



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-6778-PRE/2786**

**MANOBRAS COM DOIS E TRÊS IMPULSOS PARA SATÉLITES  
ARTIFICIAIS**

Gislaine de Felipe  
Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado

Aceito para apresentação no Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 14., Bauru,  
8-12 dez. 1997.

INPE  
São José dos Campos  
1998

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

**INPE-6778-PRE/2786**

**MANOBRAS COM DOIS E TRÊS IMPULSOS PARA SATÉLITES  
ARTIFICIAIS**

Gislaine de Felipe  
Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado

Aceito para apresentação no Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 14., Bauru,  
8-12 dez. 1997.

INPE  
São José dos Campos  
1998

# MANOBRAS COM DOIS E TRÊS IMPULSOS PARA SATÉLITES ARTIFICIAIS / *MANEUVERS WITH TWO AND THREE IMPULSES FOR ARTIFICIAL SATELLITES*

## Abstract

This paper deals with orbital transfer maneuvers. It studies the problem of transferring a spacecraft from an initial to a coplanar final orbit. The control available to perform this task is a sequence of two or three impulses. The main goal is to study what is the best approach for a large set of initial and final orbits. Two methods available in the literature (one for a two-impulse and one for a three-impulse maneuver) are selected and used for comparison. The results show the fuel consumption for each case and produces a map of the regions of optimality for both cases.

**Keywords:** Astrodynamics, Orbital Transfer, Impulsive Maneuvers

## Nomenclatura

$a$  = semi eixo maior da elipse

$e$  = excentricidade da elipse

$O_0$  = órbita inicial

$P$  = ponto da órbita de transferência

$R$  = raio

$\vec{r}$  = raio-vetor

$\beta$  = angulo que o veículo viaja entre os dois primeiros impulsos

$\Delta t$  = variação de tempo para a transferência

$\Delta V$  = variação de velocidade obtida através do uso de um propulsor

$\Delta V_D$  = diferença entre a variação de velocidade bi-impulsiva e tri-impulsiva

$\theta$  = anomalia verdadeira

$\mu$  = razão de massas

$\sigma$  = ângulo de transferência bi-impulsivo

$\omega$  = argumento do perigeu

#### subscritos

1 = inicial

2 = final

a = apogeu

bi = bi-impulsiva

c = circular

f = final

i = inicial

p = perigeu

t = total

tri = tri-impulsiva

#### **Introdução**

Este trabalho estuda o problema de transferências entre duas órbitas coplanares elípticas que extremizam o impulso aplicado (consumo de combustível).

Efetuar uma transferência orbital significa transladar um veículo espacial de um ponto para outro no espaço, entre órbitas diferentes.

A transferência torna-se necessária quando ocorrem desvios nos parâmetros nominais da órbita do satélite, fazendo com que o mesmo se encontre em uma trajetória diferente da pré-estabelecida. Esta transferência também pode estar prevista na própria missão, pois é em geral mais fácil colocar um satélite em uma órbita intermediária e depois transferi-lo para a órbita desejada, do que tentar colocá-lo diretamente na órbita pretendida.

O problema de transferências ótimas (no sentido de redução de consumo de combustível) entre duas órbitas coplanares Keplerianas tem sido investigado há mais de 40 anos. Em particular, muitos artigos resolvem este problema para um sistema de controle impulsivo, com um número fixo de impulsos. A literatura apresenta muitas soluções para casos particulares, como as transferências de Hohmann e Hoelker-Silber entre duas órbitas circulares e suas variantes para elipses com geometrias particulares.

Neste trabalho, são implementados e testados os métodos que fornecem a solução deste problema para uma transferência entre duas órbitas coplanares elípticas com dois ou três impulsos.

Para o caso de transferência com dois impulsos, nós utilizamos o método desenvolvido em Prado (1993), que é uma extensão do método sugerido por Lawden (1991), incluindo o aspecto novo da introdução de uma série de variáveis que permitem a redução do conjunto original de onze equações e onze incógnitas para um conjunto de três equações e três incógnitas.

Para o caso de três impulsos, o método descrito em Zanardi (1988), foi escolhido para implementação. Ele considera somente transferências que não passam pelo infinito durante a transferência.

Nós também apresentamos testes numéricos para os dois métodos implementados, mostrando as vantagens e desvantagens obtidas pela aplicação de terceiro impulso.

## Manobra Bi-Impulsiva

Esta seção tem por objetivo mostrar a formulação e a resolução da nova variante do conhecido "Problema de Lambert", que é um dos mais importantes e discutidos tópicos em mecânica celeste. O problema original de Lambert pode ser definido como: "uma órbita Kepleriana (sujeita somente a uma força gravitacional originada de um ponto de massa que é inversamente proporcional ao quadrado da distância (ao redor de um dado campo gravitacional de força deve ser encontrada conectando dois pontos dados ( $P_1$  e  $P_2$ ) em um dado tempo  $\Delta t$ ". A nova formulação é um pouco diferente da original, mas também tem muitas aplicações importantes. Este novo problema é chamado "Problema de Lambert com mínimo Delta-V" e é formulado como se segue: "uma órbita Kepleriana ao redor de um dado centro de força gravitacional deve ser encontrada conectando dois pontos dados ( $P_1$  que pertence a uma órbita inicial e  $P_2$  que pertence a uma órbita final), de tal forma que o  $\Delta V$  (variação de velocidade obtida através do uso de um propulsor) para essa transferência seja mínimo" (Prado, 1993 e Broucke & Prado, 1993).

Para resolver este problema são obtidas as expressões analíticas para o incremento total de velocidade requerido  $\Delta V$  (como uma função de apenas uma variável independente) e para sua primeira derivada com respeito a esta variável. Então, é usado um esquema numérico para obter a raiz da primeira derivada e o valor numérico do  $\Delta V$  neste ponto. A partir desta informação é possível obter todos os outros parâmetros envolvidos, como os componentes dos impulsos, suas localizações, etc. Esta pesquisa está fortemente relacionada com a procura de uma transferência bi-impulsiva mínima entre duas órbitas coplanares dadas com a aproximação usada por Prado (1993) e Boucke & Prado (1993).

Suponha que exista uma nave espacial em uma órbita Kepleriana (que tem a forma geométrica de uma elipse com semi-eixo maior  $a_i$  e  $e_i$ ) que é chamada  $O_0$  (a órbita inicial). Deseja-se transferir essa nave espacial para a órbita Kepleriana final (que tem a forma geométrica de uma elipse com

semi-eixo maior  $a_f$  e  $e_f$ )  $O_2$ , que é coplanar com a órbita  $O_0$ . Para efetuar essa transferência nós iniciamos no ponto  $P_1 (r_1, \theta_1)$ , onde é aplicado um impulso com magnitude  $\Delta V_1$  que tem um ângulo  $\phi_1$  com a direção transversa local. A órbita de transferência cruza a órbita final no ponto  $P_2 (r_2, \theta_2)$ , onde é aplicado um impulso com magnitude  $\Delta V_2$  que faz um ângulo  $\phi_2$  com a direção local transversa. Para definir o problema básico (o mínimo Delta-V do problema de Lambert) é necessário especificar a anomalia verdadeira ( $\theta_1$ ) do ponto de partida na órbita  $O_0 (P_1)$  e a anomalia verdadeira ( $\theta_2$ ) do ponto de chegada na órbita  $O_0 (P_2)$ . Com esses dois valores dados e todos os elementos Keplerianos (valores que definem completamente uma órbita no espaço) das duas órbitas conhecidas é possível determinar os raio-vetores  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  no começo e no fim da transferência. Então o problema é encontrar qual órbita de transferência conectando esses dois vetores e usando somente dois impulsos é a que requer o mínimo  $\Delta V$  para a manobra. Este problema é o definido aqui como "Problema de Lambert com mínimo Delta-V". O esquema da transferência e as variáveis utilizadas são mostradas na figura 1.

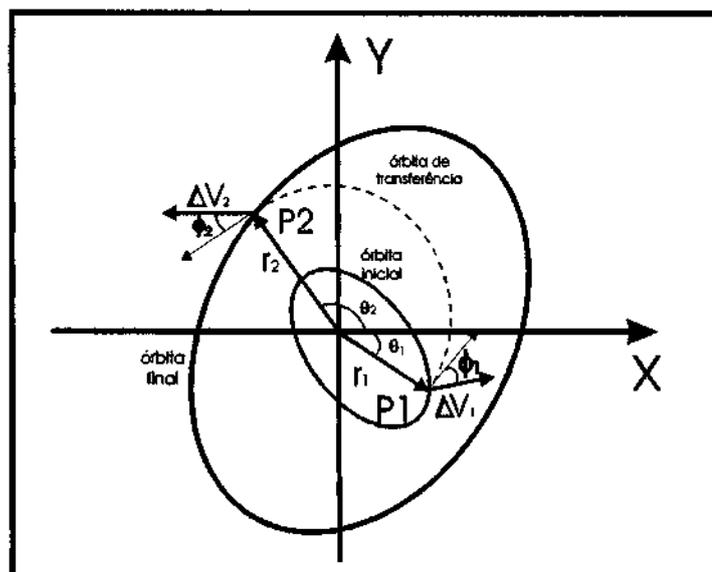


FIG. 1 - Geometria do "Problema de Lambert com Mínimo Delta-V".

Usando equações básicas da mecânica celeste de dois corpos é possível escrever uma expressão analítica para o  $\Delta V$  total ( $=\Delta V_1 + \Delta V_2$ ) requerido para esta manobra. A partir daí basta variar os valores das anomalias verdadeiras (variável que mostra o ângulo entre a posição instantânea do veículo espacial e o perigeu da órbita) nas órbitas inicial e final no intervalo de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  para obter a transferência mínima entre as duas órbitas dadas. Essa tarefa foi executada em detalhes em Prado, 1993.

### Manobra Tri-Impulsiva

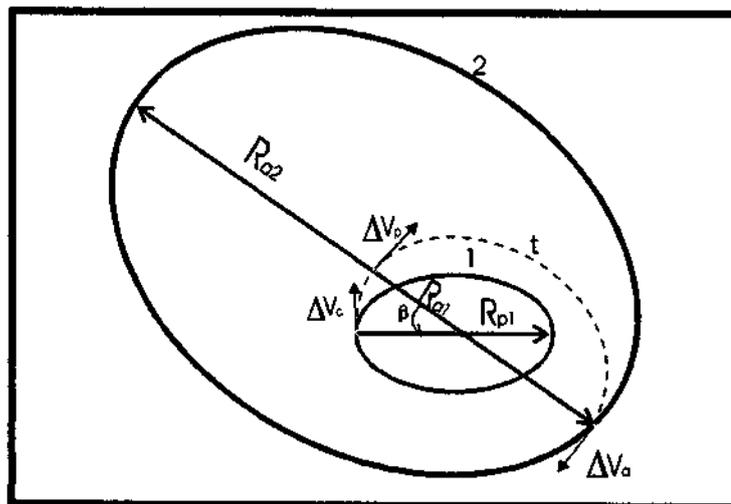


FIG. 2 - Transfêrencia entre órbitas elípticas, coplanares e coaxiais com dimensões diferentes.

A Fig. 2 ilustra uma transferência orbital entre duas órbitas elípticas, coplanares, não coaxiais e de dimensões diferentes. A órbita inicial é uma elipse com perigeu  $R_{p1}$  e apogeu  $R_{a1}$ . A órbita final é uma elipse de com perigeu  $R_{p2}$  e apogeu  $R_{a2}$ .

Existem vários modos de efetuar uma transferência desse tipo. Seguindo a abordagem mostrada em Zanardi (1988), vamos executar as seguintes etapas:

1º) Colocamos o satélite numa órbita coaxial (semi-eixos maiores coincidentes) com a órbita final desejada, através de uma órbita circular de raio  $R_{a1}$ ;

2º) Usamos uma elipse de transferência para alcançar a elipse desejada (2). Isto pode ser feito isto de várias maneiras, dependendo dos parâmetros nominais de cada órbita. No exemplo mostrado na figura aplica-se um impulso  $\Delta V_p$  para atingir esse objetivo;

3º) Quando a órbita final é atingida aplica-se um impulso  $\Delta V_a$  para completar a transferência.

Os incrementos de velocidade em cada etapa são dados por:

$$\Delta V_c = \sqrt{\frac{\mu}{R_{a_1}} \left\{ 1 - (1 - e)^{1/2} \right\}} \quad (1)$$

$$\Delta V_p = \sqrt{\frac{\mu}{R_{a_1}} \left\{ (1 + e_t)^{1/2} - 1 \right\}} \quad (2)$$

$$\Delta V_a = \sqrt{\frac{\mu}{R_{p_2}} \left\{ (1 - e_2)^{1/2} - (1 - e_t)^{1/2} \right\}} \quad (3)$$

$$\text{O incremento total é dado por: } \Delta V = |\Delta V_c| + |\Delta V_p| + |\Delta V_a| \quad (4)$$

$$\text{O tempo total gasto é dado por: } t = \frac{1}{(\mu)^{1/2}} \left\{ \beta R_{a_1}^{3/2} + \frac{\pi (R_{a_1} + R_{p_2})^{3/2}}{2\sqrt{2}} \right\} \quad (5)$$

## Resultados

Foram testados os métodos que fornecem a solução para a transferência entre duas órbitas coplanares elípticas com dois ou três impulsos mostrados acima.

Para uma melhor análise dos resultados foi feita uma tabela, variando separadamente os parâmetros de entrada dos programas, permitindo assim a comparação dos mesmos.

Os parâmetros de entrada são os seguintes

a = semi-eixo maior (para órbita inicial e final)

e = excentricidade (para órbita inicial e final)

$\omega$  = argumento do perigeu (para órbita inicial e final), que é o ângulo entre o perigeu da órbita e uma linha de referência.

Os parâmetros de saída são os seguintes:

$\Delta V_{bi}$  = Variação da velocidade na transferência bi-impulsiva

$\Delta V_{tri}$  = Variação da velocidade na transferência tri-impulsiva

$\sigma$  = ângulo de transferência bi-impulsivo que o veículo deve viajar para completar a manobra.

$$\Delta VD = |\Delta V_{bi} - \Delta V_{tri}|$$

#### a) Estudo de manobras em $\omega_f$

Para estudar este caso, serão utilizados os seguintes valores:  $a_i = a_f = 1.0$ ,  $\omega_i = 0$ ,  $e_i = e_f = 0.2$ . Para  $\omega_f$  serão utilizados os valores:  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $240^\circ$  e  $300^\circ$ . Também serão utilizados os valores  $e_i = e_f = 0.4, 0.6$ , para a mesma situação.

Nos resultados observamos que para todas as situações testadas e a transferência bi-impulsiva mostrou-se mais econômica e o ângulo  $\sigma$  ficou igual a  $180^\circ$  somente quando  $\omega_f = 180^\circ$  (ver Tabela 1).

#### b) Estudo de manobras em $e_f$

Para estudar este caso, serão utilizados os seguintes valores:  $a_i = a_f = 1.0$ ,  $\omega_i = \omega_f = 0$ ,  $e_i = 0$  e  $0.2$ . Para  $e_f$  serão utilizados valores no intervalo  $0.02$  até  $0.8$ .

Nos resultados observamos que para todas as variações a transferência bi-impulsiva mostrou-se mais econômica e o ângulo  $\sigma$  ficou igual a  $180^\circ$  sempre (ver Tabela 2).

#### c) Estudo de manobras em $\omega_f, e_f$

Para estudar este caso, vamos utilizar os seguintes valores:  $a_i = a_f = 1.0$ ,  $\omega_i = 0$ ,  $e_i = 0$ . Para  $e_f$  utilizamos os valores:  $e_f = 0.3, 0.5$ . Para  $\omega_f$  utilizamos os seguintes valores:  $60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ$  e  $300^\circ$ . Recalculamos as mesmas situações para  $e_i = 0.2$ .

Nos resultados observamos que para todas as situações testadas a transferência bi-impulsiva mostrou-se mais econômica e o ângulo  $\sigma$  ficou igual a  $180^\circ$  sempre (ver Tabela 3).

#### **d) Estudo de manobras em $a_f$**

Para estudar este caso, vamos utilizar os seguintes valores:  $a_i = 1.0$ ,  $\omega_i = \omega_f = 0$ . Para  $e_i$  e  $e_f$ , utilizamos os seguintes valores:  $e_i = e_f = 0.1$ ,  $e_i = e_f = 0.05$ ,  $e_i = e_f = 0.2$ ,  $e_i = e_f = 0.0$ . Para  $a_f$ , utilizamos valores no intervalo 1.1 até 20.0. Os sombreados nos mostram a transferência mais econômica. O ângulo  $\sigma$  ficou igual a  $180^\circ$  sempre (Tabela 4). A análise sobre qual tipo de transferência consome menos energia mostra resultados mais complexos. Para  $e_i = e_f = 0.0$ , a manobra mais econômica foi sempre a bi-impulsiva. Para  $e_i = e_f = 0.05$ , existe uma região de valores de  $a_f$  ( $1.2 < a_f < 3.3$ ) na qual a manobra tri-impulsiva é mais econômica. Fora dessa região é mantida a tendência de obter maiores economias com a manobra bi-impulsiva. Essa situação se repete para os casos  $e_i = e_f = 0.1$  e  $e_i = e_f = 0.2$ . A diferença é que quanto menor a excentricidade mais rápida é a transição entre os tipos de manobras ótimas (bi ou tri-impulso) Devido à essas mudanças de resultados, novos testes foram feitos com um espaçamento menor entre as anomalias, reduzindo-as de  $5^\circ$  para  $0,5^\circ$  e para  $0,05^\circ$ . Ainda assim os resultados ficaram iguais aos anteriores.

A seguir, foram verificados esses resultados analiticamente, já que estas transferências são do tipo Hohmann. Os resultados mostraram-se iguais aos já encontrados.

#### **e) Estudo de manobras em $\omega_f$ , $a_f$**

Para estudar este caso, vamos utilizar os seguintes valores:  $a_i = 1.0$ ,  $\omega_i = 0$ ,  $e_i = e_f = 0.2$ . Para  $a_f$  utilizamos valores no intervalo 2.0 até 30.0. Para  $\omega_f$  utilizamos os seguintes valores:  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $240^\circ$  e  $300^\circ$ .

Os resultados são mostrados na Tabela 5. Pode-se concluir que para valores de  $a_f$  menores do que 5.0 a manobra tri-impulsiva é sempre mais econômica e para valores de  $a_f$  a escolha da melhor manobra depende do valor de  $\omega_f$ . Na região em torno de  $\omega_f = 180^\circ$  a manobra tri-impulsiva é mais

econômica e na região em torno de  $\omega_f = 0^\circ$  a manobra bi-impulsiva é mais econômica. O ângulo  $\sigma$  ficou igual a  $180^\circ$  quando  $\omega_f = 180^\circ$ .

#### f) Estudo de manobras em $e_f$ , $a_f$

Para estudar este caso, vamos utilizar os seguintes valores:  $a_i = 1.0$ ,  $\omega_i = \omega_f = 0$ . Para  $a_f$  utilizamos valores na faixa que vai de 2.0 até 50.0. Para  $e_i$  utilizamos valores na faixa que vai de 0.0 até 0.2 e para  $e_f$  de 0.2 até 0.8.

O ângulo  $\sigma$  ficou igual a  $180^\circ$  sempre. A manobra tri-impulsiva é mais econômica na maioria das situações com exceção de algumas poucas partes mostradas na Tabela 6.

#### Tabelas

Tabela 1. Manobras que alteram somente  $\omega_f$

$e_i$	$e_f$	$\omega_f$	$\Delta V_{bi}$	$\Delta V_{tri}$	$\Delta VD$	$\sigma (^\circ)$
0.2	0.2	$60^\circ$	0.0987	0.4082	0.3094	168
0.2	0.2	$120^\circ$	0.1679	0.4082	0.2403	172
0.2	0.2	$180^\circ$	0.1927	0.4082	0.2155	180
0.2	0.2	$240^\circ$	0.1681	0.4082	0.2401	172
0.2	0.2	$300^\circ$	0.0990	0.4082	0.3092	168
0.4	0.4	$60^\circ$	0.2004	0.8728	0.6724	152
0.4	0.4	$120^\circ$	0.3257	0.8728	0.5471	162
0.4	0.4	$180^\circ$	0.3810	0.8728	0.4918	180
0.4	0.4	$240^\circ$	0.3345	0.8728	0.5383	164
0.4	0.4	$300^\circ$	0.2009	0.8728	0.6719	152
0.6	0.6	$60^\circ$	0.3149	1.500	1.1851	134
0.6	0.6	$120^\circ$	0.5133	1.500	0.9867	156
0.6	0.6	$180^\circ$	0.5811	1.500	0.9189	180
0.6	0.6	$240^\circ$	0.5137	1.500	0.9863	156
0.6	0.6	$300^\circ$	0.3157	1.500	1.1843	134

Tabela 2. Manobras que alteram somente  $e_r$

$e_i$	$e_r$	$\Delta V_{L_1}$	$\Delta V_{L_2}$	$\Delta VD$
0.0	0.020	0.0099	0.0202	0.0103
0.0	0.040	0.0199	0.0408	0.0209
0.0	0.060	0.0297	0.0619	0.0321
0.0	0.080	0.0396	0.0834	0.0438
0.0	0.100	0.0494	0.1055	0.0561
0.0	0.110	0.0543	0.1167	0.0624
0.0	0.130	0.0641	0.1396	0.0755
0.0	0.140	0.0690	0.1513	0.0823
0.0	0.150	0.0739	0.1631	0.0892
0.0	0.200	0.0983	0.2247	0.1264
0.0	0.225	0.1105	0.2572	0.1467
0.0	0.250	0.1227	0.2909	0.1682
0.0	0.275	0.1350	0.3261	0.1914
0.0	0.300	0.1472	0.3627	0.2155
0.0	0.400	0.1969	0.5275	0.3306
0.0	0.500	0.2483	0.7320	0.4837
0.0	0.600	0.3277	1.0000	0.6723
0.0	0.800	0.4305	2.0000	1.5695
0.2	0.300	0.0510	0.5462	0.4952
0.2	0.400	0.1026	0.7110	0.6084
0.2	0.500	0.1557	0.9155	0.7598
0.2	0.600	0.2117	1.1835	0.9718
0.2	0.700	0.2725	1.5639	1.2914
0.2	0.800	0.3422	2.1835	1.8413

Tabela 3. Manobras que alteram  $\omega_f$ ,  $e_r$

$e_i$	$e_r$	$\omega_f$	$\Delta V_{L_1}$	$\Delta V_{L_2}$	$\Delta VD$
0.0	0.3	60°	0.1473	0.3628	0.2155
0.0	0.3	120°	0.1473	0.3628	0.2155
0.0	0.3	180°	0.1473	0.3628	0.2155
0.0	0.3	240°	0.1473	0.3628	0.2155
0.0	0.3	300°	0.3147	0.3628	0.0480
0.0	0.5	60°	0.2484	0.7321	0.4837
0.0	0.5	120°	0.2484	0.7321	0.4837
0.0	0.5	180°	0.2484	0.7321	0.4837
0.0	0.5	240°	0.2484	0.7321	0.4837
0.0	0.5	300°	0.2484	0.7321	0.4837
0.2	0.3	60°	0.1309	0.5463	0.4153
0.2	0.3	120°	0.2108	0.5463	0.3354
0.2	0.3	180°	0.2399	0.5463	0.3063
0.2	0.3	240°	0.2110	0.5463	0.3352
0.2	0.3	300°	0.1312	0.5463	0.4150

Tabela 3 (cont.) Manobras que alteram  $\omega_f$  e  $e_f$

$e_f$	$e_f$	$\omega_f$	$\Delta V_{in}$	$\Delta V_{in}$	$\Delta VD$
0.2	0.5	60°	0.2194	0.9155	0.6961
0.2	0.5	120°	0.3049	0.9155	0.6106
0.2	0.5	180°	0.3338	0.9155	0.5817
0.2	0.5	240°	0.3051	0.9155	0.6104
0.2	0.5	300°	0.2196	0.9155	0.6959

Tabela 4. Manobras que alteram somente  $a_f$

$e_f$	$a_f$	$e_f$	$\Delta V_{in}$	$\Delta V_{in}$	$\Delta VD$
0.00	1.2	0.00	0.0869	0.0871	0.0002
0.00	1.5	0.00	0.1816	0.1835	0.0019
0.00	3.1	0.00	0.4009	0.4320	0.0311
0.00	3.3	0.00	0.4139	0.4495	0.0356
0.00	5.0	0.00	0.4800	0.5527	0.0727
0.05	1.1	0.05	0.0463	0.0511	0.0048
0.05	1.2	0.05	0.0865	0.0490	0.0374
0.05	1.3	0.05	0.1216	0.0785	0.0430
0.05	2.7	0.05	0.3625	0.3608	0.0017
0.05	2.8	0.05	0.3709	0.3723	0.0014
0.05	3.3	0.05	0.4052	0.4218	0.0166
0.05	3.4	0.05	0.4108	0.4304	0.0196
0.05	3.5	0.05	0.4161	0.4386	0.0225
0.10	1.1	0.10	0.4611	0.1495	0.3116
0.10	1.2	0.10	0.0859	0.1046	0.0187
0.10	1.3	0.10	0.1206	0.0947	0.0259
0.10	1.4	0.10	0.1511	0.0955	0.0556
0.10	1.5	0.10	0.1780	0.0997	0.0783
0.10	3.0	0.10	0.3776	0.3641	0.0135
0.10	3.1	0.10	0.3842	0.3744	0.0098
0.10	3.2	0.10	0.3902	0.3843	0.0059
0.10	3.3	0.10	0.3959	0.3938	0.0021
0.10	3.4	0.10	0.4013	0.4028	0.0015
0.10	3.5	0.10	0.4062	0.4114	0.0052
0.10	4.0	0.10	0.4271	0.4496	0.0225
0.10	4.5	0.10	0.4427	0.4812	0.0384
0.10	5.0	0.10	0.45477	0.5079	0.0532
0.10	10.0	0.10	0.49646	0.6527	0.1563
0.10	20.0	0.10	0.4980	0.7551	0.2571
0.20	1.1	0.20	0.0452	0.3512	0.3060
0.20	1.2	0.20	0.0840	0.3015	0.2175
0.20	1.3	0.20	0.1176	0.2576	0.1400
0.20	3.3	0.20	0.3755	0.3350	0.0405
0.20	3.4	0.20	0.3803	0.3450	0.0353
0.20	3.5	0.20	0.3848	0.3545	0.0302

Tabela 5. Manobras que alteram  $\omega_f$ ,  $a_f$

$a_f$	$\theta_f$	$\Delta V_{br}$	$\Delta V_{ca}$	$\Delta VD$	$\sigma$
2.0	60°	0.2719	0.1849	0.0870	144
2.0	120°	0.2830	0.1849	0.0981	130
2.0	180°	0.2867	0.1849	0.1018	180
2.0	240°	0.2830	0.1849	0.0981	130
2.0	300°	0.2719	0.1849	0.0558	156
3.0	60°	0.3679	0.3021	0.0658	158
3.0	120°	0.3860	0.3021	0.0658	146
3.0	180°	0.3952	0.3021	0.0931	180
3.0	240°	0.3861	0.3021	0.0840	146
3.0	300°	0.6794	0.3021	0.3773	156
4.0	60°	0.4135	0.3968	0.0167	162
4.0	120°	0.4356	0.3968	0.0388	152
4.0	180°	0.4482	0.3968	0.0514	180
4.0	240°	0.4357	0.3968	0.0389	152
4.0	300°	0.4136	0.3968	0.0158	162
5.0	60°	0.4385	0.4615	0.0230	146
5.0	90°	0.4502	0.4615	0.0113	158
5.0	120°	0.463	0.4615	0.0014	156
5.0	150°	0.4736	0.4615	0.0121	164
5.0	180°	0.4777	0.4615	0.0161	180
5.0	210°	0.4737	0.4615	0.1220	164
5.0	240°	0.4631	0.4615	0.0015	156
5.0	270°	0.4503	0.4615	0.1120	158
5.0	300°	0.4386	0.4615	0.0230	164
5.0	360°	0.4601	0.4615	0.0014	180
6.0	60°	0.4534	0.5092	0.0556	166
6.0	90°	0.4656	0.5092	0.0437	160
6.0	120°	0.4792	0.5092	0.0300	158
6.0	150°	0.4907	0.5092	0.1857	166
6.0	180°	0.4951	0.5092	0.0141	180
6.0	210°	0.4907	0.5092	0.0186	166
6.0	240°	0.4793	0.5092	0.0299	158
6.0	270°	0.4656	0.5092	0.0436	160
6.0	300°	0.4534	0.5092	0.0558	166
10.0	60°	0.4742	0.6219	0.1477	168
10.0	120°	0.5019	0.6219	0.1200	164
10.0	180°	0.5193	0.6219	0.1026	180
10.0	240°	0.5020	0.6219	0.1199	164
10.0	300°	0.4743	0.6219	0.1476	168
30.0	60°	0.4639	0.7856	0.3217	172
30.0	120°	0.4879	0.7856	0.2977	170
30.0	180°	0.5024	0.7856	0.2832	180
30.0	240°	0.4879	0.7856	0.2977	170
30.0	300°	0.4639	0.7856	0.3217	172

Tabela 6. Manobras que alteram  $e_f$  e  $a_f$

$e_i$	$a_i$	$e_f$	$\Delta V_{bi}$	$\Delta V_{tri}$	$\Delta VD$
0.2	2.0	0.3	0.25136	0.21875	0.0326
0.2	2.0	0.5	0.21375	0.40825	0.1945
0.1	2.0	0.2	0.26636	0.14709	0.1193
0.1	2.0	0.3	0.25342	0.17716	0.0763
0.1	2.0	0.5	0.21792	0.32021	0.1023
0.0	2.0	0.2	0.27045	0.13397	0.1365
0.0	2.0	0.3	0.25848	0.13788	0.1230
0.0	2.0	0.5	0.22475	0.22475	0.0000
0.0	2.0	0.6	0.26663	0.41421	0.1476
0.2	5.0	0.3	0.41178	0.39979	0.0120
0.2	5.0	0.5	0.37614	0.31341	0.0627
0.1	5.0	0.2	0.44119	0.45467	0.0135
0.1	5.0	0.3	0.42629	0.39294	0.0333
0.1	5.0	0.5	0.39222	0.28627	0.1060
0.0	5.0	0.2	0.45624	0.45228	0.0040
0.0	5.0	0.3	0.44218	0.39056	0.0516
0.0	5.0	0.5	0.40950	0.26274	0.1467
0.1	10.0	0.3	0.46834	0.57145	0.1031
0.1	20.0	0.6	0.43509	0.55518	0.1201
0.1	30.0	0.7	0.42281	0.56778	0.1449
0.1	40.0	0.8	0.41013	0.53912	0.1290
0.1	50.0	0.8	0.41008	0.57813	0.1681

## Conclusões

Foram testados dois métodos para o cálculo de manobras orbitais coplanares e impulsivas. Um método é baseado no “Problema de Lambert com um mínimo  $\Delta V$ ” e soluciona o problema para a manobra com dois impulsos. O segundo método adiciona a possibilidade de um terceiro impulso na manobra. Outra questão analisada é o ângulo de transferência para a manobra bi-impulsiva.

Os resultados mostram que a transferência bi-impulsiva é vantajosa para transferências envolvendo mudanças apenas no argumento do perigeu e/ou na excentricidade. Já a manobra tri-impulsiva é sempre vantajosa quando a manobra altera apenas o semi-eixo maior da órbita. Nos casos onde o semi-eixo maior é alterado juntamente com o argumento do perigeu ou com a

excentricidade, a decisão sobre qual a melhor manobra tem que ser feita, caso a caso, conforme mostrado na seção de resultados.

Do ponto de vista de ângulo de transferência da manobra bi-impulsiva, os resultados mostram que todas as manobras que envolvem excentricidade possuem como solução  $\sigma$  igual a  $180^\circ$ , bem como manobras que alteram somente o semi-eixo maior. Manobras que alteram somente o argumento do perigeu ou o argumento do perigeu e o semi-eixo maior possuem soluções com  $\sigma$  diferente de  $180^\circ$  a menos que  $\omega_i = 0^\circ$  e  $\omega_f = 180^\circ$ .

## Referências

HOHMANN, W., 1925, *Die Erreichbarkeit der Himmelskorper*, Oldenbourg, Munich.

HOELKER, R.F., & SILBER, R., Jan. 1959, *The Bi-Elliptic Transfer Between Circular Co-Planar Orbits*, Alabama, Army Ballistic Missile Agency, Redstone Arsenal (DA Tech Memo 2-59).

LAWDEN, D.F., 1991 "Optimal Transfers Between Coplanar Elliptical Orbits", *J. of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 15, nº3, pp.788-791.

PRADO, A.F.B.A. , 1993, "Optimal Transfer and Swing-By Orbits in the Two - and Three-Body Problems", Ph.D. Dissertation, University of Texas, Austin, TX, USA.

ZANARDI, M.C.F.P.S., "Foundations of Astronautics", 1988, (in portuguese), *Apostila do Instituto Técnico Aeroespacial (ITA)*, São José dos Campos, SP.



## AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO

TÍTULO					
Manobras Com Dois e Três Impulsos Para Satélites Artificiais					
AUTOR					
Gislaine de Felipe e Antonio F. Bertachini de A. Prado					
TRADUTOR					
EDITOR					
ORIGEM	PROJETO	SÉRIE	Nº DE PÁGINAS	Nº DE FOTOS	Nº DE MAPAS
DMC	SPG	- 544	15		
TIPO					
<input type="checkbox"/> RPO	<input checked="" type="checkbox"/> PRE	<input type="checkbox"/> NTC	<input type="checkbox"/> PRP	<input type="checkbox"/> MAN	<input type="checkbox"/> PUD
DIVULGAÇÃO					
<input checked="" type="checkbox"/> EXTERNA <input type="checkbox"/> INTERNA <input type="checkbox"/> RESERVADA <input type="checkbox"/> LISTA DE DISTRIBUIÇÃO ANEXA					
PERIÓDICO/EVENTO					
14º Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica 8-12 dez. 1998					
CONVÊNIO					
Banco					
AUTORIZAÇÃO PRELIMINAR					
10 / 07 / 98		Petronio Noronha de Souza Chefe da Divisão de Mecânica Especial e Controle - DMC ASSINATURA			
REVISÃO TÉCNICA					
<input type="checkbox"/> SOLICITADA <input checked="" type="checkbox"/> DISPENSADA		Petronio Noronha de Souza Chefe da Divisão de Mecânica Especial e Controle - DMC ASSINATURA			
RECEBIDA ___/___/___		DEVOLVIDA ___/___/___		ASSINATURA DO REVISOR	
REVISÃO DE LINGUAGEM					
<input type="checkbox"/> SOLICITADA <input checked="" type="checkbox"/> DISPENSADA		Petronio Noronha de Souza Chefe da Divisão de Mecânica Especial e Controle - DMC ASSINATURA			
Nº _____		RECEBIDA ___/___/___		DEVOLVIDA ___/___/___	
ASSINATURA DO REVISOR					
PROCESSAMENTO/DATILOGRAFIA					
RECEBIDA ___/___/___		DEVOLVIDA ___/___/___		ASSINATURA	
REVISÃO TIPOGRÁFICA					
RECEBIDA ___/___/___		DEVOLVIDA ___/___/___		ASSINATURA	
AUTORIZAÇÃO FINAL					
10 / 07 / 98		CARLOS E. SANTANA Coordenador Geral Eng. e Tec. Especial ASSINATURA			
PALAVRAS-CHAVE					
Astrodinâmica, Manobras Orbitais, Manobras Impulsivas.					