



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-6823-NTC/334

TRAJETÓRIAS INTERPLANETÁRIAS

Evandro Marconi Rocco

INPE
São José dos Campos
1998

Publicado por:

Coordenação de Ensino, Documentação e
Programas Especiais - CEP

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Caixa Postal 515

12201-970 - São José dos Campos - SP - Brasil

Fone: (012) 345.6911

Fax: (012) 345.6919

E-Mail: marciana@sid.inpe.br

- Solicita-se intercâmbio
- Exchange welcome
- Si sollecita intercambio
- Echange souhaité
- Mann bittet un Austausch
- Solicitamos intercambio
- Просим обмена
- 歡迎交換
- 出版物的交換不難

Publicação Externa - É permitida sua reprodução para interessados.

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-6823-NTC/334

TRAJETÓRIAS INTERPLANETÁRIAS

Evandro Marconi Rocco

INPE
São José dos Campos
1998

RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido durante a disciplina Seminário de Dinâmica Orbital III (CEA-513) e portanto tem como objetivo apenas apresentar o estudo das trajetórias interplanetárias. Ele tem como base o trabalho de Bonneau e Bernard (1995) que considera o problema da transferência interplanetária utilizando o método “Patched Conics”.

INTERPLANETARY TRAJECTORIES

ABSTRACT

This work was developed during the course Seminário de Dinâmica Orbital III (CEA-513). Therefore, we only intend to present the problem of interplanetary trajectories. We used as a base the work of Bonneau and Bernard (1995) which considers the interplanetary transfers using the Patched Conics method.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xi
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DA SONDA NO SISTEMA PLANETÁRIO	3
CAPÍTULO 3 - MÉTODO “PATCHED CONICS”	7
3.1- Conceito de Esfera de Influência	7
3.2- Apresentação do Método	10
3.2.1- Teorema de Lambert	11
3.3- Estudo da Transferência Interplanetária	12
3.4- Partida do Planeta	14
3.4.1- Condições Para a Partida	14
3.5- Chegada ao Planeta	23
3.5.1- Ajuste da Hipérbole da Aproximação	24
3.5.2- Cálculo da Manobra de Injeção	28
3.6- Princípio da Manobra Assistida por Gravidade	29
CAPÍTULO 4 – JANELA PLANETÁRIA	35
4.1- A Transferência de Hohmann	35
4.2- Aplicação Para a Janela Marciana	39
CAPÍTULO 5 – OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS INTERPLANETÁRIAS ...	43
5.1- Otimização Com Uma Manobra Para Cada “Flyby”	43
5.2- Otimização Com Uma Manobra Intermediária	44

5.3- Processo de Soma Vetorial	45
5.4- Aplicação ao Caso de Manobra Assistida por Gravidade	48
5.5- Regularização da Função Custo	48
 CAPÍTULO 6 – MÉTODO ALTERNATIVO PARA O CÁLCULO DE TRAJETÓRIAS INTERPLANETÁRIAS	 51
6.1- Apresentação do Método	51
6.2- Algoritmo de Resolução	52
6.3- Resultados	53
 CAPÍTULO 7 – EXEMPLOS DE TRAJETÓRIAS INTERPLANETÁRIAS	 55
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 63

LISTA DE FIGURAS

2.1- Sistema de Referência	3
3.1- Trajetória da Sonda Espacial	10
3.2- Teorema de Lambert	12
3.3- Fase Heliocêntrica da Transferência	13
3.4- Condições de Partida	15
3.5- Fase de Escape da Terra	16
3.6- Sistema de Referência Inercial	19
3.7- Nodos Ascendentes	22
3.8- Argumento do Periapside da Hipérbole de Escape	23
3.9- Chegada ao Planeta	24
3.10- Geometria da Hipérbole de Aproximação	25
3.11- Trajetória de Aproximação Possível	26
3.12- Manobra de Injeção	28
3.13- Princípio da Manobra Assistida por Gravidade	29
3.14- Manobra Assistida por Gravidade	31
3.15- Manobra Efetuada Antes da Passagem do Planeta com $\theta < \theta_m$	32
3.16- Manobra Efetuada Antes da Passagem do Planeta com $\theta > \theta_m$	32
3.17- Manobra Efetuada Depois da Passagem do Planeta com $\theta < \theta_m$	33
3.18- Manobra Efetuada Depois da Passagem do Planeta com $\theta > \theta_m$	33
4.1- Transferência de Hohmann	36
4.2- Diagrama de Curvas de Velocidade no Infinito Para a Manobra de Transferência Para o Planeta Vênus Durante a Partida da Terra	41
4.3- Diagrama de Curvas de Velocidade no Infinito Para a Manobra de Transferência Para o Planeta Vênus Durante a Chegada em Venus	42
5.1- Processo da Soma Vetorial	45
5.2- Exemplo do Processo da Soma Vetorial	47
5.3- Manobra Efetuada Antes e Após o “Flyby”	48

6.1- Apresentação do Método	51
6.2- Algoritmo de Resolução	52
7.1- Missão Rosetta	55
7.2- Trajetórias das Sondas Espaciais Voyager 1 e Voyager 2	57
7.3- Trajetória da Sonda Voyager 1 Através do Sistema de Satélites de Júpiter	58
7.4- Trajetória da Sonda Voyager 1 Através do Sistema de Satélites de Saturno	59
7.5- Trajetória da Sonda Voyager 2 Através do Sistema de Satélites de Júpiter	60
7.6- Trajetória da Sonda Voyager 2 Através do Sistema de Satélites de Saturno	61

LISTA DE TABELAS

2.1- Constantes Gravitacionais	4
3.1- Distâncias Médias do Sol e Raios das Esferas de Influência dos Principais	
Planetas do Sistema Solar	9
4.1- Transferências de Hohmann	38
4.2- Transferência Para Marte	40
6.1- Resultados Obtidos Por Boivin e Plaideau (1991) com o Estudo Referente à	
Trajectoria Terra – Marte	54
7.1- Cronograma da Missão Rosetta	56

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O problema da transferência interplanetária se inicia com a saída do campo gravitacional terrestre. Logo após, temos a fase de transferência das proximidades da Terra para as proximidades do planeta no qual queremos chegar. Nesta fase a sonda descreve uma trajetória heliocêntrica. E finalmente temos a chegada ao planeta alvo.

O método descrito aqui é o “Patched Conics”. Os resultados comparativos entre este método e um método iterativo usando integração numérica em uma trajetória Terra - Marte mostrou que o método Patched Conics é adequado na fase de análise de missões.

O objetivo deste trabalho, claramente não é definir a metodologia de solução dos problemas envolvidos no estudo de missões interplanetárias, pois todas as missões são normalmente sujeitas a técnicas específicas e a limitações específicas, portanto novas estratégias devem sempre serem consideradas. Entretanto, será mostrado o método básico de cálculo para este tipo de missão.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DA SONDA NO SISTEMA PLANETÁRIO

Estudaremos aqui o movimento da sonda S no sistema de referência R_j centrado no corpo P_j (conhecido como corpo principal) e com os eixos paralelos ao sistema de referência inercial R_i .

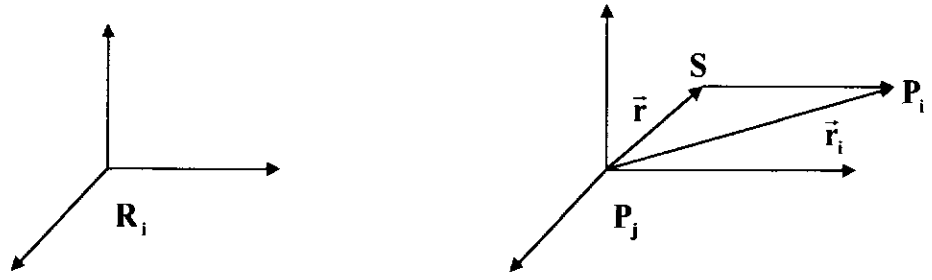


Fig. 2.1 – Sistema de Referência.

No caso do movimento na fase heliocêntrica, o corpo P_j será o Sol, da mesma forma, na fase planetocêntrica P_j será a Terra (fase planetocêntrica de partida) ou Marte (fase planetocêntrica de chegada).

Nos três casos as forças aplicadas na sonda são aquelas do problema de N corpos onde deve ser adicionada uma aceleração adicional devida à pressão de radiação solar, à não esfericidade natural dos planetas ou ao arrasto atmosférico (na fase planetocêntrica). Negligenciando a massa da sonda em relação ao corpo P_j , as equações de movimento tomam a forma:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu_j \frac{\vec{r}}{r^3} + \sum_{i \neq j} \mu_i \left[\frac{\vec{r}_i - \vec{r}}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right] + \gamma_p \quad (2.1)$$

onde : $-\mu_j \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow$ termo kepleriano devido ao corpo principal;

$$\sum_{i \neq j} \mu_i \left[\frac{\vec{r}_i - \vec{r}}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right] \Rightarrow$$
 perturbações gravitacionais devidas a outros corpos;

$\gamma_p \Rightarrow$ aceleração adicional.

A constante gravitacional solar é dada por: $\mu_{Sol} = 1,3271244 \cdot 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$

E a da Terra é dada por: $\mu_{Terra} = 3,9860047 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$

As constantes gravitacionais dos outros planetas do sistema solar, em termos da razão de suas massas com relação ao Sol, são dadas na Tabela 2.1.

TABELA 2.1 – CONSTANTES GRAVITACIONAIS

PLANETA	μ
Mercúrio	1/6023600
Vênus	1/408523,71
Terra e Lua	1/328900,56
Marte	1/3098708
Júpiter	1/1047,3486
Saturno	1/3497,90
Urano	1/22902,94
Netuno	1/19412,24

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1185. (de acordo com IERS standards - 1992)

Ao contrário dos satélites em órbitas terrestres, não existe um modelo de perturbação capaz de resolver o problema da propagação da órbita, isto é, capaz de determinar a posição $\vec{r}(t)$ e velocidade $\dot{\vec{r}}(t)$ da sonda em qualquer tempo $t > t_0$, dado $\vec{r}(t_0)$ e $\dot{\vec{r}}(t_0)$. O método mais preciso usado para solucionar o problema da propagação da trajetória interplanetária é um método de integração numérica (do tipo COWELL similar ao usado para satélites terrestres).

Existem outros métodos que podem ser mencionados, são rápidos em tempo de execução mas são pouco usados. Estes métodos são conhecidos como o método ENCKE que é descrito em Brouwer e Clemence (1961) ou o método multi-cônica Stumpff e Weiss (1968).

Entretanto, será apresentado apenas o método “Patched Conics” pois ele nos dá suficiente exatidão para estudos da análise de missões.

CAPÍTULO 3

MÉTODO “PATCHED CONICS”

Este método é baseado na idéia de que uma trajetória interplanetária em uma primeira aproximação, pode ser dividida em uma série de arcos elementares. Em cada um desses arcos, apenas o termo Kepleriano do potencial gravitacional da ação do corpo principal na sonda será considerado. Nestas condições, a trajetória completa será composta por uma série de arcos Keplerianos que podem ser calculados analiticamente.

Assim, para uma trajetória Terra - Marte, existem três arcos elementares correspondendo sucessivamente às seguintes três fases:

- fase terrestre
- fase heliocêntrica
- fase marciana

Antes de uma descrição mais detalhada, devemos introduzir o conceito de esfera de influência.

3.1- CONCEITO DE ESFERA DE INFLUÊNCIA

Vamos considerar o problema do movimento da sonda na presença do Sol e do planeta (com massas respectivamente dadas por m_{sol} e m_p).

Se a sonda está próxima do planeta, a atração gravitacional do Sol pode ser desconsiderada e o movimento da sonda é considerado como sendo Kepleriano.

O raio ρ_s de uma esfera conhecida como esfera de influência é definido como o raio de uma esfera em cujo interior a influência do Sol pode ser desconsiderada.

Respeitando o movimento da sonda em relação ao planeta, definimos:

$$Q_0 = \text{aceleração perturbadora} / \text{aceleração principal}$$

A aceleração perturbadora e a aceleração principal são respectivamente as acelerações devidas ao Sol e à Terra, isto é :

$$Q_0 = \left(\frac{\mu_{sol}}{\mu_p} \right) \left[\frac{1}{(a - \rho)^2} - \frac{1}{a^2} \right] \rho^2 \quad (3.1)$$

considerando $\rho \ll a$ temos :

$$Q_0 \approx 2 \left(\frac{\mu_{sol}}{\mu_p} \right) \left(\frac{\rho}{a} \right)^3 \quad (3.2)$$

E, exatamente da mesma maneira, respeitando o movimento da sonda em relação ao Sol, definimos:

$$Q_1 = \text{aceleração perturbadora} / \text{aceleração principal}$$

A aceleração perturbadora e a aceleração principal neste caso são devidas à Terra e ao Sol respectivamente:

$$Q_1 = \left(\frac{\mu_p}{\mu_{sol}} \right) \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{a^2} \right) r^2 = \left(\frac{\mu_p}{\mu_{sol}} \right) \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{a^2} \right) (a - \rho)^2 \approx \left(\frac{\mu_p}{\mu_{sol}} \right) \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 \quad (3.3)$$

O raio ρ_s da esfera de influência é definido com sendo o raio em relação ao centro do planeta do ponto na reta que liga o Sol ao planeta onde $Q_0 = Q_1$. Portanto

ρ_s é dado por :

$$\rho_s = 0,87055 \left(\frac{\mu_p}{\mu_{sol}} \right)^{2/5} a \quad (3.4)$$

O raio das esferas de influência dos principais planetas do sistema solar, são dados a seguir. Estes raios foram calculados usando os valores das constantes gravitacionais dos planetas dados na seção 2, e suas distâncias do Sol.

TABELA 3.1 – DISTÂNCIAS MÉDIA DO SOL E RAIOS DAS ESFERAS DE INFLUÊNCIA DOS PRINCIPAIS PLANETAS DO SISTEMA SOLAR

	distância média do Sol (UA)	ρ_s ($10^6 km$)
Mercúrio	0.387	0.0978
Vênus	0.723	0.5360
Terra	1.000	0.8050
Marte	1.524	0.5020
Júpiter	5.203	41.9000
Saturno	9.555	47.5000

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1188.

3.2- APRESENTAÇÃO DO MÉTODO

O método “Patched Conics” baseia-se na suposição de que o movimento da sonda no interior da esfera de influência do planeta pode ser descrito por um movimento cônico onde o planeta está no foco. Assumimos, também que quando a sonda está fora da esfera de influência o movimento é heliocêntrico e é descrito por uma cônica cujo foco é o Sol. A transição entre os dois movimentos ocorre na superfície da esfera de influência do planeta, como mostra a Figura 3.1.

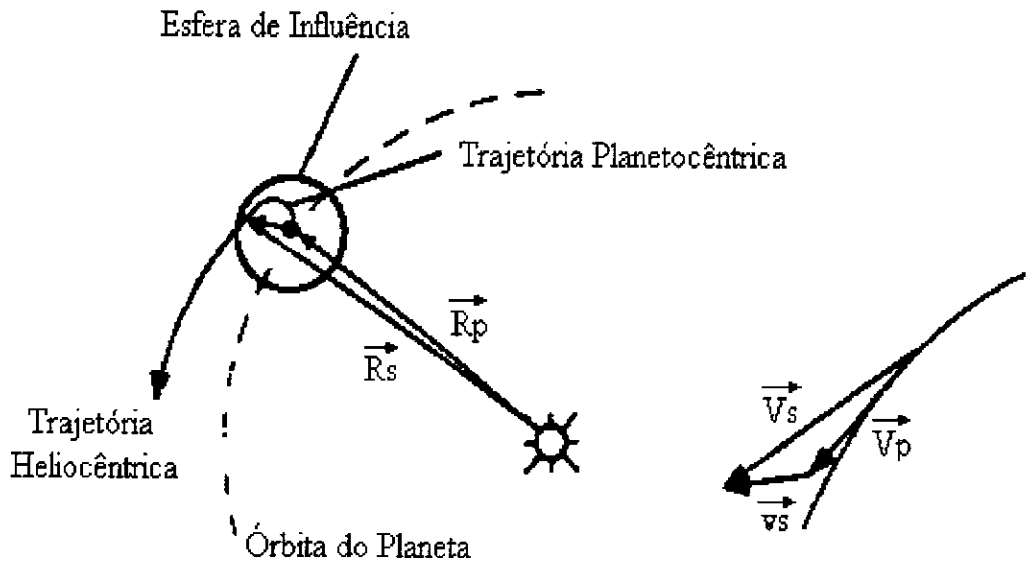


Fig. 3.1 – Trajetória da Sonda Espacial.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1188.

Para isto, devemos efetuar duas mudanças de variáveis, a primeira quando a sonda espacial sai da esfera de influência do planeta de partida, e a outra quando a sonda espacial entra na esfera de influência do planeta de chegada. Portanto temos as seguintes expressões.

$$\begin{aligned}\vec{R}_s &= \vec{r}_s + \vec{R}_p \\ \vec{V}_s &= \vec{v}_s + \vec{V}_p\end{aligned}\tag{3.5}$$

onde:

$\vec{R}_s$ e $\vec{V}_s$ representam o movimento heliocêntrico da sonda;

$\vec{r}_s$ e $\vec{v}_s$ representam o movimento planetocêntrico da sonda;

$\vec{R}_p$ e $\vec{V}_p$ representam o movimento heliocêntrico do planeta de partida.

$$\vec{r}_s = \vec{R}_s - \vec{R}_p \quad (3.6)$$

$$\vec{v}_s = \vec{V}_s - \vec{V}_p$$

onde:

$\vec{r}_s$ e $\vec{v}_s$ representam o movimento planetocêntrico da sonda ;

$\vec{R}_s - \vec{R}_p$ e $\vec{V}_s - \vec{V}_p$ representam a diferença entre o movimento heliocêntrico da sonda e do planeta de chegada.

No estudo da transferência interplanetária devemos ainda, apresentar um método de resolução para o problema das condições de contorno, conhecido como o problema de Lambert.

3.2.1- TEOREMA DE LAMBERT

O problema de Lambert pode ser definido como: deseja-se encontrar uma trajetória para que um veículo espacial parta do ponto A e chegue no ponto B , em um dado intervalo de tempo t , movendo-se em um potencial do tipo $1/r$.

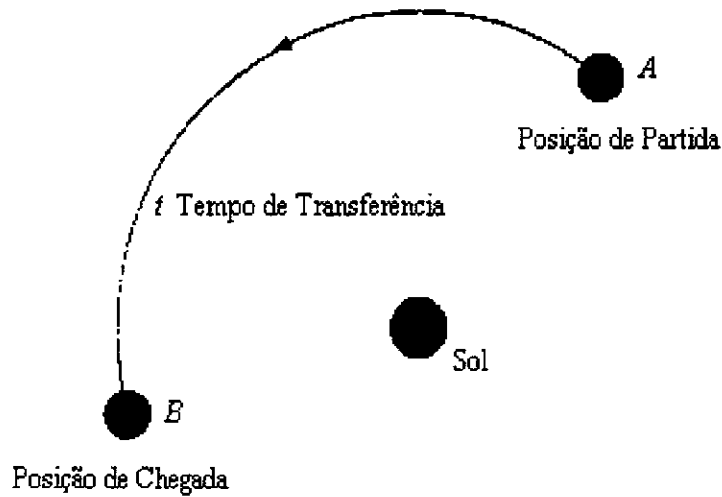


Fig. 3.2 – Tempo de Transferência

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1189.

Para um dado intervalo de tempo t podem existir casos com um número diferente de soluções:

- solução única usando trajetórias parabólicas ou hiperbólicas;
- duas soluções, com trajetórias diretas ou retrógradas;
- mais de duas soluções, incluindo transferências com múltiplas revoluções.

3.3- ESTUDO DA TRANSFERÊNCIA INTERPLANETÁRIA

No método “Patched Conics” o voo interplanetário foi dividido em três fases, que agora devem ser estudadas conjuntamente.

A fase planetocêntrica ocorre enquanto a sonda está sujeita somente à atração gravitacional do planeta e nas vizinhanças da esfera de influência, seguindo uma trajetória hiperbólica com: 1) velocidade na fase planetocêntrica de partida de $\vec{V}_\infty^d$, que representa a velocidade ao longo da assíntota da hipérbole de escape conhecida como velocidade no infinito ou velocidade assintótica de partida; e 2) fase planetocêntrica de

chegada com uma velocidade $\vec{V}_\infty^a$, que representa a velocidade ao longo da assíntota da hipérbole de chegada, conhecida como velocidade no infinito ou velocidade assintótica de chegada.

A fase heliocêntrica ocorre enquanto a sonda está sujeita apenas ao campo gravitacional gerado pelo Sol.

Em uma primeira aproximação, a duração das fases planetocêntricas de partida e de chegada, serão desconsideradas, isto é, a trajetória heliocêntrica pode ser considerada praticamente igual a um arco de elipse que une os centros dos dois planetas. Como pode ser visto na Figura 3.3.

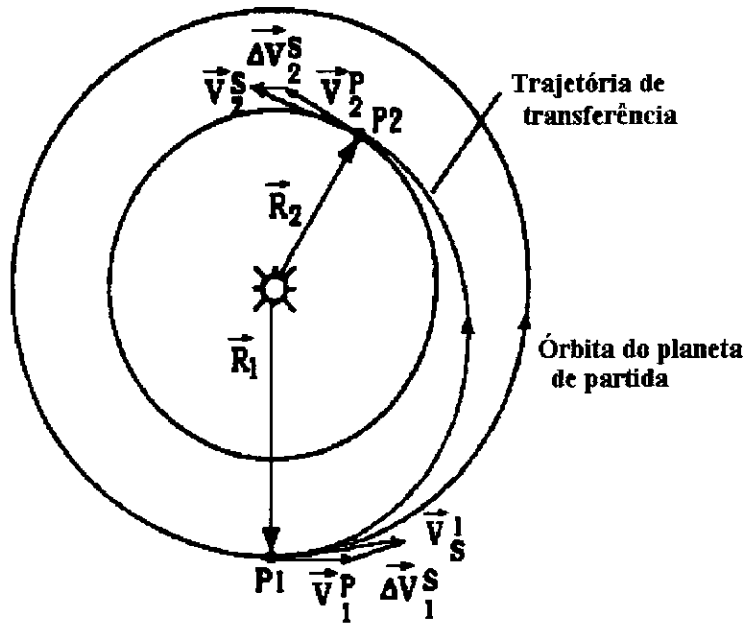


Fig. 3.3 – Fase Heliocêntrica da Transferência.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1191.

Dessa forma, o problema da transferência entre os dois planetas cujas velocidades heliocêntricas são $\vec{V}_1^p$ e $\vec{V}_2^p$ e as distâncias em relação ao Sol são dadas por $\vec{R}_1$ e $\vec{R}_2$ nos instantes t_1 e t_2 respectivamente, é achar a cônica que passa através de $\vec{R}_1$ e $\vec{R}_2$ tal que a duração do movimento da sonda seja dada por $t = t_2 - t_1$. O teorema de

Lambert pode portanto ser aplicado; e as velocidades $\vec{V}_1^s$ e $\vec{V}_2^s$ na partida e na chegada podem ser obtidas. As velocidades relativas ΔV_1 e ΔV_2 na partida e na chegada são então identificadas com as velocidades no infinito na partida e na chegada.

$$\begin{aligned}\vec{V}_\infty^d &\equiv \Delta \vec{v}_1^s = \vec{v}_1^s - \vec{v}_1^p \\ \vec{V}_\infty^a &\equiv \Delta \vec{V}_2^s = \vec{V}_2^s - \vec{V}_2^p\end{aligned}\tag{3.7}$$

3.4- PARTIDA DO PLANETA

Neste estudo será considerado que o planeta de partida será a Terra. Vamos assumir que no instante t_1 (instante de partida), a sonda deixa a esfera de influência da Terra, isto é, podemos considerar que a sonda esta a uma distância infinita do planeta, e move-se em um segmento de hipérbole (chamado de hipérbole de escape).

No raio da esfera de influência, a velocidade relativa da sonda em relação à Terra é definida como $\vec{V}_\infty^d$, isto é :

$$\vec{V}_\infty^d = \vec{V}_s(t_1) - \vec{V}_{Terra}(t_1)\tag{3.8}$$

3.4.1- CONDIÇÕES PARA A PARTIDA

A sonda deve deixar a esfera de influência e, portanto, ir para uma distância infinita em relação ao planeta. Dessa maneira, a uma certa altitude h a sonda deve atingir uma velocidade $\vec{V}_a$ onde a magnitude de V_a deve ser superior a velocidade de escape parabólica L_0 , que é dada por:

$$L_0 = \sqrt{2\mu_p / r_p}\tag{3.9}$$

onde μ_p e r_p são respectivamente a constante gravitacional e o raio do planeta somado à altitude h .

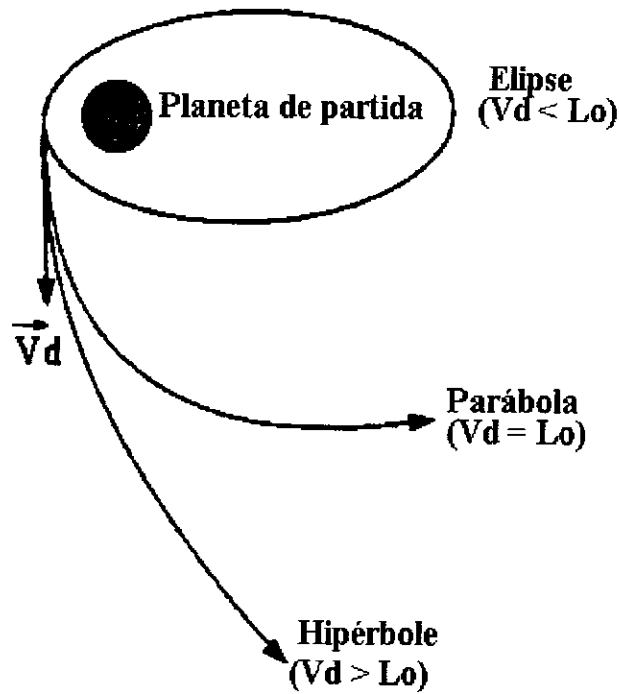


Fig. 3.4 – Condições para a Partida.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1192.

Assim, para um lançamento da Terra temos:

$$L_0 = 11,18 \text{ Km/s}$$

Podemos notar que a velocidade de escape L_0 está relacionada com a velocidade de circularização V_c através da relação:

$$L_0 = V_c \sqrt{2} \quad (3.10)$$

Se a condição de escape $V_d > L_0$ é satisfeita, a sonda move-se para fora do limite da esfera de influência descrevendo um segmento de hipérbole (movimento

retilíneo virtual), com velocidade V_{∞}^d (velocidade de partida no infinito). A magnitude V_{∞}^d pode ser calculada por meio do teorema da energia:

$$\frac{(V_{\infty}^d)^2}{2} - \frac{\mu_p}{r} = \frac{(V_p)^2}{2} - \frac{\mu_p}{r_p} \quad (3.11)$$

com: $\frac{\mu_p}{r_p} = \frac{L_0^2}{2}$

Duas estratégias podem ser usadas para fazer com que a sonda possa atingir uma distância infinita do centro de atração terrestre com uma velocidade de partida $\bar{V}_{\infty}^d$.

A primeira estratégia consiste em um disparo direto (como exemplo: utilizar um veículo Ariane V, com combustão contínua do estágio de propelente sólido e, sucessivamente, utilizar o estágio de propelente líquido). A segunda consiste em utilizar uma órbita de estacionamento (órbita circular baixa, utilizando, por exemplo, um lançador Próton).

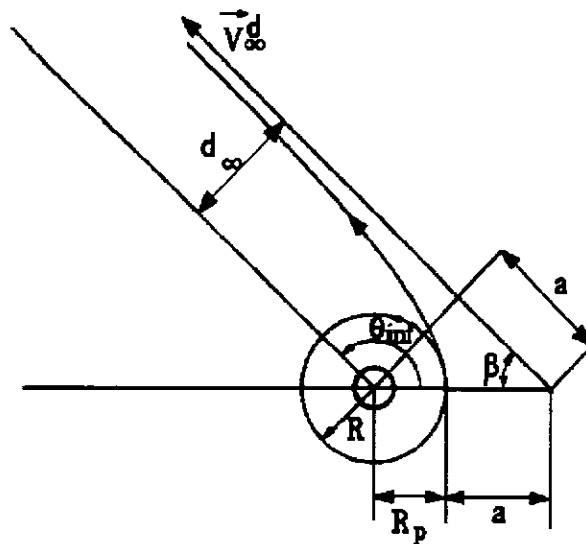


Fig. 3.5 – Fase de Escape da Terra.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1193.

Descreveremos aqui a segunda estratégia. Assumiremos que a manobra de escape (injeção na órbita hiperbólica) ocorre em uma altitude h e que o plano desta órbita contém a direção de $\vec{V}_\infty^d$.

O custo ΔV da manobra de escape é dado por:

$$\Delta V = \left| \vec{V}_h - \vec{V}_c \right| \quad (3.12)$$

onde: $\vec{V}_h$ é a velocidade ao longo da hipérbole de escape;

$\vec{V}_c$ é a velocidade na órbita circular de estacionamento.

$$\text{com } \left| \vec{V}_h \right| = \left[(V_\infty^d)^2 + \frac{2\mu}{R} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

$$\text{e } \left| \vec{V}_c \right| = \sqrt{\frac{\mu}{R}} \quad (3.14)$$

onde: R = raio da Terra + altitude h

Destas duas equações podemos ver que $\left| \vec{V}_h \right|$ e $\left| \vec{V}_c \right|$ são constantes qualquer que seja a localização da manobra na órbita de estacionamento.

O custo é mínimo se $\vec{V}_h$ e $\vec{V}_c$ forem colineares, isto é, se a manobra é feita no perigeu da hipérbole de escape. O raio R_p do perigeu é então igual ao raio R da órbita.

Podemos notar que a linha dos apsides da hipérbole é perfeitamente definida pelo ângulo β :

$$\text{sen } \beta = \frac{d_{\infty}}{a} \quad (3.15)$$

onde a (semi eixo maior da hipérbole) é dado pelo teorema da energia:

$$\frac{(V_{\infty}^d)^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a} \quad (3.16)$$

$$a = \frac{\mu}{V_{\infty}^d} \quad (3.17)$$

e d_{∞} é dado por:

$$d_{\infty}^2 + a^2 = (a + R_p) \quad (3.18)$$

É claro que todos os possíveis planos das órbitas de escape são aqueles que contêm a direção $\vec{V}_{\infty}^d$.

A excentricidade da hipérbole de escape é dada por:

$$e = \frac{a + R_p}{a} \quad (3.19)$$

e a anomalia verdadeira θ_{∞} do ponto no infinito por:

$$\theta_{\infty} = \cos^{-1}(-1/e) \quad (3.20)$$

Assumindo que a direção de $\vec{V}_\infty^d$ é dada em um sistema de referência inercial (como exemplo temos o sistema de referência equatorial 1950.0), o plano da órbita de estacionamento com inclinação i , contém a direção $\vec{V}_\infty^d$ e suas coordenadas são dadas pela ascensão reta α_∞^d e pela declinação δ_∞^d . A longitude do nodo ascendente Ω e o argumento ω do perigeu da hipérbole de escape podem ser determinados usando em particular o ângulo de transferência θ_∞^d entre o nodo ascendente e a direção da assíntota de partida.

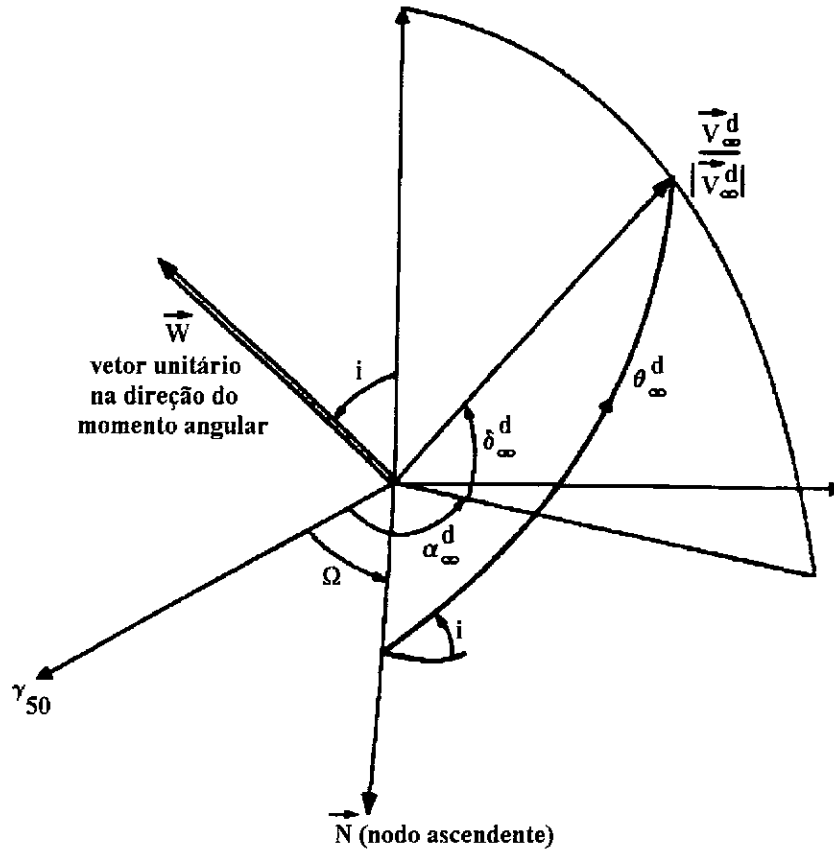


Fig. 3.6 – Sistema de Referência Inercial.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1195.

Dessa maneira temos que:

$$\cos \theta_\infty^d = \frac{\vec{V}_\infty^d}{V_\infty^d} \cdot \vec{N} \quad (3.21)$$

ou seja:

$$\cos \theta_{\infty}^d = \cos(\alpha_{\infty}^d - \Omega) \cos \delta_{\infty}^d \quad (3.22)$$

Podemos definir o vetor $\vec{P}$ como sendo o vetor unitário normal à direção do nodo ascendente e normal à direção da velocidade no infinito $\vec{V}_{\infty}^d$.

$$\vec{P} = \vec{N} \times \frac{\vec{V}_{\infty}^d}{V_{\infty}^d} \quad (3.23)$$

Os componentes de $\vec{P}$ são dados por:

$$\begin{aligned} P_x &= \sin \Omega \sin \delta_{\infty}^d \\ P_y &= -\cos \Omega \sin \delta_{\infty}^d \\ P_z &= \sin(\alpha_{\infty}^d - \Omega) \cos \delta_{\infty}^d \end{aligned} \quad (3.24)$$

Mas, $\vec{P}$ também pode ser dado por:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{N} \times [\cos \theta_{\infty}^d \vec{N} + \sin \theta_{\infty}^d (\vec{W} \times \vec{N})] \\ \vec{P} &= \sin \theta_{\infty}^d \vec{W} \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde $\vec{W}$ é o vetor unitário na direção do momento angular $\vec{C}$, e contém os seguintes componentes:

$$W_x = \sin i \sin \Omega$$

$$W_y = -\sin i \cos \Omega \quad (3.26)$$

$$W_z = \cos i$$

Dessa forma, temos:

$$P_x = \sin \theta_\infty^d \sin \Omega \sin i$$

$$P_y = -\sin \theta_\infty^d \cos \Omega \sin i \quad (3.27)$$

$$P_z = \sin \theta_\infty^d \cos i$$

E portanto obtemos:

$$\cos \theta_\infty^d = \cos(\alpha_\infty - \Omega) \cos \delta_\infty^d$$

$$\sin \delta_\infty^d = \sin \theta_\infty^d \sin \quad (3.28)$$

$$\sin(\alpha_\infty^d - \Omega) = \frac{\tan \delta_\infty^d}{\tan i}$$

Como nós partimos da condição de que as órbitas são coplanares, a inclinação da órbita de estacionamento deve estar compreendida na faixa:

$$\pi - |\delta_\infty^d| < i < |\delta_\infty^d| \quad (3.29)$$

Podemos notar da terceira relação que existem duas órbitas de estacionamento com inclinação i que contêm a direção $\vec{V}_\infty^d$. A ascensão reta do nodo ascendente destas órbitas é dada por:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \alpha_\infty^d - \psi \\ \Omega_2 &= \alpha_\infty^d + \psi + 180^\circ\end{aligned}\tag{3.30}$$

onde: $\psi = \sin^{-1} \left| \frac{\tan \delta_\infty^d}{\tan i} \right|$

Estes resultados estão representados na Figura 3.7:

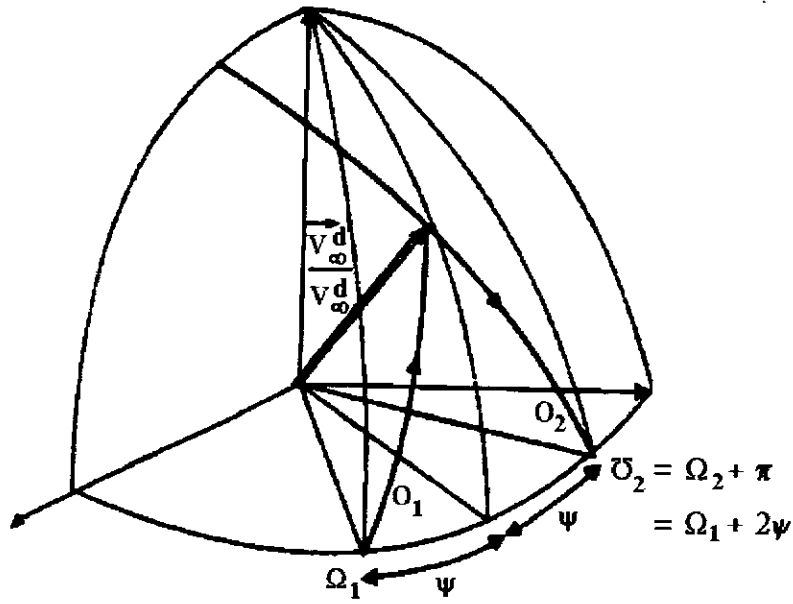


Fig. 3.7 – Nodos Ascendentes.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1197.

Nota-se que o nodo ascendente de uma órbita é simétrico ao nodo ascendente da outra órbita em relação ao plano do meridiano que passa através de $\vec{V}_\infty^d$. Do conhecimento do nodo ascendente, determina-se então a hora do lançamento no dia.

A representação dos pericentros P_1 e P_2 pode ser obtida pelo desenho na esfera da Figura 3.7, das interseções de O_1 e O_2 com o cone cujo eixo é $\vec{V}_\infty^d$ e cujo ângulo do vértice é $\pi - \beta$.

A primeira e a segunda relações também permitem que o ângulo de transferência (orientado na direção do movimento) θ_{∞}^d seja calculado para cada órbita, e o argumento do periapside da hipérbole de escape pode ser calculado por:

$$\omega = \theta_{\infty}^d - \theta_{\infty} \quad (3.31)$$

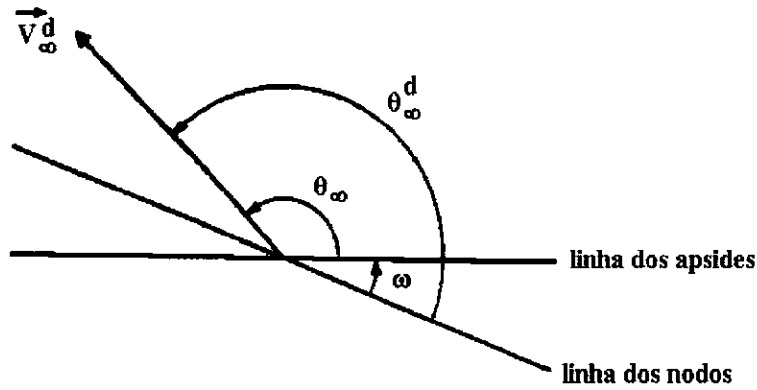


Fig. 3.8 – Argumento do Periapside da Hipérbole de Escape.
FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1197.

3.5- CHEGADA AO PLANETA

Quando a sonda se aproxima do planeta alvo, o movimento relativo da sonda (diferença entre os dois movimentos heliocêntricos) pode ser considerado como “virtualmente retilíneo” e posteriormente, já no interior da esfera de influência, o movimento pode ser considerado como kepleriano. Estando a uma distancia infinita do centro de atração gravitacional, a trajetória da sonda é uma hipérbole com velocidade assintótica $\vec{V}_{\infty}^a$ (conhecida como velocidade de chegada no infinito), que pode ser identificada como sendo a diferença das velocidades heliocêntricas:

$$\vec{V}_{\infty}^a = \Delta \vec{V}_{\infty}^a = \vec{V}_2^s(t_1) - \vec{V}^p(t_2) \quad (3.32)$$

3.5.1-AJUSTE DA HIPÉRBOLE DE APROXIMAÇÃO

Este ajuste é feito por meio de uma pequena correção na velocidade heliocêntrica alguns dias antes da chegada; com isto podemos ajustar a forma da hipérbole de aproximação e a inclinação do plano orbital.

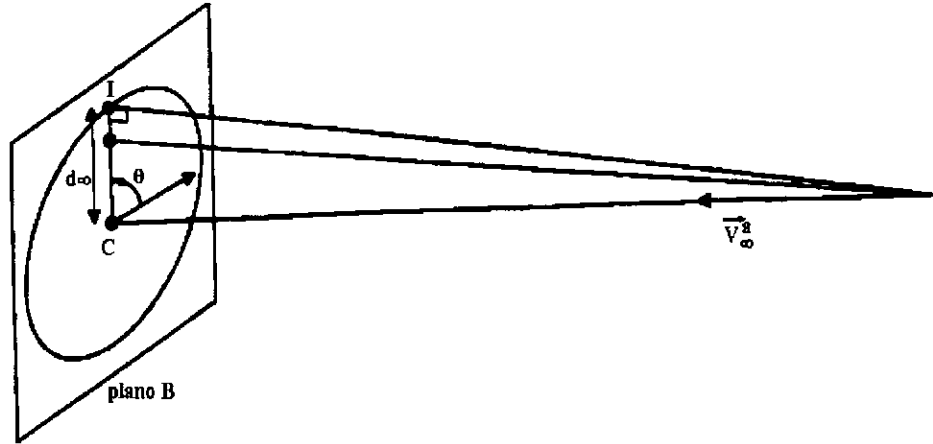


Fig. 3.9 – Chegada ao Planeta.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1198.

Definindo o plano perpendicular à direção de $\vec{V}_\infty^a$ e que passa pelo centro C do planeta (conhecido como plano B), temos:

- A distância d_∞ do ponto de impacto I (intersecção da assíntota da hipérbole de chegada com o plano B) nos dá a maior aproximação do planeta que podemos conseguir (raio do pericentro)
- A rotação θ do eixo arbitrário do plano B nos dá a inclinação que pode ser ajustada.

Com relação a d_∞ temos:

$$a = \frac{\mu}{(V_\infty^a)^2} \quad (3.33)$$

$$R_p = -a + \sqrt{a^2 + d_\infty^2}$$

$$R_p = \frac{-\mu}{(V_\infty^a)^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{(V_\infty^a)^4} + d_\infty^2} \quad (3.34)$$

Tendo d_∞ temos o raio do pericentro R_p . E com R_p podemos calcular a excentricidade:

$$e = \frac{a}{(a + R_p)} \quad (3.35)$$

temos também que:

$$\text{sen } \beta = \frac{d_\infty}{\left(R_p + \frac{\mu}{(V_\infty^a)^2}\right)} \quad (3.36)$$

$$\text{e } \cos \beta = \frac{a}{a + R_p} \quad (3.37)$$

A Figura 3.10 representa a geometria da hipérbole de aproximação.

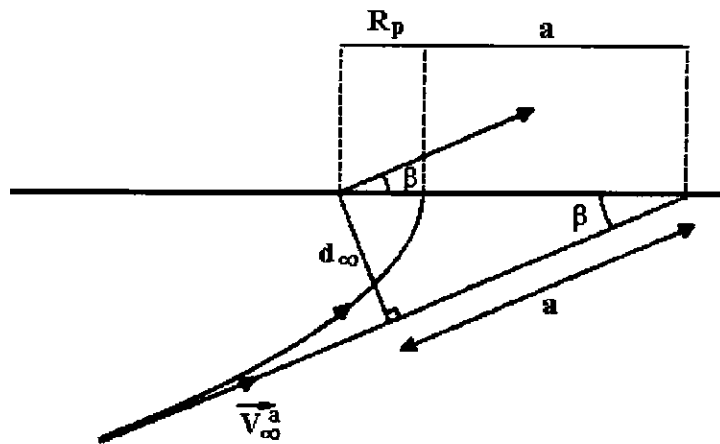


Figura 3.10 – Geometria da Hipérbole de Aproximação.
FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1199.

Se $R_p > \text{raio} + \text{camada atmosférica}$, a manobra de frenagem com um custo ΔV_p pode ser feita no pericentro da hipérbole para que a sonda seja capturada.

Além disto, por meio de uma rotação de $\vec{V}_\infty^a$ é possível ajustar a inclinação.

A Figura 3.11 representa uma das duas órbitas possíveis.

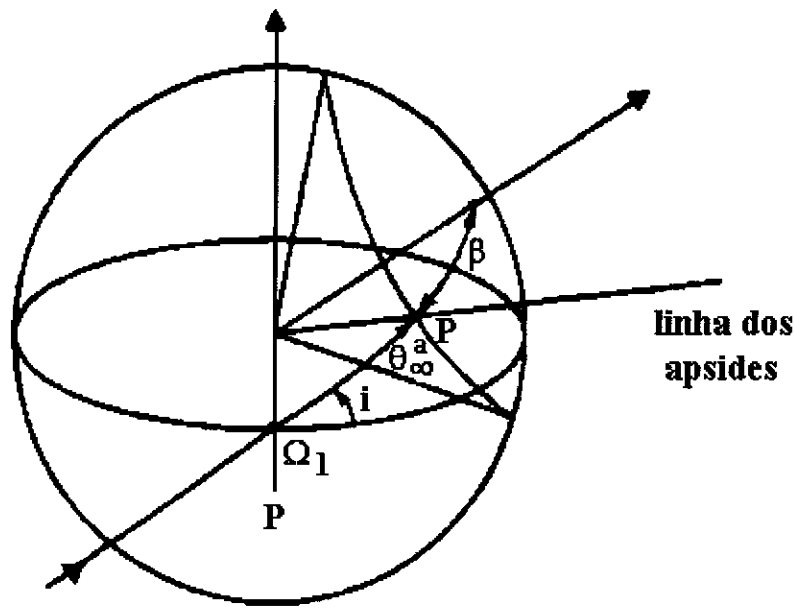


Fig. 3.11 – Trajetória de Aproximação Possível.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1198.

Pode ser mostrado da mesma maneira como foi mostrado para a hipérbole de escape que, para um dado raio do pericentro R_p , existem duas órbitas com inclinação i que contém $\vec{V}_\infty^a$ (com ascensão reta α_∞^a e com declinação δ_∞^a). Os nodos Ω^1 e Ω^2 das duas órbitas são, portanto, dados por:

$$\Omega^1 = \alpha_\infty^a - \psi \quad (3.38)$$

$$\Omega^2 = \alpha_\infty^a + \psi + \pi$$

$$\text{onde } \psi = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\tan \delta_{\infty}^a}{\tan i} \right) \quad (3.39)$$

O problema do cálculo de missões com pouso (para primeira aproximação vamos considerar que o pouso ocorre sob o pericentro) é então solucionado pelo cálculo do ângulo de transferência θ_{∞}^a do nodo ascendente da órbita para a direção $\vec{V}_{\infty}^a$ (orientado na direção do movimento), isto é:

$$\cos \theta_{\infty}^a = \cos(\alpha_{\infty}^a - \Omega) \cos \delta_{\infty}^a \quad (3.40)$$

$$\text{sen } \theta_{\infty}^a = \frac{\text{sen } \delta_{\infty}^a}{\text{sen } i}$$

sendo que da Equação 3.40 podemos obter a condição coplanar:

$$\pi - |\delta_{\infty}^a| < i < |\delta_{\infty}^a| \quad (3.41)$$

Conhecendo θ_{∞}^a podemos calcular o argumento do pericentro por:

$$\omega = \theta_{\infty}^a - \beta \quad (3.42)$$

E, de modo similar, a latitude δ_p e a ascensão reta α_p do local de pouso (muito próximo ao pericentro) são dadas por:

$$\text{sen } \delta_p = \text{sen } \omega \text{ sen } i$$

$$\cos(\alpha_p - \Omega) = \frac{\cos \omega}{\cos \delta_p} \quad (3.43)$$

$$\text{sen}(\alpha_p - \Omega) = \frac{\tan \delta_p}{\tan i}$$

3.5.2- CÁLCULO DA MANOBRA DE INJEÇÃO

Esta manobra tira a sonda da órbita OH , no pericentro da hipérbole de aproximação, e a direciona para que ela seja capturada em uma órbita de injeção OI .

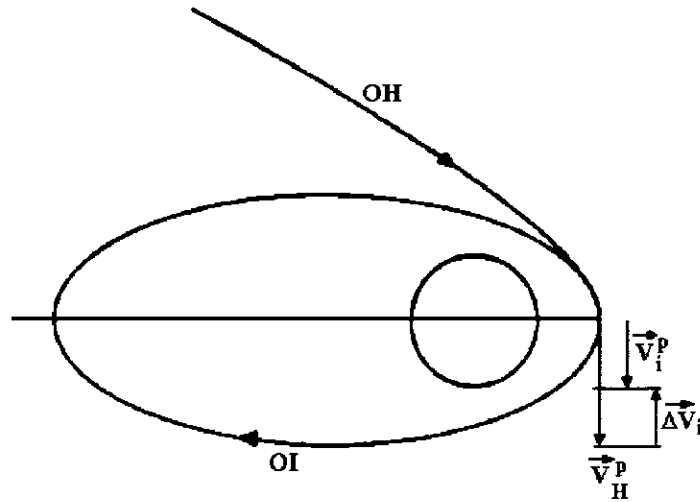


Fig. 3.12 – Manobra de Injeção.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1201.

Como esta é uma manobra colinear, o custo ΔV_i da manobra para tirar a sonda da trajetória original no pericentro das duas órbitas OH e OI , é dado por:

$$\Delta V_i = \left| \vec{V}_H^p \right| - \left| \vec{V}_i^p \right| \quad (3.44)$$

portanto temos:

$$\Delta V_i = \sqrt{\frac{2\mu}{R_p} + (V_\infty^a)^2} - \sqrt{\mu \left(\frac{2}{R_p} - \frac{1}{a_i} \right)} \quad (3.45)$$

Assumindo que o período da órbita é fixo (como exemplo, utilizar períodos de 24 ou 48 horas para assegurar a mesma fase com as estações terrestres) pode ser notado que o custo ΔV aumenta com o valor de R_p ; portanto a manobra de injeção deve ser feita o mais próximo possível do planeta.

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta V_i}{\partial R_p} &= -\frac{\mu}{R_p^2 |V_h^p|} + \frac{\mu}{R_p^2 |V_i^p|} = \\ &= \frac{\mu}{R_p^2 |V_h^p| |V_i^p|} \left(|V_h^p| - |V_i^p| \right) > 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.6- PRINCÍPIO DA MANOBRA ASSISTIDA POR GRAVIDADE

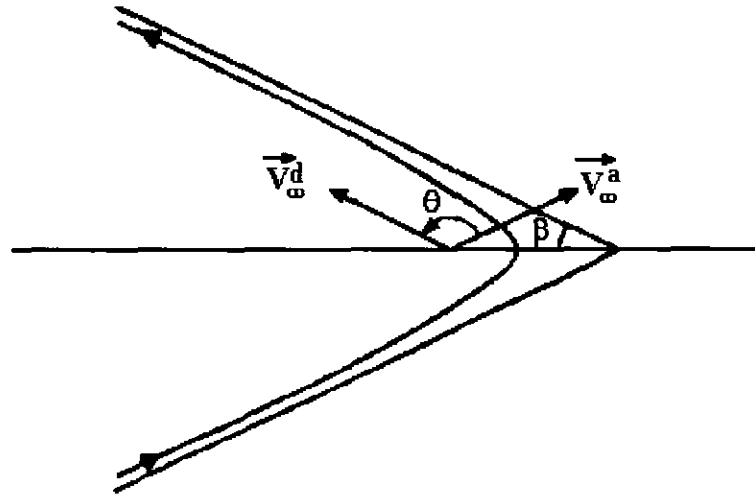


Fig. 3.13 – Princípio da Manobra Assistida por Gravidade.
FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1201.

Já foi visto no item 3.5 que a assíntota de chegada ao planeta tem uma inclinação β tal que:

$$\cos \beta = \frac{a}{a + R_p} \quad (3.47)$$

Se a manobra de injeção não é efetuada, a sonda segue na trajetória hiperbólica com velocidade $\vec{V}_\infty^d$ formando um ângulo θ com relação a $\vec{V}_\infty^d$ e mantendo a mesma magnitude (de acordo com o teorema da energia). Este ângulo θ está ligado ao ângulo β pela seguinte relação:

$$\frac{\theta}{2} + \beta = \frac{\pi}{2} \quad (3.48)$$

portanto temos:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{R_p (V_\infty^a)^2}{\mu}} \quad (3.49)$$

Convertendo para velocidade heliocêntrica, de acordo com a direção da variação, a trajetória pode ser alterada (acelerada ou desacelerada) como mostra a Figura 3.14.

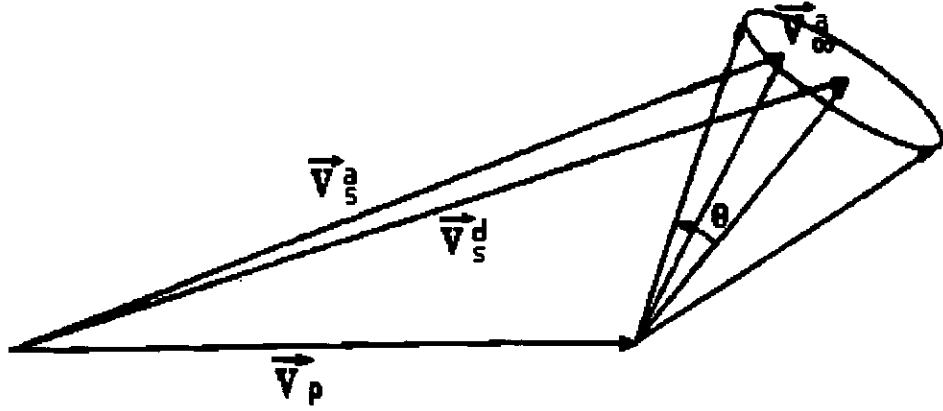


Fig. 3.14 – Manobra Assistida por Gravidade.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1202.

Onde: $\vec{V}_\infty^a$ é velocidade heliocêntrica antes da manobra

$\vec{V}_\infty^d$ é velocidade heliocêntrica depois da manobra.

A escolha das condições de “flyby” é feita alguns dias antes para minimizar o custo balístico. Isto é conhecido como ajuste do ponto de impacto. Duas estratégias podem ser usadas para isto de acordo com a magnitude de $\vec{V}_\infty^d$.

Nos dois casos, um ângulo de derivação θ_m imposto pelo mínimo raio $r_p^{\min}$ do “flyby” (igual ao raio do planeta mais a camada atmosférica) deve ser levado em conta.

No primeiro caso, a manobra é realizada antes da passagem do planeta; e, no segundo caso, a manobra é realizada depois da passagem do planeta.

Temos a seguir, os vários casos de manobras assistidas por gravidade:

- Manobra efetuada antes da passagem do planeta.

$$V_{\infty}^d < V_{\infty}^a \quad (3.50)$$

$$\sin\left(\frac{\theta_m}{2}\right) = \frac{1}{1 + \frac{R_p^{\min} (V_{\infty}^d)^2}{\mu}}$$

para $\theta < \theta_m$ temos:

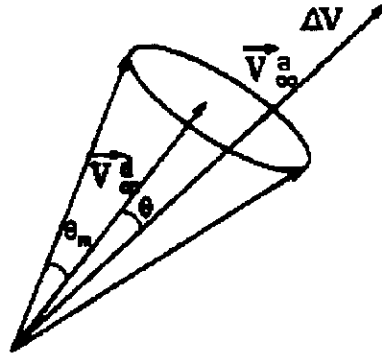


Fig. 3.15 - Manobra Efetuada Antes da Passagem do Planeta com $\theta < \theta_m$.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1203.

$$\Delta V = \left\| \vec{V}_{\infty}^d \right\| - \left\| \vec{V}_{\infty}^a \right\| \quad (3.51)$$

para $\theta > \theta_m$ temos:

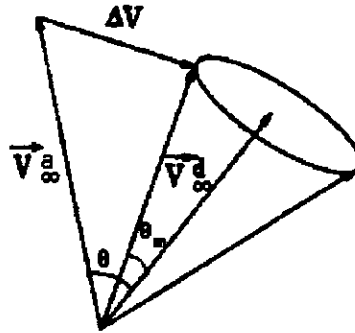


Fig. 3.16 - Manobra Efetuada Antes da Passagem do Planeta com $\theta > \theta_m$.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1203.

$$\Delta V = \sqrt{\left\| \vec{V}_{\infty}^d \right\|^2 + \left\| \vec{V}_{\infty}^a \right\|^2 - 2 \left\| \vec{V}_{\infty}^d \right\| \left\| \vec{V}_{\infty}^a \right\| \cos(\theta - \theta_m)} \quad (3.52)$$

- Manobra efetuada depois da passagem do planeta.

$$V_{\infty}^d > V_{\infty}^a \quad (3.53)$$

$$\sin\left(\frac{\theta_m}{2}\right) = \frac{1}{1 + \frac{R_p^{\min} (V_{\infty}^a)^2}{\mu}}$$

para $\theta > \theta_m$ temos:

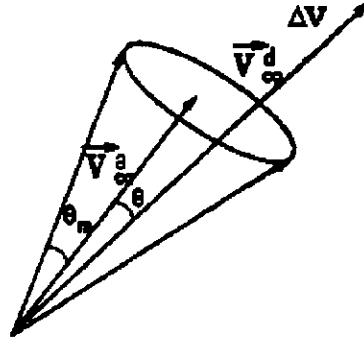


Fig. 3.17 - Manobra Efetuada Depois da Passagem do Planeta com $\theta < \theta_m$.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1203.

$$\Delta V = \left| \vec{V}_{\infty}^d \right| - \left| \vec{V}_{\infty}^a \right| \quad (3.54)$$

para $\theta > \theta_m$ temos:

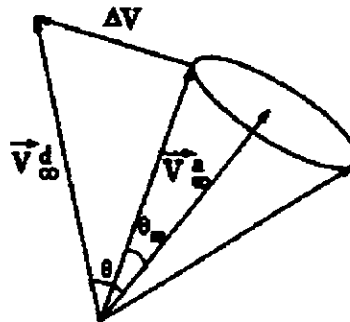


Fig. 3.18 - Manobra Efetuada Depois da Passagem do Planeta com $\theta > \theta_m$.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1203.

$$\Delta V = \sqrt{\left| \vec{V}_{\infty}^d \right|^2 + \left| \vec{V}_{\infty}^a \right|^2 - 2 \left| \vec{V}_{\infty}^d \right| \left| \vec{V}_{\infty}^a \right| \cos(\theta - \theta_m)} \quad (3.56)$$

CAPÍTULO 4

JANELA PLANETÁRIA

A janela planetária pode ser definida como sendo a região do espaço dentro da qual um determinado número de vínculos é satisfeito. Estes vínculos podem estar relacionados com as condições de partida (ex. satelitização, visibilidade das estações de terra, etc.).

Para realizar estudos deste tipo deve-se inicialmente determinar T_D e T_A ótimos para minimizar o ΔV , onde T_D é a data de partida da Terra e T_A é a data de chegada no planeta alvo.

A trajetória do planeta é considerada como sendo coplanar e circular. Nestas condições sabemos que a transferência de mínima energia é a transferência de Hohmann.

4.1- A TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN

A manobra conhecida como transferência de Hohmann ocorre por meio de uma órbita elíptica de transferência tangente nos apsides às órbitas inicial e final. É uma manobra bi-impulsiva entre duas órbitas circulares e coplanares com tempo livre. Consiste na aplicação de um impulso ΔV_1 na direção do movimento, colocando assim o veículo espacial em uma órbita de transferência elíptica. Quando o veículo completa meia revolução nesta órbita e atinge o apoapside, aplica-se outro impulso ΔV_2 , também na direção do movimento que faz com que ele entre na órbita final, com pode ser visto na Figura 4.1.

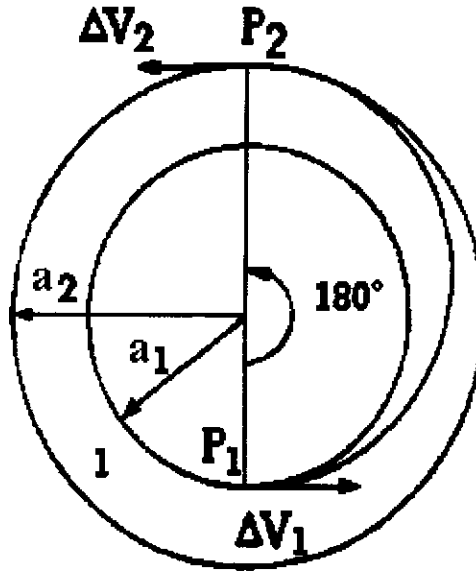


Fig. 4.1 – Transferência de Hohmann.

Neste caso as órbitas O_1 e O_2 são respectivamente as órbitas dos planetas de partida e de chegada.

Para a órbita O_1 de raio a_1 do planeta P_1 temos:

$$V_{C_1} = \sqrt{\mu/a_1} \quad (4.1)$$

Para a órbita O_2 de raio a_2 do planeta P_2 temos:

$$V_{C_2} = \sqrt{\mu/a_2} \quad (4.2)$$

O ângulo de transferência é de 180° e os elementos da órbita de transferência são dados por:

$$a_T = \frac{(a_1 + a_2)}{2} \quad (4.3)$$

$$e = \frac{(a_1 - a_2)}{(a_1 + a_2)} \quad (4.4)$$

e a linha dos apsides é a linha que liga P_1 e P_2 .

Esta configuração favorece uma transferência com a energia mínima e é repetida entre os dois planetas a cada período sinódico. Portanto, podemos ver que a transferência interplanetária com mínimo custo deve aproximar-se da transferência de Hohmann.

As transferências com $\theta < 180^\circ$ são chamadas de transferências curtas, e as transferências com $\theta > 180^\circ$ são chamadas de transferências longas.

O período sinódico T_{syn} entre dois planetas de períodos respectivamente T_1 e T_2 é definido como o intervalo de tempo na qual a posição relativa dos dois planetas se repete, pode ser mostrado (considerando o movimento relativo do planeta mais rápido) que o período sinódico é dado por:

$$T_{syn} = \frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|} \quad (4.5)$$

Mas na realidade as órbitas planetárias não são totalmente circulares e coplanares. Portanto as órbitas de transferência não estão no plano e, dessa forma, é necessária uma correção adicional de velocidade para obter a inclinação desejada.

As características das transferências de Hohmann associadas a alguns planetas são mostradas na Tabela 4.1.

TABELA 4.1 – TRANSFERÊNCIAS DE HOHMANN

	Vênus	Marte	Júpiter	Saturno
semi eixo maior da órbita do planeta (UA)	0,723	1,521	5,204	9,554
Período sideral do planeta (anos)	0,615	1,880	11,865	29,531
Periodicidade da transf. de Homann (anos)	1,596	2,137	1,092	1,035
Raio do periélio da órbita de transf. (UA)	0,723	1	1	1
Raio do afélio da órbita de transf. (UA)	1	1,523	5,202	9,554
Duração da transf. de Homann (anos)	0,399	0,708	2,730	6,061
Vel. heliocêntrica na partida da Terra (km/s)	27,29	32,73	38,58	40,08
Vel. no infinito na partida da Terra (km/s)	-2,50	2,94	8,79	10,29
Vel. heliocêntrica de chegada (km/s)	37,74	21,49	7,42	4,19
Vel. heliocêntrica do planeta alvo (km/s)	35,03	24,13	13,06	9,64
Vel. no infinito de chegada (km/s)	2,71	-2,65	-5,64	-5,45

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1211.

4.2- APLICAÇÃO PARA A JANELA MARCIANA

As janelas estudadas aqui são as janelas de 1994, 1996, 1998, 2001 e 2003.

O princípio para a determinação das datas t_H da transferência de Hohmann é dado abaixo.

Como a transferência em questão ocorre a 180° , temos:

$$L_{Marte}(t_H + \tau_H) = L_{Terra}(t_H) + 180^\circ \quad (4.6)$$

onde :

- $L_{Marte}(t_H + \tau_H)$ é a longitude marciana na chegada
- $L_{Terra}(t_H) + 180^\circ$ é a longitude terrestre na partida
- $\tau_H = 0,708 \text{ anos}$ é a duração da transferência de Hohmann.

Da diferença da longitude elíptica entre Marte e a Terra no dia da partida (considerando a variação linear da longitude elíptica de Marte como sendo de 360° por 1,88 anos) temos:

$$L_{Marte}(t_H) - L_{Terra}(t_H) = 180^\circ - \frac{360^\circ}{1,88} 0,708 = 44,43^\circ \quad (4.7)$$

Levando em consideração as efemérides de Marte podemos estabelecer a seguinte tabela:

TABELA 4.2 – TRANSFERÊNCIAS PARA MARTE

	Data da transf. de Homann partida	Data da transf. de Homann chegada	$\Delta\phi$ (graus)	ρ_A (AU)	V_∞^d mínima vel. no infinito na partida da Terra (km/s)	V_∞^a mínima vel. no infinito na chegada em Marte (km/s)
1994	21/10/1994	06/07/1995	22,3	1,60	3,07	2,51
1996	03/12/1996	18/08/1997	21,5	1,50	2,98	2,86
1998	01/02/1999	17/10/1999	81,9	1,39	2,92	3,34
2001	14/04/2001	28/12/2001	25,5	1,42	2,80	3,48
2003	16/06/2003	25/02/2004	30,8	1,54	2,96	2,70

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1213.

Onde $\Delta\phi$ representa a diferença angular entre a linha dos apsides da transferência de Homann e a linha dos nodos da órbita de Marte, ρ_A representa a distância de Marte em relação ao Sol no dia da chegada, e as colunas de V_∞^d e V_∞^a representam a mínima magnitude da velocidade no infinito na partida da Terra e na chegada em Marte, e foram determinadas de diagramas similares a estes mostrados abaixo para Vênus que foram ajustadas para a janela de 1996. Estes diagramas representam curvas de velocidade no infinito constantes na partida da Terra e na chegada em Marte.

Podemos notar que no caso de Marte (que é oposto ao de Vênus cuja órbita tem excentricidade de 0,007) o parâmetro determinante não é $\Delta\phi$ mas sim a distância ρ_A (pois teremos uma maior frenagem quando ρ_A diminui).

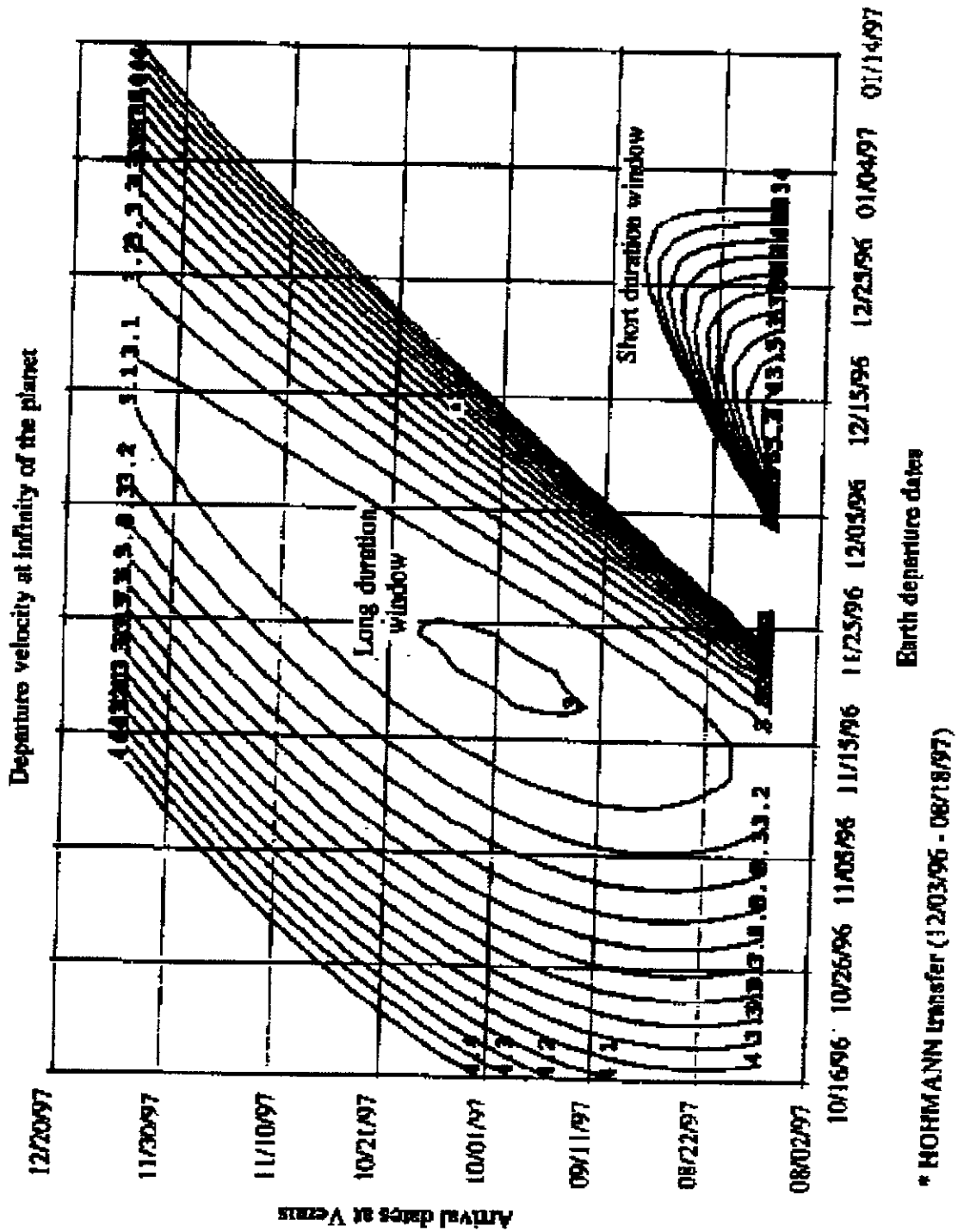


Fig. 4.2 – Diagrama de Curvas de Velocidade no Infinito Constante Para a Manobra de Transferência Para o Planeta Vênus Durante a Partida da Terra.
 FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1215.

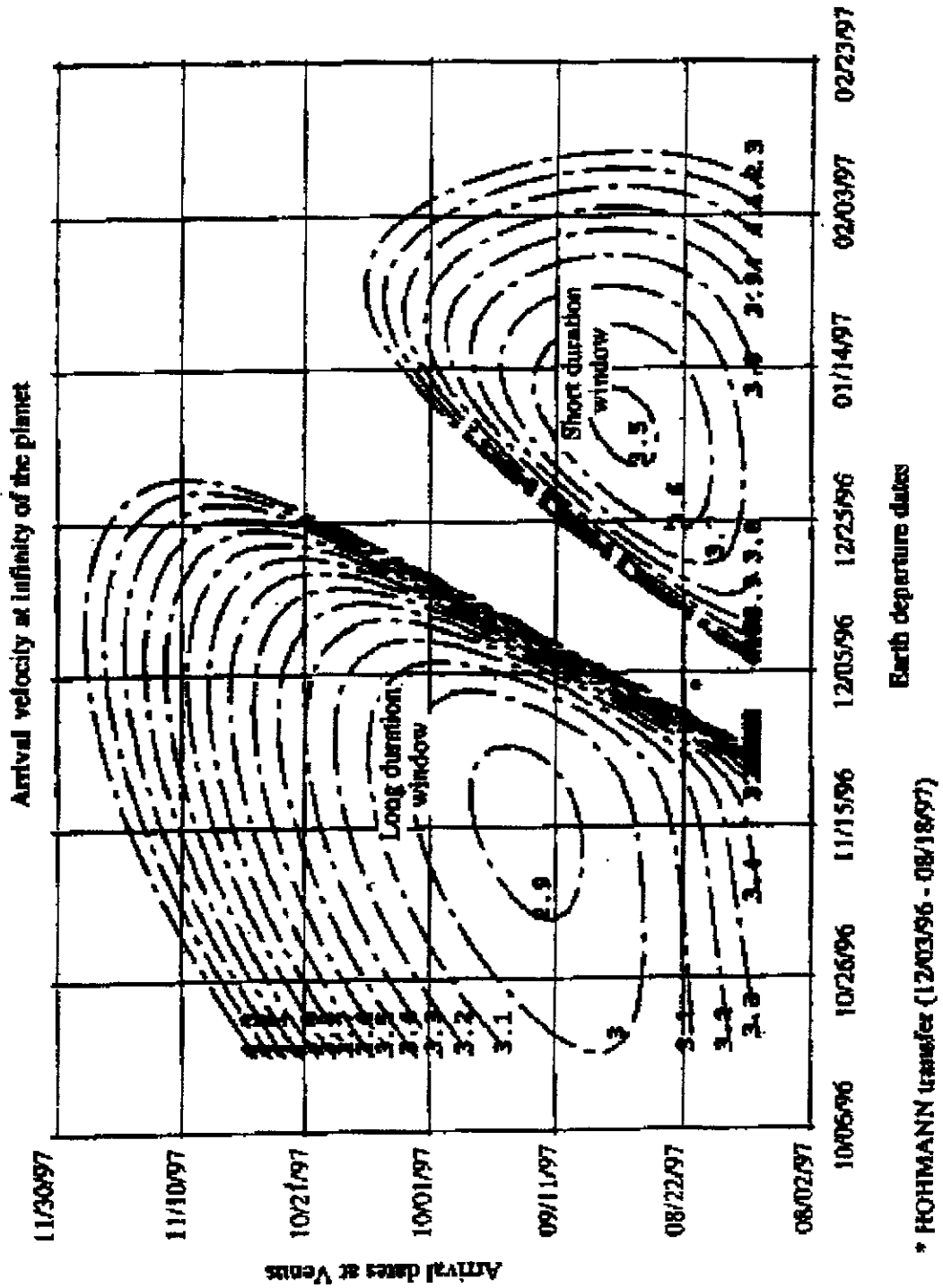


Fig. 4.3 – Diagramas de Curvas de Velocidade no Infinito Constante Para a Manobra de Transferência Para o Planeta Vênus Durante a Chegada em Vênus.
 FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1214.

CAPÍTULO 5

OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS INTERPLANETÁRIAS

Inicialmente vamos considerar apenas uma manobra para cada “flyby”.

Se considerarmos o problema de n corpos, o custo balístico de uma trajetória completa pode ser dado da seguinte forma:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^n |\Delta V_i| \quad (5.1)$$

onde ΔV_i é uma função de T_{i-1} , T_i e T_{i+1} .

5.1- OTIMIZAÇÃO COM UMA MANOBRA PARA CADA “FLYBY”

Estamos diante de um problema de minimização com n variáveis.

A expressão analítica de cada ΔV_i resulta no gradiente da função custo a ser calculada.

Assim:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial T_j} = \sum \frac{\partial |\Delta V_i|}{\partial T_j} \quad (5.2)$$

isto é :

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial T_j} = \sum_{i=j-1}^{j+1} \frac{1}{|\Delta V_i|} \left(\Delta \vec{V}_i \cdot \frac{\partial \Delta \vec{V}_i}{\partial T_j} \right) \quad (5.3)$$

Para obter a solução usamos o método gradiente, onde F' é expandido em relação a X_0 para primeira ordem:

$$F(\bar{X}_0 + t\vec{h}) = F(\bar{X}_0) + t(\nabla F(\bar{X}_0), \vec{h}) \quad (5.4)$$

Assim o vetor h é escolhido tal que:

$$(\nabla F(\bar{X}_0), \vec{h}) < 0 \quad (5.5)$$

Dessa forma, o escalar $t > 0$ é escolhido, minimizando o funcional na direção de h .

Reduzimos portanto, o problema de otimização com múltiplas variáveis para um com apenas uma única variável.

5.2- OTIMIZAÇÃO COM MANOBRA INTERMEDIÁRIA

A minimização apresentada acima é restrita, já que impede a adição de manobras suplementares. Entretanto, é fácil imaginar que tal incremento de liberdade, em certos casos, melhora o resultado final. Este é o motivo da introdução do potencial para considerar uma manobra adicional entre cada “flyby”, desde que haja necessidade. Cada uma destas manobras é determinada pelos seguintes parâmetros adicionais: a data quando a manobra é realizada e o incremento de velocidade adicionado. O problema de n variáveis torna-se portanto um problema de $n + (n-1)4$, ou seja, de $5n - 4$ variáveis.

Calculando a trajetória completa nós ainda recaímos no problema de Lambert. O gradiente será também calculado de forma analítica embora o processo seja um pouco mais tedioso que o caso anterior, pelo método de matrizes de transição do movimento.

5.3- PROCESSO DA SOMA VETORIAL

Convertendo para $5n - 4$ variáveis, inevitavelmente temos um problema de iniciação que é crítico para a correta convergência do algoritmo. A data e o valor da manobra intermediária não são fáceis de obter intuitivamente. Por este motivo um algoritmo específico foi desenvolvido e se baseia no conceito da soma vetorial.

A trajetória representada na Figura 5.1 pode ser considerada como um processo de soma vetorial:

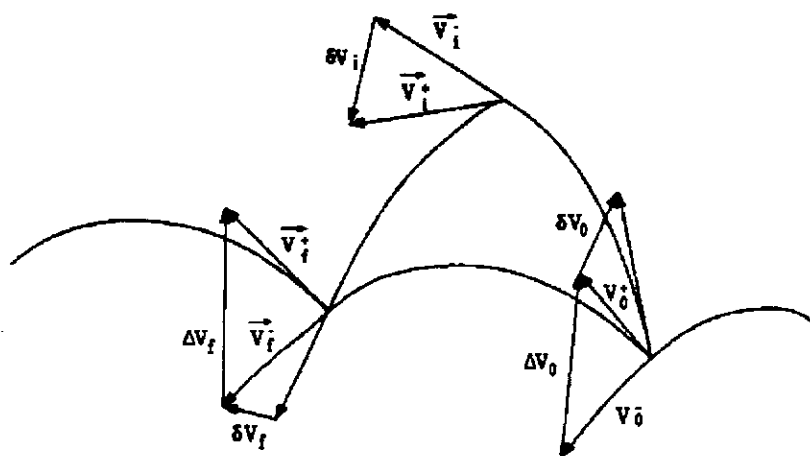


Fig. 5.1 – Processo da Soma Vetorial.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1206.

O vetor adicionado é definido como sendo o vetor que satisfaz a equação diferencial de segunda ordem dada abaixo:

$$\ddot{\vec{\lambda}}(t) = G[\vec{x}(t)] \cdot \vec{\lambda}(t) \quad (5.6)$$

onde:

$$G[\vec{x}(t)] = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(-\mu \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right) \quad (5.7)$$

sendo que G é a matriz das segundas derivadas, e portanto é uma matriz simétrica. λ é definido pela escolha dos valores inicial e final. Assim, λ é escolhido tal que:

$$\bar{\lambda}(t_0) = \frac{\partial |\Delta \vec{V}_0|}{\partial \vec{V}_0^+} \quad (5.8)$$

$$\bar{\lambda}(t_f) = -\frac{\partial |\Delta \vec{V}_f|}{\partial \vec{V}_f^-}$$

Podemos notar que se λ e μ satisfazem a mesma equação diferencial, então a primeira integral do movimento é dada por:

$$W(t) = \dot{\bar{\lambda}}(t) \cdot \bar{\mu}(t) - \bar{\lambda}(t) \cdot \dot{\bar{\mu}}(t) \quad (5.9)$$

isto é verdadeiro pois G é simétrica.

A matriz W é chamado de Wronskiano do movimento.

Vamos agora considerar as perturbações de velocidade inicial e final, representadas na Figura 5.1, com uma manobra intermediária efetuada no tempo t_1 .

O novo custo associado com esta trajetória é dado por:

$$J + \delta J = |\Delta \vec{V}_0 (\vec{V}_0^+ + \delta \vec{V}_0^+)| + |\vec{V}_i^+ - \vec{V}_i^-| + |\Delta \vec{V}_f (\vec{V}_f^- + \delta \vec{V}_f^-)| \quad (5.10)$$

Retornando para a definição de soma vetorial o ganho é então:

$$\delta J = \bar{\lambda}_0 \cdot \delta \vec{V}_0^+ - \bar{\lambda}_f \cdot \delta \vec{V}_f^- + \delta \vec{V}_i \quad (5.11)$$

A natureza estacionária de W é então aplicada, para finalmente obter:

$$\delta J = \left| \delta \vec{V}_i \right| \left[1 - \bar{\lambda}(t_i) \cdot \frac{\delta \vec{V}_i}{\delta \vec{V}_i} \right] \quad (5.12)$$

A diminuição no custo implica que:

- o módulo do vetor soma é maior que 1 no tempo t_i
- a manobra é efetuada na direção oposta do vetor.

Calculando o módulo do vetor soma temos todas as informações necessárias para decidir se é vantajoso ou não utilizar uma manobra intermediária. Mas ainda não sabemos onde (quando) efetuar a manobra e em que direção. Como exemplo podemos citar o caso mostrado na Figura 5.2.

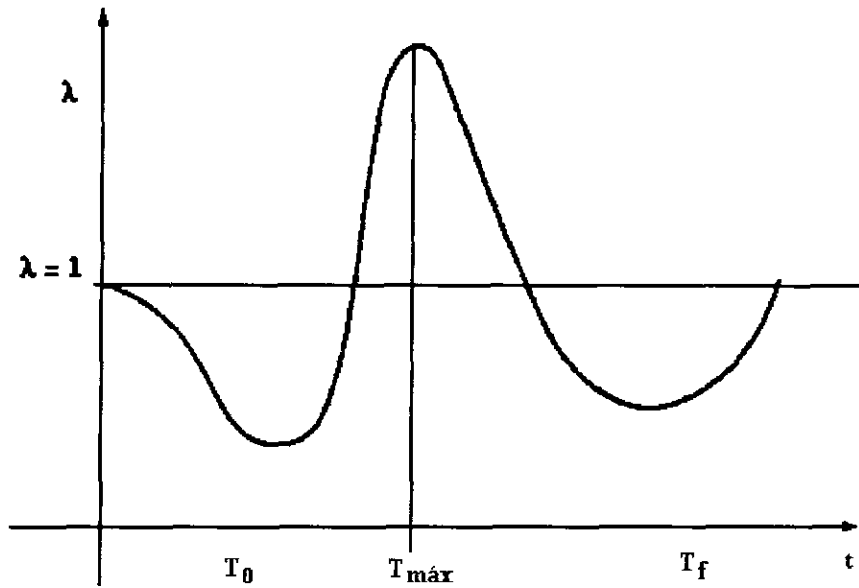


Fig. 5.2 – Exemplo do Processo de Soma Vetorial.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1208.

A manobra $T_{\max}$ deve ser efetuada na direção oposta a $\bar{\lambda}(T_{\max})$.

5.4- APLICAÇÃO AO CASO DE MANOBRA ASSISTIDA POR GRAVIDADE

No caso de manobra assistida por gravidade o cálculo do vetor soma mostra se a utilização de uma manobra adicional reduz o custo do “flyby”. Pode ser mostrado que isto não se aplica ao caso em que a derivação angular não apresenta custo. Entretanto, no caso oposto pode ser vantajoso efetuar a manobra antes e depois do “flyby”, como mostra o diagrama da Figura 5.3.

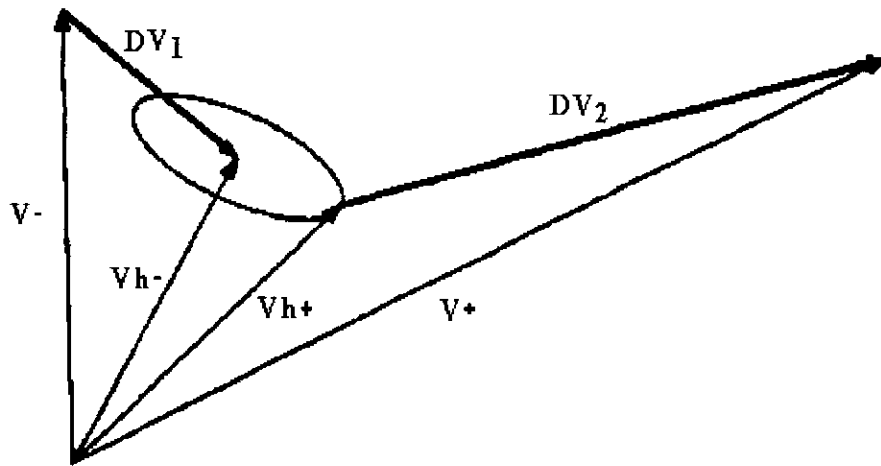


Fig. 5.3 – Manobra Efetuada Antes e Após o “Flyby”.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1208.

5.5- REGULARIZAÇÃO DA FUNÇÃO CUSTO

Vamos retornar ao exemplo de minimização do custo da trajetória com uma manobra intermediária:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^n |\Delta V_i| \quad (5.13)$$

O algoritmo de otimização de maior sucesso usa o gradiente desta função. E desta forma, isto implica que a função gradiente existe.

Examinando a função acima concluímos que ela não é diferenciável quando um dos ΔV_i é zero. Como ocorre frequentemente no caso de manobras intermediárias. Assim devemos regularizar a função através da diferenciação. Para fazer isto, é suficiente notar que:

$$J_{\varepsilon}(\vec{V}) = |\vec{V}|^{(1+\varepsilon)} \quad (\varepsilon > 0) \quad (5.14)$$

é diferenciável em todo lugar desde que o gradiente, para o vetor diferente de zero, seja igual a:

$$\nabla J_{\varepsilon}(\vec{V}) = (1 + \varepsilon) |\vec{V}|^{\varepsilon} \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \quad (5.15)$$

e portanto vai para zero quando V torna-se zero.

A escolha de um ε pequeno permite o uso de um algoritmo simplificado e uma aproximação adequada da função a ser minimizada.

CAPÍTULO 6

MÉTODO ALTERNATIVO PAR O CÁLCULO DE TRAJETÓRIAS

INTERPLANETÁRIAS

6.1- APRESENTAÇÃO DO METÓDO

O método tem como base o algoritmo da correção diferencial que utiliza as condições de fronteira para resolver o problema no caso geral quando a sonda esta sujeita a outras forças além daquelas devido ao campo central (ex. corpo perturbador, termo J_2 do potencial, pressão de radiação solar, etc.).

É necessário achar a velocidade $\vec{V}_1$ da sonda tal que se a sonda está na posição $\vec{R}_1$ na data t_1 , ela estará na posição $\vec{R}_2$ na data t_2 .

Se definirmos $\vec{V}_1^*$ como sendo a primeira estimativa da velocidade inicial (usada no teorema de Lambert) o algoritmo de resolução pode ser apresentado da seguinte forma:

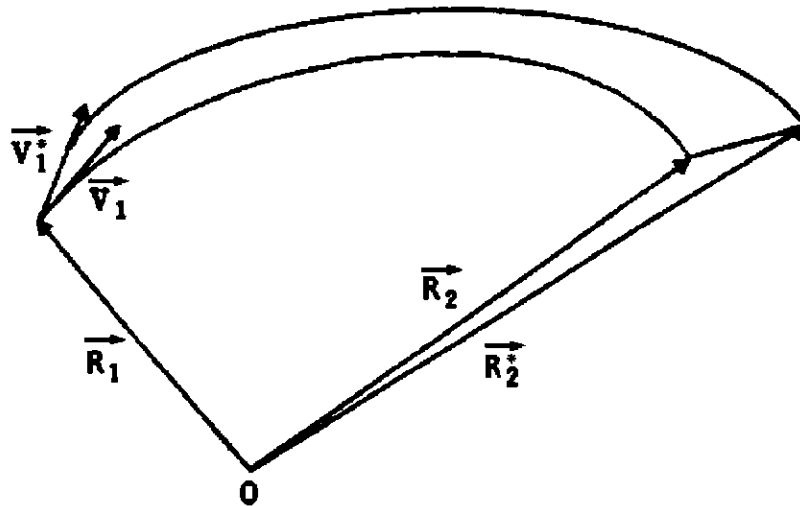


Fig. 6.1 – Apresentação do Método.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1216.

6.2- ALGORITMO DE RESOLUÇÃO

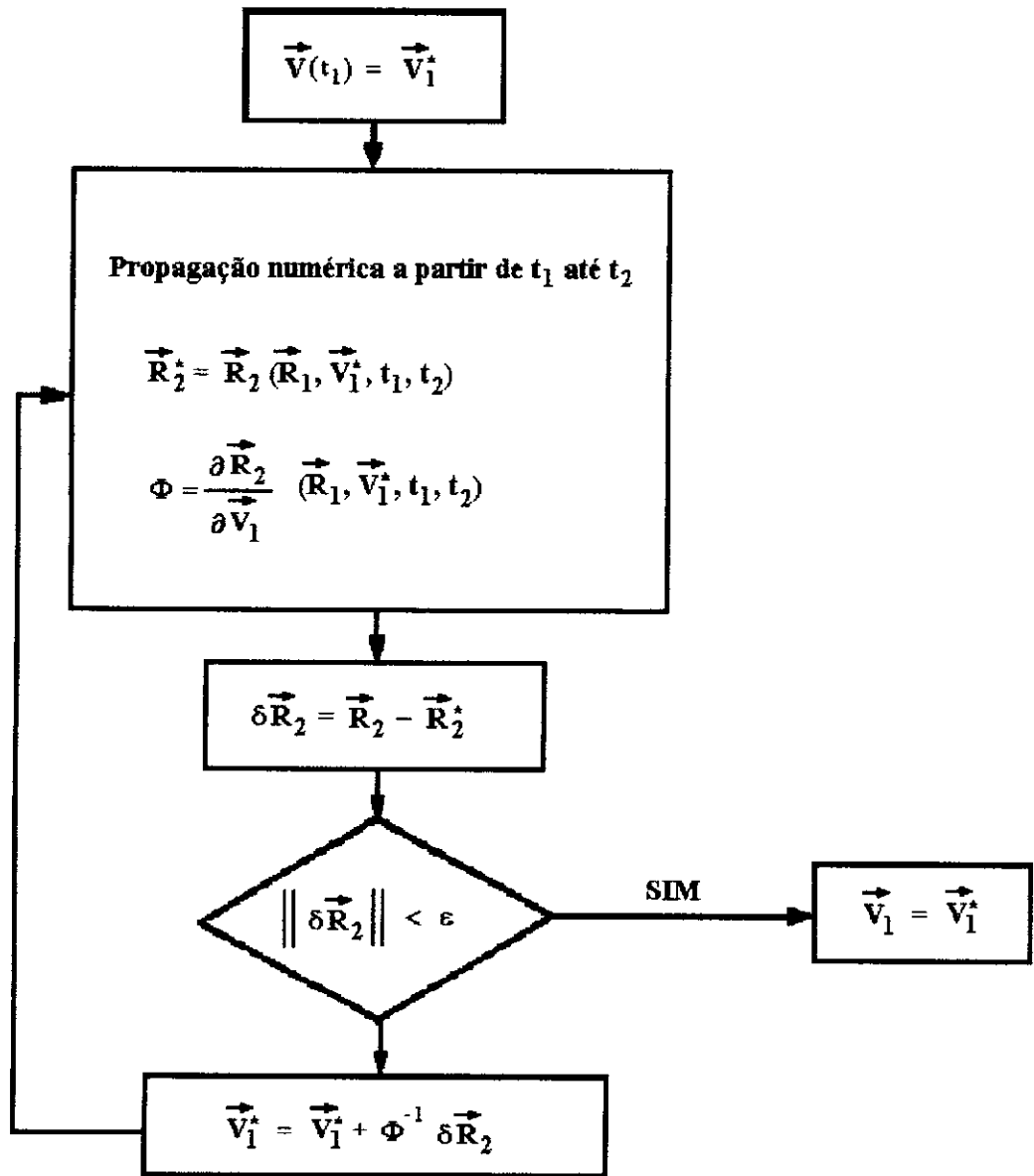


Fig. 6.2 - Algoritmo de Resolução.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1216.

6.3- RESULTADOS

Como exemplo mostraremos os resultados obtidos por Boivin e Plaideau (1991) com o estudo referente a trajetória Terra – Marte.

O problema da determinação da trajetória de escape da Terra a partir de uma órbita de estacionamento circular consiste em determinar os três seguintes parâmetros:

- θ_M (ângulo de posicionamento da manobra de escape na órbita de estacionamento)
- A_t (data de lançamento, que é equivalente a ascensão reta do nodo da órbita de estacionamento)
- ΔV (nível de propulsão).

Que geram as seguintes condições finais atingidas no instante t_f :

- i_f = inclinação da órbita ao redor de Marte;
- r_f = distância do centro de Marte na data t_f ;
- $r_f \cdot \dot{r}_f = 0$ (no instante t_f , onde ocorre a passagem pelo pericentro).

A princípio as condições iniciais da órbita de estacionamento são determinadas pela solução do problema pelo método “Patched Conics”. Depois deve-se considerar um modelo mais completo das forças atuantes (Terra + Sol + termo J_2 do potencial do planeta durante a fase de partida e chegada) nas três fases consideradas (Terra / Sol / Marte). Um algoritmo idêntico ao algoritmo anteriormente descrito é aplicado, as condições finais assumem valores i_f , r_f e $r_f \cdot \dot{r}_f \neq 0$ e as condições iniciais os valores θ_M , A_t e ΔV .

A matriz de conversão Φ a ser usada neste caso é dada por:

$$\Phi = \frac{\partial(i_f, r_f, r_f \cdot \dot{r}_f)}{\partial(\theta_M, A_I, \Delta V)} \tag{6.1}$$

Esta matriz é produto de três matrizes de transição correspondentes respectivamente as fases planetocêntrica terrestre, heliocêntrica e planetocêntrica de chegada.

Como resultado obtemos a seguinte Tabela:

TABELA 6.1 – RESULTADOS OBTIDOS POR BOIVIN E PLAIDEAU (1991) COM O ESTUDO REFERENTE A TRAJETÓRIA TERRA – MARTE

	“Patched Conics”	Problema dos Três Corpos
θ_M (graus)	-2,03	-0,73
ΔV_M (km/s)	3,614	3,655
Data de Lançamento	21/1094	21/10/94
	19 h 50 min	19 h 50 min
Data da Manobra	21/10/94	21/10/94
	20 h 34 min 3 s	20 h 33 min 40 s

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 1217.

CAPÍTULO 7

EXEMPLOS DE TRAJETÓRIAS INTERPLANETÁRIAS

Exemplo mostrado a seguir é baseado no trabalho de Hechler (1994) e consiste na missão ROSETTA da Agência Espacial Europeia, cujo objetivo é a aproximação e um “rendezvous” com o cometa Wirtanen. O lançamento está planejado para 1998.

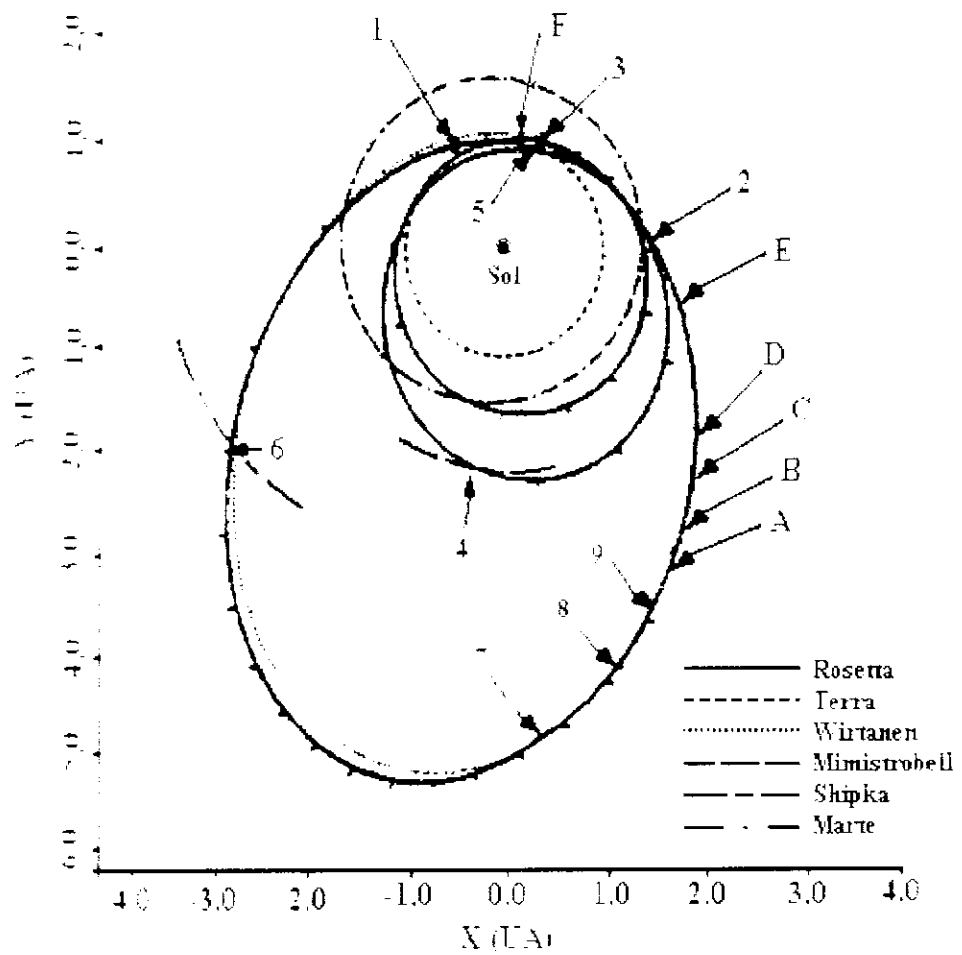


Fig. 7.1 - Missão Rosetta.

FONTE: Bonneau e Bernard (1995), p. 204.

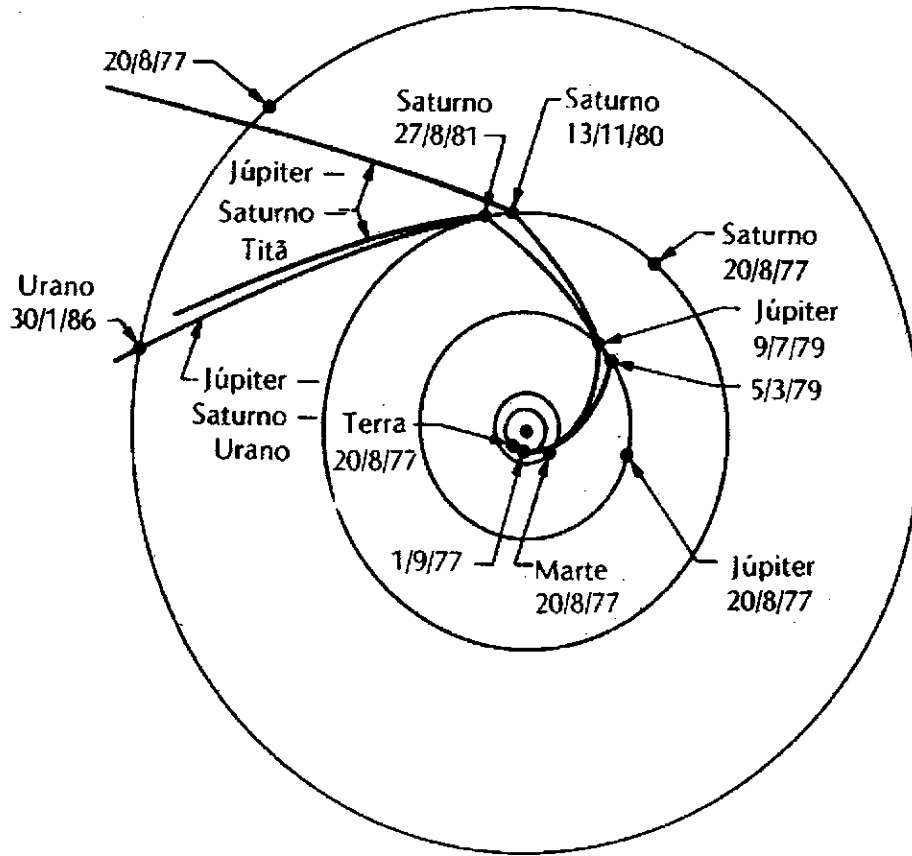


Fig. 7.2 – Trajetórias das Sondas Espaciais Voyager 1 e Voyager 2.
FONTE: Sagan et al. (1984), p. 225.

A Figura 7.2 mostra as trajetórias das sondas Voyager 1 e Voyager 2 através do sistema solar exterior. As datas referem-se à posição dos planetas mostrados em suas órbitas. A trajetória da Voyager 1 é descrita como “Júpiter-Saturno-Titã” e a da Voyager 2 como “Júpiter-Saturno-Urano”. As Figuras seguintes apresentam vistas mais detalhadas das trajetórias das sondas através dos sistemas de Júpiter e Saturno.

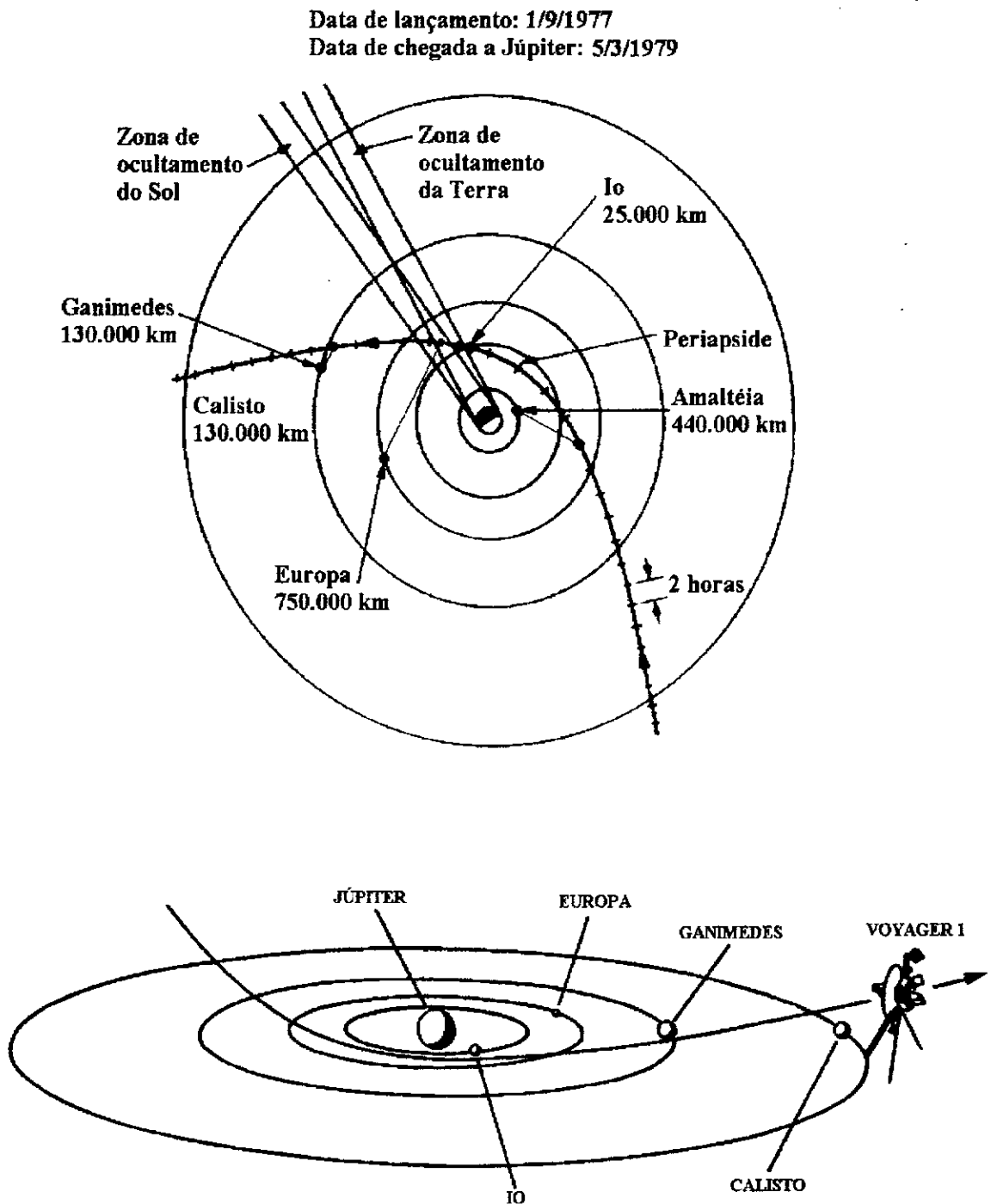


Fig. 7.3 – Trajetória da Sonda Voyager 1 Através do Sistema de Satélites de Júpiter.
FONTE: Sagan et al. (1984), p. 216 e 219.

Data de lançamento: 1/9/1977

Data de chegada a Saturno: 13/11/1980

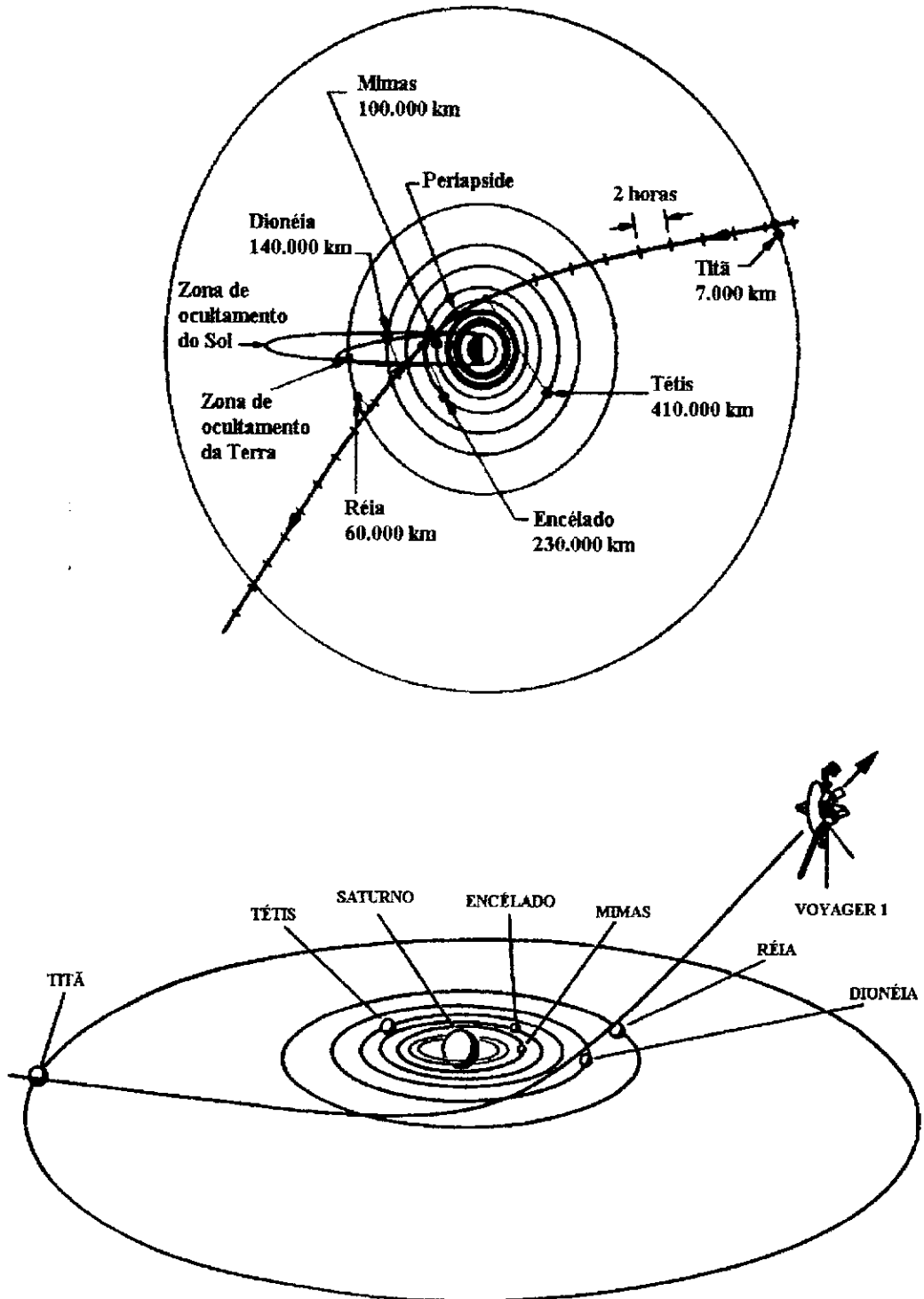


Fig. 7.4 – Trajetória da Sonda Voyager 1 Através do Sistema de Satélites de Saturno.
 FONTE: Sagan et al. (1984), p. 217 e 219.

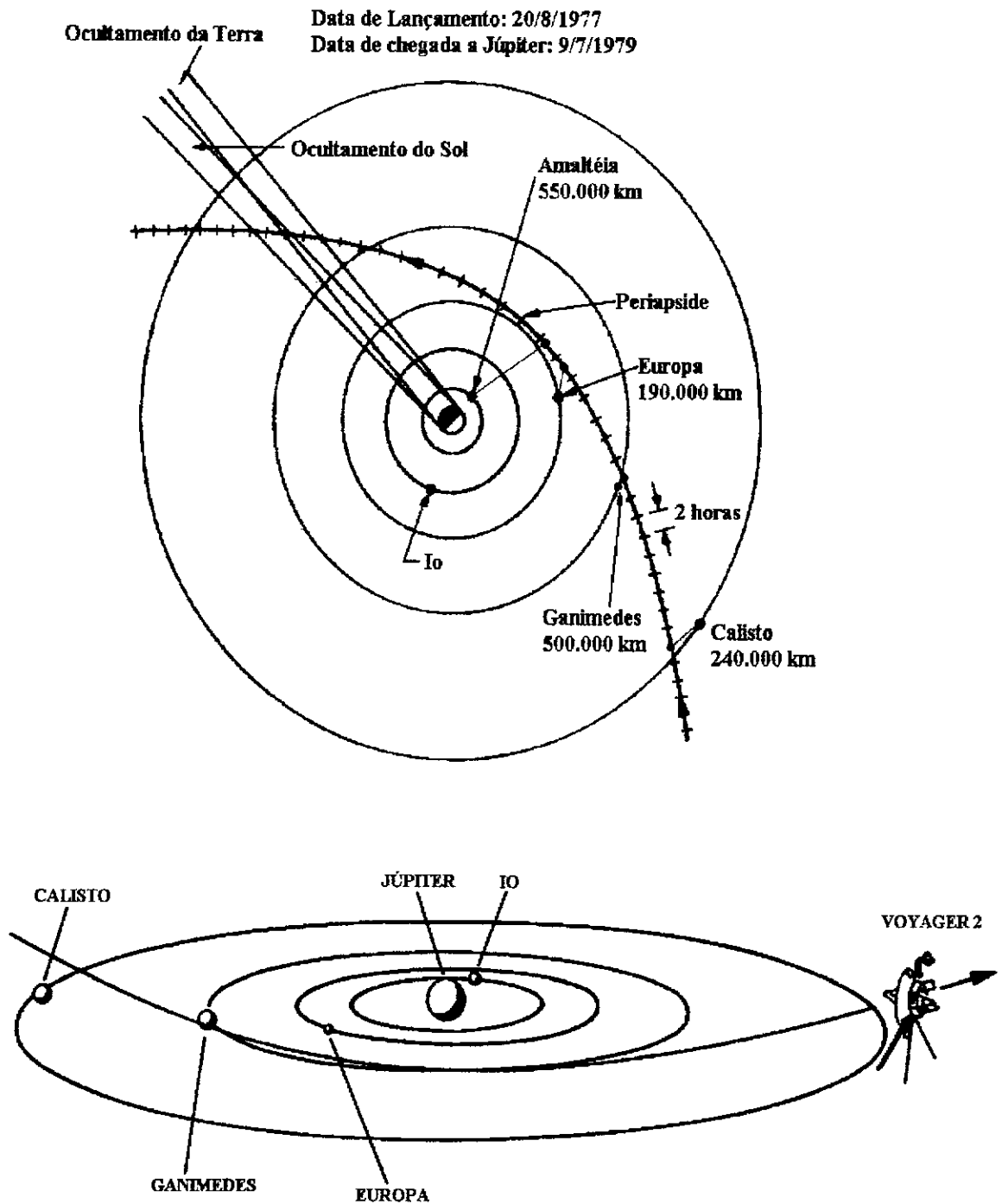


Fig. 7.5 – Trajetória da Sonda Voyager 2 Através do Sistema de Satélites de Júpiter.
FONTE: Sagan et al. (1984), p. 216 e 219.

Data de lançamento: 20/8/1977

Data de chegada a saturno: 27/8/1981

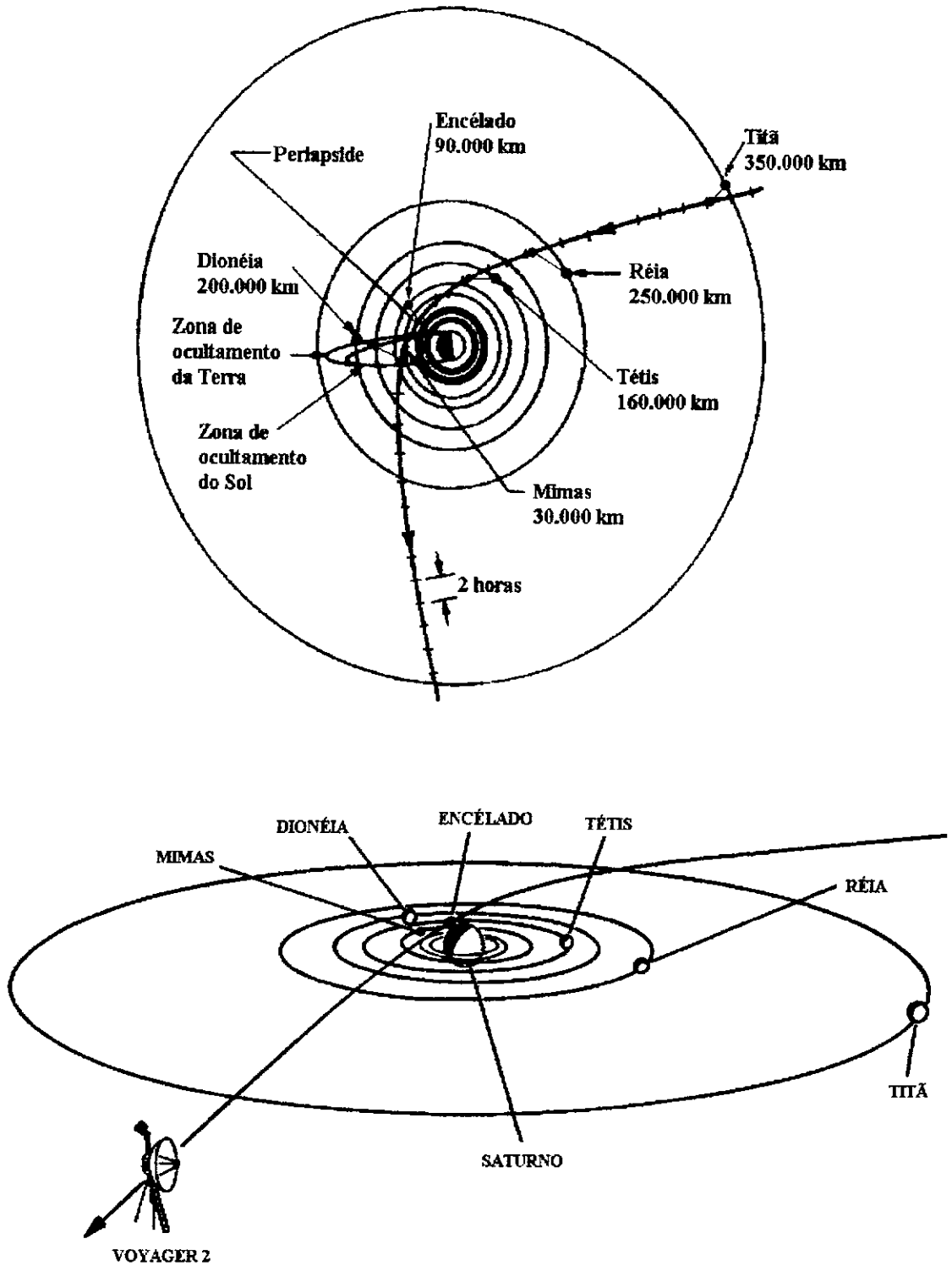


Fig. 7.6 – Trajetória da Sonda Voyager 2 Através do Sistema de Satélites de Saturno.

FONTE: Sagan et al. (1984), p. 217 e 219.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bernard, J. Keplerian motion. In: *Spaceflight dynamics*. Cépaduès Éditions, 1995.
- Bonneau, F.; Bernard, J. Interplanetary trajectories. In: *Spaceflight dynamics*. Cépaduès Éditions, 1995.
- Boivin, S.; Plaideau, P. *Trajectories interplanétaires*. Projet de fin d'études – ENSAE 1991, document CNES TE/IS/MS/AM – 390, Centre Spatial de Toulouse, France, 05/9/1991.
- Brouwer, D.; Clemence, G. M. *Methods of celestial mechanics*. New York, Academic Press, 1961.
- Hechler, M. Rosetta Mission Design. *XXX COSPAR Scientific Assembly*. Hamburg, Germany. Session B1.5, 16 July 1994.
- Sagan, C.; Drake F. D.; Druyan A.; Ferris T.; Lomberg J.; Sagan L. S. *Murmúrios da Terra*. Rio de Janeiro, Francisco Alves Editora, 1984. 274 p.
- Stumpff, K; Weiss, E. H. Application of N Body Reference Orbit. *Journal of Astronautical Sciences*. 15(5): 257-261, Sept. - Oct. 1968.