



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-7170-NTC/338

**A METODOLOGIA DE *INVARIANT IMBEDDING* APLICADA À
RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA
EM PROBLEMAS DE ÓTICA HIDROLÓGICA**

Stephan Stephany

INPE
São José dos Campos
1999

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-7170-NTC/338

**A METODOLOGIA DE *INVARIANT IMBEDDING* APLICADA À
RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA
EM PROBLEMAS DE ÓTICA HIDROLÓGICA**

Stephan Stephany

INPE
São José dos Campos
1999

RESUMO

Descreve-se a teoria da metodologia de *invariant imbedding* aplicada à resolução da equação de transferência radiativa unidimensional, monocromática e estacionária, em problemas de Ótica Hidrológica, com base no livro *Light and Water - Radiative Transfer in Natural Waters*, de C. D. Mobley. Obtem-se assim um primeiro texto em português sobre essa metodologia, aqui traduzida por *inserção invariante*, a qual se baseia em modelar a interação da luz com o meio através de operadores que expressam a transmitância, reflectância e os termos fontes do mesmo. Esses operadores são calculados pela integração de conjuntos de equações diferenciais ordinárias não-lineares, as equações diferenciais de Riccati, através de métodos numéricos amplamente conhecidos.

**THE INVARIANT IMBEDDING METHODOLOGY APPLIED TO
THE SOLUTION OF THE RADIATIVE TRANSFER EQUATION IN
HYDROLOGIC OPTICS PROBLEMS.**

ABSTRACT

The theory of the *invariant imbedding* methodology applied to the solution of the steady state, unidimensional and single wavelength radiative transfer equation in Hydrologic Optics problems is presented. This study is based on C. D. Mobley's book *Light and Water - Radiative Transfer in Natural Waters*. The invariant imbedding methodology models the interaction between the light and the medium by means of transmittance, reflectance and source term operators. These operators are calculated by the integration of sets of non-linear ordinary differential equations, the Riccati differential equations, with use of standard numerical techniques.

SUMÁRIO

	Pág.
LISTA DE FIGURAS	
CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO	9
CAPÍTULO 2 A EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA	13
2.1 Algumas Definições Usuais em Transferência Radiativa	13
2.2 A Equação de Transferência Radiativa	17
2.3 Discretização Polar e Azimutal da Equação de Transferência Radiativa .	19
2.4 Decomposição Espectral da Radiância	19
2.5 Identificação dos Operadores Espectrais Locais de Reflectância e Trans- mitância	25
2.6 Equações de Interação Local	27
2.7 Solução Fundamental	28
CAPÍTULO 3 TEORIA DE INSERÇÃO INVARIANTE	29
3.1 Resumo da Metodologia	29
3.2 Equações Espectrais de Interação Global	31
3.3 Equivalência da Solução de Transporte com a Solução Fundamental . .	33
3.4 Equações de Riccati	35
3.5 Considerações sobre a Integração das Equações de Riccati	38
3.6 Operadores Compostos de Transmissão e Reflexão	40
3.7 Operadores Compostos para a Interface Ar-água	44
3.8 Sequência de Etapas na Resolução por Inserção Invariante	47
3.9 Vantagens da Metodologia de Inserção Invariante	47
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	49

LISTA DE FIGURAS

		Pág.
2.1	Feixe de luz infinitesimal utilizado na definição da radiância L	14
2.2	Modelo esquemático do problema considerado.	14
2.3	Geometria utilizada na definição das propriedades ótica inerentes do meio (para ângulo azimutal $\phi = 0$).	15
2.4	Discretização polar e azimutal em quads.	20
3.1	Operadores espectrais globais $\hat{\mathbf{R}}$ e $\hat{\mathbf{T}}$ e amplitudes espectrais de radiâncias incidentes e emergentes $\hat{\mathbf{L}}$ para camada genérica de água desprovida de condições de contorno.	31
3.2	Operadores espectrais e domínio de integração para as equações de Riccati.	39
3.3	Vista esquemática ilustrando os operadores envolvidos no cálculo do operador composto $\hat{\mathbf{T}}_p(w, \zeta_k, b; l)$ e a amplitude espectral de radiância resultante para baixo como soma dos três primeiros termos da série relativa ao espalhamento múltiplo.	43
3.4	Operadores espectrais $\hat{\mathbf{R}}$ e $\hat{\mathbf{T}}$ e amplitudes espectrais de radiâncias incidentes e emergentes $\hat{\mathbf{L}}$ para a camada genérica com interface ar-água.	46

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A resolução de uma variedade imensa de problemas na física e na engenharia implica na resolução da *equação de transferência radiativa*. Em se tratando de problemas relativos à luz, dadas as condições iniciais e de fronteira, incluindo as intensidades de energia radiante incidentes e aquelas geradas por fontes internas, e fornecidas as *propriedades óticas* do meio, o modelo matemático leva às intensidades de energia radiante resultantes, expressando a interação da luz com o meio e modelando fenômenos tais como a absorção e o espalhamento. A complexidade da equação de transferência radiativa, íntegro-diferencial, traduz-se na vasta literatura disponível, citada em (15), a qual inclui os chamados métodos de *invariant imbedding* (2), (6) (8) (9).

A metodologia de *invariant imbedding*, aqui traduzida por *inserção invariante*, começou a ser desenvolvida a partir do trabalho do astrofísico Viktor A. Ambarzumian nos anos 40, relativo à determinação da reflectância de uma atmosfera estelar infinitamente profunda, conforme descrito em (6). O enfoque clássico seria resolver a equação de transferência radiativa no interior da atmosfera e obter, a partir da energia radiante incidente, a energia radiante que deixa a atmosfera e conseqüentemente a reflectância. O enfoque de Ambarzumian era de que a atmosfera estelar infinita seria inalterada (*invariante*) pela adição ou remoção de uma camada da mesma, e assim se poderia *inserir* o problema da reflectância de uma atmosfera de profundidade z no problema da reflectância de uma atmosfera $z + dz$. Isto permitiu-lhe derivar uma equação funcional relacionando a reflectância da atmosfera de profundidade z com aquela da atmosfera de profundidade $z + dz$, com $z \rightarrow \infty$. Assim, a reflectância foi obtida sem necessidade de se resolver a equação de transferência radiativa.

Esta metodologia foi evoluindo nas décadas seguintes, tendo sido estendida sua aplicação a outras áreas de pesquisa. O significado corrente do termo *invariante* nessa metodologia relaciona-se à invariância das formas funcionais que governam a interação da energia radiante com o meio, mesmo finito e não-homogêneo. A *inserção* pode ser associada à possibilidade de inserir camadas adjacentes à camada considerada do meio e analisar a camada resultante.

A inserção invariante utiliza operadores (*locais*) de transmissão e reflexão que expresam a interação da luz com uma camada *infinitesimal* do meio, calculados a partir do albedo de espalhamento simples e da função de fase de espalhamento. Conhecidos estes operadores pode-se escrever um balanço de luz para camadas *finitas* do meio e chegar a um conjunto de equações diferenciais ordinárias não-lineares, as *equações diferenciais de Riccati*, cujas incógnitas são os operadores (*globais*) de transmissão e reflexão e de termos fontes associados às camadas consideradas. Integrando-se essas equações, obtém-se esses operadores que permitem calcular de forma direta as

amplitudes espectrais de radiância incógnitas a partir das amplitudes espectrais de radiância incidentes nessa camada do meio.

R.W. Preisendorfer (8) (9) e R.W. Preisendorfer e C.D. Mobley (10) (6), aplicaram a inserção invariante a problemas de *Ótica Hidrológica*. Assim, apresenta-se aqui o método de *inserção invariante*, conforme exposto por C. D. Mobley em seu livro *Light and Water - Radiative Transfer in Natural Waters* (6), para resolução da equação de transferência radiativa unidimensional e estacionária para um dado comprimento de onda. A dedução da teoria parte da discretização das variáveis angulares da equação de transferência radiativa, e da decomposição espectral das radiâncias por meio de sua representação polinomial de Fourier. Sua implementação requer a discretização da função de fase de espalhamento para as resoluções polar e azimutal escolhidas, bem como cálculos a serem efetuados com as amplitudes espectrais de radiância para posterior obtenção das radiâncias.

No presente trabalho objetiva-se apresentar um resumo da metodologia de inserção invariante aplicada à Ótica Hidrológica conforme (6). O Capítulo II aborda a equação de transferência radiativa (Seções 2.1 e 2.2), sua discretização angular (Seção 2.3) e decomposição espectral (Seção 2.4), que permitem a dedução dos operadores *locais* de transmissão e reflexão para uma camada infinitesimal do meio (Seção 2.5). Abordam-se também as equações de interação local (Seção 2.6), que provém um balanço de energia para uma camada infinitesimal do meio e a solução fundamental associada a estas equações (Seção 2.7).

O Capítulo III trata especificamente da inserção invariante, iniciando-se com o resumo da metodologia empregada. Apresentam-se as equações de interação global, que provém um balanço de energia para camadas finitas do meio (Seção 3.2) e mostra-se sua equivalência com a solução fundamental (Seção 3.3). A dedução e integração das equações diferenciais de Riccati, cujas incógnitas são os operadores *globais*, aparecem à continuação (Seções 3.4 e 3.5), seguidas da dedução dos operadores compostos, que levam em conta a presença de camadas adjacentes à camada considerada (Seção 3.6) e dos operadores compostos para a interface ar-água (Seção 3.7). Os operadores globais devem ser obtidos para cada profundidade na qual se deseje calcular as radiâncias e, conseqüentemente, também os operadores compostos.

Finalmente, a seqüência de etapas é resumida (Seção 3.8), mostrando como, conhecendo-se os operadores locais, integram-se as equações de Riccati para se obterem os operadores globais para as camadas de água consideradas. Tendo-se estes operadores, chega-se aos operadores compostos que, a partir das amplitudes espectrais de radiância incidentes, permitem o cálculo das amplitudes emergentes. Destas, calculam-se as radiâncias desejadas. A enumeração das vantagens da metodologia é feita no final (Seção 3.9).

O autor travou conhecimento com a metodologia de inserção invariante ao assistir a um seminário sobre Ótica Hidrológica proferido por C. D. Mobley na Divisão de Sensoriamento Remoto do INPE, em fins de 1995. O código Hydrolight 3.0

(7), de autoria do mesmo pesquisador foi disponibilizado ao autor, que o utilizou na resolução de problemas inversos em Ótica Hidrológica, objeto de sua tese de doutorado em Computação Aplicada no INPE, defendida em abril de 1997. Esse código utiliza a metodologia de inserção invariante, para resolução da equação de transferência radiativa unidimensional e estacionária para um comprimento de onda específico. Maiores detalhes sobre problemas inversos em Ótica Hidrológica podem ser encontrados na tese de doutorado do autor (15) ou nos trabalhos já publicados nessa área (11), (12), (13), (14), (16), (17). Pode-se acrescentar uma vantagem extra constituída pelo potencial de otimização do código Hydrolight, que inclui rotinas matemáticas não-otimizadas, especialmente aquelas utilizadas para integração das equações de Riccati, o que torna esse código potencialmente otimizável.

Espera-se que este primeiro texto em português sobre a inserção invariante, aplicada à Transferência Radiativa em Ótica Hidrológica, ajude a elucidar e divulgar essa metodologia.

[REDACTED]

[REDACTED]

CAPÍTULO 2

A EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA

2.1 Algumas Definições Usuais em Transferência Radiativa

Definem-se, inicialmente, algumas grandezas relacionadas à transferência radiativa e à Ótica Hidrológica. Na radiometria, ramo da ciência que estuda a medição da energia radiante, ou seja, eletromagnética, a grandeza fundamental é a radiância, que mede a energia de um feixe infinitesimal de radiação, num dado ponto, por unidade de tempo, por unidade de área A e por unidade de ângulo sólido Ω (*esferorradiano - sr*). Considera-se que o feixe esteja contido num ângulo sólido infinitesimal, centrado na direção em que aponta, conforme a Figura 2.1, sendo P o ponto de onde o feixe foi emitido ou espalhado. Assim, a radiância (L) depende da posição (\vec{x}), do instante (t) e da direção ($\vec{\xi}$) consideradas. No entanto, normalmente se trabalha com um comprimento de onda específico λ (geralmente expresso em *nanometro - nm*, $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$), e fala-se em radiância *espectral*, considerando-se que o feixe abrange uma faixa infinitesimal de comprimentos de onda, centrada em λ . Define-se a radiância *espectral* por:

$$L(\vec{x}, t, \vec{\xi}, \lambda) \equiv \frac{\text{energia}}{dt dA d\Omega d\lambda} \quad (W m^{-2} sr^{-1} nm^{-1}). \quad (2.1)$$

A radiância, apesar de sua dependência direcional, **não** é um vetor. constituindo uma medida da energia radiante dependente da direção considerada.

O campo luminoso é considerado como sendo independente do tempo t : consideram-se feixes *contínuos* e não pulsos de luz, ou seja, assume-se que o regime seja **estacionário**. Assume-se uma invariância translacional (em x e y) e rotacional (em torno de z). Assim, a dependência espacial (vetor posição \vec{x}) é expressa apenas pela profundidade z (problema **unidimensional**). Por conveniência de notação, a dependência de λ é omitida, embora as grandezas estudadas sejam espectrais.

O ângulo sólido infinitesimal (Figura 2.2) é definido em função dos ângulos polar (θ) e azimutal (ϕ) por $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$.

A Figura 2.3 ilustra o que ocorre quando um feixe estreito e colimado de luz de comprimento de onda λ com potência espectral radiante $\Phi_i(\lambda)$, cuja unidade no SI é $W nm^{-1}$, incide num volume de água ΔV , com área S e espessura Δr . Nesta figura, $\phi = 0$ e o ângulo polar (θ) do feixe espalhado coincide com o ângulo de espalhamento (ψ). Assume-se que não haja espalhamento *inelástico* ou trans-espectral (por exemplo, espalhamento de Raman), ou seja, que a luz não seja absorvida em λ e “re-emitada” em outro comprimento de onda. Esta é uma hipótese aceitável em

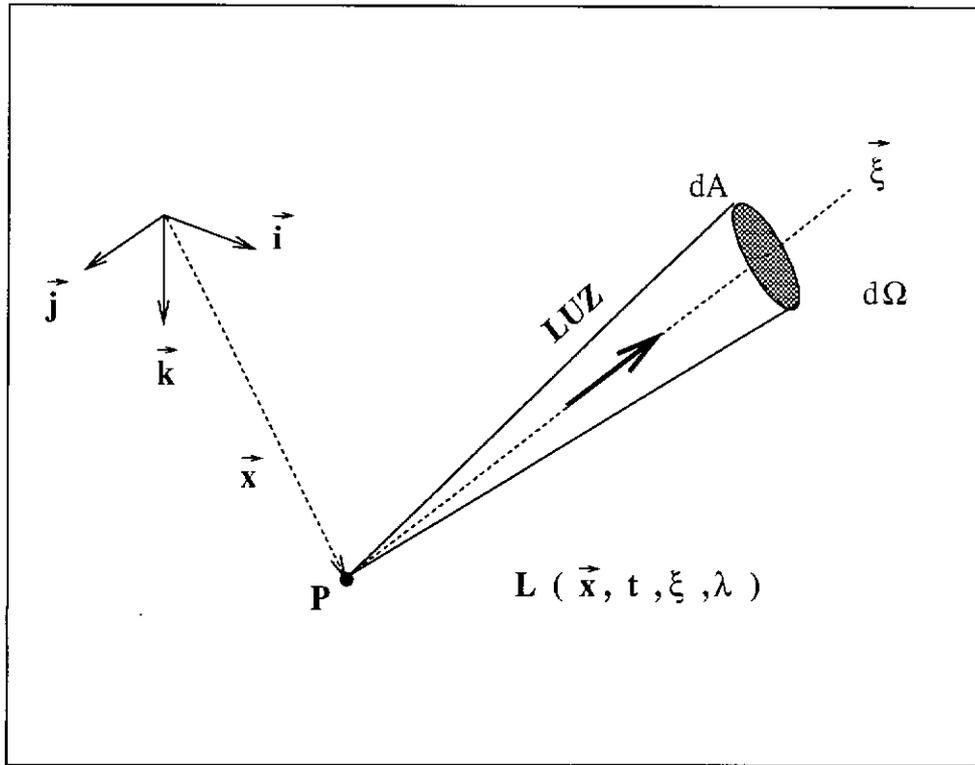


Fig. 2.1 - Feixe de luz infinitesimal utilizado na definição da radiância L .

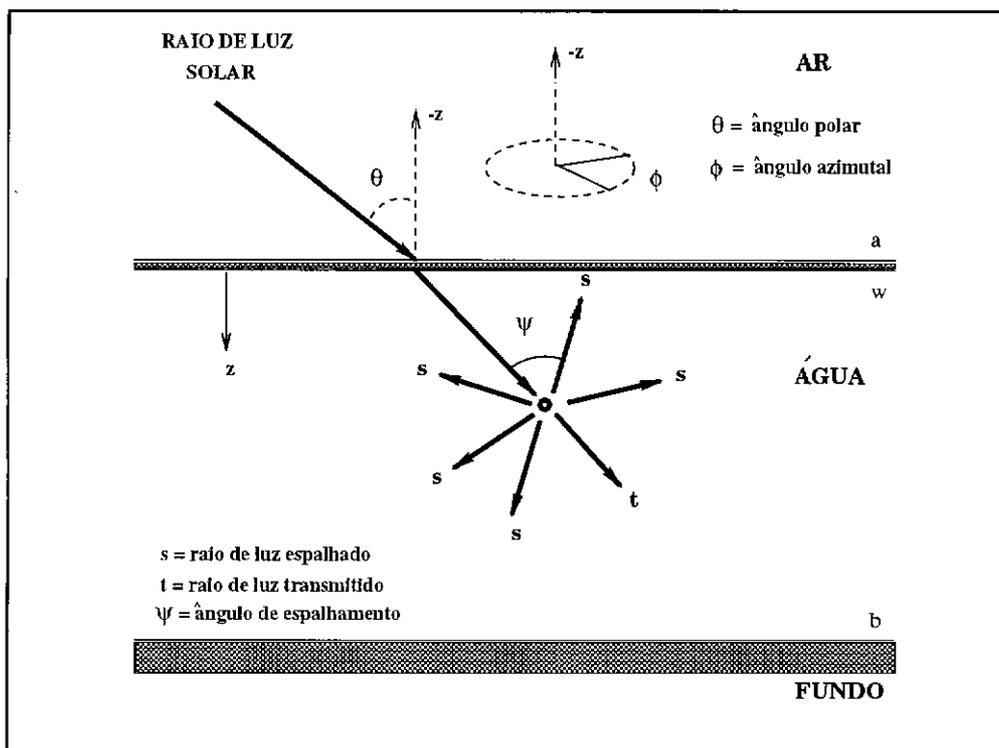


Fig. 2.2 - Modelo esquemático do problema considerado.

águas naturais (6). Parte dessa potência incidente será transmitida ($\Phi_t(\lambda)$), parte será absorvida ($\Phi_a(\lambda)$) e parte espalhada ($\Phi_s(\lambda)$) em todas as direções, sendo ψ o ângulo de espalhamento, representado nesta figura para uma direção particular. Assim, pela conservação da energia, tem-se que:

$$\Phi_i(\lambda) = \Phi_a(\lambda) + \Phi_s(\lambda) + \Phi_t(\lambda) . \quad (2.2)$$

As grandezas adimensionais *absorptância* ($A(\lambda)$), *espalhância* ($B(\lambda)$) e *transmitância* ($T(\lambda)$) espectrais são definidas, respectivamente, por:

$$A(\lambda) \equiv \Phi_a(\lambda) / \Phi_i(\lambda) ; \quad (2.3)$$

$$B(\lambda) \equiv \Phi_s(\lambda) / \Phi_i(\lambda) ; \quad (2.4)$$

$$T(\lambda) \equiv \Phi_t(\lambda) / \Phi_i(\lambda) ; \quad (2.5)$$

claramente,

$$A(\lambda) + B(\lambda) + T(\lambda) = 1 . \quad (2.6)$$

Existe também a *absorbância* $D(\lambda)$, ou densidade ótica, grandeza medida por espectrofotômetros e definida por:

$$D(\lambda) = -\log_{10} [1 - A(\lambda)] . \quad (2.7)$$

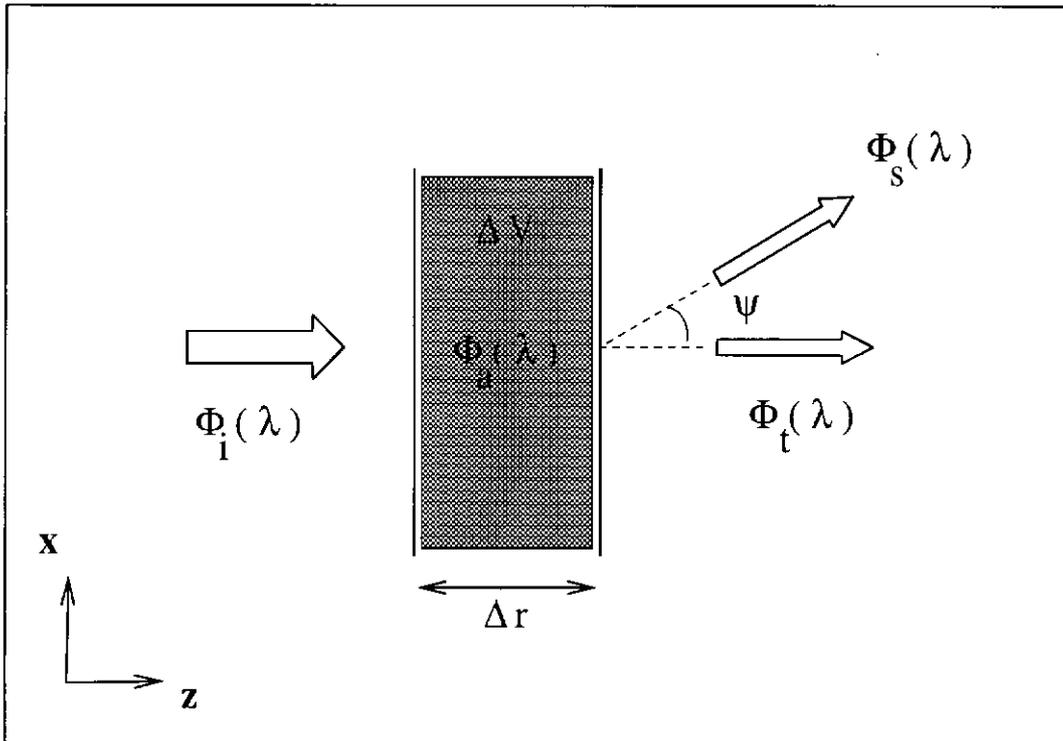


Fig. 2.3 - Geometria utilizada na definição das propriedades óticas inerentes do meio (para ângulo azimutal $\phi = 0$).

A partir do exposto acima, podem-se definir algumas *propriedades óticas inerentes* (IOP's) do meio, tais como o coeficiente espectral de absorção,

$$a(\lambda) \equiv \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{A(\lambda)}{\Delta r} \quad (m^{-1}), \quad (2.8)$$

o coeficiente espectral de espalhamento,

$$b(\lambda) \equiv \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{B(\lambda)}{\Delta r} \quad (m^{-1}), \quad (2.9)$$

e o coeficiente espectral de atenuação do feixe:

$$c(\lambda) \equiv a(\lambda) + b(\lambda) \quad (m^{-1}). \quad (2.10)$$

A potência luminosa espalhada tem uma distribuição angular, em função do ângulo de espalhamento ψ e do ângulo azimutal ϕ (não se considera aqui a dependência da **polarização**), ou seja, $B(\lambda) = B(\phi, \psi, \lambda)$. Um feixe de luz espalhado numa direção que forma o ângulo ψ ($0 \leq \psi \leq \pi$) com a direção do feixe incidente, ocupa um ângulo sólido $\Delta\Omega = \sin \psi \, d\psi \, d\phi$, centrado na direção espalhada. Define-se a função volumétrica espectral de espalhamento ($\tilde{\beta}(\psi, \lambda)$) como sendo:

$$\tilde{\beta}(\phi, \psi, \lambda) \equiv \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{B(\phi, \psi, \lambda)}{\Delta r \, \Delta\Omega} \quad (m^{-1} \, sr^{-1}). \quad (2.11)$$

Esta função expressa a dependência direcional e a intensidade do espalhamento. Se integrada para todas as direções (domínio Ξ), fornece o coeficiente espectral de espalhamento:

$$b(\lambda) = \int_{\Xi} \tilde{\beta}(\phi, \psi, \lambda) \, d\Omega. \quad (2.12)$$

Pode-se definir a função de fase de espalhamento, ou simplesmente função de fase (β), como sendo:

$$\beta(\psi, \lambda) \equiv \frac{\tilde{\beta}(\phi, \psi, \lambda)}{b(\lambda)} \quad (sr^{-1}). \quad (2.13)$$

Considerando-se **independência azimutal** (ϕ) em torno da direção incidente (invariância por rotação em torno de z), simplificação usada na literatura, e uma vez que $d\Omega = \sin \psi \, d\psi \, d\phi$, pode-se integrar a expressão acima em ϕ :

$$b(\lambda) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\beta}(\psi, \lambda) \sin \psi \, d\psi \, d\phi = 2\pi \int_0^\pi \tilde{\beta}(\psi, \lambda) \sin \psi \, d\psi. \quad (2.14)$$

Assim, a função volumétrica espectral de espalhamento ($\tilde{\beta}(\psi, \lambda)$) pode ser expressa como o produto do coeficiente espectral de espalhamento, que fornece a *intensidade* do espalhamento, e da função de fase, que fornece a *distribuição angular* do mesmo.

Substituindo-se esta definição na integral acima, tem-se a condição de normalização para a função de fase:

$$2\pi \int_0^\pi \beta(\psi, \lambda) \sin \psi \, d\psi = 1. \quad (2.15)$$

O albedo espectral de espalhamento simples ($\omega_0(\lambda)$) é adimensional e indica qual a parcela de atenuação do feixe devida ao espalhamento:

$$\omega_0(\lambda) \equiv \frac{b(\lambda)}{c(\lambda)}. \quad (2.16)$$

2.2 A Equação de Transferência Radiativa

A equação de transferência radiativa é uma lei de conservação de energia, sendo expressa em radiâncias, no escopo da Ótica Hidrológica, razão pela qual a mesma também é chamada equação de transferência de radiâncias. Os dados de entrada do problema direto, incluem a distribuição espectral de radiâncias na atmosfera, o estado da superfície da água sob efeito de ventos, as condições do fundo, as propriedades óticas inerentes da água (IOP's), em particular os coeficientes de absorção e espalhamento, e as fontes de luz submersas, tais como bioluminescência ou fluorescência.

Uma hipótese básica na teoria de transferência radiativa é o *princípio da linearidade* ou interação linear entre a luz e o meio, válido para fótons de baixa energia. Segundo este princípio, a energia radiante incidente provoca no meio uma resposta diretamente proporcional à intensidade radiante associada à essa radiação. Isso se aplica perfeitamente à Ótica Hidrológica abordada neste trabalho. Existe a ótica não-linear, que trata por exemplo da interação de um raio laser muito intenso com um meio.

Conforme citado anteriormente, assume-se que o problema seja estacionário e unidimensional, variando unicamente em profundidade (z), configurando uma geometria **plano-paralela**. Esta geometria implica em supor a água como tendo uma extensão horizontal infinita, sem variações horizontais das IOP's, hipótese aceitável para a maioria das aplicações em Oceanografia. Assim, devido a essa *dependência espacial*, as variáveis e parâmetros da equação de transferência radiativa são expressas em função de z . Conforme também já mencionado, omite-se da notação a dependência com o comprimento de onda (λ), por conveniência.

A equação de transferência radiativa monocromática pode ser expressa como a seguir, onde cada termo tem como unidade $W \, m^{-3} \, sr^{-1} \, nm^{-1}$ (radiância por unidade de comprimento):

$$\mu \frac{\partial L(z, \vec{\xi})}{\partial z} = -c(z)L(z, \vec{\xi}) + \int_{\Xi} L(z, \vec{\xi}') \beta(z, \vec{\xi}' \rightarrow \vec{\xi}) d\vec{\xi}' + s(z, \vec{\xi}), \quad (2.17)$$

onde z é a profundidade (vide Figura 2.2), $L(z, \vec{\xi})$ a radiância para a profundidade z e direção $\vec{\xi}$; $\vec{\xi}' = \vec{\xi}'(\theta', \phi')$ e $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\theta, \phi)$ são as direções incidente e espalhada para

um feixe de luz infinitesimal $(\vec{\xi}, \vec{\xi}' \in \Xi, \text{domínio das direções})$, θ sendo o ângulo polar e ϕ o azimutal e $\mu = \cos(\theta)$; $\beta(z, \vec{\xi}' \rightarrow \vec{\xi})$ é a função de fase de espalhamento, nota-se que as direções $\vec{\xi}'$ e $\vec{\xi}$ definem o ângulo de espalhamento (ψ); $s(z, \vec{\xi})$ é o termo fonte e c é o coeficiente de atenuação do feixe.

Este é um problema de *condição de contorno*, onde na fronteira superior $z = z_w$ e inferior $z = z_b$, conhecem-se as radiâncias incidentes:

$$L(z_w, \vec{\xi}) = L_w(\vec{\xi}) \quad \text{para} \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad \forall \phi, \quad (2.18)$$

$$L(z_b, \vec{\xi}) = L_b(\vec{\xi}) \quad \text{para} \quad -1 \leq \mu \leq 0, \quad \forall \phi, \quad (2.19)$$

mas não as radiâncias emergentes:

$$L(z_w, \vec{\xi}) \quad \text{para} \quad -1 \leq \mu < 0, \quad \forall \phi, \quad (2.20)$$

$$L(z_b, \vec{\xi}) \quad \text{para} \quad 0 < \mu \leq 1, \quad \forall \phi. \quad (2.21)$$

Uma grandeza adimensional muito importante é a *profundidade ótica* ζ (ou *espessura ótica*), que também depende do comprimento de onda λ , definida, para a presente geometria plano-paralela, por:

$$d\zeta \equiv c(z) dz. \quad (2.22)$$

ζ permite interpretar o quanto uma camada de água é *oticamente* espessa, ou seja, o quanto é transparente (ou opaca). Existem outras definições equivalentes, tal como:

$$d\zeta \equiv k(z) \rho(z) dz, \quad (2.23)$$

sendo $k(z)$ a secção de extinção do meio (que inclui perdas por absorção e espalhamento, dada em m^2) e $\rho(z)$, sua densidade de partículas em m^{-3} . O *caminho livre médio* é dado por $\ell(z) = 1/[k(z)\rho(z)]$ (m), de forma que pode-se escrever: $d\zeta = dz/\ell(z)$. Em outra formulação, $k(z)$ representa o coeficiente de extinção de massa do meio (m^2/kg) e $\rho(z)$, sua densidade (kg/m^3). Tem-se também a *profundidade ótica de transporte*, $d\zeta^* = d\zeta(1 - g)$, onde g é o cosseno médio do ângulo de espalhamento.

A mesma equação de transferência radiativa (Equação 2.17), quando expressa em termos da *profundidade ótica* ζ e do *albedo de espalhamento simples* ω_0 , toma a forma abaixo, na qual cada termo tem a unidade da radiância, ou seja, $W m^{-2} sr^{-1} nm^{-1}$:

$$\mu \frac{\partial L(\zeta, \vec{\xi})}{\partial \zeta} = -L(\zeta, \vec{\xi}) + \omega_0(\zeta) \int_{\Xi} L(\zeta, \vec{\xi}') \beta(\zeta, \vec{\xi}' \rightarrow \vec{\xi}) d\vec{\xi}' + S(\zeta, \vec{\xi}), \quad (2.24)$$

onde o termo fonte é agora dado por $S(\zeta, \vec{\xi}) = s(\zeta, \vec{\xi})/c(z)$ e valem as mesmas condições de contorno expressas nas Equações 2.18 e 2.19.

Nas duas seções seguintes apresentam-se a equação de transferência radiativa discretizada polar e azimutalmente, bem como sua expressão para a radiância decomposta espectralmente. Ambos os procedimentos são utilizados em inúmeras metodologias de resolução dessa equação e levam à solução fundamental, a qual serve de ponto de partida para a implementação do *invariant imbedding*.

2.3 Discretização Polar e Azimutal da Equação de Transferência Radiativa

A Equação 2.17 é discretizada por meio de uma divisão conveniente do espaço em setores angulares denominados *quads*, conforme mostrado na Figura 2.4, onde aparece representada a esfera unitária Ξ .

Divide-se o domínio angular num número finito de intervalos angulares, por meio de $2n$ meridianos, ou seja, $2n$ intervalos azimutais e $2m - 1$ paralelos, $m - 1$ em cada hemisfrio mais o “equador”, resultando em $2m$ intervalos polares mais duas calotas correspondentes aos polos. Assim, tem-se um total de $2n \times 2m$ quads mais as 2 calotas polares.

Esta divisão é feita obedecendo-se um critério conveniente, sendo adotados quads com $\Delta\theta$ constante, adequados para a decomposição espectral ilustrada na seção seguinte. Poder-se-ia, a título de exemplo, utilizar quads com ângulo sólido constante $\Delta\Omega = \Delta\mu \Delta\phi = \sin\theta \Delta\theta \Delta\phi$ constante, embora isso acarrete imprecises, pois para “latitudes polares”, os quads abrangeriam uma faixa de ângulos polares muito grande.

Assim, a radiância $L(\zeta; \mu, \phi)$, uma função contínua da direção considerada, é substituída por uma função discreta $L(\zeta; \mu_i, \phi_j)$, que assume um valor médio para cada *quad*, centrado em $[\theta_i, \phi_j]$, definida como a seguir, onde Ξ_{ij} representa o ângulo sólido infinitesimal, que delimita os domínios de θ e de ϕ para o *quad* centrado em $[\theta_i, \phi_j]$:

$$L(\zeta; \mu_i, \phi_j) = \frac{1}{\Xi_{ij}} \int_{\mu_i} \int_{\phi_j} L(\zeta; \mu, \phi) d\mu d\phi . \quad (2.25)$$

Da mesma forma, a função de fase de espalhamento também é discretizada. Com estas discretizações, a equação de transferência radiativa monocromática, Equação 2.24, é então reescrita como:

$$\begin{aligned} \mu_i \frac{dL(\zeta; \mu_i, \phi_j)}{d\zeta} &= -L(\zeta; \mu_i, \phi_j) + \omega_0(\zeta) \sum_{i'} \sum_{j'} L(\zeta; \mu_{i'}, \phi_{j'}) \beta(\zeta; \mu_{i'}, \phi_{j'} \rightarrow \mu_i, \phi_j) \\ &+ S(\zeta; \mu_i, \phi_j) , \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde a dupla somatória do segundo membro expressa o espalhamento da luz incidente em todas as direções $\vec{\xi}' = (\mu_{i'}, \phi_{j'})$ para a direção $\vec{\xi} = (\mu_i, \phi_j)$.

2.4 Decomposição Espectral da Radiância

A radiância pode ser decomposta espectralmente por meio de sua representação polinomial de Fourier:

$$L^\mp(\zeta; \mu_i, \phi_j) = \sum_{l=0}^n \left[\hat{L}_1^\mp(\zeta; \mu_i; l) \cos(l\phi_j) + \hat{L}_2^\mp(\zeta; \mu_i; l) \sin(l\phi_j) \right] . \quad (2.27)$$

Assim, a dependência do ângulo azimutal ϕ_j passa a se dar pelo correspondente *l-modos*. Há $(n + 1)$ valores possíveis de l , devidos aos n valores discretos do ângulo

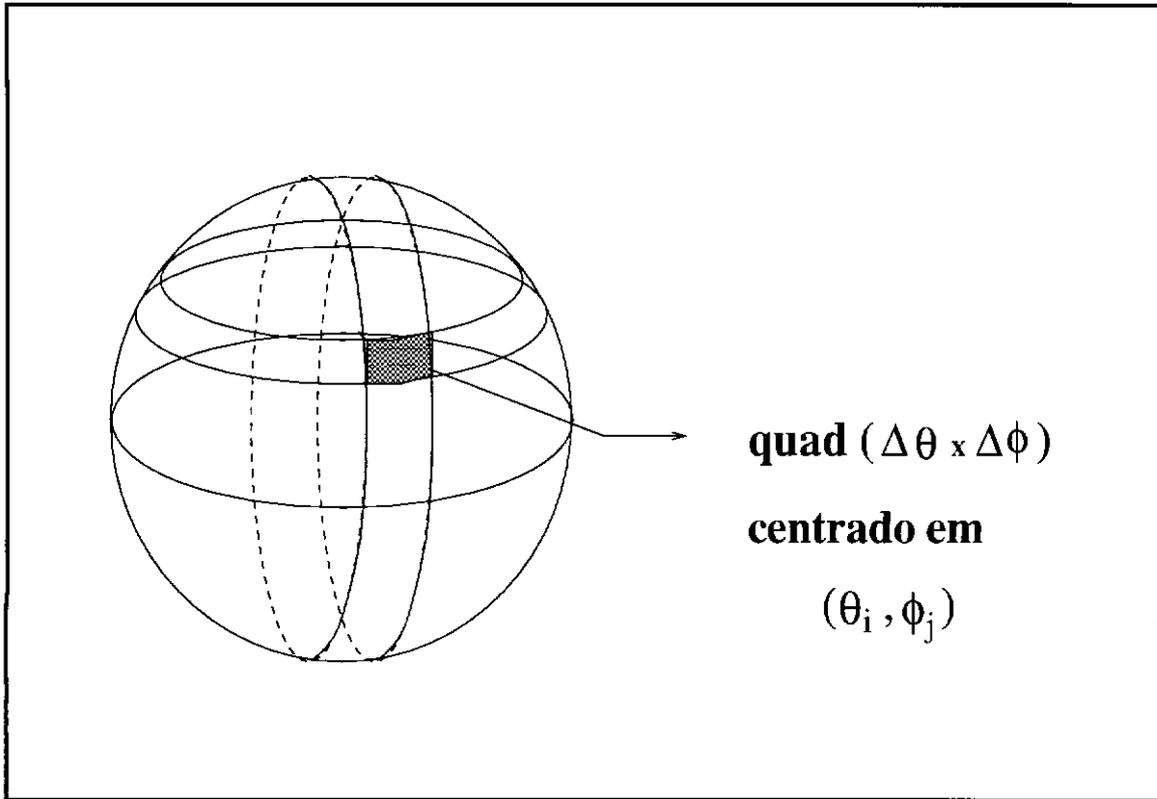


Fig. 2.4 - Discretização polar e azimutal em quads.

azimutal em cada hemisfério mais o valor associado à calota polar. Utiliza-se o símbolo $\hat{}$ para enfatizar que se tratam de amplitudes espectrais. As amplitudes espectrais cosenoidais, a menos dos sinais de + e -, são calculadas por:

$$\hat{L}_1(\zeta; \mu_i, l) = \frac{1}{\epsilon_l} \sum_{j=1}^{2n} L(\zeta; \mu_i, \phi_j) \cos(l\phi_j), \quad (2.28)$$

onde (δ é a função delta de Kronecker):

$$\epsilon_l \equiv n (1 + \delta_l + \delta_{l-n}), \quad (2.29)$$

Enquanto que as amplitudes espectrais senoidais, a menos dos sinais de + e -, são calculadas por:

$$\hat{L}_2(\zeta; \mu_i, l) = \frac{1}{\gamma_l} \sum_{j=1}^{2n} L(\zeta; \mu_i, \phi_j) \sin(l\phi_j), \quad (2.30)$$

onde (δ é a função delta de Kronecker):

$$\gamma_l \equiv n (1 - \delta_l - \delta_{l-n}), \quad (2.31)$$

Analogamente, o termo fonte $S^\mp(\zeta; \mu_i, \phi_j)$ pode ser decomposto espectralmente.

A função de fase de espalhamento é substituída por sua correspondente representação espectral. Sendo (θ_r, ϕ_s) e (θ_i, ϕ_j) as direções incidente e emergente, o ângulo de espalhamento é dado por:

$$\psi = \cos\theta_r \cos\theta_i + \sin\theta_r \sin\theta_i \cos(\phi_s - \phi_j) , \quad (2.32)$$

Utilizando-se a dependência do ângulo de espalhamento com o cosseno da diferença entre os ângulos azimutais incidente e emergente, a teoria de análise espectral de Fourier permite definir uma função de fase de espalhamento espectral ($\hat{\beta}$):

$$\hat{\beta}^\pm(\zeta; \mu_r, \mu_i; k) = \frac{1}{\epsilon_k \cos(k\phi_s)} \sum_{j=1}^{2n} \beta^\pm(\zeta; \mu_r, \phi_s \rightarrow \mu_i, \phi_j) \cos(k\phi_j) , \quad (2.33)$$

onde, novamente:

$$\epsilon_k \equiv n (1 + \delta_k + \delta_{k-n}) , \quad (2.34)$$

o que permite escrever:

$$\beta^\pm(\zeta; \mu_r, \phi_s \rightarrow \mu_i, \phi_j) = \sum_{k=0}^n \hat{\beta}^\pm(\zeta; \mu_r, \mu_i; k) \cos[k(\phi_s - \phi_j)] . \quad (2.35)$$

Antes de substituir as radiâncias por sua decomposição espectral, reescreve-se, por conveniência de notação, a Equação 2.26, utilizando-se o superscrito $+$ para as radiâncias dirigidas para baixo, e o $-$ para aquelas dirigidas para cima. Considerando-se a esfera unitária Ξ dividida nos hemisférios superior e inferior, utiliza-se também o superscrito $+$ ou $-$ para $\beta(\zeta; \mu_{i'}, \phi_{j'} \rightarrow \mu_i, \phi_j)$, conforme expresse, respectivamente, espalhamento entre quadrs dentro do mesmo hemisfério ou entre hemisférios diferentes.

$$\begin{aligned} \mp \mu_i \frac{dL^\mp(\zeta; \mu_i, \phi_j)}{d\zeta} &= -L^\mp(\zeta; \mu_i, \phi_j) \\ &+ \omega_0(\zeta) \sum_{i'} \sum_{j'} L^-(\zeta; \mu_{i'}, \phi_{j'}) \beta^\pm(\zeta; \mu_{i'}, \phi_{j'} \rightarrow \mu_i, \phi_j) \\ &+ \omega_0(\zeta) \sum_{i'} \sum_{j'} L^+(\zeta; \mu_{i'}, \phi_{j'}) \beta^\mp(\zeta; \mu_{i'}, \phi_{j'} \rightarrow \mu_i, \phi_j) \\ &+ S^\mp(\zeta; \mu_i, \phi_j) . \end{aligned} \quad (2.36)$$

A primeira somatória em i' e j' se refere à luz espalhada para o hemisfério superior, proveniente de ambos os hemisférios, enquanto que a segunda, àquela que é espalhada para o inferior, também proveniente de ambos hemisférios. μ_i assume sempre um valor positivo, pois θ está limitado entre 0 e π para um mesmo hemisfério.

Substituindo-se as radiâncias e a função de fase de espalhamento por suas representações espectrais na equação acima, obtem-se, para cada quad identificado por

(μ_i, ϕ_j) , excetuando-se as calotas polares, a seguinte equação *espectral*. Note-se que o termo fonte foi também decomposto espectralmente, analogamente à Equação 2.27.

$$\begin{aligned}
& \mp \mu_i \frac{d}{d\zeta} \left\{ \sum_{l=0}^n \left[\hat{L}_1^\mp(\zeta; \mu_i; l) \cos(l\phi_j) + \hat{L}_2^\mp(\zeta; \mu_i; l) \sin(l\phi_j) \right] \right\} = \\
& \quad - \sum_{l=0}^n \left[\hat{L}_1^\mp(\zeta; \mu_i; l) \cos(l\phi_j) + \hat{L}_2^\mp(\zeta; \mu_i; l) \sin(l\phi_j) \right] + \\
& + \omega_0(\zeta) \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=1}^{2n} \sum_{l=0}^n \left[\hat{L}_1^-(\zeta; \mu_r; l) \cos(l\phi_s) + \hat{L}_2^-(\zeta; \mu_r; l) \sin(l\phi_s) \right] \times \\
& \quad \left[\sum_{k=0}^n \hat{\beta}^\pm(\zeta; \mu_r, \mu_i; k) \cos [k(\phi_s - \phi_j)] \right] + \\
& + \omega_0(\zeta) \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=1}^{2n} \sum_{l=0}^n \left[\hat{L}_1^+(\zeta; \mu_r; l) \cos(l\phi_s) + \hat{L}_2^+(\zeta; \mu_r; l) \sin(l\phi_s) \right] \times \\
& \quad \left[\sum_{k=0}^n \hat{\beta}^\mp(\zeta; \mu_r, \mu_i, k) \cos [k(\phi_s - \phi_j)] \right] + \\
& \quad + \omega_0(\zeta) \hat{L}_1^-(\zeta; \mu_m; 0) \hat{\beta}^\pm(\zeta; \mu_m, \theta_i; 0) + \\
& \quad + \omega_0(\zeta) \hat{L}_1^+(\zeta; \mu_m; 0) \hat{\beta}^\mp(\zeta; \mu_m, \theta_i; 0) + \\
& \quad + \sum_{l=0}^n \left[\hat{S}_1^\mp(\zeta; \mu_i; l) \cos(l\phi_j) + \hat{S}_2^\mp(\zeta; \mu_i; l) \sin(l\phi_j) \right] . \quad (2.37)
\end{aligned}$$

As somatórias no segundo e terceiro termos do segundo membro, que expressam a luz espalhada para o hemisfério superior e inferior, respectivamente, tem índices que variam de 1 a $2n$ para o ângulo azimutal e de 1 a $(m - 1)$ para o ângulo polar. Por sua vez, o quarto e quinto termos correspondem às calotas polares superior e inferior ($\mu = \mu_m$), respectivamente. Dada a independência azimutal da radiância nas calotas polares, a amplitude de radiância espectral \hat{L}_1 é não-nula apenas para $l = 0$, enquanto que a amplitude \hat{L}_2 é nula para todos os valores de l .

O segundo e terceiro termos tem, a menos dos sinais de + e -, a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \omega_0(\zeta) \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^n \hat{L}_1(\zeta; \mu_r; l) \hat{\beta}(\zeta; \mu_r, \mu_i, k) \left[\sum_{s=1}^{2n} \cos(l\phi_s) \cos k(\phi_s - \phi_j) \right] + \\
& + \omega_0(\zeta) \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^n \hat{L}_2(\zeta; \mu_r; l) \hat{\beta}(\zeta; \mu_r, \mu_i, k) \left[\sum_{s=1}^{2n} \cos(l\phi_s) \sin k(\phi_s - \phi_j) \right] . \quad (2.38)
\end{aligned}$$

Utilizando-se as relações de trigonométricas e de ortogonalidade, os termos entre colchetes podem ser expressos por (δ é a função delta de Kronecker):

$$\sum_{s=1}^{2n} \cos(l\phi_s) \cos[k(\phi_s - \phi_j)] = n (\delta_{l+k} + \delta_{l-k} + \delta_{l+k-2n}) \cos(k\phi_s), \quad (2.39)$$

$$\sum_{s=1}^{2n} \sin(l\phi_s) \cos[k(\phi_s - \phi_j)] = n (\delta_{l-k} - \delta_{l+k} - \delta_{l+k-2n}) \sin(k\phi_s), \quad (2.40)$$

o que permite reescrever a Equação 2.37 como:

$$\begin{aligned} & \mp \mu_i \sum_{l=0}^n \left[\frac{d\hat{L}_1^\mp(\zeta; \mu_i; l)}{d\zeta} \cos(l\phi_j) + \frac{d\hat{L}_2^\mp(\zeta; \mu_i; l)}{d\zeta} \sin(l\phi_j) \right] = \\ & \quad - \sum_{l=0}^n \left[\hat{L}_1^\mp(\zeta; \mu_i; l) \cos(l\phi_j) + \hat{L}_2^\mp(\zeta; \mu_i; l) \sin(l\phi_j) \right] + \\ & + \omega_0(\zeta) \sum_{l=0}^n \left[\sum_{r=1}^{m-1} \left[\hat{L}_1^-(\zeta; \mu_r; l) \hat{\beta}^\pm(\zeta; \mu_r, \mu_i, l) \epsilon_l \right] + \hat{L}_1^-(\zeta; \mu_m; l) \hat{\beta}^\pm(\zeta; \mu_m, \mu_i, l) \delta_l \right] \times \\ & \quad \cos(l\phi_s) + \\ & \quad + \omega_0(\zeta) \sum_{l=0}^n \left[\sum_{r=1}^{m-1} \hat{L}_2^-(\zeta; \mu_r; l) \hat{\beta}^\pm(\zeta; \mu_m, \mu_i, l) \right] \sin(l\phi_s) + \\ & + \omega_0(\zeta) \sum_{l=0}^n \left[\sum_{r=1}^{m-1} \left[\hat{L}_1^+(\zeta; \mu_r; l) \hat{\beta}^\mp(\zeta; \mu_r, \mu_i, l) \epsilon_l \right] + \hat{L}_1^+(\zeta; \mu_m; l) \hat{\beta}^\mp(\zeta; \mu_m, \mu_i, l) \delta_l \right] \times \\ & \quad \cos(l\phi_s) + \\ & \quad + \omega_0(\zeta) \sum_{l=0}^n \left[\sum_{r=1}^{m-1} \hat{L}_2^+(\zeta; \mu_r; l) \hat{\beta}^\mp(\zeta; \mu_m, \mu_i, l) \right] \sin(l\phi_s) + \\ & \quad + \sum_{l=0}^n \left[\hat{S}_1^\mp(\zeta; \mu_i; l) \cos(l\phi_j) + \hat{S}_2^\mp(\zeta; \mu_i; l) \sin(l\phi_j) \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Como $\cos(l\phi)$ e $\sin(l\phi)$ são linearmente independentes para os diferentes valores de l e essa última equação deve ser válida para cada valor de l , então ela deve ser válida para os termos em \hat{L}_1 e para os termos em \hat{L}_2 separadamente. Igualando-se os termos que tem $\cos(l\phi_j)$ por coeficiente em ambos os membros, ou seja, os termos em \hat{L}_1 , vem, para $i = 1, \dots, m-1$:

$$\begin{aligned}
\mp \mu_i \frac{d\hat{L}_1^\mp(\zeta; \mu_i; l)}{d\zeta} &= -\hat{L}_1^\mp(\zeta; \mu_i; l) \\
&+ \omega_0(\zeta) \epsilon_l \sum_{r=1}^{m-1} \hat{L}_1^-(\zeta; \mu_r; l) \hat{\beta}^\pm(\zeta; \mu_r, \mu_i, l) \\
&+ \omega_0(\zeta) \epsilon_l \sum_{r=1}^{m-1} \hat{L}_1^+(\zeta; \mu_r; l) \hat{\beta}^\mp(\zeta; \mu_r, \mu_i, l) \\
&+ \omega_0(\zeta) \delta_l \hat{L}_1^-(\zeta; \mu_m; l) \hat{\beta}^\pm(\zeta; \mu_m, \mu_i, l) \\
&+ \omega_0(\zeta) \delta_l \hat{L}_1^+(\zeta; \mu_m; l) \hat{\beta}^\mp(\zeta; \mu_m, \mu_i, l) \\
&+ \hat{S}_1^\mp(\zeta; \mu_i; l). \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, igualando-se os termos que tem $\sin(l\phi_j)$ por coeficiente em ambos os membros, ou seja, os termos em \hat{L}_2 , obtem-se uma expressão análoga, com $i = 1, \dots, m-1$. Note-se que não há termos correspondentes à luz proveniente das calotas polares para as amplitudes \hat{L}_2 .

$$\begin{aligned}
\mp \mu_i \frac{d\hat{L}_2^\mp(\zeta; \mu_i; l)}{d\zeta} &= -\hat{L}_2^\mp(\zeta; \mu_i; l) \\
&+ \omega_0(\zeta) \epsilon_l \sum_{r=1}^{m-1} \hat{L}_2^-(\zeta; \mu_r; l) \hat{\beta}^\pm(\zeta; \mu_r, \mu_i, l) \\
&+ \omega_0(\zeta) \epsilon_l \sum_{r=1}^{m-1} \hat{L}_2^+(\zeta; \mu_r; l) \hat{\beta}^\mp(\zeta; \mu_r, \mu_i, l) \\
&+ \hat{S}_1^\mp(\zeta; \mu_i; l). \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Partindo-se da equação correspondente à Equação 2.37 para as calotas polares, encontra-se uma expressão análoga à Equação 2.42 para essas calotas. Não há expressão análoga à Equação 2.43 pois as amplitudes espectrais senoidais são nulas em ambas as calotas, aparecendo somente termos em \hat{L}_1 para $l = 0$.

$$\begin{aligned}
\mp \mu_m \frac{d\hat{L}_1^\mp(\zeta; \mu_m; 0)}{d\zeta} &= -\hat{L}_1^\mp(\zeta; \mu_m; 0) \\
&+ \omega_0(\zeta) \epsilon_0 \sum_{r=1}^{m-1} \hat{L}_1^-(\zeta; \mu_r; 0) \hat{\beta}^\pm(\zeta; \mu_r, \mu_m, 0) \\
&+ \omega_0(\zeta) \epsilon_0 \sum_{r=1}^{m-1} \hat{L}_1^+(\zeta; \mu_r; 0) \hat{\beta}^\mp(\zeta; \mu_r, \mu_m, 0) \\
&+ \omega_0(\zeta) \delta_l \hat{L}_1^-(\zeta; \mu_m; 0) \hat{\beta}^\pm(\zeta; \mu_m, \mu_m, l) \\
&+ \omega_0(\zeta) \delta_l \hat{L}_1^+(\zeta; \mu_m; 0) \hat{\beta}^\mp(\zeta; \mu_m, \mu_m, l) \\
&+ \hat{S}_1^\mp(\zeta; \mu_m; 0). \tag{2.44}
\end{aligned}$$

2.5 Identificação dos Operadores Espectrais Locais de Reflectância e Transmitância

Objetiva-se, a partir da equação de transferência radiativa discretizada e decomposta espectralmente, identificar os operadores espectrais locais, ambas matrizes de dimensão $m \times m$:

- *reflectância espectral local* $\hat{\rho}(\zeta; l)$
- *transmitância espectral local* $\hat{\tau}(\zeta; l)$

Estes operadores expressam como a luz interage *localmente* com uma camada infinitesimal de água e embutem o albedo de espalhamento simples e a função de fase de espalhamento da água, como mostrado a seguir, constituindo também IOP's da água. Para esse fim, rearranjam-se as Equações 2.42 e 2.44. Poderia se utilizar também a Equação 2.43, de maneira análoga. Ilustra-se, a seguir, o rearranjo da Equação 2.42:

$$\begin{aligned}
 \mp \frac{d}{d\zeta} \hat{L}_1^\mp(\zeta; \mu_i; l) &= \sum_{r=1}^{m-1} \hat{L}_1^\mp \left[\frac{\epsilon_l \omega_0(\zeta) \hat{\beta}^+(\zeta; \mu_r, \mu_i, l) - \delta_{r-i}}{\mu_i} \right] \\
 &+ \sum_{r=1}^{m-1} \hat{L}_1^\pm \left[\frac{\epsilon_l \omega_0(\zeta) \hat{\beta}^-(\zeta; \mu_r, \mu_i, l)}{\mu_i} \right] \\
 &+ \hat{L}_1^-(\zeta; \mu_m; l) \left[\frac{\delta_l \omega_0(\zeta) \hat{\beta}^\pm(\zeta; \mu_m, \mu_i, l)}{\mu_i} \right] \\
 &+ \hat{L}_1^+(\zeta; \mu_m; l) \left[\frac{\delta_l \omega_0(\zeta) \hat{\beta}^\mp(\zeta; \mu_m, \mu_i, l)}{\mu_i} \right] \\
 &+ \frac{\hat{S}_1^\mp(\zeta; \mu_i; l)}{\mu_i} .
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Considerando esses operadores matriciais, definíveis para cada profundidade ζ e para cada modo azimutal l , nota-se que cada elemento identificado por (r, i) , ou seja, r -ésima linha e i -ésima coluna da matriz $([\hat{\rho}(\zeta; l)]_{ri})$ ou $([\hat{\tau}(\zeta; l)]_{ri})$ expressa a radiância emitida na direção polar μ_r e recebida na direção μ_i , por reflexão ou transmissão, conforme o operador considerado.

A partir da Equação 2.45, que faz um balanço de amplitudes espectrais de radiâncias para a direção polar dada por μ_i , identificam-se os termos correspondentes aos quads ($i = 1, \dots, m-1$) e somente amplitudes provenientes de outros quads e não das calotas polares ($r = 1, \dots, m-1$), ou seja, o primeiro e segundo termos no segundo membro dessa equação:

$$\begin{aligned}
 [\hat{\tau}(\zeta; l)]_{ri} &\equiv \frac{1}{\mu_i} \left[\epsilon_l \omega_0(\zeta) \hat{\beta}^+(\zeta; \mu_r, \mu_i, l) - \delta_{r-i} \right] \\
 [\hat{\rho}(\zeta; l)]_{ri} &\equiv \frac{1}{\mu_i} \left[\epsilon_l \omega_0(\zeta) \hat{\beta}^-(\zeta; \mu_r, \mu_i, l) \right] .
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Note-se que $[\hat{\tau}(\zeta; l)]_{ri}$ contém o termo $\hat{\beta}^+(\zeta; \mu_r, \mu_i, l)$, que expressa a função de fase para direções correspondentes ao mesmo hemisfério, o que implica transmissão, enquanto que $[\hat{\rho}(\zeta; l)]_{ri}$ contém $\hat{\beta}^-(\zeta; \mu_r, \mu_i, l)$, que expressa a mesma função para direções correspondentes a hemisférios diferentes, o que implica reflexão.

O terceiro e quarto termos podem ser associados aos mesmos operadores que fazem o balanço de amplitudes para quads ($i = 1, \dots, m-1$), mas para amplitudes provenientes das calotas polares ($r = m$):

$$\begin{aligned} [\hat{\tau}(\zeta; l)]_{mi} &\equiv \frac{1}{\mu_i} \left[\delta_l \omega_0(\zeta) \hat{\beta}^+(\zeta; \mu_m, \mu_i, l) - \delta_{r-i} \right] \\ [\hat{\rho}(\zeta; l)]_{mi} &\equiv \frac{1}{\mu_i} \left[\delta_l \omega_0(\zeta) \hat{\beta}^-(\zeta; \mu_m, \mu_i, l) \right]. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Estes elementos são *nulos*, exceto para $l = 0$.

Para completar as matrizes $\hat{\tau}(\zeta; l)$ e $\hat{\rho}(\zeta; l)$ faltam os elementos correspondentes às amplitudes desviadas de quads ($r = 1, \dots, m-1$) para as calotas polares ($i = m$), identificados a partir da Equação 2.44 e também não-nulos apenas para $l = 0$:

$$\begin{aligned} [\hat{\tau}(\zeta; 0)]_{rm} &\equiv \frac{1}{\mu_m} \left[\epsilon_0 \omega_0(\zeta) \hat{\beta}^+(\zeta; \mu_r, \mu_m, 0) \right] \\ [\hat{\tau}(\zeta; l)]_{rm} &\equiv 0 \quad (l = 1, \dots, n) \\ [\hat{\rho}(\zeta; 0)]_{rm} &\equiv \frac{1}{\mu_m} \left[\epsilon_0 \omega_0(\zeta) \hat{\beta}^-(\zeta; \mu_r, \mu_m, 0) \right] \\ [\hat{\rho}(\zeta; l)]_{rm} &\equiv 0 \quad (l = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.48)$$

E, finalmente, também identificados a partir da Equação 2.44, os elementos correspondentes às radiâncias desviadas das calotas polares ($r = m$) para as próprias ($i = m$), igualmente não-nulos apenas para $l = 0$:

$$\begin{aligned} [\hat{\tau}(\zeta; 0)]_{mm} &\equiv \frac{1}{\mu_m} \left[\omega_0(\zeta) \hat{\beta}^+(\zeta; \mu_m, \mu_m, 0) - 1 \right] \\ [\hat{\tau}(\zeta; l)]_{mm} &\equiv 0 \quad (l = 1, \dots, n) \\ [\hat{\rho}(\zeta; 0)]_{mm} &\equiv \frac{1}{\mu_m} \left[\omega_0(\zeta) \hat{\beta}^-(\zeta; \mu_m, \mu_m, 0) \right] \\ [\hat{\rho}(\zeta; l)]_{mm} &\equiv 0 \quad (l = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.6 Equações de Interação Local

Reescrevendo-se a Equação 2.45 com uso dos operadores definidos na seção anterior, tem-se:

$$\mp \frac{d}{d\zeta} \hat{L}_1^\mp(\zeta; \mu_i; l) = \sum_{r=1}^m \hat{L}_1^\mp(\zeta; \mu_r; l) [\hat{\tau}(\zeta; l)]_{ri} + \sum_{r=1}^m \hat{L}_1^\pm(\zeta; \mu_r; l) [\hat{\rho}(\zeta; l)]_{ri} + \frac{1}{\mu_i} \hat{S}_1^\mp(\zeta; \mu_i; l). \quad (2.50)$$

A equação acima é válida para $i = 1, \dots, m-1$, sendo que pode-se deduzir uma equação similar para as calotas polares ($i = m$) a partir da Equação 2.44, contendo termos em $[\hat{\tau}(\zeta; 0)]_{rm}$ e $[\hat{\rho}(\zeta; 0)]_{rm}$. Visando reescrever a equação acima na forma matricial, definem-se os seguintes vetores

$$\begin{aligned} \hat{L}_1^\mp(\zeta; l) &= [\hat{L}_1^\mp(\zeta; \mu_1; l) \quad \hat{L}_1^\mp(\zeta; \mu_2; l) \quad \cdots \quad \hat{L}_1^\mp(\zeta; \mu_m; l)] \\ \hat{L}_2^\mp(\zeta; l) &= [\hat{L}_2^\mp(\zeta; \mu_1; l) \quad \hat{L}_2^\mp(\zeta; \mu_2; l) \quad \cdots \quad \hat{L}_2^\mp(\zeta; \mu_m; l)] \\ \hat{S}_1^\mp(\zeta; l) &= \left[\frac{1}{\mu_1} \hat{S}_1^\mp(\zeta; \mu_1; l) \quad \frac{1}{\mu_2} \hat{S}_1^\mp(\zeta; \mu_2; l) \quad \cdots \quad \frac{1}{\mu_m} \hat{S}_1^\mp(\zeta; \mu_m; l) \right] \\ \hat{S}_2^\mp(\zeta; l) &= \left[\frac{1}{\mu_1} \hat{S}_2^\mp(\zeta; \mu_1; l) \quad \frac{1}{\mu_2} \hat{S}_2^\mp(\zeta; \mu_2; l) \quad \cdots \quad \frac{1}{\mu_m} \hat{S}_2^\mp(\zeta; \mu_m; l) \right], \end{aligned}$$

obtendo-se então:

$$\mp \frac{d}{d\zeta} \hat{L}_1^\mp(\zeta; l) = \hat{L}_1^\mp(\zeta; l) \hat{\tau}(\zeta; l) + \hat{L}_1^\pm(\zeta; l) \hat{\rho}(\zeta; l) + \hat{S}_1^\mp(\zeta; l). \quad (2.51)$$

E, analogamente,

$$\mp \frac{d}{d\zeta} \hat{L}_2^\mp(\zeta; l) = \hat{L}_2^\mp(\zeta; l) \hat{\tau}(\zeta; l) + \hat{L}_2^\pm(\zeta; l) \hat{\rho}(\zeta; l) + \hat{S}_2^\mp(\zeta; l). \quad (2.52)$$

Adotando-se o subscrito p ($p = 1$ para a amplitude espectral cossenoidal e $p = 2$ para a senoidal), obtem-se as chamadas *equações de interação local* para as amplitudes espectrais das radiações. Esses dois conjuntos de equações se aplicam aos $n+1$ modos azimutais ($l = 0, 1, 2, \dots, n$):

$$\mp \frac{d}{d\zeta} \hat{L}_p^\mp(\zeta; l) = \hat{L}_p^\mp(\zeta; l) \hat{\tau}(\zeta; l) + \hat{L}_p^\pm(\zeta; l) \hat{\rho}(\zeta; l) + \hat{S}_p^\mp(\zeta; l). \quad (2.53)$$

Reagrupando-se os termos, chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \begin{bmatrix} \hat{L}_p^-(\zeta; l) & \hat{L}_p^+(\zeta; l) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{L}_p^-(\zeta; l) & \hat{L}_p^+(\zeta; l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\hat{\tau}(\zeta; l) & \hat{\rho}(\zeta; l) \\ -\hat{\rho}(\zeta; l) & \hat{\tau}(\zeta; l) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \hat{S}_p^-(\zeta; l) & \hat{S}_p^+(\zeta; l) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Estes conjuntos de equações para os diferentes l -modos são **independentes** (de-sacoplamento azimutal) e isto permite dividir um sistema de grau alto em $n + 1$ sistemas de grau menor. Agrupando-se as radiâncias dirigidas para cima/baixo na forma de vetores $1 \times 2m$ obtém-se uma forma mais compacta para as equações de interação local:

$$\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{L}}_p(\zeta, l) = \hat{\mathbf{L}}_p(\zeta, l) \hat{\mathbf{K}}(\zeta, l) + \hat{\mathbf{S}}_p(\zeta, l) . \quad (2.55)$$

sendo $\hat{\mathbf{L}}_p = [\hat{\mathbf{L}}_p^-, \hat{\mathbf{L}}_p^+]$ e $\hat{\mathbf{S}}_p = [\hat{\mathbf{S}}_p^-, \hat{\mathbf{S}}_p^+]$, ambos com dimensão $1 \times 2m$. $\hat{\mathbf{S}}_p(\zeta, l)$ expressa a contribuição das fontes internas, enquanto que $\hat{\mathbf{K}}$ é a *matriz espectral de transferência local*, anti-simétrica por blocos, de dimensão $2m \times 2m$, que é em si uma IOP, sendo independente de p ou do sentido ascendente/descendente das amplitudes espectrais, assim como seus elementos $\hat{\rho}(\zeta, l)$ e $\hat{\tau}(\zeta, l)$:

$$\hat{\mathbf{K}}(\zeta, l) \equiv \begin{bmatrix} -\hat{\tau}(\zeta, l) & \hat{\rho}(\zeta, l) \\ -\hat{\rho}(\zeta, l) & \hat{\tau}(\zeta, l) \end{bmatrix} . \quad (2.56)$$

2.7 Solução Fundamental

A solução fundamental ($\hat{\mathbf{M}}$) para as amplitudes espectrais, relativa às equações de interação local (Equação 2.55), sem fontes internas, deve satisfazer a seguinte equação matricial diferencial para cada modo azimutal l (8) (9):

$$\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{M}}(w, \zeta, l) = \hat{\mathbf{M}}(w, \zeta, l) \hat{\mathbf{K}}(\zeta, l) , \quad (2.57)$$

sujeita às condições iniciais:

$$\hat{\mathbf{M}}(w, w; l) = \mathbf{I}_{2m} , \quad (2.58)$$

onde m é a dimensão da discretização polar.

Esta solução fundamental mapeia as amplitudes espectrais das radiâncias de um nível (nível w , na superfície) para outro (nível genérico ζ). O termo correspondente às fontes internas, ou seja, submersas, pode ser incluído como sendo a convolução das fontes internas e de $\hat{\mathbf{M}}$ (10):

$$\hat{\mathbf{L}}_p(\zeta; l) = \hat{\mathbf{L}}_p(w; l) \hat{\mathbf{M}}(w, \zeta; l) + \int_w^\zeta \hat{\mathbf{S}}_p(\zeta'; l) \hat{\mathbf{M}}(\zeta', \zeta; l) d\zeta' . \quad (2.59)$$

Na maioria dos métodos para resolução da equação de transferência radiativa, parte-se da integração da Equação 2.57, sujeita à Equação 2.58 e existem diversos enfoques possíveis. Por exemplo, o termo $\hat{\mathbf{M}}$ poderia ser obtido por meio de matrizes dinâmicas ou não-modais, como sugerido em (3) e (1).

Pode-se provar a equivalência da equação acima com as *equações espectrais de interação global* (Equações 3.3 e 3.4), que relacionam as radiâncias incidentes e emergentes na camada de água através de operadores que expressam como a luz se transmite e/ou reflete na camada. A metodologia de inserção invariante se baseia em encontrar estes operadores.

CAPÍTULO 3

TEORIA DE INSERÇÃO INVARIANTE

3.1 Resumo da Metodologia

A resolução da equação de transferência radiativa constitui um *problema linear de condição de contorno*, de difícil solução, porque na fronteira que delimita a camada de água, constituída pelo nível da superfície (w) e por um nível genérico (ζ), existem radiâncias conhecidas entrando e radiâncias resultantes, desconhecidas, saindo. Tem-se assim metade das radiâncias conhecidas e metade incógnitas na fronteira: conhecem-se as radiâncias para baixo em w e as radiâncias para cima em ζ mas não as radiâncias para cima em w nem as radiâncias para baixo em ζ , conforme as Equações 2.18 e 2.19 (considerando-se aqui o nível ζ , ao invés de z_b).

A metodologia de inserção invariante possibilita substituir o problema de condição de contorno (linear) por um *problema não-linear de valor inicial*, o que permite a utilização de códigos numéricos robustos, amplamente testados. A equação linear íntegro-diferencial de transferência radiativa é substituída por um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares. Uma característica importante da metodologia é seu enfoque intuitivamente físico, limitando a parte numérica, praticamente, à integração dessas equações diferenciais.

Para aplicação dessa teoria, assume-se que seja válido um princípio, denominado *princípio da iteração linear* (6), segundo o qual a interação entre a luz e uma camada finita do meio pode ser expressa por operadores lineares, que mapeiam as radiâncias de um nível para outro. Assim, através da inserção invariante são computados esses operadores de *transporte*, ou seja, transmitâncias e reflectâncias espectrais *globais* de uma dada camada de água. Conhecidos esses operadores, as amplitudes espectrais de radiância emergentes, incógnitas, podem ser obtidas facilmente a partir das amplitudes incidentes.

A dedução teórica parte da discretização das variáveis angulares da equação de transferência radiativa, e da decomposição espectral das radiâncias por meio de sua representação polinomial de Fourier. A metodologia requer a discretização da função de fase de espalhamento para as resoluções polar e azimutal escolhidas, bem como a decomposição espectral da radiância. Entretanto, prescinde-se da expansão da função de fase em polinômios de Legendre, por exemplo.

Parte-se dos operadores espectrais *locais* de transmitância e reflectância, que expressam a interação da luz com uma camada *infinitesimal* do meio, os quais são calculados a partir do albedo de espalhamento simples e da função de fase de espalhamento, conforme visto no capítulo anterior. Estes operadores foram deduzidos a partir da equação de transferência radiativa discretizada angularmente e decomposta

espectralmente.

Conhecidos os operadores espectrais locais, podem-se escrever balanços de energia para camadas *finitas* do meio, expressos pelas equações de interação global, Seção 3.2. Há um conjunto para a camada *superior*, entre a superfície e o nível genérico ζ considerado, e outro para a camada *inferior*, entre o fundo e ζ . A Seção 3.3 mostra a equivalência dessas equações com a solução fundamental exposta no capítulo anterior.

As equações diferenciais de Riccati são deduzidas a partir das equações de interação global na Seção 3.4, obtendo-se um conjunto para a camada superior e outro para a inferior. As incógnitas são os operadores espectrais globais de transmitância e reflectância e os operadores espectrais globais que expressam os termos fontes associados às camadas superior e inferior consideradas. Assim, esses operadores espectrais globais devem ser calculados para cada nível ζ no qual se se requer o cálculo das radiâncias.

Considerações sobre a integração das equações de Riccati são expostas na Seção 3.5. Para um nível ζ escolhido e para as camadas superior e inferior associadas, a integração é feita no sentido *descendente*, a partir da superfície, para a camada superior, e no sentido *ascendente*, geralmente a partir do fundo, para a camada inferior, obtendo-se operadores globais para as camadas superior e inferior relativas ao nível ζ considerado. Assim, mudanças das condições de contorno não implicam no cálculo de novos operadores, para uma mesma camada do meio. A integração das equações diferenciais de Riccati permite “construir” a camada considerada, incorporando suas propriedades óticas.

Entretanto, os operadores obtidos pela integração de Riccati não são ainda suficientes para expressar o comportamento de toda a camada de água, mesmo que não se considere a interface ar-água. Analisa-se agora a camada de água composta pelas camadas superior e inferior (ambas em relação a ζ), i.e. analisa-se a camada inferior na presença da superior e vice-versa, ainda objetivando o cálculo das amplitudes espectrais de radiância ascendentes e descendentes em ζ . Para isto, deduzem-se, na Seção 3.6, os *operadores compostos*, a partir dos operadores globais anteriormente obtidos. E, na Seção 3.7, os operadores compostos para a interface ar-água, que inserem operadores específicos da interface ar-água, que modelam, por exemplo, ondas causadas pelo vento.

Finalmente, a sequência de etapas é resumida na Seção 3.8, mostrando como, conhecendo-se os operadores locais, integram-se as equações de Riccati para se obterem os operadores globais para as camadas de água consideradas. Tendo-se estes operadores, chega-se aos operadores compostos para a camada de água e para a interface ar-água. Estes últimos permitem que se calcule, a partir da amplitude incidente atmosférica, a amplitudes incidente *abaixo* dessa interface e, através dos operadores compostos para a camada de água, as amplitudes ascendentes e descendentes no nível ζ . Destas, calculam-se as radiâncias desejadas.

3.2 Equações Espectrais de Interação Global

Utilizando o formalismo de teoria de transporte para uma camada *finita* de água, podem-se escrever equações genéricas relacionando as radiâncias incidentes e emergentes através de operadores matriciais que expressam a transmissão e reflexão da luz na água no sentido ascendente e no sentido descendente. Estas equações são denominadas equações espectrais de interação global e os operadores são os \hat{T} 's, transmitâncias espectrais globais e os \hat{R} 's, reflectâncias espectrais globais, que regem o transporte da energia luminosa através da camada d'água, para uma dada frequência, como mostrado na Figura 3.1.

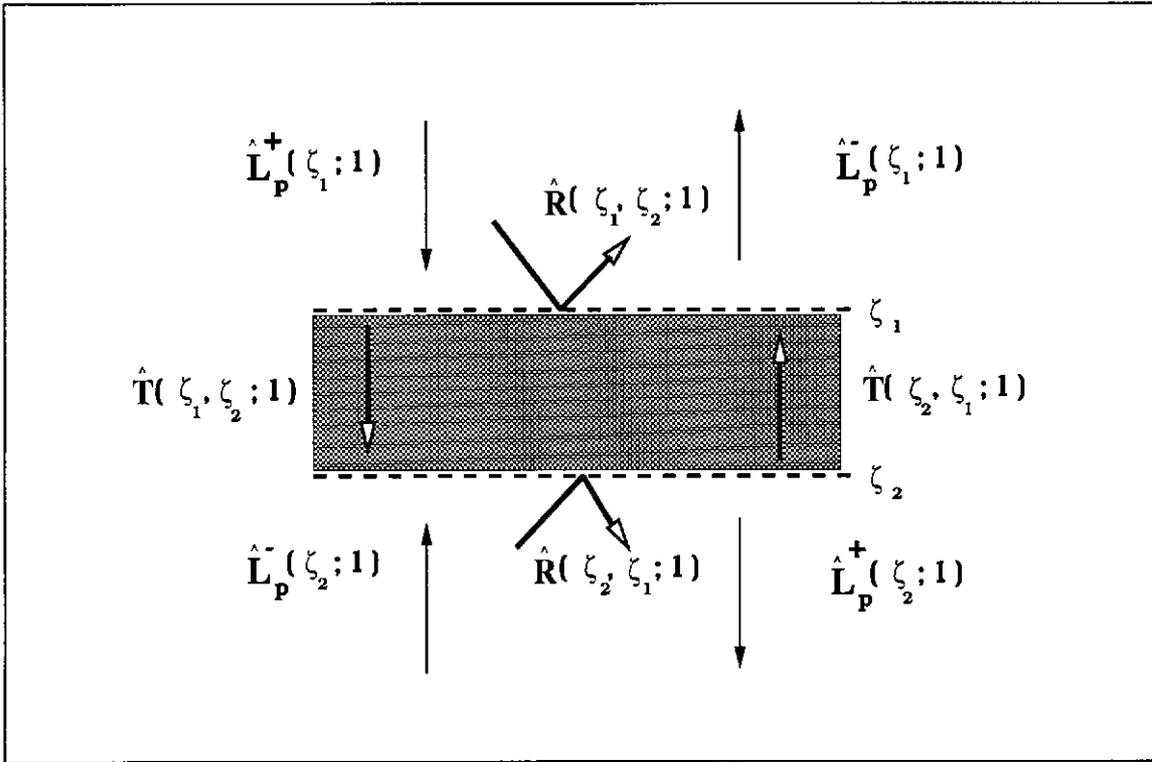


Fig. 3.1 - Operadores espectrais globais \hat{R} e \hat{T} e amplitudes espectrais de radiâncias incidentes e emergentes \hat{L}_p para camada genérica de água desprovida de condições de contorno.

O *princípio da iteração linear* permite estabelecer um balanço de energia para uma camada finita do meio e para cada modo azimutal l , relacionando as amplitudes espectrais de radiância incidentes ($\hat{L}_p^+(\zeta_1; l)$ e $\hat{L}_p^-(\zeta_2; l)$) e emergentes ($\hat{L}_p^-(\zeta_2; l)$ e $\hat{L}_p^+(\zeta_1; l)$) por meio destes operadores.

$$\hat{L}_p^+(\zeta_2; l) = \hat{L}_p^+(\zeta_1; l) \hat{T}(\zeta_1, \zeta_2; l) + \hat{L}_p^-(\zeta_2; l) \hat{R}(\zeta_2, \zeta_1; l) \quad (3.1)$$

$$\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta_1; l) = \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta_2; l) \hat{\mathbf{T}}(\zeta_2, \zeta_1; l) + \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta_1; l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta_1, \zeta_2; l), \quad (3.2)$$

onde os $\hat{\mathbf{T}}$'s expressam como a luz ascendente/descendente é transmitida através da camada e os $\hat{\mathbf{R}}$'s, como a luz ascendente/descendente é refletida pela camada. O rearranjo destas equações e a inclusão dos termos referentes às fontes internas leva às *equações espectrais de interação global*, expressas abaixo para duas camadas de água, escolhidas convenientemente. Mantem-se a convenção adotada no capítulo anterior para as amplitudes de radiância, ou seja, o sentido convencionado como *positivo* é o *descendente* e o *negativo*, o *ascendente*. Os termos fontes foram acrescidos de um superscrito t relativo à solução de transporte, e específicos de uma camada finita do meio, para distinguí-los dos termos fonte das equações de interação local 2.55, que se referiam a uma camada infinitesimal do meio.

O primeiro conjunto de equações refere-se a uma camada de água entre a superfície, $\zeta_1 = w$, e o nível $\zeta_2 = \zeta$:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_p^-(w; l) \\ \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta; l) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta; l) \\ \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l) & \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) \\ \hat{\mathbf{R}}(w, \zeta; l) & \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_p^{-t}(\zeta, w; l) \\ \hat{\mathbf{S}}_p^{+t}(w, \zeta; l) \end{bmatrix}^T \quad (3.3)$$

A matriz referente às fontes internas no segundo membro é a convolução da fonte interna com a solução fundamental, anteriormente mencionada. Nota-se que as amplitudes espectrais de radiâncias *incidentes*, $\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta; l)$ e $\hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l)$, são conhecidas, enquanto que as *emergentes*, $\hat{\mathbf{L}}_p^-(w; l)$ e $\hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta; l)$, são incógnitas. Aqui, o termo $\hat{\mathbf{S}}_p^{-t}(\zeta, w; l)$ expressa a contribuição das fontes internas da camada entre o nível ζ e w no sentido negativo (somando-se às radiâncias ascendentes), enquanto o termo $\hat{\mathbf{S}}_p^{+t}(w, \zeta; l)$ expressa a contribuição no sentido positivo das fontes na mesma camada.

Um segundo conjunto de equações pode ser escrito para uma camada de água entre o nível $\zeta_1 = \zeta$ e o fundo, $\zeta_2 = b$:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta; l) \\ \hat{\mathbf{L}}_p^+(b; l) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_p^-(b; l) \\ \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta; l) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}(b, \zeta; l) & \hat{\mathbf{R}}(b, \zeta; l) \\ \hat{\mathbf{R}}(\zeta, b; l) & \hat{\mathbf{T}}(\zeta, b; l) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_p^{-t}(b, \zeta; l) \\ \hat{\mathbf{S}}_p^{+t}(\zeta, b; l) \end{bmatrix}^T \quad (3.4)$$

Analogamente ao primeiro conjunto, as amplitudes espectrais de radiâncias *incidentes*, $\hat{\mathbf{L}}_p^-(b; l)$ e $\hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta; l)$, são conhecidas, enquanto que as *emergentes*, $\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta; l)$ e $\hat{\mathbf{L}}_p^+(b; l)$, são incógnitas. O termo $\hat{\mathbf{S}}_p^{-t}(b, \zeta; l)$ expressa a contribuição das fontes internas entre o fundo b e o nível ζ no sentido negativo (somando-se às radiâncias ascendentes), enquanto que $\hat{\mathbf{S}}_p^{+t}(\zeta, b; l)$, a contribuição no sentido positivo, para a mesma camada.

Assim, em ambos os conjuntos, o cálculo das radiâncias emergentes, incógnitas, requer que os operadores espectrais globais ($\hat{\mathbf{T}}$'s e $\hat{\mathbf{R}}$'s), bem como os termos referentes

às fontes internas ($\hat{\mathbf{S}}_p^t$'s) sejam calculados, o que é objeto da próxima seção .

3.3 Equivalência da Solução de Transporte com a Solução Fundamental

Mostra-se a seguir que a Equação 2.59, solução fundamental da equação da transferência radiativa, pode ser reescrita como a solução de transporte, constituída pelas equações espectrais de interação global, vistas na seção anterior. Note-se que esta equação foi escrita para uma camada d'água entre a superfície (w) e um nível genérico ζ . Reescreve-se a solução fundamental expandindo-se os vetores ascendentes e descendentes:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta; l) \right] &= \left[\hat{\mathbf{L}}_p^-(w; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \right] \hat{\mathbf{M}}(w, \zeta; l) \\ &+ \left[\hat{\mathbf{S}}_p^{-f}(w, \zeta; l) \quad \hat{\mathbf{S}}_p^{+f}(w, \zeta; l) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde o último termo representa a convolução que aparecia na Equação 2.59:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_p^f(w, \zeta; l) &\equiv \left[\hat{\mathbf{S}}_p^{-f}(w, \zeta; l) \quad \hat{\mathbf{S}}_p^{+f}(w, \zeta; l) \right] \equiv \\ &\equiv \int_w^\zeta \hat{\mathbf{S}}_p(\zeta'; l) \hat{\mathbf{M}}(\zeta', \zeta; l) d\zeta'. \end{aligned} \quad (3.6)$$

As amplitudes de radiâncias incidentes e emergentes aparecem misturadas em ambos os membros da equação, mas deseja-se agrupar no primeiro membro as emergentes e no segundo, as incidentes. Para isto, reagrupam-se os termos da Equação 3.5 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^-(w; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2m} \\ -\hat{\mathbf{M}}(w, \zeta; l) \end{bmatrix} \\ = \left[\hat{\mathbf{S}}_p^{-f}(w, \zeta; l) \quad \hat{\mathbf{S}}_p^{+f}(w, \zeta; l) \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Utiliza-se a matriz \mathbf{P} , definida de forma a mapear as radiâncias, tais como aparecem na Equação 3.7, para a ordem desejada, ou seja, emergentes e incidentes. $\hat{\mathbf{L}}_p^-(w; l)$ representa a luz que sai da camada na superfície, para cima, enquanto que $\hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta; l)$, a que sai da camada no fundo, para baixo. $\hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l)$ representa a luz que entra na camada na superfície, para baixo, e $\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta; l)$ a que entra na camada no fundo, para cima.

$$\left[\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^-(w; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \right] \mathbf{P} = \left[\hat{\mathbf{L}}_p^-(w; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \right], \quad (3.8)$$

sendo as matriz \mathbf{P} , e os blocos \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 , resultantes de sua partição, definidas como abaixo, onde $\mathbf{0}$ é uma matriz $m \times m$ de zeros e \mathbf{I} , uma matriz identidade, também

$m \times m$:

$$\mathbf{P} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2 & \vdots & \mathbf{P}_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{P}_1 & \vdots & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Como a matriz \mathbf{P} tem a propriedade,

$$\mathbf{P}^2 \equiv \mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{I}_{4m}, \quad (3.10)$$

pode-se inserí-la na Equação 3.7:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^-(w; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2m} \\ -\hat{\mathbf{M}}(w, \zeta; l) \end{bmatrix} \\ = \left[\hat{\mathbf{S}}_p^{-f}(w, \zeta; l) \quad \hat{\mathbf{S}}_p^{+f}(w, \zeta; l) \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Multiplicando-se uma das matrizes \mathbf{P} pelo vetor de radiâncias e o outra pela matriz que contém $\hat{\mathbf{M}}$ e \mathbf{I} , obtém-se:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathbf{L}}_p^-(w; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta; l) \quad \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2 & -\mathbf{P}_1\hat{\mathbf{M}}(w, \zeta; l) \\ \mathbf{P}_1 & -\mathbf{P}_2\hat{\mathbf{M}}(w, \zeta; l) \end{bmatrix} \\ = \left[\hat{\mathbf{S}}_p^{-f}(w, \zeta; l) \quad \hat{\mathbf{S}}_p^{+f}(w, \zeta; l) \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

A expansão desta equação resulta em ter-se as radiâncias emergentes, incógnitas no primeiro membro e as incidentes, conhecidas, no segundo.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_p^-(w; l) \\ \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta; l) \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta; l) \\ \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \end{bmatrix}^T \left[\mathbf{P}_2\hat{\mathbf{M}}(w, \zeta; l) \quad -\mathbf{P}_1 \right] \left[\mathbf{P}_2 \quad -\mathbf{P}_1\hat{\mathbf{M}}(w, \zeta; l) \right]^{-1} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_p^{-f}(\zeta, w; l) \\ \hat{\mathbf{S}}_p^{+f}(w, \zeta; l) \end{bmatrix}^T \left[\mathbf{P}_2 \quad -\mathbf{P}_1\hat{\mathbf{M}}(w, \zeta; l) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pode-se agora identificar no segundo membro as matrizes correspondentes às transmitâncias e reflectâncias espectrais globais e aos termos fontes, ambas no primeiro conjunto de equações de interação global (Equações 3.3):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l) & \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) \\ \hat{\mathbf{R}}(w, \zeta; l) & \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) \end{bmatrix} &= \left[\mathbf{P}_2\hat{\mathbf{M}}(w, \zeta; l) \quad -\mathbf{P}_1 \right] \left[\mathbf{P}_2 \quad -\mathbf{P}_1\hat{\mathbf{M}}(w, \zeta; l) \right]^{-1} \\ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_p^{-t}(\zeta, w; l) \\ \hat{\mathbf{S}}_p^{+t}(w, \zeta; l) \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_p^{-f}(\zeta, w; l) \\ \hat{\mathbf{S}}_p^{+f}(w, \zeta; l) \end{bmatrix}^T \left[\mathbf{P}_2 \quad -\mathbf{P}_1\hat{\mathbf{M}}(w, \zeta; l) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Analogamente poder-se-ia deduzir expressões equivalentes para uma camada de água entre um nível genérico ζ e o fundo (b), correspondendo ao segundo conjunto de equações de interação global (Equações 3.4). Isto demonstra a equivalência analítica entre a expressão da solução fundamental e aquela derivada do formalismo de transporte.

3.4 Equações de Riccati

Na metodologia de inserção invariante, chega-se à solução resolvendo-se, i.e. integrando-se as *equações diferenciais de Riccati*, deduzidas abaixo, com a finalidade de se calcularem os operadores espectrais globais, \hat{T} 's, \hat{R} 's e \hat{S}_p^t 's. Conhecidos estes operadores, as amplitudes espectrais \hat{L} resultam de uma simples multiplicação de matrizes e, a partir destas amplitudes, chega-se às radiâncias desejadas.

As equações diferenciais de Riccati são obtidas a partir das equações de interação *global* (Equações 3.3 e 3.4), fazendo uso das equações de interação *local* (Equações 2.53) e dos operadores matriciais definidos pelas Equações 2.46, 2.47, 2.48 e 2.49. Procede-se da seguinte forma:

- 1) derivam-se em relação a ζ as equações de interação global, obtendo-se um novo conjunto de equações;
- 2) por meio das equações de interação local, substituem-se as derivadas em ζ das amplitudes espectrais de radiâncias, ou seja, derivadas do tipo $d\hat{L}/d\zeta$;
- 3) substituem-se também as amplitudes de radiância emergentes, de forma a se obter expressões que contenham unicamente amplitudes de radiância incidentes;
- 4) agrupam-se os termos de forma que as amplitudes incidentes apareçam como coeficientes e os segundos membros das equações sejam iguais a zero, de forma similar ao mostrado abaixo:

$$\hat{L}^+ \{ \dots \dots \} + \hat{L}^- \{ \dots \dots \} = 0$$

- 5) assumindo-se que cada equação deva ser nula para amplitudes incidentes arbitrárias, impõe-se que os termos entre chaves nas novas equações, que tem por coeficiente as amplitudes de radiância incidentes, sejam também nulos, dando origem assim às equações de Riccati;

Ilustra-se o procedimento para alguns operadores derivando-se a Equação 3.3 em relação a ζ , *sem* incluir, para fins de clareza, os termos correspondentes às fontes internas:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_p^-(w; l) \\ \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta; l) \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta; l) \\ \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l) & \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) \\ \hat{\mathbf{R}}(w, \zeta; l) & \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta; l) \\ \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l) & \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) \\ \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{R}}(w, \zeta; l) & \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) \end{bmatrix}. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Num segundo passo, substituem-se os valores das derivadas das amplitudes de radiância através das equações de interação local (Equações 2.53):

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta; l) &= \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta, l) + \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta, l) \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta, l) \\
+\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta, l) &= \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta, l) \hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta, l) + \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta, l). \quad (3.16)
\end{aligned}$$

e multiplicam-se as matrizes, obtendo-se 2 equações, nas quais as expressões correspondentes às derivadas substituídas aparecem entre colchetes:

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{L}}_p^-(w; l) + [\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta, l) + \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta, l) \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta, l)] \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l) + \\
&-\hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \hat{\mathbf{R}}(w, \zeta; l) - \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l) - \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{R}}(w, \zeta; l) = 0 \quad (3.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[\hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta, l) \hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta, l) + \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta, l)] + [\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta, l) + \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta, l) \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta, l)] \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) + \\
&-\hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) - \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) - \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) = 0 \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Objetiva-se obter expressões que contenham somente amplitudes de radiância incidentes ($\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l)$ e $\hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l)$). Para isto, utilizando-se a própria Equação 3.3, substituem-se as amplitudes emergentes ($\hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta, l)$ e $\hat{\mathbf{L}}_p^-(w; l)$) por:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}}_p^-(w; l) &= \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l) + \hat{\mathbf{L}}_p^+(w, l) \hat{\mathbf{R}}(w, \zeta; l) \\
\hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta, l) &= \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) + \hat{\mathbf{L}}_p^+(w, l) \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l), \quad (3.19)
\end{aligned}$$

as quais, substituídas em 3.17, fornecem:

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l) + \hat{\mathbf{L}}_p^+(w, l) \hat{\mathbf{R}}(w, \zeta; l) + \\
&[\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta, l) + [\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) + \hat{\mathbf{L}}_p^+(w, l) \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l)] \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta, l)] \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l) + \\
&-\hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \hat{\mathbf{R}}(w, \zeta; l) - \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l) - \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{R}}(w, \zeta; l) = 0 \quad (3.20)
\end{aligned}$$

E, substituídas em 3.18, levam a:

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) + \hat{\mathbf{L}}_p^+(w, l) \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) \right) \hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta, l) + \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta, l) \right] + \\
& \left[\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta, l) + \left(\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) + \hat{\mathbf{L}}_p^+(w, l) \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) \right) \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta, l) \right] \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) + \\
& - \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) - \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) - \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) = 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Separando-se os termos correspondentes às amplitudes de radiância incidentes em 3.20:

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \left[-\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l) + \hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta, l) \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l) + \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta, l) \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l) \right] + \\
& \hat{\mathbf{L}}_p^+(w, l) \left[\hat{\mathbf{R}}(w, \zeta; l) + \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta, l) \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l) - \hat{\mathbf{R}}(w, \zeta; l) - \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{R}}(w, \zeta; l) \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

E, fazendo-se o mesmo em 3.21:

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta, l) \left[\hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) \hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta, l) + \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta, l) + \hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta, l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) + \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta, l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) \right] \\
& + \hat{\mathbf{L}}_p^+(w, l) \left[\hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) \hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta, l) + \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta, l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) - \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) - \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) \right] \\
& = 0 .
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Como as equações acima devem ser válidas para quaisquer radiâncias incidentes, arbitrárias, então pode-se impor que as expressões entre colchetes nas Equações 3.22 e 3.23 sejam nulos, o que resulta em 4 equações para os os operadores *globais*, os $\hat{\mathbf{T}}$'s e $\hat{\mathbf{R}}$'s, e suas derivadas em ζ , expressos em função dos operadores *locais*, $\hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta, l)$ e $\hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta, l)$. Estas são 4 das equações de Riccati, cujo conjunto completo encontra-se apresentado abaixo. A inclusão de termos fontes resulta em 2 outras equações, obtidas de maneira similar, completando um primeiro conjunto de 6 equações de Riccati para a camada entre a superfície (w) e o nível ζ , obtidas a partir das Equações 3.3:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) &= \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) \left[\hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta; l) + \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta; l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) \right] \\
&+ \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta; l) + \hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta; l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) .
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) = \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) \left[\hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta; l) + \hat{\boldsymbol{\rho}}(\zeta; l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) \right] . \tag{3.25}$$

$$\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l) = [\hat{\tau}(\zeta; l) + \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l) \hat{\rho}(\zeta; l)] \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l). \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{R}}(w, \zeta; l) = \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta; l) \hat{\rho}(\zeta; l) \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l). \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{S}}_p^{+t}(w, \zeta; l) &= \hat{\mathbf{S}}_p^{+t}(w, \zeta; l) [\hat{\tau}(\zeta; l) + \hat{\rho}(\zeta; l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l)] \\ &+ \hat{\mathbf{S}}_p^+(\zeta; l) + \hat{\mathbf{S}}_p^-(\zeta; l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, w; l). \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{S}}_p^{-t}(\zeta, w; l) = [\hat{\mathbf{S}}_p^-(\zeta; l) + \hat{\mathbf{S}}_p^{+t}(w, \zeta; l) \hat{\rho}(\zeta; l)] \hat{\mathbf{T}}(\zeta, w; l). \quad (3.29)$$

Analogamente, partindo-se das Equações 3.4, obtém-se um segundo conjunto de 6 equações de Riccati para a camada de água entre o nível ζ e o fundo (b):

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{R}}(\zeta, b; l) &= \hat{\mathbf{R}}(\zeta, b; l) [\hat{\tau}(\zeta; l) + \hat{\rho}(\zeta; l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, b; l)] \\ &+ \hat{\rho}(\zeta; l) + \hat{\tau}(\zeta; l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, b; l). \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$-\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{T}}(b, \zeta; l) = \hat{\mathbf{T}}(b, \zeta; l) [\hat{\tau}(\zeta; l) + \hat{\rho}(\zeta; l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, b; l)]. \quad (3.31)$$

$$-\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{T}}(\zeta, b; l) = [\hat{\tau}(\zeta; l) + \hat{\mathbf{R}}(\zeta, b; l) \hat{\rho}(\zeta; l)] \hat{\mathbf{T}}(\zeta, b; l). \quad (3.32)$$

$$-\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{R}}(b, \zeta; l) = \hat{\mathbf{T}}(b, \zeta; l) \hat{\rho}(\zeta; l) \hat{\mathbf{T}}(\zeta, b; l). \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{S}}_p^{-t}(b, \zeta; l) &= \hat{\mathbf{S}}_p^{-t}(b, \zeta; l) [\hat{\tau}(\zeta; l) + \hat{\rho}(\zeta; l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, b; l)] \\ &+ \hat{\mathbf{S}}_p^-(\zeta; l) + \hat{\mathbf{S}}_p^+(\zeta; l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta, b; l). \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$-\frac{d}{d\zeta} \hat{\mathbf{S}}_p^{+t}(\zeta, b; l) = [\hat{\mathbf{S}}_p^+(\zeta; l) + \hat{\mathbf{S}}_p^{-t}(b, \zeta; l) \hat{\rho}(\zeta; l)] \hat{\mathbf{T}}(\zeta, b; l). \quad (3.35)$$

3.5 Considerações sobre a Integração das Equações de Riccati

A integração das equações diferenciais de Riccati para uma camada finita de água **desprovida de condições de contorno** fornece os operadores procurados a partir da transmitância local $\hat{\tau}$ e e da reflectâncias local $\hat{\rho}$, ambas previamente calculadas. Ao invés de resolver o problema diretamente, a metodologia de inserção invariante

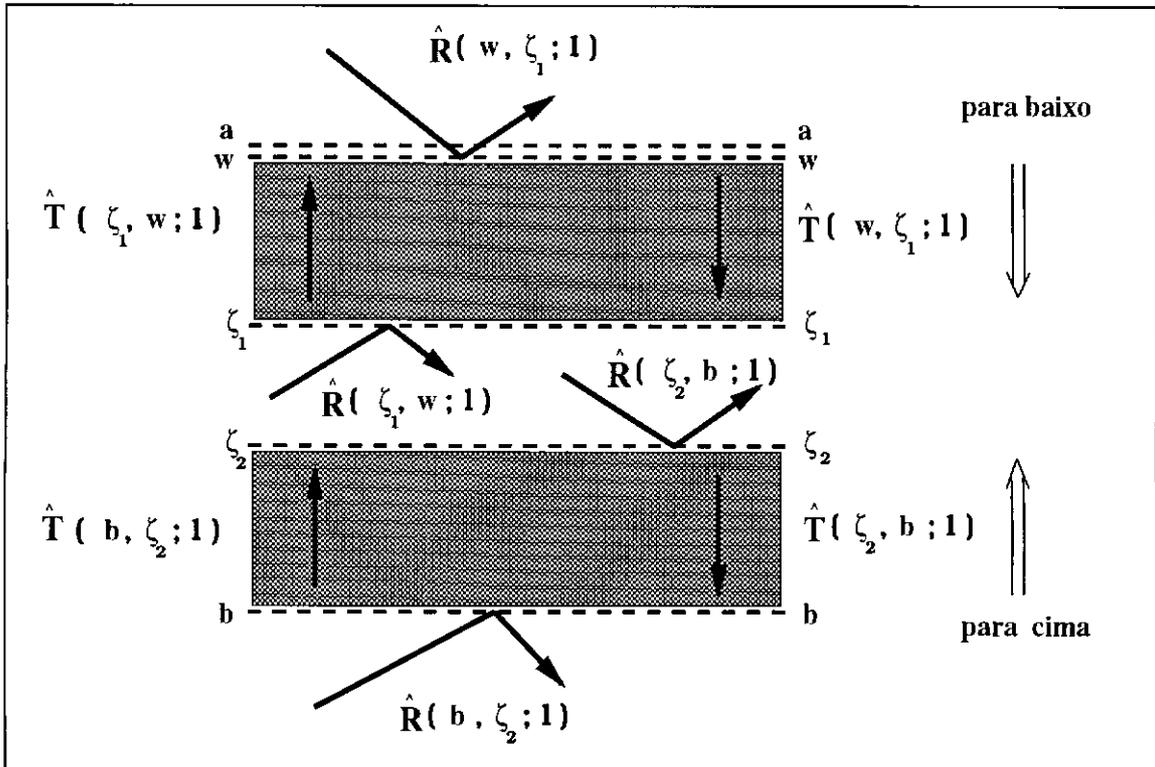


Fig. 3.2 - Operadores espectrais e domínio de integração para as equações de Riccati.

permite “construir” o corpo de água pela integração das equações de Riccati, inserindo camadas infinitesimais adjacentes de água. É necessário que os operadores $\hat{\tau}(\zeta; l)$ e $\hat{\rho}(\zeta; l)$ sejam funções contínuas da profundidade ótica ζ . Essas equações devem ser integradas separadamente para cada modo azimutal l .

A Figura 3.2 ilustra o sentido de integração utilizado para os dois conjuntos de equações, tendo sido esquematizados dois níveis diferentes (ζ_1 e ζ_2), para maior clareza: para cada nível ζ considerado, as integrações são feitas de w a $\zeta = \zeta_1$ (para baixo) e de b a $\zeta = \zeta_2$ (para cima) sendo, neste caso, $\zeta = \zeta_1 = \zeta_2$. As outras setas estão associadas aos operadores que aparecem nas equações de Riccati.

O primeiro conjunto de equações, Equações 3.24 - 3.29 é integrado de **cima para baixo**, a partir do nível w em direção aos níveis discretos ζ_k para os quais deseja-se a solução, usando-se como condições iniciais $\hat{T}(w, w; l) = \mathbf{I}_m$ e $\hat{R}(w, w; l) = \mathbf{0}_m$ as quais são intuitivas, fisicamente, pois uma camada “sem espessura” transmitiria tudo e não refletiria nada. Na presença de fontes, devem ser acrescentadas as condições iniciais correspondentes, ou seja, $\hat{S}_p^{+t} = \mathbf{0}_{1 \times m}$ e $\hat{S}_p^{-t} = \mathbf{0}_{1 \times m}$. Essas integrações fornecem, para cada nível ζ_k , os correspondentes operadores que embutem as propriedades da camada de água entre os níveis w e ζ_k .

O segundo conjunto de equações, Equações 3.30 - 3.35 é integrado de **baixo para**

cima, a partir do fundo b , em direção aos níveis ζ_k . Essas integrações fornecem, para cada nível ζ_k , os correspondentes operadores que embutem as propriedades da camada de água entre os níveis ζ_k e b . Note-se que, embora o nível b esteja associado ao fundo na presente dedução, nada impediria que representasse um nível de água qualquer acima do fundo, i.e., as integrações se refeririam a uma camada parcial entre a superfície e o nível b , não abrangendo toda a camada de água. Assim, supondo-se o fundo em $\zeta = b$, integra-se a Equação 3.30 para se achar $\hat{\mathbf{R}}(\zeta, b; l)$, atribuindo-se o valor inicial correspondente às características óticas do fundo. Comumente, considera-se um fundo Lambertiano, que reflete a luz difusamente, i.e., a luz é refletida igualmente em todas as direções, com intensidade proporcional a $\mu = \cos(\theta)$. As demais condições iniciais são similares àquelas do primeiro conjunto de equações.

Embora isso não tenha sido expresso nas equações diferenciais de Riccati, para maior generalidade, deve-se levar em conta que $\hat{\mathbf{R}}(\zeta, b; l) = \hat{\mathbf{R}}_p(\zeta, b; l)$, ou seja, este operador depende de p quando o nível inferior considerado corresponde ao fundo b . Isso torna necessário integrar-se a Equação 3.30 duas vezes, para $p = 1$ e $p = 2$. O mesmo ocorre com os termos relativos às fontes internas, $\hat{\mathbf{S}}_p^i$'s, sendo que o desacoplamento azimutal também continua válido para esses operadores.

Observam-se na mesma Figura 3.2 alguns dos operadores procurados. Na camada de água entre o nível imediatamente abaixo da superfície (w) e um nível ζ_1 , $\hat{\mathbf{T}}(\zeta_1, w; l)$ representa como a luz é transmitida para cima e $\hat{\mathbf{T}}(w, \zeta_1; l)$, para baixo. $\hat{\mathbf{R}}(w, \zeta_1; l)$ representa como a luz que incide de cima é refletida pela camada e $\hat{\mathbf{R}}(\zeta_1, w; l)$, o mesmo para a luz que incide de baixo. Analogamente, na camada de água entre o nível ζ_2 e o nível imediatamente acima do fundo (b), $\hat{\mathbf{T}}(b, \zeta_2; l)$ está associado à transmissão da luz para cima, $\hat{\mathbf{T}}(\zeta_2, b; l)$, à transmissão para baixo, enquanto que $\hat{\mathbf{R}}(b, \zeta_2; l)$ e $\hat{\mathbf{R}}(\zeta_2, b; l)$ mostram como a luz é refletida, incidindo de baixo e de cima, respectivamente.

A integração das equações diferenciais de Riccati pode ser efetuada, com eficiência e precisão, por meio de um algoritmo de Runge-Kutta de alta ordem, como no código Hydrolight. Tal algoritmo aparece na maioria das bibliotecas matemáticas disponíveis.

3.6 Operadores Compostos de Transmissão e Reflexão

Considerando-se as mesmas duas camadas de água, uma entre a superfície (w) e um nível intermediário qualquer ζ_k e outra entre o mesmo nível ζ_k e o fundo (b), a integração das equações diferenciais de Riccati permite obter operadores que expressam o comportamento ótico de cada uma dessas camadas, *isoladamente*. As condições de contorno tampouco estão incluídas, a não ser o valor correspondente às características óticas do fundo em b .

A presença de camadas adjacentes exige operadores mais completos, que incorporem sua influência, ou seja, operadores que, para a camada superior, levem em conta a

influência da inferior e vice-versa. Denominam-se estes operadores como operadores globais **compostos**, os quais apresentam 4 índices, sendo que os 3 primeiros se referem aos níveis que delimitam a camada considerada e a adjacente e o último se refere ao modo azimutal l . O primeiro e segundo índices especificam a camada considerada, enquanto que o segundo e terceiro índices definem a camada adjacente. Note-se ainda que o primeiro nível está associado à entrada e o segundo à saída da luz, nos operadores compostos de transmissão, enquanto que, para os operadores de reflexão, os níveis de entrada e saída coincidem nesse primeiro nível. Observe-se que todos estes operadores compostos dependem de p , à diferença dos operadores de 3 índices, dos quais somente os \hat{S}_p^t 's e $\hat{R}_p(\zeta, b; l)$ dependiam de p .

Assim, para um nível ζ intermediário qualquer e, considerando-se a camada superior (da superfície até ζ) *juntamente* com a inferior (de ζ até o fundo), pode-se escrever um balanço de energia para a luz descendente em ζ , em função da luz proveniente da superfície ($\hat{L}_p^+(w; l)$) e do fundo ($\hat{L}_p^-(b; l)$):

$$\hat{L}_p^+(\zeta_k; l) = \hat{L}_p^-(b; l) \hat{R}_p(b, \zeta_k, w; l) + \hat{L}_p^+(w; l) \hat{T}_p(w, \zeta_k, b; l) + \hat{S}_p(w, \zeta_k, b; l). \quad (3.36)$$

E outro, similar, para a luz ascendente em ζ :

$$\hat{L}_p^-(\zeta_k; l) = \hat{L}_p^-(b; l) \hat{T}_p(b, \zeta_k, w; l) + \hat{L}_p^+(w; l) \hat{R}_p(w, \zeta_k, b; l) + \hat{S}_p(b, \zeta_k, w; l). \quad (3.37)$$

As expressões acima são denominadas *regras de inserção invariante* para a camada de água considerada, entre w e b . Nota-se que, para calcular as amplitudes de radiância, ascendente ou descendente, no nível genérico ζ_k deve-se levar em conta tanto a luz proveniente da superfície como a do fundo, ou seja, deve-se considerar tanto a camada superior quanto a inferior da água.

Apresenta-se, a seguir, a dedução dos operadores $\hat{T}_p(w, \zeta_k, b; l)$ e $\hat{R}_p(w, \zeta_k, b; l)$. Não havendo luz proveniente do fundo ($\hat{L}_p^-(b; l) = 0$), torna-se desnecessário o cálculo de $\hat{R}_p(b, \zeta_k, w; l)$ e $\hat{T}_p(b, \zeta_k, w; l)$, cujas deduções seriam similares, e as equações acima reduzem-se a:

$$\hat{L}_p^+(\zeta_k; l) = \hat{L}_p^+(w; l) \hat{T}_p(w, \zeta_k, b; l) + \hat{S}_p(w, \zeta_k, b; l). \quad (3.38)$$

$$\hat{L}_p^-(\zeta_k; l) = \hat{L}_p^+(w; l) \hat{R}_p(w, \zeta_k, b; l) + \hat{S}_p(b, \zeta_k, w; l). \quad (3.39)$$

Esses operadores de 4 índices podem ser deduzidos facilmente a partir dos operadores globais de 3 índices fornecidos pela integração das equações de Riccati, conforme mostrado a seguir. Tome-se primeiramente $\hat{T}_p(w, \zeta_k, b; l)$, que expressa a parcela de luz incidente na superfície que é transmitida através da camada entre w e ζ_k , no sentido descendente, levando em conta a presença da camada inferior entre ζ_k e b .

Nos termos relativos às fontes internas omitiu-se o superscrito t por julgar que a presença dos 4 índices seria suficiente para não confundí-los com os termos relativos às fontes internas das equações de interação local 2.55.

$\hat{T}_p(w, \zeta_k, b; l)$ é dado pela soma de $\hat{T}(w, \zeta_k; l)$, que expressa a transmissão através da camada *sem* condições de contorno, *mais* uma parcela referente à luz que seria refletida para cima na interface pela camada de baixo ($\hat{R}_p(\zeta_k, b; l)$), que é re-refletida para baixo pela própria camada considerada ($\hat{R}(\zeta_k, w; l)$). Essas reflexões recíprocas são múltiplas e sucedem-se **infinitamente**, de forma que se pode escrever:

$$\begin{aligned} \hat{T}_p(w, \zeta_k, b; l) = \hat{T}(w, \zeta_k; l) [& \mathbf{I} + \hat{R}_p(\zeta_k, b; l) \hat{R}(\zeta_k, w; l) \\ & + [\hat{R}_p(\zeta_k, b; l) \hat{R}(\zeta_k, w; l)]^2 + \\ & + [\hat{R}_p(\zeta_k, b; l) \hat{R}(\zeta_k, w; l)]^3 + \dots] . \end{aligned} \quad (3.40)$$

A Figura 3.3 ilustra as três primeiras sequências de transmissões e reflexões do espalhamento múltiplo para uma amplitude espectral de radiância incidente $\hat{L}_p^+(w; l)$ no nível w resultando na amplitude $\hat{L}_p^+(\zeta_k; l)$ no nível k . Essas três sequências correspondem exatamente aos três primeiros termos da expressão acima para o operador $\hat{T}_p(w, \zeta_k, b; l)$.

Essa série infinita pode ser representada por:

$$\hat{T}_p(w, \zeta_k, b; l) \equiv \hat{T}(w, \zeta_k; l) [\mathbf{I} - \hat{R}_p(\zeta_k, b; l) \hat{R}(\zeta_k, w; l)]^{-1} . \quad (3.41)$$

Conforme observado em (6), essa série infinita representa todas as ordens de *espalhamento múltiplo*. É importante observar que *todos* os operadores na expressão acima tem valor compreendido entre 0 e 1, inclusive $\hat{T}_p(w, \zeta_k, b; l)$, apesar de o termo entre colchetes no segundo membro ser maior que 1. Caso contrário haveria uma amplitude de radiância em ζ_k maior que a incidente na superfície, o que seria fisicamente absurdo.

O outro operador necessário, $\hat{R}_p(w, \zeta_k, b; l)$, que expressa como a luz incidente para baixo é refletida pela camada de água entre w e ζ_k , sujeita à existência da camada adjacente entre ζ_k e b , é simplesmente dado por:

$$\begin{aligned} \hat{R}_p(w, \zeta_k, b; l) &= \hat{T}_p(w, \zeta_k, b; l) \hat{R}_p(\zeta_k, b; l) , & \text{ou seja,} \\ \hat{R}_p(w, \zeta_k, b; l) &= \hat{T}(w, \zeta_k; l) [\mathbf{I} - \hat{R}_p(\zeta_k, b; l) \hat{R}(\zeta_k, w; l)]^{-1} \hat{R}_p(\zeta_k, b; l) . \end{aligned} \quad (3.42)$$

As expressões para os termos referentes às fontes internas nas Equações 3.36 e 3.37 podem ser deduzidas de forma análoga:

$$\begin{aligned} \hat{S}_p(w, \zeta_k, b; l) \equiv & [\hat{S}_p^{+t}(w, \zeta_k; l) + \hat{S}_p^{-t}(b, \zeta_k; l) \hat{R}(\zeta_k, w; l)] \times \\ & \times [\mathbf{I} - \hat{R}_p(\zeta_k, b; l) \hat{R}(\zeta_k, w; l)]^{-1} . \end{aligned} \quad (3.43)$$

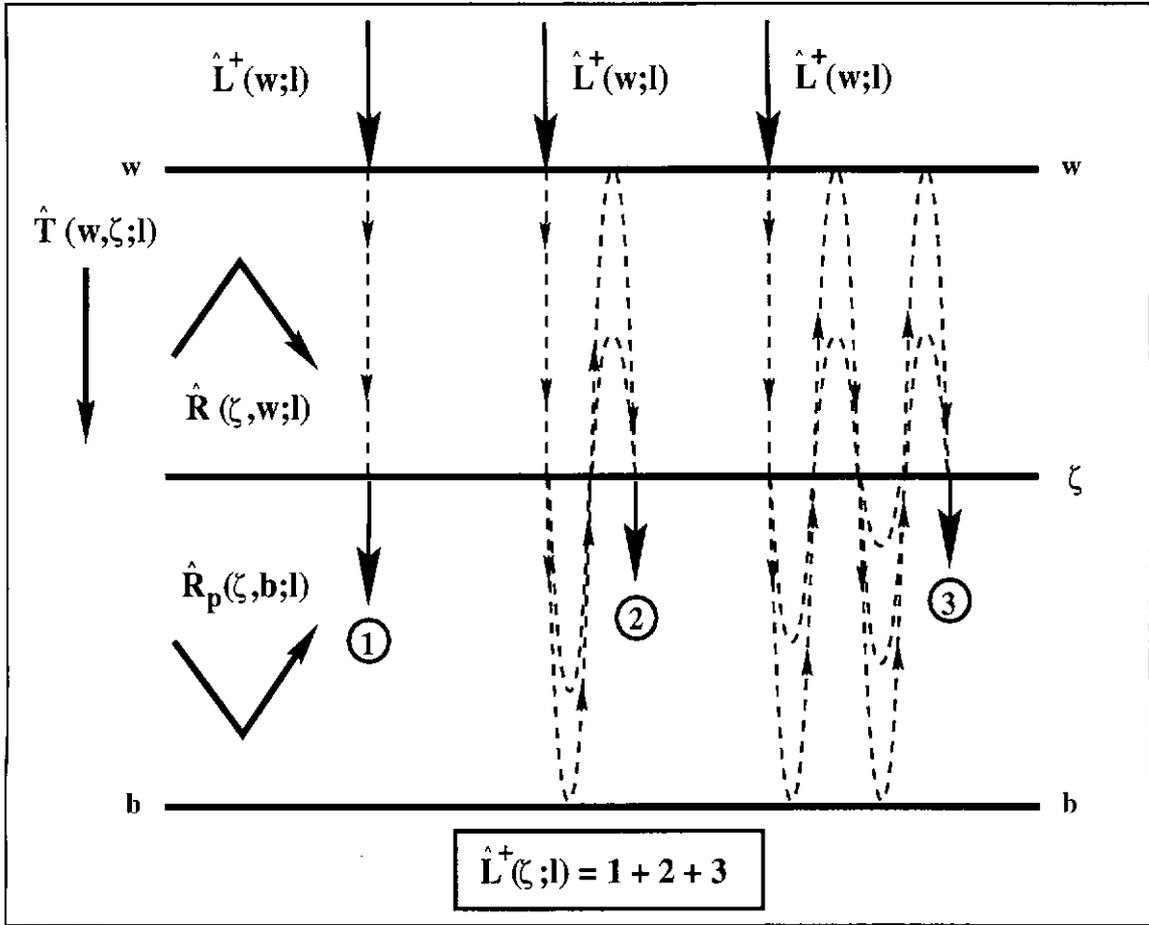


Fig. 3.3 - Vista esquemática ilustrando os operadores envolvidos no cálculo do operador composto $\hat{T}_p(w, \zeta_k, b; l)$ e a amplitude espectral de radiância resultante para baixo como soma dos três primeiros termos da série relativa ao espalhamento múltiplo.

Ou seja, o termo fonte $\hat{S}_p(w, \zeta_k, b; l)$, que expressa a contribuição das fontes internas no nível ζ_k no sentido descendente, i.e. sentido $w \rightarrow \zeta_k$, depende da soma de $\hat{S}_p^{+t}(w, \zeta_k; l)$ (contribuições dos termos fontes da camada superior no sentido descendente com $[\hat{S}_p^{-t}(b, \zeta_k; l) \hat{R}(\zeta_k, w; l)]$. Esta segunda parcela refere-se às contribuições dos termos fontes da camada inferior no sentido ascendente ($\hat{S}_p^{-t}(b, \zeta_k; l)$) mas sendo refletidas para baixo conforme $\hat{R}(\zeta_k, w; l)$. Utiliza-se o mesmo raciocínio para $\hat{S}_p(b, \zeta_k, w; l)$, que expressa a contribuição das fontes internas no nível ζ_k no sentido ascendente (sentido $b \rightarrow \zeta_k$):

$$\hat{S}_p(b, \zeta_k, w; l) \equiv [\hat{S}_p^{-t}(b, \zeta_k; l) + \hat{S}_p^{+t}(w, \zeta_k; l) \hat{R}_p(\zeta_k, b; l)] \times \\ \times [\mathbf{I} - \hat{R}(\zeta_k, w; l) \hat{R}_p(\zeta_k, b; l)]^{-1}. \quad (3.44)$$

Curiosamente, podem-se obter estes mesmo operadores compostos partindo-se dire-

tamente das equações espectrais de interação global, Equações 3.3 e 3.4. Deseja-se encontrar expressões para $\hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta_k; l)$ e $\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta_k; l)$, ou seja, as amplitudes espectrais de radiância no nível genérico ζ_k considerado. Considera-se, novamente, que não haja fontes internas.

Expandindo-se a Equação 3.3 obtém-se:

$$\hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta_k; l) = \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta_k; l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta_k, w; l) + \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta_k; l). \quad (3.45)$$

E, similarmente, com a Equação 3.4:

$$\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta_k; l) = \hat{\mathbf{L}}_p^-(b; l) \hat{\mathbf{T}}(b, \zeta_k; l) + \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta_k; l) \hat{\mathbf{R}}_p(\zeta_k, b; l). \quad (3.46)$$

Considerando-se nula a luz proveniente do fundo, $\hat{\mathbf{L}}_p^-(b; l) = 0$, e substituindo-se a expressão de $[\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta_k; l)]$ da equação acima na equação que a antecede, vem:

$$\hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta_k; l) = [\hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta_k; l) \hat{\mathbf{R}}_p(\zeta_k, b; l)] \hat{\mathbf{R}}(\zeta_k, w; l) + \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta_k; l). \quad (3.47)$$

Rearranjando-se os termos:

$$\hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta_k; l) = \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \{ \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta_k; l) [1 - \hat{\mathbf{R}}_p(\zeta_k, b; l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta_k, w; l)]^{-1} \}. \quad (3.48)$$

O termo entre chaves, no segundo membro, pode ser identificado como sendo $\hat{\mathbf{T}}_p(w, \zeta_k, b; l)$ (vide Equação 3.41). Substituindo-se de volta a expressão obtida para $\hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta_k; l)$ na expressão de $\hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta_k; l)$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta_k; l) &= \hat{\mathbf{L}}_p^+(\zeta_k; l) \hat{\mathbf{R}}_p(\zeta_k, b; l) \\ \hat{\mathbf{L}}_p^-(\zeta_k; l) &= \hat{\mathbf{L}}_p^+(w; l) \{ \hat{\mathbf{T}}(w, \zeta_k; l) [1 - \hat{\mathbf{R}}_p(\zeta_k, b; l) \hat{\mathbf{R}}(\zeta_k, w; l)]^{-1} \hat{\mathbf{R}}_p(\zeta_k, b; l) \}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Analogamente, o termo entre chaves, no segundo termo, pode ser identificado como sendo $\hat{\mathbf{R}}_p(w, \zeta_k, b; l)$ (vide Equação 3.42). Assim, no caso de não haver luz proveniente do fundo nem tampouco fontes internas, apenas 4 equações de Riccati precisariam ser integradas para o cálculo das amplitudes de radiância num nível genérico ζ_k : $\hat{\mathbf{T}}(w, \zeta_k; l)$, $\hat{\mathbf{R}}(\zeta_k, w; l)$ e $\hat{\mathbf{R}}_p(\zeta_k, b; l)$ (duas vezes, para $p = 1, 2$).

3.7 Operadores Compostos para a Interface Ar-água

As radiâncias em qualquer nível ζ_k podem ser obtidas pelas Equações 3.38 e 3.39, uma vez obtidos todos os operadores, uma vez que seja conhecida a amplitude de radiância incidente na água, $\hat{\mathbf{L}}_p^+(w)$ (*imediatamente abaixo* da interface ar-água).

Assim, é preciso calcular $\hat{\mathbf{L}}_p^+(w)$ a partir de $\hat{\mathbf{L}}_p^+(a; l)$, a amplitude de radiância atmosférica incidente na superfície, ou seja, *imediatamente acima* da interface ar-água,

a qual pode ser modelada de diversas formas. Denominam-se $\hat{\mathbf{t}}_p(a, w)$ e $\hat{\mathbf{t}}_p(w, a)$, os operadores que expressam a transmitância espectral da interface para baixo e para cima, respectivamente, e $\hat{\mathbf{r}}_p(w, a)$ e $\hat{\mathbf{r}}_p(a, w)$ os operadores que expressam sua reflectância espectral nesses mesmos sentidos. A Figura 3.4 ilustra dois desses operadores: $\hat{\mathbf{t}}_p(a, w)$ fornece a parcela de luz descendente transmitida através da interface, do nível a ao nível w , sem leva em conta a camada de água entre w e b , enquanto que $\hat{\mathbf{r}}_p(w, a)$, a parcela de luz ascendente refletida para baixo pela mesma interface, entre w e a .

Esses operadores foram calculados em (6) e (7) para uma superfície sujeita a ondas na presença de vento, através de um método de Monte Carlo. Em função da anisotropia azimutal, decorrente do modelamento adotado para essa interface, esses operadores não podem ser desacoplados para os $(n + 1)$ modos azimutais.

Dada uma amplitude de radiância atmosférica ao nível da água, $\hat{\mathbf{L}}_p^+(a)$, e supondo-se válido o mesmo princípio da linearidade para a interface ar-água ($a - w$), podem-se escrever duas novas *regras de inserção invariante* para esta interface, as quais estabelecem um balanço de energia para a luz descendente em w :

$$\hat{\mathbf{L}}_p^+(w) = \hat{\mathbf{L}}_p^-(b) \hat{\mathbf{R}}_p(b, w, a) + \hat{\mathbf{L}}_p^+(a) \hat{\mathbf{T}}_p(a, w, b) + \hat{\mathbf{S}}_p(a, w, b). \quad (3.50)$$

E para a luz ascendente, também em w :

$$\hat{\mathbf{L}}_p^-(w) = \hat{\mathbf{L}}_p^-(b) \hat{\mathbf{T}}_p(b, w, a) + \hat{\mathbf{L}}_p^+(a) \hat{\mathbf{R}}_p(a, w, b) + \hat{\mathbf{S}}_p(b, w, a). \quad (3.51)$$

Nota-se que agora, nestas regras, os modos l não estão desacoplados, e em vez de $(n + 1)$ equações nas quais os termos tem dimensão $m \times 1$ para a luz ascendente e outras tantas para a luz descendente, passa-se a ter duas equações, em que os termos apresentam dimensão $(n + 1) \times m$.

Não havendo luz proveniente do fundo, estas regras reduzem-se a:

$$\hat{\mathbf{L}}_p^+(w) = \hat{\mathbf{L}}_p^+(a) \hat{\mathbf{T}}_p(a, w, b) + \hat{\mathbf{S}}_p(a, w, b). \quad (3.52)$$

$$\hat{\mathbf{L}}_p^-(w) = \hat{\mathbf{L}}_p^+(a) \hat{\mathbf{R}}_p(a, w, b) + \hat{\mathbf{S}}_p(b, w, a). \quad (3.53)$$

O operador $\hat{\mathbf{T}}_p(a, w, b)$ expressa a transmissão da luz através da interface ar-água, *na presença* da camada de água $w - b$, enquanto que $\hat{\mathbf{R}}_p(a, w, b)$ expressa a reflexão da luz pela mesma interface na presença da mesma camada adjacente.

Os operadores compostos podem ser obtidos em deduções análogas às Equações 3.41 e 3.42, sendo também ilustrados na Figura 3.4:

$$\hat{\mathbf{T}}_p(a, w, b) \equiv \hat{\mathbf{t}}_p(a, w) [\mathbf{I} - \hat{\mathbf{R}}_p(w, b) \hat{\mathbf{r}}_p(w, a)]^{-1}. \quad (3.54)$$

Como anteriormente, $\hat{\mathbf{R}}_p(w, b)$ expressa a reflectância espectral de *toda* a camada de água $w - b$ sem levar em conta a interface ar-água. E também:

$$\hat{\mathbf{R}}_p(a, w, b) \equiv \hat{\mathbf{r}}_p(a, w) [\mathbf{I} - \hat{\mathbf{R}}_p(w, b) \hat{\mathbf{r}}_p(w, a)]^{-1} \hat{\mathbf{R}}_p(w, b). \quad (3.55)$$

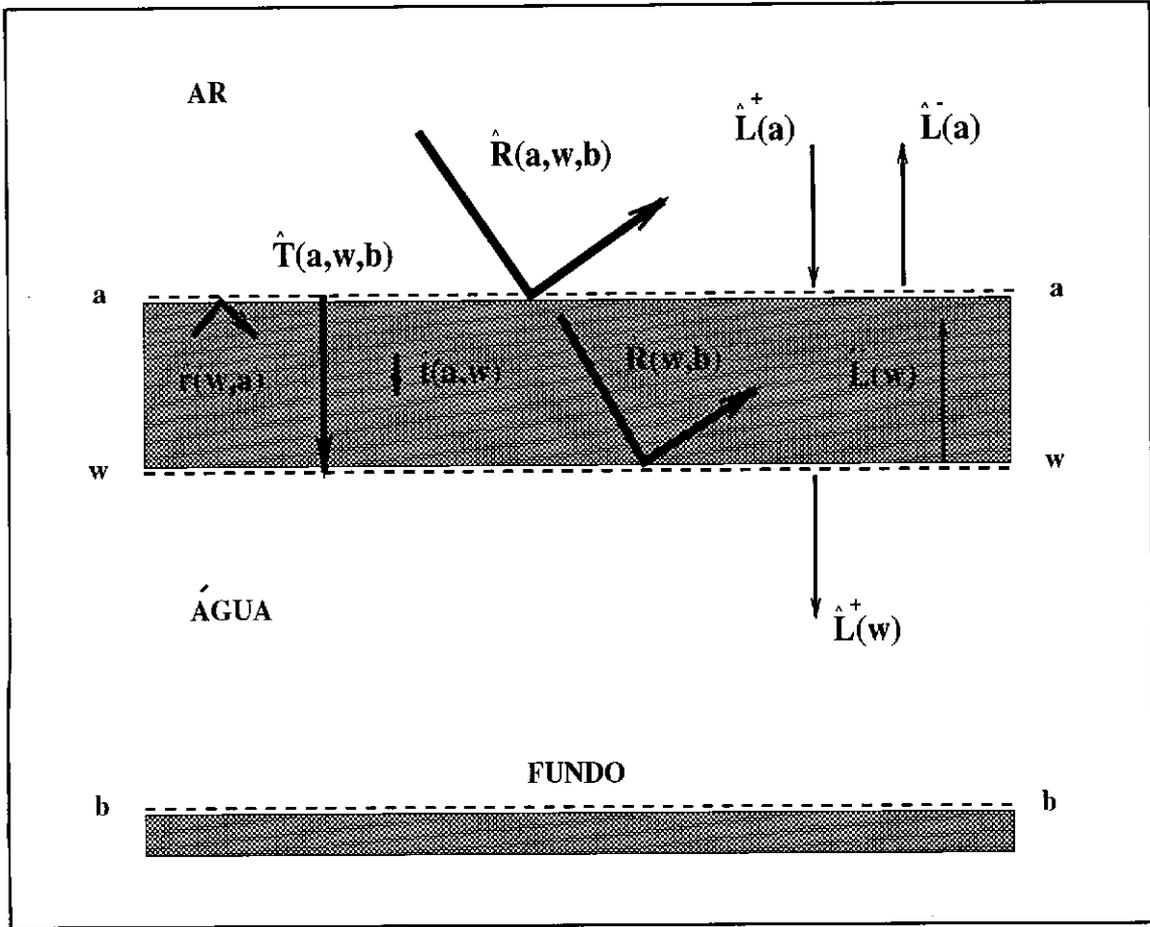


Fig. 3.4 - Operadores espectrais \hat{R} e \hat{T} e amplitudes espectrais de radiâncias incidentes e emergentes \hat{L} para a camada genérica com interface ar-água.

O termo fonte $\hat{S}_p(a, w, b)$ é expresso de maneira similar, e deve ser interpretado como sendo a parcela de amplitude de radiância no sentido descendente, devida a possíveis fontes na interface, dadas por $\hat{S}_p^{+t}(a, w)$, e àquelas originadas da camada $w - b$ subjacente, dadas por $\hat{S}_p^{-t}(b, w)$, refletidas para baixo por $\hat{r}_p(w, a)$.

$$\hat{S}_p(a, w, b) \equiv \left[\hat{S}_p^{+t}(a, w) + \hat{S}_p^{-t}(b, w) \hat{r}_p(w, a) \right] \left[\mathbf{I} - \hat{R}_p(w, b) \hat{r}_p(w, a) \right]^{-1}. \quad (3.56)$$

Como não há fontes na interface $a - w$, $\hat{S}_p^{+t}(a, w) = 0$. A expressão para $\hat{S}_p(b, w, a)$ é análoga:

$$\hat{S}_p(b, w, a) \equiv \left[\hat{S}_p^{-t}(b, w) + \hat{S}_p^{+t}(a, w) \hat{R}_p(w, b) \right] \left[\mathbf{I} - \hat{r}_p(w, a) \hat{R}_p(w, b) \right]^{-1}. \quad (3.57)$$

3.8 Sequência de Etapas na Resolução por Inserção Invariante

Pode-se resumir a metodologia de inserção invariante exposta numa sequência de etapas principais. Parte-se da função de fase de espalhamento *discretizada* conforme a discretização polar e azimutal escolhida. Deve-se calcular também os operadores relativos á interface ar-água, por exemplo, através de um método de Monte Carlo. Escolhe-se um conjunto de profundidades ζ_k nas quais se deseja obter as radiâncias. Basicamente a metodologia permite obter os operadores espectrais para esse conjunto de profundidades escolhidas e, a partir destes, as amplitudes de radiância espectrais que levam às radiâncias. As etapas, exemplificadas para o caso de não haver luz proveniente do fundo, são as seguintes:

- calculam-se as matrizes $\hat{\tau}$ e $\hat{\rho}$, expressas pelas Equações 2.46, 2.47, 2.48 e 2.49;
- calculam-se os operadores espectrais globais para os níveis ζ_k desejados, pela integração das equações de Riccati, Equações 3.24 - 3.35;
- calculam-se, pelas definições dadas pelas Equações 3.41, 3.42, 3.43 e 3.44 os operadores compostos para a camada de água;
- calculam-se, pelas definições dadas pelas Equações 3.54, 3.55, 3.56 e 3.57 os operadores compostos para a interface ar-água;
- usa-se a regra de inserção invariante dada pela Equação 3.50 para se achar a amplitude de radiância incidente na água, $\hat{L}_p^+(w)$, a partir da amplitude de radiância atmosférica $\hat{L}_p^+(a)$;
- as regras, dadas pelas Equações 3.36 e 3.37, fornecem então as amplitudes de radiância $\hat{L}_p(\zeta_k; l)$ para cada nível ζ_k e cada modo azimutal l ;
- calcula-se, pela regra dada pela Equação 3.51, a amplitude de radiância emergente da água $\hat{L}_p^-(w)$;
- finalmente, a partir das amplitudes espectrais de radiâncias, calculam-se as radiâncias (*não-espectrais*), a partir da Equação 2.27;

Note-se que os operadores dependem da discretização assumida, bem como da função de fase, mas a mudança da luz atmosférica incidente ou do estado da interface ar-água não implica em recalculá-los.

3.9 Vantagens da Metodologia de Inserção Invariante

Em trabalho relativamente recente (5), foi comparada a metodologia de inserção invariante com alguns métodos de Monte Carlo e um método de ordenadas discretas, aplicados a diversos problemas padrão de transferência radiativa em ótica

hidrológica. Foram analisados a precisão dos resultados e o tempo de execução, mostrando que a metodologia em questão apresenta um desempenho computacional competitivo em relação às demais.

Podem-se citar as seguintes vantagens da metodologia de inserção invariante, algumas das quais levam também, indiretamente, a um menor tempo de processamento global:

- modularidade relativa ao cálculo de operadores característicos de camadas selecionadas do meio, através da integração das equações diferenciais de Riccati, independentemente das condições de contorno;
- modularidade relativa à incorporação de camadas adjacentes àquelas do meio considerado, como a camada relativa à interface ar-água, cujos operadores podem ser calculados eventualmente por outra metodologia qualquer;
- novas simulações referentes a diferentes condições de luz incidente não exigem o recálculo desses operadores, que implicaria em reintegrar as equações de Riccati;
- a parte mais intensiva computacionalmente envolve a integração das equações de Riccati, para a qual existem muitas rotinas disponíveis em bibliotecas matemáticas;
- a inserção invariante tem uma abordagem intuitivamente física, expressa inclusive pelos operadores característicos calculados;

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) Campos Velho, H.F.; Claeysen, J.C.R. A non-modal approach for time-integration of a barotropic limited area model. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 33, n. 9, p. 1-13, 1997.
- (2) Case, K.M.; Zweifel, P.F. *Linear transport theory*. New York: Addison-Wesley Publishing, 1967.
- (3) Claeysen, J.C.R. On predicting the response of non-conservative linear vibrating systems by using dynamical matrix solution. *Journal of Sound and Vibration*, v. 140, n. 1, p. 73-84, 1990.
- (4) Mobley, C.D. A numerical model for the computation of radiance distributions in natural waters with wind-roughened surfaces. *Limnology and Oceanography*, v. 34, n. 8, p. 1473-1483, 1989.
- (5) Mobley, C.D.; Gentili, B.; Gordon, H.R.; Jin, Z.; Kattawar, G.W.; Morel, A.; Reinersman, P.; Stammes, K.; Stavn, R.H. Comparison of numerical models for computing underwater light fields. *Applied Optics*, v. 32, n. 36, p. 7484-7504, 1993.
- (6) Mobley, C.D. *Light and water - radiative transfer in natural waters*. San Diego: Academic Press, 1994.
- (7) Mobley, C.D. *Hydrolight 3.0 user's guide*. Menlo Park: SRI International, 1995.
- (8) Preisendorfer, R.W. Generalized invariant imbedding relation. *Proceedings of the National Academy of Science*, v. 47, n. 4, p. 591-594, 1961.
- (9) Preisendorfer, R.W. *Hydrologic optics: imbeddings*. Springfield, 1976, v. 4. (NTIS PB-259 796/1ST).
- (10) Preisendorfer, R.W.; Mobley, C.D. Theory of fluorescent irradiance fields in natural water. *Journal of Geophysics Research*, v. 93, n. D0, p. 10831-10855, 1988.
- (11) Stephany, S.; Campos Velho, H.F.; Ramos, F.M.; Mobley, C.D. Estimating absorption and scattering coefficients and internal source term in a radiative transfer process. [CD-ROM]. In: Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 14., 1997. *Anais*. COBEM, 1997.

- (12) Stephany, S.; Ramos, F.M.; Campos Velho, H.F.; Mobley, C.D. Reconstruction of bioluminescence sources in natural waters. In: Atluri, S.N.; Yagawa, G., ed. *Advances in computational engineering science*. USA: Tech Science Press, 1997a, p. 447-452. International Conference on Computational Engineering Science, San Jose, Costa Rica, 1997.
- (13) Stephany, S.; Ramos, F.M.; Campos Velho, H.F.; Mobley, C.D. Estimation of inherent optical properties for natural waters. In: Italian-Latinamerican Conference on Applied and Industrial Mathematics, 2., Roma, 1997. *Proceedings*. Roma, Società Italiana di Matematica Applicata e Industriale, 1997b, p. 230. (Quaderno CNR/GNFM n. 53).
- (14) Stephany, S.; Ramos, F.M.; Campos Velho, H.F.; Mobley, C.D. Use of an adaptative regularization technique in a hydrologic optics inverse problem. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 20., Gramado, Brasil, 1997. *Resumos*. Gramado, Brasil, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 1997c, p. 602-603.
- (15) Stephany, S. *Reconstrução de propriedades óticas e de fontes de bioluminescência em águas naturais*. p. 122. (INPE-6968-TDI/656). Tese (Doutoramento em Computação Aplicada) - São José dos Campos, INPE, 1998.
- (16) Stephany S., Ramos F.M., Campos Velho H.F., Mobley C.D.: A methodology for internal light sources estimation. *Computer Modeling and Simulation in Engineering (CMSE)*, v. 3, n. 3, p. 161-165, 1998.
- (17) Stephany, S.; Campos Velho, H.F.; Ramos, F.M.; Mobley, C.D. Identification of inherent optical properties and bioluminescence source term in a hydrologic optics problem. Aceito para publicação no *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*.