e diversos telefonemas, o IFT - Instituto de Física Teórica, gentilmente cedeu tempo de processamento em seu μ VAX, dispondo de 4 Mega de RAM. Neste sistema, rapidamente foi elaborado o que faltava do SMA. Os tempos de processamento variam bastante, dependendo da equação que se está deduzindo, podendo chegar a cerca de 2 horas.

A experiência com o *Reduce* mostrou que as vezes podem ser obtidas mensagens do tipo:

CATASTROPHIC ERROR!!!

Esta foi obtida simplesmente por que foi adicionada a regra trigonométrica

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

antes das integrações das autofunções que modelam os deslocamentos elásticos.

A seguir, pela sua importância neste trabalho, são listados os programas em *Reduce*, com extensão .RED, que compõe o *SMA*.

E.6 Listagens dos Programas em Reduce

E.6.1 DADOS.DAT

```

-----I
I FILE: DADOS.DAT           Instituto de Física Teórica - IPT I
I                               I
I OBJETO:  Fornecer os dados para o sistema.  DATA: 22/SET/90 I
-----I
    
```

```

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
I D1. Numero de rotores, palmeas abertas e em desdobramento, numero I
I de graus de liberdade utilizados na descrição do seu movimento. I
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

MAT:= ? $  NPA:= ? $  SPD:= ? $          GLBT:= ? $  GLPA:= ? $
    
```

```

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
I D2. Dados para a caracterização da BASE: I
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
I D2(1). CM da base a partir de S (CM do satelite nao deformado) I
I escrito no Sistema Instantaneo do satelite. I
-----I
Matriz CM(3,3)$          CM:=TP( MAT((-BS(1),-BS(2),-BS(3))) $
    
```

```

-----I
I D2(2). Diadica principal da base, reescrita num sistema "geomé- I
I tricamente conveniente", colocado em C. I
-----I
Matriz JB(3,3)$          JB:=MAT((JBx,0,0),(0,JBz,0),(0,0,JBz))$
    
```

```

I D3. Dados para a caracterização dos ROTORES:
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
I D3(1). Massas dos rotores:
-----I
Operator MRS          MR(1):=MRS          MR(2):=MRS          MR(3):=MRS
    
```

```

I D3(2). Diadica do rotor escrita em seus eixos principais
-----I
Operator JRS
JR(1,1,1):=JRS          JR(1,1,2):=OS          JR(1,1,3):=OS
JR(1,2,1):=OS          JR(1,2,2):=JRS          JR(1,2,3):=OS
JR(1,3,1):=OS          JR(1,3,2):=OS          JR(1,3,3):=JRS
JR(2,1,1):=JRS          JR(2,1,2):=OS          JR(2,1,3):=OS
JR(2,2,1):=OS          JR(2,2,2):=JRS          JR(2,2,3):=OS
JR(2,3,1):=OS          JR(2,3,2):=OS          JR(2,3,3):=JRS
JR(3,1,1):=JRS          JR(3,1,2):=OS          JR(3,1,3):=OS
JR(3,2,1):=OS          JR(3,2,2):=JRS          JR(3,2,3):=OS
JR(3,3,1):=OS          JR(3,3,2):=OS          JR(3,3,3):=JRS
    
```

```

I D3(3). Matriz de mudança. Bj ---> C
-----I
Operator LRS
LR(1,1,1):=LS          LR(1,1,2):=OS          LR(1,1,3):=OS
LR(1,2,1):=OS          LR(1,2,2):=COS q(6)$          LR(1,2,3):=SIN q(6)$
LR(1,3,1):=OS          LR(1,3,2):=-SIN q(6)$          LR(1,3,3):=COS q(6)$
LR(2,1,1):=COS q(7)$          LR(2,1,2):=OS          LR(2,1,3):=-SIN q(7)$
LR(2,2,1):=OS          LR(2,2,2):=SIN q(7)$          LR(2,2,3):=OS
LR(2,3,1):=SIN q(7)$          LR(2,3,2):=OS          LR(2,3,3):=COS q(7)$
    
```

```

LR(3,1,1):=COS q(8)$          LR(3,1,2):=SIN q(8)$          LR(3,1,3):=OS
LR(3,2,1):=-SIN q(8)$          LR(3,2,2):=COS q(8)$          LR(3,2,3):=OS
LR(3,3,1):=OS          LR(3,3,2):=OS          LR(3,3,3):=SIN
    
```

```

-----I
I D3(4). Velocidade angular c/rel. a BASE, no Sistema Instantaneo I
-----I
Operator MRS
MR(1,1):=DF(q(6),TE)B          MR(2,1):=OS          MR(3,1):=OS
MR(1,2):=OS          MR(2,2):=DF(q(7),TE)B          MR(3,2):=OS
MR(1,3):=OS          MR(2,3):=OS          MR(3,3):=DF(q(8),TE)B
    
```

```

-----I
I D3(5). Vetores que ligam S a Rj, no Sistema Instantaneo. I
-----I
Operator BRS
BR(1,1):=-BS(1) + d1$          BR(2,1):=-BS(1)$          BR(3,1):=-BS(1)$
BR(1,2):=-BS(2)$          BR(2,2):=-BS(2) + d2$          BR(3,2):=-BS(2)$
BR(1,3):=-BS(3)$          BR(2,3):=-BS(3)$          BR(3,3):=-BS(3) + d3$
    
```

```

I HIPOTESE: Os rotores estão sobre o CM da BASE.
d1:=OS          d2:=OS          d3:=OS          I dj = distancia sobre eixo j de CM a CMj
ENDE
    
```

```

I D4. Dados para a caracterização das PALMEAS ABERTAS:
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
I D4(0). Densidade superficial das palmeas:
-----I
Operator BRDAS          BRD(1):=BRD$          BRD(2):=BRD$          BRD(3):=BRD$
    
```

```

I D4(1). Deslocamento elastico Eai, no Sistema do 1-esimo Painel I
I aberto. I
I HIPOTHESES: O1. Deslocamentos elasticos normais ao plano. I
I O2. modo 1 de flexão = modo 1 de torção. I
-----I
I GLPA=0 then Begin          q(4):=OS          q(5):=OS          ENDE
x(1):=x1$          x(2):=x2$          x(3):=x1$          I Variaveis para integracao
y(1):=y1$          y(2):=y2$          y(3):=y1$          I a/ou derivacao
Operator EA,PHI,PSI$
EA(1,1):=PHI(x1)+q(4)$
EA(1,2):=OS
EA(1,3):=OS
EA(2,1):=PHI(x2)+q(5)$
EA(2,2):=OS
EA(2,3):=OS
EA(3,1):=-PHI(x1)+q(4)$
EA(3,2):=OS
EA(3,3):=OS
    
```

```

I D4(2). Localizacao do CM do painel i a partir de ai, escrito no I
I Sistema do 1-esimo Painel aberto. I
-----I
Operator CMA$
CMA(1,1):=OS          CMA(2,1):=OS          CMA(3,1):=OS
CMA(1,2):=OS          CMA(2,2):=L1$          CMA(3,2):=OS
CMA(1,3):=-L1$          CMA(2,3):=OS          CMA(3,3):=-L1$
    
```



```

LD(2,1,1):-18      LD(2,1,2):-08      LD(2,1,3):-08
LD(2,2,1):-08      LD(2,2,2):-18      LD(2,2,3):-08
LD(2,3,1):-08      LD(2,3,2):-08      LD(2,3,3):-18

LD(3,1,1):-18      LD(3,1,2):-08      LD(3,1,3):-08
LD(3,2,1):-08      LD(3,2,2):-18      LD(3,2,3):-08
LD(3,3,1):-08      LD(3,3,2):-08      LD(3,3,3):-18

```

```

-----X
X DS(6). Vetores que ligam S a Oλ, no Sistema Instantaneo. X
-----X

```

Operator BS,ASD8

```

ASD(1,1):-BS(1) + L18 ASD(2,1):-BS(1) + L18 ASD(3,1):-BS(1) + L18
ASD(1,2):-BS(2)8 ASD(2,2):-BS(2) + L28 ASD(3,2):-BS(2)8
ASD(1,3):-BS(3) + L38 ASD(2,3):-BS(3)8 ASD(3,3):-BS(3) - L38

```

```

-----X
X DS(6). Dimensoes dos paineis. X
-----X

```

Operator x,y8

```

x(1):-2+L18      x(2):-2+L18      x(3):-2+L18 X Sentido Clamped-Free
y(1):-2+L78      y(2):-2+L38      y(3):-2+L28 X Sentido Free-Free
E8D8

```

```

-----X      -----X      -----X
X              X              X
-----X      -----X      -----X
E8D8

```


E.6.3 Wc.RED

```

-----
I FILE: Wc.RED                               Instituto de Física Teórica - IPT
I
I OBJETIVO:   Cálculo da velocidade angular inercial Wc.
I
I DEVOLVE:   Wc.ABS                               DATA: 11/JUN/90
-----

Matris RTR(3,3),  I Rotacao em torno do eixo de rolamento.
RTA(2,3),  I Rotacao em torno do eixo de arfagem.
RTG(3,3) I Rotacao em torno do eixo de guinada

Operator q# Depend q,YES                               Off RATE

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
I SISTEMA ORBITAL (C,a g r):  {1} Q(1) em torno de a
I                               {2} Q(2) em torno de g
I                               {3} Q(3) em torno de r
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

RTA(1,1):=1$      RTA(1,2):=0$      RTA(1,3):=0$
RTA(2,1):=0$      RTA(2,2):=COS(q(1))$  RTA(2,3):=SIN(q(1))$
RTA(3,1):=0$      RTA(3,2):=-SIN(q(1))$  RTA(3,3):=COS(q(1))$

RTG(1,1):=-COS(q(2))$  RTG(1,2):=0$      RTG(1,3):=-SIN(q(2))$
RTG(2,1):=0$          RTG(2,2):=1$      RTG(2,3):=0$
RTG(3,1):=-SIN(q(2))$  RTG(3,2):=0$      RTG(3,3):=COS(q(2))$

RTR(1,1):=COS(q(3))$  RTR(1,2):=SIN(q(3))$  RTR(1,3):=0$
RTR(2,1):=-SIN(q(3))$  RTR(2,2):=COS(q(3))$  RTR(2,3):=0$
RTR(3,1):=0$          RTR(3,2):=0$      RTR(3,3):=1$

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
I
I          FÓRMULA PARA O CÁLCULO DE WC
I
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Out "[ALEMROMA]Wc.ABS"$

Write "Matris WC(3,1)"$
WC:=RTR+RTG*TPMAT(( DF(q(1),YES),0,0 ))) +
  RTR*TPMAT(( 0,DF(q(2),YES),0 ))) + TPMAT(( 0,0,DF(q(3),YES) ))) +
  RTR+RTG+RTA*TPMAT(( WD,0,0 ));
Write "END"$

Show "[ALEMROMA]Wc.ABS"$

I-----I      I-----I      I-----I
I      I      I      I      I      I
I-----I      I-----I      I-----I
ENDE

```

E.6.4 Jc.RED

```

-----I
I FILE: Jc.RED                               Instituto de Física Teórica - IPT I
I
I OBJETIVO: Cálculo de índice de satélite   I
I
I INVOCA: Rec.ABS e DADOS.DAT              I
I
I DEVOLVE: Jc.ABS                           DATA: 21/JUL/90 I
-----I

Matriz JAS(3,3), JBS(3,3), JC(3,3), JDS(3,3), JES(3,3), JNSC(3,3)

Operator q,RA,RRS                               Def DATS

I-----I
I In "[ALEXANDRA]DADOS.DAT"
I-----I

I JC 1. Construção das parcelas associadas a RASE I
I-----I

Matriz PRDESC(1,1)§                          PRDESC:=TP(CMB)+CMB§
JBS:=JB + MB*( PRDESC(1,1)*MAT((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))-CMB*TP(CMB) )§
Clear CMB,JB,PRDESC

I-----I
I JC 2. Construção das parcelas associadas aos ROTORES: I
I-----I

Matriz JRj(3,3),LRj(3,3),RSRj(3,1)§
For j:=1:RT do
  Begin
    For i:=1:3 do Begin
      RSRj(i,1)=RSR(j,1)§
      For c:=1:3 do Begin
        JRj(i,c)=JR(j,1,c)§
        LRj(i,c)=LR(j,1,c)§
      End§
    End§
  End§
JRj:=TP(LRj)+JR+LRj§

Matriz PRDESC(1,1)§
PRDESC:=TP(RSRj)+RSRj§
JRj:=JRj + RA(j)*( PRDESC(1,1)*MAT((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) -
  RSRj*TP(RSRj) )§
Clear PRDESC
JBS:=JBS + JRj§

End§
Clear JR,LRj,LRj,RSR,RSRj§

I-----I
I JC 3. Construção de parcelas associadas a PAINEIS EM DUBSUMENTO: I
I-----I

Matriz OMDh(3,1),JDa(3,3),LDh(3,3),RSDh(3,1)§
For h:=1:EPD do
  Begin
    For i:=1:3 do Begin
      OMDh(i,1)=OMD(h,1)§
      RSDh(i,1)=RSD(h,1)§
      For c:=1:3 do Begin
        JDa(i,c)=JD(h,1,c)§
        LDh(i,c)=LD(h,1,c)§
      End§
    End§
  End§
JDa:=TP(LDh)+JDa+LDh§

Matriz PRDESC(1,1)§
PRDESC:=TP(RSDh + LDh+OMDh )-( RSDh + LDh+OMDh )§
JDa:=JDa + RA(h)*( PRDESC(1,1)*MAT((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) -
  (RSDh+LDh+OMDh)*TP(RSDh+LDh+OMDh) )§
Clear PRDESC

```

```

JDS:=JDS + JDS§
End§
Clear CMB,CMB,JD,JDh,LD,LDh,RSD,RSDh§

I-----I
I JC 4. Construção das parcelas associadas aos PALHIS ABERTOS: I
I-----I

Matriz CRAi(3,1), EAi(3,1), JAi(3,3), LAi(3,3), rai(3,3),RSAi(3,1)§
Matriz Jaux(3,3)§
For i:=1:RPA do
  Begin
    For l:=1:3 do Begin
      CRAi(l,1)=CRA(i,1)§
      EAi(l,1)=EA(i,1)§
      rai(l,1)=rai(i,1)§
      RSAi(l,1)=RSA(i,1)§
      For c:=1:3 do Begin
        JAi(l,c)=JAI(i,1,c)§
        LAi(l,c)=LAI(i,1,c)§
      End§
    End§
  End§
  xi:=xi(i)§
  yi:=yi(i)§
  I variáveis de integração

  JAI:= TP(LAI)+JAI+LAI§

Matriz aux(3,3),PRDESC(1,1)§
PRDESC:=TP( RSAi+LAI+CRAi )-( RSAi+LAI+CRAi )§
JAI:=JAI + RA(i)*( PRDESC(1,1)*MAT((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) -
  (RSAi+LAI+CRAi)*TP(RSAi+LAI+CRAi) )§

PRDESC:=TP(CRAi)+RAi§
aux:=PRDESC(1,1)*MAT((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) - EAi*TP(EAi)§
For l:=1:3 do For c:=1:3 do If c≠l then
  Begin
    aux(l,c)=RND4(i)+aux(l,c)§
    aux(l,c)=INT( INT(aux(l,c),yi),xi )§
  End§
For l:=1:3 do For c:=1:3 do aux(c,1)=aux(l,c)§
Jaux:=Jaux + TP(LAI)+aux+LAI§
PRDESC:=TP( RSAi+LAI+rai )-( LAi+EAi )§
aux:=2*PRDESC(1,1)*MAT((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) -
  (RSAi+LAI+rai)*TP(LAI+rai) - (LAI+LAI)*TP(RSAi+LAI+rai)§
For l:=1:3 do For c:=1:3 do If c≠l then
  Begin
    aux(l,c)=RND4(i)+aux(l,c)§
    aux(l,c)=INT( INT(aux(l,c),yi),xi )§
  End§
For l:=1:3 do For c:=1:3 do aux(c,1)=aux(l,c)§
Jaux:=Jaux + aux§
JAS:=JAS + JAI§

Clear aux,PRDESC
End§
Clear EA,EAi,CRA,CRAi,JD,JAi,LA,LAi,ra,rai,RSA,RSAi§

I-----I
I JC 5. Construção da parcela associada ao CM do veículo: I
I-----I
I-----I
I In "[ALEXANDRA]Rec.ABS"§ I Rec
I-----I

Matriz PRDESC(1,1)§
PRDESC:=TP(RSC)+RSC§
JASC:= -R*( PRDESC(1,1)*MAT((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) - RSC*TP(RSC) )§
Clear PRDESC,RSC§

```

```

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
! JC 6. Saída para avaliação numérica e/ou para outras opções: !
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

```

```

Matrix aux(3,3) Operator JJ5
For all a Tot (COS a)**2 + (SIN a)**2 = 1$
aux:=JBS + JBS + JJS + JJS$
For l:=1:3 do For c:=1:3 do If c=1 then JC(l,c):=JJ(l,c)$
For l:=1:3 do For c:=1:3 do JC(c,l):=JC(l,c)$

Out "[ALPHEDRA]JC.AVS"$

IF BPD=0 then Begin
  Write "Matrix JC(3,3) Operator JJ"$
  Write JC:=JC + Jaux + JNSC$
  Write "END"$

  On FORTS
  Write JC:=JCS$

  For l:=1:3 do For c:=1:3 do If c=1 then
    Write JJ(l,c):=aux(l,c)$
  End
else Begin
  Write "Matrix JC(3,3) Operator JJ5 Depend JJ,TE"$
  Write JC:=JCS$
  Write "END"$

  JC:=aux + Jaux + JNSC$

  Depend JJ,TE$ On FORTS
  Factor SIV,COS$ Operator dJJ,dJJJ,dSC,dZSC,dB,dZB$
  For l:=1:3 do For c:=1:3 do If c=1 then
    Begin
      JJ(l,c):=JC(l,c)$
      dJJ(l,c):=DF(JC(l,c),TE)$
      For k:=1:3 do
        dJJ(l,c):=SUB(DF(SC(k),TE)+dSC(k),dJJ(l,c))$
      For k:=1:3 do
        dJJ(l,c):=SUB(DF(B(k),TE)+dB(k),dJJ(l,c))$
    End$

  For l:=1:3 do For c:=1:3 do If c=1 then
    Write JJ(l,c):=JJ(l,c)$
  For l:=1:3 do For c:=1:3 do If c=1 then
    Write dJJ(l,c):=dJJ(l,c)$
  End$

  Out "[ALPHEDRA]JC.AVS"$

!-----! !-----! !-----!
! ! ! ! !
!-----! !-----! !-----!
END$

```

E.6.5 VRTLOC.RED

```

-----I
I FILE: VRTLOC.RED                               Instituto de Física Teórica - IPT I
I                                               I
I OBJETIVO:  Calcula dos cossenos diretores da vertical local de B. I
I                                               I
I DEVOLVE:   VRTLOC.ABS                          DATA: 22/FEV/90 I
I-----I

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

MATRIX RTA(3,3)  I Rotacao em torno do eixo de rolamento.
                 RTA(3,3)  I Rotacao em torno do eixo de arfagem.
                 RTG(3,3)  I Rotacao em torno do eixo de guinada.

Operator q$ Depend q,TEB                               DIFF BATE

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
I SISTEMA ORBITAL (C, a g r):  [1] Q(1) em torno de a I
I                               [2] Q(2) em torno de g I
I                               [3] Q(3) em torno de r I
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

RTA(1,1):=1$      RTA(1,2):=0$      RTA(1,3):=0$
RTA(2,1):=0$      RTA(2,2):=COS(q(1))$  RTA(2,3):=SIN(q(1))$
RTA(3,1):=0$      RTA(3,2):=-SIN(q(1))$ RTA(3,3):=COS(q(1))$

RTG(1,1):=COS(q(2))$  RTG(1,2):=0$      RTG(1,3):=-SIN(q(2))$
RTG(2,1):=0$         RTG(2,2):=1$      RTG(2,3):=0$
RTG(3,1):=SIN(q(2))$ RTG(3,2):=0$      RTG(3,3):=COS(q(2))$

RTR(1,1):=COS(q(3))$  RTR(1,2):=SIN(q(3))$  RTR(1,3):=0$
RTR(2,1):=-SIN(q(3))$ RTR(2,2):=COS(q(3))$  RTR(2,3):=0$
RTR(3,1):=0$         RTR(3,2):=0$        RTR(3,3):=1$

MATRIX LL(3,1)$

Dot "(ALEXROMA)VRTLOC.ABS"

Write "MATRIX LL(3,1)"$      LL:=RTR*RTG*RTA*TPINAT(( 0,1,0 ))$.
Write "END"$

Shut "(ALEXROMA)VRTLOC.ABS"

Clear RTA,RTG,RTAS

I-----I      I-----I      I-----I
I           I      I           I      I           I
I-----I      I-----I      I-----I
ENDS

```

E.6.6 ABRCHQ.RED

```

-----I
I FILE: ABRCHQ.RED                               Instituto de Física Teórica - IPT I
I
I OBJETIVO:  Obtenção dos equações EOD linearizadas da fase transi- I
I            tória de abertura e das variações de velocidade após o choque I
I            entre os painéis e o eixo do satélite. I
I
I INVOCA:  Vc.ABS , Jc.ABS , VNTLOC.ABS , Rsc.ABS e DADOS.DAT I
I
I DEVOLE:  EQUABR.ABS e EQUCHQ.ABS                DATA: 21/JUL/90 I
I-----I
Operator q$ Depend q.TES I Off HATS I
-----I
I In "[ALEXROMA]DADOS.DAT" I
I-----I
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
I TT - ENERGIA CINETICA DO SATELITE I
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
Matriz TT(1,1)$

I-----I
I T1. Termos da energia cinética associados a forma do satélite: I
I-----I
I In "[ALEXROMA]Vc.ABS", "[ALEXROMA]Jc.ABS" I
I-----I
TT:=TP(WC)+JC+VC/2$

I-----I
I T2. Termos da energia cinética associados ao movimento do CM: I
I-----I
Matriz dRSCd(3,1),dRSCdtrRSC(3,1)$

I In "[ALEXROMA]Rsc.ABS" I Rsc
I-----I

For L:=1:3 do dRSCd(L,1)=DF(RSC(L,1),TE) $
dRSCdtrRSC:=MAT( (dRSCd(2,1)+RSC(3,1) - dRSCd(3,1)+RSC(2,1)),
(dRSCd(3,1)+RSC(1,1) - dRSCd(1,1)+RSC(3,1)),
(dRSCd(1,1)+RSC(2,1) - dRSCd(2,1)+RSC(1,1)) $

Clear RSC$

TT:=TT - R*TP(dRSCd)+dRSCd/2 + R*TP(WC)+dRSCdtrRSC

Clear dRSCd,dRSCdtrRSC,VC$

I-----I
I T3. Termos da energia cinética assoc. aos janelas em dobramento: I
I-----I
Matriz rdb(3,1),RSD(3,1),LD(3,3)$

Matriz JxVDA(3,VPD)$
Operator CTE$ Depend CTE,TEX I Representa integral( rAVDA )

For h:=1:RPD do
Begin

For L:=1:3 do Begin
rdb(L,1)=rd(L,C)$
RSD(L,1)=RSD(L,C)$
For C:=1:3 do LD(L,C)=LD(L,C,C)$
End$

Matriz AUI(1,1),VDA(3,1)$

For L:=1:3 do VDA(L,1)=DF(rdb(L,1),TE) $
VDA:=LD+VDA$

AUI:=RSD*(h)+TP(VDA)+VDA$
AUI(1,1)=INT(AUI(1,1),h)$
AUI(1,1)=SUB( zk=h(k),AUI(1,1) ) - SUB( a=0,AUI(1,1) )$
AUI(1,1)=INT(AUI(1,1),h)$
AUI(1,1)=SUB( y=h(k)/2,AUI(1,1) ) - SUB( y=0,AUI(1,1) )$

TT:=TT + 1/2*AUI$ Clear AUI$

Matriz r(3,1),rAVDA(3,1)$

r:=RSD*LD+rdb$
rAVDA:=MAT( (r(2,1)+VDA(3,1) + r(3,1)+rdb(2,1)),
(r(3,1)+VDA(1,1) - r(1,1)+VDA(3,1)),
(r(1,1)+VDA(2,1) - r(2,1)+VDA(1,1)) $

Clear r,VDA$

```

```

For L:=1:3 do
Begin
IrxVDA(L,k)=ENOA(h)+rAVDA(L,1)$
IrxVDA(L,k)=INT(IrxVDA(L,k),h)$
IrxVDA(L,k)=SUB(zk=h(k),IrxVDA(L,k)) - SUB(a=0,IrxVDA(L,k))$
IrxVDA(L,k)=INT(IrxVDA(L,k),h)$
IrxVDA(L,k)=SUB(y=h(k)/2,IrxVDA(L,k)) -
SUB(y=0,IrxVDA(L,k))$
Write IrxVDA(1,1):=IrxVDA(1,k)$
End$
Clear rAVDA$

TT:=TT + VC(1,1)*CTE(1,k)+VC(2,1)*CTE(2,k)+VC(3,1)*CTE(3,k)$

End$
Clear rd,rdb,RSD,RSDh,LD,LDh$

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
I WV - ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL DO SATELITE I
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
Matriz WV(1,1)$ Let W1/RC:=3 + WD:=2$

I-----I
I In "[ALEXROMA]VNTLOC.ABS" I LL
I-----I

WV:=3*W1-TP(LL)+JC+LL/(2+RC)+3$
WV(1,1)=WV(1,1) - W1+TRACE(JC)/(2+RC)+3$

Clear JC,LL$

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
I FL - FUNCAO LAGRANGIANA I
I-----I
I FL 1. Regras trigonométricas necessarias: I
I-----I

For all x let (COS x)**2 + (SIN x)**2 = 1$
For all x let 2*(COS x)**2 - 1 = COS(2*x)$
For all x let 2*SIN(x)*COS(x) = SIN(2*x)$

I-----I
I FL 2. Lagrangiana: I
I-----I

FL:=TT(1,1) - WV(1,1)$ Clear WV$

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
I REGRAS DE DERIVACAO SECCIONARIAS I
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

For all i,j such that i neq j let DF(q(i),q(j))=0$

For all i,j let DF(B(i),q(j))=0$
For all i,j let DF(SC(i),q(j))=0$

For all i,j,k let DF(J(i,j),q(k))=0$
For all i,j,k let DF(CTL(i,j),q(k))=0$
For all i,j,k let DF(q(i),q(j),q(k),TE)=0$

For all Y,i let DF(Y,q(i),TE)=0$
For all Y,i let DF(Y,DF(q(i),TE,2),TE)=0$
For all Y,i let DF(Y,DF(q(i),TE,2),TE,2)=0$

For all i,j such that i neq j let DF(DF(q(i),TE),DF(q(j),TE))=0$

For all i,j let DF(q(i),DF(q(j),TE))=0$
For all i,j let DF(B(i),DF(q(j),TE))=0$
For all i,j let DF(SC(i),DF(q(j),TE))=0$

For all i,j,k let DF(J(i,j),DF(q(k),TE))=0$
For all i,j,k let DF(CTL(i,j),DF(q(k),TE))=0$

```



```

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
X      EQUACOES LINEARIZADAS EM TORNO DA ORIGEM      X
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

n:=3 = GLBT + GLPAS          X Numero de coordenadas generalizadas
X-----X

X  EQ1 1. Regras de derivacao necessarias:          X
X-----X

For all i,j such that i neq j let DF(q(i),q(j))=0$
For all i,j let DF(q(i),q(j),TE)=0$
For all i,j let DF(q(i),DF(q(j),TE))=0$
For all i,j let DF(q(i),DF(q(j),TE),TE)=0$
For all i,j,k let DF(q(i),q(j),q(k),TE)=0$

X-----X
X  EQ2 2. Matrizes MH,GG,EE respec. de massa, giroscopica e rigidez: X
X-----X
Matriz MH(n,n),GG(n,n),EE(n,n)$

For i:=1:n do For j:=1:n do If j >= i then
Begin
MH(i,j):=DF( FL,DF(q(i),TE),DF(q(j),TE) )$
For h:=1:n do
MH(i,j):=SUB( q(h)=0,MH(i,j) )$ X q(h)=0 ==> DF(q(h),TE)=0
End$

Matriz SS(n,n)$
For i:=1:n do For j:=1:n do
Begin
SS(i,j):=DF( FL,q(i),DF(q(j),TE) )$
For h:=1:n do
SS(i,j):=SUB( q(h)=0,SS(i,j) )$ X q(h)=0 ==> DF(q(h),TE)=0
End$
GG:=TP(SS)-SSS          Clear SSS

For i:=1:n do For j:=1:n do If j >= i then
Begin
EE(i,j):= - DF( FL,q(i),q(j) )$
For h:=1:n do
EE(i,j):=SUB( q(h)=0,EE(i,j) )$ X q(h)=0 ==> DF(q(h),TE)=0
End$

for i:=1:n do For j:=1:n do Begin
MH(j,i):=MH(i,j)$
EE(j,i):=EE(i,j)$
End$

Clear FL$

X-----X
X  EQ3 3. Equacoes linearizadas de segunda ordem: X
X-----X
Operator EQLS

For i:=1:n do
Begin
EQ1(i):=0$
For j:=1:n do
Begin
EQ1(i):=EQ1(i) + MH(i,j)*DF(q(j),TE,2) + GG(i,j)*DF(q(j),TE)
+ EE(i,j)*q(j)$
End$
End$

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
X      SAIDA PARA AVALIACAO NUMERICA      X
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
On BOZEROS          Factor W0,q,DF$

If GLPAS=0 then Begin
Out "[ALEXROMA]EQLG0.ANS"$
On FORTS
Write MH:=MH$
Write GG:=GG$
Write EE:=EE$
For i:=1:n do Write EQ1(i):=EQ1(i)$
Shut "[ALEXROMA]EQLG0.ANS"$
End
else Begin
Out "[ALEXROMA]EQLFLX.ANS"$
Write "Operator q$ Depend q,TE"$
Write MH:=MH$
Write GG:=GG$
Write EE:=EE$
For i:=1:n do Write EQ1(i):=EQ1(i)$
Shut "[ALEXROMA]EQLFLX.ANS"$
End$

X-----X X-----X X-----X
X X X X X X X
X-----X X-----X X-----X
INDE

```

Apêndice F

Validação das Matrizes de Massa e Rigidez Obtidas

Nesse apêndice, será demonstrada a consistência do resultado obtido para as matrizes de massa e rigidez generalizadas, equações (4.16) e (4.19), provando-se que os elementos M_{55} da matriz M e K_{55} da matriz K são positivos.

Isto será feito através da aplicação da *Desigualdade de Hölder* (Hönig (1970)).

F.1 Desigualdade de Hölder

A desigualdade de Hölder, expressa-se por

$$\int_X |fg| dX \leq \left(\int_X |f|^p dX \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^{p'} dX \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad (\text{F.1})$$

sendo válida para todo par de números reais $p, p' \geq 1$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, e para todas funções cuja integral na forma acima estejam bem definidas.

É claro que a desigualdade (F.1) acarreta que

$$\left| \int_X fg dX \right| \leq \left(\int_X |f|^p dX \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^{p'} dX \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (\text{F.2})$$

F.2 Consistência das Matrizes de Massa e Rigidez Generalizadas

Utilizando-se a expressão (F.2), com $p = p' = 2$, $f = 1$, $g = \phi^1$ e $X = m_{A2}$, tem-se

$$\left| \int_{m_{A2}} \phi^1 dm_{A2} \right| \leq \left(\int_{m_{A2}} 1 dm_{A2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{m_{A2}} (\phi^1)^2 dm_{A2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

que, elevado ao quadrado, resulta em

$$\left(\int_{m_{A2}} \phi^1 dm_{A2}\right)^2 \leq m_{A2} \cdot \int_{m_{A2}} (\phi^1)^2 dm_{A2}. \quad (\text{F.3})$$

Assim, utilizando-se (F.3), tem-se

$$M_{55} = \int_{m_{A2}} (\phi^1)^2 dm_{A2} - \frac{\left(\int_{m_{A2}} \phi^1 dm_{A2}\right)^2}{m} \geq \left(1 - \frac{m_{A2}}{m}\right) \int_{m_{A2}} (\phi^1)^2 dm_{A2} > 0,$$

pois $m > m_{A2}$.

De forma análoga pode se concluir que $K_{55} > 0$.