

Referência Completa

Tipo da Referência Conference Proceedings

Repositório sid.inpe.br/iris@1905/2005/07.29.22.37.36

Metadados sid.inpe.br/iris@1905/2005/07.29.22.37.44

Site mtc-m05.sid.inpe.br

Rótulo 9281

Chave Secundária INPE-8203-PRE/3998

Chave de Citação RodriguesSouz:1996:EqSiPr

Autor 1 Rodrigues, Daniel Levy de Figueiredo
2 Souza, Marcelo Lopes de Oliveira e

Grupo 1 ETE-INPE-MCT-BR

Título Equacionamento e simplificações do problema geral da transferência orbital 

Nome do Evento Cóloquio Brasileiro de Dinâmica Orbital, 8

Ano 1996

Data nov. 1996

Localização do Evento Santos, BR

Palavras-Chave ENGENHARIA E TECNOLOGIA ESPACIAL, equacionamento, equacoes, transferencia de órbita, simplificação, problemas, equations, simplification, problems.

Resumo Neste trabalho apresentamos o equacionamento do problema geral da transferência orbital considerando aspectos estruturais e dinâmicos normalmente não apresentados na literatura. Dentre outros, estes aspectos envolvem: 1) a rigidez ou a flexibilidade do veículo; 2) a constância ou a variação da sua massa; 3) as características do sistema propulsivo (a propulsão impulsiva versus a propulsão não impulsiva; a lei de controle do vetor de empuxo; torques perturbadores originados pelo não alinhamento da força propulsiva com o centro de massa; magnitude variável do empuxo durante a transferência, etc.). Apresentamos também as simplificações mais frequentemente encontradas na literatura. Concluímos com uma visão ampla das equações usadas por Rodrigues[1] e por outros[2-6]. **ABSTRACT:** In this work we present the equations of the general problem of orbit transfers considering structural and dynamic aspects normally not presented in the literature. Among others these aspects involve: 1) the rigidity or the flexibility of the vehicle; 2) the constance or the variation of its mass, 3) characteristics of the propulsive system (impulsive versus not impulsive thrust; control law of the thrust vector; disturbing torques due to the misalignment of the propulsive force with respect to the center of mass; variable thrust magnitude during the transfer, etc.). We also present the simplifications more frequently found in the literature. We conclude with a broad vision of the equations used by Rodrigues [1] and by others [2-6].

Idioma Pt

Tipo Secundário PRE CN

Area ETES

Última Atualização dos Metadados 2014:09.29.15.13.42 sid.inpe.br/banon/2001/04.03.15.36 administrator {D 1996}

Estágio do Documento concluído

e-Mail (login) marciana

Grupo de Usuários administrator

Visibilidade shown

Transferível 1

Tipo do Conteúdo External Contribution

Unidade Imediatamente Superior 8JMKD3MGPCW/3EUUDJE

Conteúdo da Pasta source não têm arquivos

Conteúdo da Pasta agreement não têm arquivos

Histórico 2014-09-29 15:13:42 :: administrator -> marciana :: 1996

Campos Vazios accessionnumber affiliation archivingpolicy archivist booktitle callnumber copyholder copyright creatorhistory descriptionlevel dissemination documentstage doi e-mailaddress edition editor electronicmailaddress format isbn issn lineage mark mirrorrepository nextedition notes numberoffiles numberofvolumes organization pages parameterlist parentrepositories previousedition progress project publisher publisheraddress readergroup readergroup readpermission resumeid rightsholder secondarydate secondarymark serieseditor session shorttitle size sponsor subject targetfile tertiarymark tertiarytype type url versiontype volume

Data de Acesso 10 set. 2015

atualizar

EQUACIONAMENTO E SIMPLIFICAÇÕES DO PROBLEMA GERAL DA TRANSFERÊNCIA ORBITAL

DANIEL LEVY DE FIGUEIREDO RODRIGUES

Instituto de Ciência e Tecnologia -ICT
Brasília, Distrito Federal, Brasil

MARCELO LOPES DE OLIVEIRA E SOUZA

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais-INPE
Av. dos Astronautas, 1758 - CP 515
12227-010, São José dos Campos, São Paulo, Brasil
Tel: 012-3256201, Fax: 012-3256226, E-Mail: MARCELO@DEM.INPE.BR

RESUMO

Neste trabalho apresentamos o equacionamento do problema geral da transferência orbital considerando aspectos estruturais e dinâmicos normalmente não apresentados na literatura. Dentre outros, estes aspectos envolvem: 1) a rigidez ou a flexibilidade do veículo; 2) a constância ou a variação da sua massa; 3) as características do sistema propulsivo (a propulsão impulsiva versus a propulsão não impulsiva; a lei de controle do vetor de empuxo; torques perturbadores originados pelo não alinhamento da força propulsiva com o centro de massa; magnitude variável do empuxo durante a transferência, etc.). Apresentamos também as simplificações mais frequentemente encontradas na literatura. Concluimos com uma visão ampla das equações usadas por Rodrigues[1] e por outros[2-6].

ABSTRACT

In this work we present the equations of the general problem of orbit transfers considering structural and dynamic aspects normally not presented in the literature. Among others these aspects involve: 1) the rigidity or the flexibility of the vehicle; 2) the constance or the variation of its mass; 3) characteristics of the propulsive system (impulsive versus not impulsive thrust; control law of the thrust vector; disturbing torques due to the misalignment of the propulsive force with respect to the center of mass; variable thrust magnitude during the transfer, etc.). We also present the simplifications more frequently found in the literature. We conclude with a broad vision of the equations used by Rodrigues [1] and by others [2-6].

REFERÊNCIAS/REFERENCES

- 1) Rodrigues, D. L. F. Análise Dinâmica da Transferência Orbital. S. José dos Campos, SP, INPE, 1991 (Dissertação de Mestrado. INPE-5352-TDI/461).
- 2) De Brum, A. G. V. Correção Orbital de um Satélite Utilizando Dispositivo de Alto Empuxo. S. José dos Campos, SP, INPE, 1996 (Monografia de Curso. INPE-5906-NTC/322).
- 3) Rocco, E. M. Transferências Orbitais Impulsivas com Limite de Tempo. S. José dos Campos, SP, INPE, 1996 (Proposta de Dissertação de Mestrado).
- 4) Santos Paulo, M. M. N. Estudo da Influência dos Erros dos Propulsores em Manobras Orbitais Tridimensionais. S. José dos Campos, SP, INPE, 1996 (Proposta de Dissertação de Mestrado).
- 5) Schulz, W. Estudo de Manobras Espaciais para Satélites em Órbita Congelada. S. José dos Campos, SP, INPE, 1996 (Proposta de Dissertação de Mestrado).
- 6) De Jesus, A. D. C. Otimização de Manobras Orbitais com Propulsão Finita Sujeita a Perturbações na Dinâmica e Não Idealidade dos Propulsores. S. José dos Campos, SP, INPE, 1996 (Proposta de Tese de Doutorado).

1. EQUACIONAMENTO E SIMPLIFICAÇÕES DO PROBLEMA GERAL DA TRANSFERÊNCIA ORBITAL

DANIEL LEVY DE FIGUEIREDO RODRIGUES

Instituto de Ciência e Tecnologia -ICT
Brasília, Distrito Federal, Brasil

MARCELO LOPES DE OLIVEIRA E SOUZA

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais-INPE
Av. dos Astronautas, 1758 - CP 515
12227-010, São José dos Campos, São Paulo, Brasil
Tel: 012-3256201, Fax: 012-3256226, E-Mail: MARCELO@DEM.INPE.BR

2. RESUMO

Neste trabalho apresentamos o equacionamento do problema geral da transferência orbital considerando aspectos estruturais e dinâmicos normalmente não apresentados na literatura. Dentre outros, estes aspectos envolvem: 1) a rigidez ou a flexibilidade do veículo; 2) a constância ou a variação da sua massa; 3) as características do sistema propulsivo (a propulsão impulsiva versus a propulsão não impulsiva; a lei de controle do vetor de empuxo; torques perturbadores originados pelo não alinhamento da força propulsiva com o centro de massa; magnitude variável do empuxo durante a transferência, etc.). Apresentamos também as simplificações mais frequentemente encontradas na literatura. Concluímos com uma visão ampla das equações usadas por Rodrigues[1] e por outros[2-6].

3.1 EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA GERAL

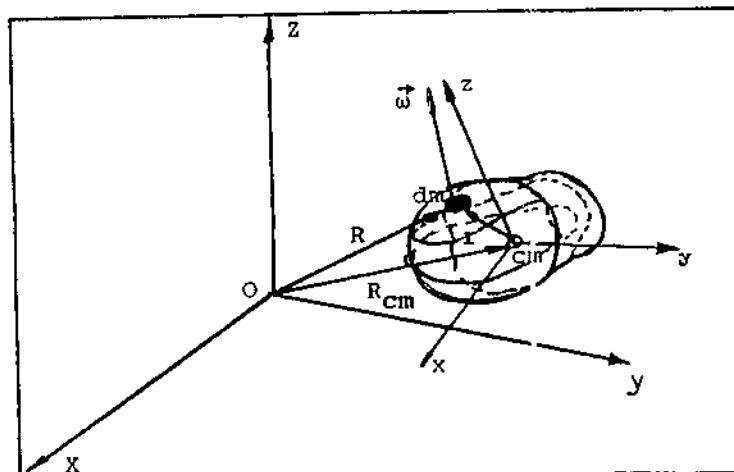
As equações que regem o movimento de um corpo flexível e com massa variável são extensões das equações do Apêndice A.^[1] A equação do movimento do centro de massa pode ser escrita como:

$$\mathbf{F}_s = \int_m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} dm \quad (3.1)$$

$$\mathbf{M}_s = \int_m \mathbf{R} \times \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} dm \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{R}$ é o vetor posição do elemento de massa dm , em relação ao referencial inercial $OXYZ$ e $dm = \rho dV$, sendo ρ a densidade e dV o volume associados ao elemento de massa dm .

Estes aspectos podem ser melhor avaliados se for utilizado um referencial no corpo. Considere a Figura 3.1, onde $OXYZ$ é o referencial inercial e $oxyz$ um referencial com origem no centro de massa instantâneo, o , de um veículo qualquer que possui uma determinada massa " m " em algum instante " t ".



O veículo se considera como um volume de controle onde existe a possibilidade de perda de massa através de sua superfície de controle. Seja "o" o seu centro de massa instantâneo. A posição de um elemento de massa "dm" em relação ao referencial oxyz é determinada pelo vetor posição r ; e a posição relativa do centro de massa do veículo, "o", em relação à origem "O" do sistema inercial OXYZ é indicada por R_{cm} . Seja ainda $\vec{\omega}$ a velocidade angular de "dm" medida em relação ao referencial inercial. Da definição de centro de massa, tem-se:

$$R_{cm} \int_m dm = \int_m R dm \quad (3.3)$$

$$R = R_{cm} + r \quad (3.4)$$

A derivada inercial temporal do vetor r pode ser escrita em termos de sua derivada não inercial temporal. A convenção para derivada inercial temporal de um vetor qualquer, v , é escrita indistintamente neste trabalho como sendo $\frac{dv}{dt}$ ou $\dot{v}$. Já a derivada não inercial temporal será sempre escrita como $\frac{\delta v}{\delta t}$. Obviamente que se a quantidade for escalar é indiferente usar d/dt ou $\delta/\delta t$.

A aceleração do elemento de massa dm em relação ao ref. inercial OXYZ pode ser expressa em termos da sua aceleração em relação ao referencial oxyz através da expressão (ver, por exemplo, Cornelisse, 1979, [4], Capítulo 3):

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{d^2 R_{cm}}{dt^2} + \frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t} \times r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r) + 2\vec{\omega} \times \frac{\delta r}{\delta t} + \frac{\delta^2 r}{\delta t^2} \quad (3.5)$$

Substituindo a expressão 3.5 na equação 3.1 resulta:

$$\begin{aligned} F_s = & \int_m \frac{d^2 R_{cm}}{dt^2} dm + \int_m \frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t} \times r dm + \int_m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r) dm + \\ & + 2 \int_m \vec{\omega} \times \frac{\delta r}{\delta t} dm + \int_m \frac{\delta^2 r}{\delta t^2} dm \end{aligned} \quad (3.6)$$

A equação 3.2 pode ser simplificada se o centro de massa do veículo, "o", for tomado como o ponto para calculá-lo, ao invés de "O", origem do sistema OXYZ. Sejam R_f e r_f os vetores posição da força resultante externa F_s em relação a O e em relação ao centro de massa do veículo, respectivamente. Daí:

$$M_s = R_f \times F_s = (R_{cm} + r_f) \times F_s$$

O momento total em relação ao centro de massa, devido à força resultante externa F_s , é:

$$M_{cm} = r_f \times F_s = M_s - R_{cm} \times F_s \quad (3.7)$$

Substituindo as eqs. 3.1 e 3.2 na equação anterior e usando a equação 3.4, resulta:

$$M_{cm} = \int_m r \times \frac{d^2 R}{dt^2} dm \quad (3.8)$$

$$M_{cm} = \int_m r \times \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \times r \right) dm + \int_m r \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r)] dm +$$

$$+ 2 \int_m r \times \left(\vec{\omega} \times \frac{\delta r}{\delta t} \right) dm + \int_m r \times \frac{\delta^2 r}{\delta t^2} dm \quad (3.9)$$

As equações 3.6 e 3.9 são as equações do movimento de um veículo flexível, de forma qualquer e de massa variável com o tempo, sendo F_s a resultante das forças externas atuando no veículo e M_{cm} o momento resultante de F_s em relação ao seu centro de massa, dado pela equação 3.7.

3.2 SIMPLIFICAÇÕES PRELIMINARES

3.2.1 CORPO INDEFORMÁVEL COM MASSA CONSTANTE

Existência de estrutura rígida do veículo. Para um corpo rígido com massa constante e sem movimento relativo entre suas partes sólidas, a sua velocidade angular independe da distribuição de massa. Desta forma, $\vec{\omega}$ representa a velocidade angular instantânea de todo o veículo em relação a um eixo instantâneo de rotação. Lembrando que, pelas equações 3.4 e 3.3, tem-se $\int_m r dm = 0$, e que para um corpo indeformável sem movimento relativo entre suas partes sólidas $\delta r / \delta t = 0$ e $\delta^2 r / \delta t^2 = 0$, obtêm-se, a partir da equação 3.6:

$$F_s = m \frac{d^2 R_{cm}}{dt^2} \quad (3.10)$$

Isto é, o movimento do centro de massa do veículo comporta-se como se toda a sua massa e todas as forças externas estivessem aí concentradas, resultado este já esperado.

Analogamente, o movimento de atitude pode ser escrito, a partir da equação 3.9 e de $\frac{\delta r}{\delta t} = 0$ e $\frac{\delta^2 r}{\delta t^2} = 0$:

$$M_{cm} = \int_m r \times \left(\frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t} \times r \right) dm + \int_m r \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r)] dm \quad (3.11)$$

A expressão 3.11 pode ser escrita em termos do tensor de inércia, I , do veículo:

$$\int_m r \times \left(\frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t} \times r \right) dm = I \cdot \frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t}$$

$$\int_m r \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r)] dm = \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\omega})$$

Substituindo estas expressões na equação 3.11, obtêm-se a equação do movimento de atitude do veículo:

$$M_{cm} = I \cdot \frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t} + \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\omega}) \quad (3.12)$$

A equação 12 pode simplificar-se mais ainda se o sistema $oxyz$ for o sistema de eixos principais pois, desta forma, o tensor de inércia possui apenas os momentos principais, enquanto seus produtos de inércia são todos nulos. A equação que resulta desta escolha para $oxyz$ é a Equação de Euler do movimento de atitude, largamente empregada na literatura.

3.2.2 CORPO INDEFORMÁVEL COM PERDA DE MASSA

Para o estudo desta situação convém particularizar o veículo. Considere um veículo típico de

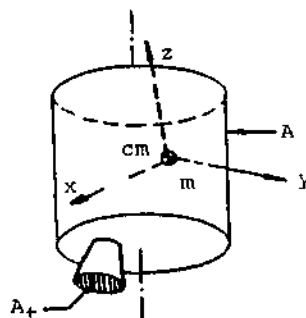


Fig. 3.2 - Veículo típico.

Se o sistema $oxyz$ mantiver constantemente sua origem no centro de massa instantâneo do veículo, então pode-se escrever que $\int_m \mathbf{r} dm = 0$.

A velocidade angular, $\vec{\omega}$, de um elemento de massa, " dm ", pode ser tanto a velocidade angular de um elemento da parte rígida como a velocidade angular de um elemento da parte líquida. Entretanto, pode ser considerado que todo o líquido combustível possua a mesma velocidade angular que um elemento da parte rígida do veículo. Uma vez que o líquido combustível apresenta-se, na maioria das vezes, confinado em reservatórios sob pressão e, além disso, em tais reservatórios existem membranas elásticas que restringem o movimento do líquido, a hipótese proposta é bastante admissível. Sendo assim, $\vec{\omega}$ é independente do elemento de massa considerado e pode, portanto, ser colocado fora das integrais. Então, a equação 3.6 pode ser escrita como:

$$\mathbf{F}_s = m \frac{d^2 \mathbf{R}_{cm}}{dt^2} + 2\vec{\omega} \times \int_m \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} dm + \int_m \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} dm \quad (3.13)$$

Esta é a equação do movimento do centro de massa de um veículo rígido com massa variável.

Da mesma forma, a equação do movimento de atitude, equação 3.9, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{cm} = & \mathbf{I} \cdot \frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t} + \vec{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \vec{\omega}) + 2 \int_m \mathbf{r} \times (\vec{\omega} \times \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}) dm + \\ & + \int_m \mathbf{r} \times \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} dm \end{aligned} \quad (3.14)$$

Esta é a equação do movimento de atitude.

Considere agora 3.3 o sistema $O'\xi\eta\zeta$ representa um sistema qualquer, fixo em relação à estrutura rígida do veículo (como visto anteriormente, a parte fluida do veículo não permanece fixa em relação a este sistema

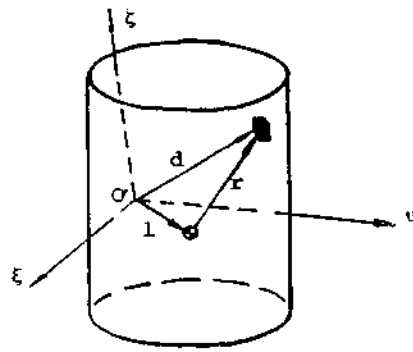


Fig. 3.3 - O sistema $O'\xi\eta\zeta$

Se v e a são, respectivamente, a velocidade e a aceleração dos gases de combustão em relação à estrutura rígida do veículo ($v = \delta d / \delta t$ e $a = \delta^2 d / \delta t^2$), e ainda se u_{cm} e a_{cm} são, respectivamente a velocidade e a aceleração do centro de massa em relação à estrutura rígida do veículo, isto é, $u_{cm} = \delta l / \delta t$ e $a_{cm} = \delta^2 l / \delta t^2$, então:

$$\frac{\delta r}{\delta t} = v - u_{cm} \quad (3.15)$$

$$\frac{\delta^2 r}{\delta t^2} = a - a_{cm} \quad (3.16)$$

As equações 3.13 e 3.14 podem ser escritas de forma compacta, através das definições de certas forças e momentos aparentes. Definindo-se:

$$\text{Força de Coriolis} = F_c = -2\vec{\omega} \times \int_m \frac{\delta r}{\delta t} dm \quad (3.17)$$

$$\text{Força Relativa} = F_r = - \int_m \frac{\delta^2 r}{\delta t^2} dm \quad (3.18)$$

$$\text{Momento de Coriolis} = M_c = -2 \int_m r \times (\vec{\omega} \times \frac{\delta r}{\delta t}) dm \quad (3.19)$$

$$\text{Momento Relativo} = M_r = - \int_m r \times \frac{\delta^2 r}{\delta t^2} dm \quad (3.20)$$

então, as equações 3.13 e 3.14 podem ser escritas na forma compacta:

$$m \frac{d^2 R_{cm}}{dt^2} = F_c + F_r + F_s \quad (3.21)$$

$$I \cdot \frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t} + \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\omega}) = M_{cm} + M_c + M_r \quad (3.22)$$

Em forma compacta, as equações 3.21 a 3.22 são as equações de movimento de um veículo rígido com massa variável. Estas equações apresentam certos termos que podem ser analisados com a finalidade de melhor compreender seus significados. A análise destes termos é melhor realizada se

for empre o Teorema de Transporte de Reynolds (Cornelisse, 1979), onde, para um vetor r qualquer, vale a relação:

$$\int_m \frac{\delta r}{\delta t} dm = \frac{\delta}{\delta t} \int_m r dm + \int_A r(\rho v \cdot n) dA \quad (3.23)$$

Os termos $I \cdot \delta \vec{\omega} / \delta t$ e $\vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\omega})$ são denominados de "termos de inércia". Podem ser escritos de forma alternativa através do uso da relação entre as derivadas inercial e não inercial do vetor ($I \cdot \vec{\omega}$):

$$\begin{aligned} I \cdot \frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t} + \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\omega}) &= I \cdot \frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t} + \frac{d}{dt} (I \cdot \vec{\omega}) - \frac{\delta}{\delta t} (I \cdot \vec{\omega}) \\ I \cdot \frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t} + \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\omega}) &= \frac{d}{dt} (I \cdot \vec{\omega}) - \frac{\delta I}{\delta t} \cdot \vec{\omega} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Usando a equação 3.23, a Força de Coriolis pode ser escrita como:

$$F_c = -2\vec{\omega} \times \left(\frac{\delta}{\delta t} \int_m r dm + \int_{A_t} r(\rho v \cdot n) dA_t \right) \quad (3.25)$$

É claro que da definição do centro de massa tem-se que:

$$\int_m r dm = 0 \quad (3.26)$$

Seja a taxa de escoamento de massa dos gases de propulsão definida por:

$$\dot{m} = - \frac{dm}{dt} \quad (3.27)$$

(obs.: $\dot{m} = \dot{m} = \frac{dm}{dt} < 0$)

Então, do Princípio da Conservação da Massa, tem-se que:

$$\dot{m} = \int_{A_t} (\rho v \cdot n) dA_t \quad (3.28)$$

Seja ainda r_t o vetor posição do "centro de massa do escoamento pela tubeira" definido por:

$$r_t = (1/\dot{m}) \int_{A_t} r(\rho v \cdot n) dA_t \quad (3.29)$$

A Figura 3.4 ilustra essa situação:

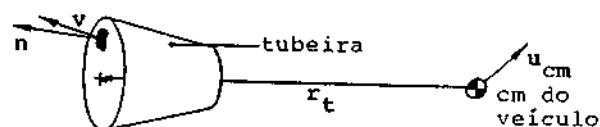


Fig. 3.4 - O centro de massa do escoamento.

Se o escoamento dos gases de queima ocorrer de forma métrica e uniforme em relação ao eixo de simetria da tubeira, então pode-se mostrar que r_t é o vetor posição que une o centro de massa instantâneo do veículo ao centro geométrico da área A_t . Caso contrário, deve ser obtido pela equação 3.29.

Desta forma, a equação 3.25 será:

$$F_c = -2\dot{m}\omega \times r_t \quad (3.30)$$

Da equação 3.30 percebe-se que a Força de Coriolis se deve a dois fatores: a) perda de massa; b) não alinhamento do centro de massa do escoamento dos gases de propulsão com a velocidade angular de rotação do veículo em relação ao referencial inercial OXYZ. Obviamente, se o veículo não apresenta um dos dois fatores acima, ou ambos, então $F_c = 0$.

Usando a equação 3.23 na equação da Força Relativa, equação 3.18, obtém-se:

$$F_r = - \frac{\delta}{\delta t} \int_m \frac{\delta r}{\delta t} dm - \int_{A_t} \frac{\delta r}{\delta t} (\rho v \cdot n) dA_t \quad (3.31)$$

Aplicando novamente a equação 3.23 e usando as equações 3.26, 3.28, 3.29 e a relação $\delta r / \delta t = v - u_{cm}$, a expressão que se obtém para a Força Relativa é:

$$F_r = - \frac{\delta}{\delta t} (\dot{m} r_t) - \int_{A_t} v (\rho v \cdot n) dA_t + u_{cm} \dot{m} \quad (3.32)$$

A integral no lado direito da expressão anterior representa o fluxo de momento linear que passa através da saída da tubeira. Este fluxo pode ser escrito como sendo o produto do escoamento dos gases de combustão, $\dot{m}$, pela velocidade média de exaustão c , definida por:

$$c = (1/\dot{m}) \int_{A_t} v (\rho v \cdot n) dA_t \quad (3.33)$$

Substituindo esta expressão na equação 3.32, resulta na equação final para a Força Relativa:

$$F_r = - \frac{\delta}{\delta t} (\dot{m} r_t) - \dot{m} (c - u_{cm}) \quad (3.34)$$

O primeiro termo do lado direito da equação 3.34 representa o regime não permanente do processo propulsivo. Pode ser escrito como:

$$\delta(\dot{m} r_t) / \delta t = [\delta(\dot{m}) / \delta t] r_t + \dot{m} (\delta r_t / \delta t) \quad (3.35)$$

fixo em relação a sua estrutura. A literatura usualmente denomina Força de Empuxo a força relativa resultante destas considerações:

$$F_e = -c\dot{m} \quad (3.36)$$

A análise do Momento de Coriolis pode ser simplificada utilizando-se a seguinte identidade:

$$\frac{\delta}{\delta t}[\mathbf{r} \times (\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t})] = 2\mathbf{r} \times (\vec{\omega} \times \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}) + \mathbf{r} \times (\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}) + \vec{\omega} \times (\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} \times \mathbf{r}) \quad (3.37)$$

Usando a equação 3.37 na equação 3.19:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_c = - \int_m \left\{ \frac{\delta}{\delta t}[\mathbf{r} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r})] - \mathbf{r} \times \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}\right) - \right. \\ \left. - \vec{\omega} \times \left(\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} \times \mathbf{r}\right) \right\} dm \end{aligned} \quad (3.38)$$

Usando a equação 3.23, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_c = - \frac{\delta}{\delta t}(\mathbf{I} \cdot \vec{\omega}) + \mathbf{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \int_{A_t} \mathbf{r} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r})(\rho v \cdot \mathbf{n}) dA_t - \\ - \vec{\omega} \times \int_m \mathbf{r} \times \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} dm \end{aligned} \quad (3.39)$$

Seja P um ponto qualquer na superfície da saída da tubeira (Figura 3.5).

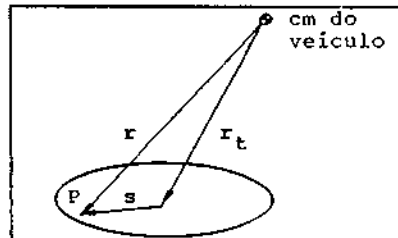


Fig. 3.5 - Um ponto qualquer na área A_t .

Pode-se escrever que:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_t + \mathbf{s}$$

De acordo com a equação 3.29, tem-se:

$$\int_{A_t} \mathbf{s}(\rho v \cdot \mathbf{n}) dA_t = 0 \quad (3.40)$$

Substituindo os resultados anteriores na equação 3.39, obtém-se a expressão geral do Momento de Coriolis para este caso:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_c = - \frac{\delta \mathbf{I}}{\delta t} \cdot \vec{\omega} - \dot{m} \mathbf{r}_t \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_t) - \int_{A_t} \mathbf{s} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{s})(\rho v \cdot \mathbf{n}) dA_t - \\ - \vec{\omega} \times \int_m \mathbf{r} \times \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} dm \end{aligned} \quad (3.41)$$

Se a área de saída da tubeira puder ser considerada de pequenas dimensões, quando comparada com as dimensões longitudinais do veículo, isto é, se para qualquer ponto P ocorrer que $|\mathbf{s}| \ll |\mathbf{r}_t|$, então, a integral sobre A_t na expressão anterior pode ser desprezada, face à $\dot{m} \mathbf{r}_t \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_t)$, ficando o Momento de Coriolis expresso por:

$$\mathbf{M}_c = - \frac{\delta \mathbf{I}}{\delta t} \cdot \vec{\omega} - \dot{m} \mathbf{r}_t \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_t) - \vec{\omega} \times \int_m \mathbf{r} \times \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} dm \quad (3.42)$$

O desalinhamento ilustrado na Figura 3.2 faz com que o escoamento dos gases de propulsão não seja paralelo ao eixo longitudinal do veículo que passa pelo seu centro de massa. Caso não existissem desalinhamentos deste tipo, a integral na equação 3.42 desapareceria. Finalmente, se o vetor velocidade angular do veículo for paralelo à direção de r_t , durante toda a fase propulsiva, então $\vec{\omega} \times r_t = 0$ e daí o Momento de Coriolis será simplesmente devido à variação temporal do tensor de inércia:

$$M_c = - \frac{\delta I}{\delta t} \cdot \vec{\omega}$$

Usando a equação 3.23 na expressão do Momento Relativo, resulta na seguinte expressão:

$$M_r = - \frac{\delta}{\delta t} \int_m r \times \frac{\delta r}{\delta t} dm - \int_{A_t} r \times \frac{\delta r}{\delta t} (\rho v \cdot n) dA_t \quad (3.43)$$

Usando a relação $\delta r / \delta t = v - u_{cm}$ na equação anterior e usando a equação 3.28, obtém-se:

$$M_r = - \frac{\delta}{\delta t} \int_m r \times \frac{\delta r}{\delta t} dm - \int_{A_t} r \times [v(\rho v \cdot n)] dA_t + \dot{m} r_t \times u_{cm} \quad (3.44)$$

Na superfície A_t a velocidade de saída de uma partícula em relação a ela pode ser dada por:

$$v = c + u$$

onde u representa o desvio de velocidade em relação à velocidade média de exaustão, c . A escolha de calota esférica para a área de saída da tubeira, ao invés de área plana, é explicada no Capítulo 4,^[4] item 4.2.

De acordo com as equações 3.29 e 3.33, tem-se:

$$\int_{A_t} u(\rho v \cdot n) dA_t = 0 \quad (3.45)$$

Substituindo as equações 3.28 e 3.34 na equação 3.33 e usando as equações 3.17, 3.29 e 3.35 obtém-se:

$$M_r = - \frac{\delta}{\delta t} \int_m r \times \frac{\delta r}{\delta t} dm - \int_{A_t} (s \times u)(\rho v \cdot n) dA_t - \dot{m} r \times (c - u) \quad (3.46)$$

Se $|s| \ll |r_t|$ e se o escoamento for aproximadamente uniforme ($|u| \ll |c|$), então, o Momento Relativo simplifica-se para:

$$M_r = - \frac{\delta}{\delta t} \int_m r \times \frac{\delta r}{\delta t} dm - \dot{m} r_t \times (c - u_{cm}) \quad (3.47)$$

Percebe-se da equação 3.47 que o Momento Relativo existe em virtude do não paralelismo entre r e $\delta r / \delta t$ e também, entre r_t e $(c - u_{cm})$.

3.2.3 CORPO NÃO RÍGIDO COM MASSA VARIÁVEL

Os termos nas equações do movimento do problema geral, 3.6 e 3.9, que representam a influência de movimentos de partes flexíveis do veículo, estão relacionados com as expressões que possuem $\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}$ e $\frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2}$. Sejam F_r e M_r respectivamente, a Força e Momento de Flexibilidade. Das equações 3.6 e 3.9, tem-se:

$$F_r = 2 \int_m \vec{\omega} \times \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} dm + \int_m \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} dm \quad (3.48)$$

$$M_r = 2 \int_m \mathbf{r} \times (\vec{\omega} \times \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}) dm + \int_m \mathbf{r} \times \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} dm \quad (3.49)$$

onde "dm" representa qualquer elemento de massa dentro do volume de controle de um veículo qualquer, indicado na Figura 3.2.

No caso mais geral, dados dois elementos de massa distintos do veículo, seus movimentos relativos não possuem qualquer relação entre si, caracterizando uma situação de independência. Entretanto, para situações mais realistas, o veículo é constituído por elementos sólidos tais que, dados dois elementos de massa distintos, seus movimentos relativos apresentam alguma relação de dependência, determinada por características como, por exemplo módulo de elasticidade do material, etc.

A flexibilidade deve aqui ser entendida como deformações elásticas (que podem possivelmente ocorrer no veículo como, por exemplo, deformações de painéis solares ou de antenas longas e delgadas) ou como vibrações periódicas de alta frequência.

Desta forma, as equações do movimento de um corpo não rígido passam a ser determinadas não apenas pelo deslocamento do seu centro de massa e pelo seu movimento de atitude, mas também pelas equações dos seus deslocamentos elásticos, estas últimas determinadas por meio de análise de tensões estruturais. O estudo do movimento de um corpo não rígido requer que sejam consideradas certas simplificações como, por exemplo, deslocamentos axiais desprezíveis, face aos longitudinais, a fim de tornar pelo menos mais simples o seu estudo. Detalhes do tratamento matemático para este problema, podem ser encontrados em Melrovitch (1970)^[6], onde é analisado o movimento de um foguete não rígido que perde massa.

Para as finalidades deste trabalho, não serão considerados, em nenhum momento, veículos possuindo qualquer tipo de não rigidez que não seja a gerada por suas partes líquidas. Isto se justifica pelo fato de serem tratados aqui os casos nos quais o uso de propulsão ocorre apenas nas etapas de transferência orbital. Além do mais, o veículo a ser simulado numericamente no Capítulo 7 possui um sistema propulsivo que gera forças de pequena magnitude sendo que seus efeitos sobre deformações na sua estrutura podem ser desprezados.

3.3 CONCLUSÕES

Neste item, apresenta-se um resumo dos resultados obtidos para o problema de interesse, analisado no item 3.2.

Considerando o que foi dito ao longo deste Capítulo, o veículo de interesse (veículo que será submetido a análises numéricas de simulações de transferência orbital e de atitude), pode ser modelado pelas seguintes hipóteses, já apresentadas neste Capítulo:

- 1) veículo rígido, exceto por suas partes líquidas, ou, equivalentemente, seu combustível;
- 2) veículo típico possuindo um sistema propulsivo capaz de fornecer empuxo necessário para efetuar transferências orbitais, por meio de uma tubeira fixa na sua estrutura;
- 3) o raio característico da superfície de saída da tubeira pode ser considerado muito pequeno, quando comparado com a dimensão do centro de massa de escoamento dos gases pela tubeira;
- 4) qualquer elemento de massa do veículo, inclusive um elemento de seus componentes líquidos, apresenta sempre a mesma velocidade angular, $\vec{\omega}$, em um instante "t". Desta forma, $\vec{\omega}$ será a velocidade angular do veículo.

As hipóteses acima particularizam o problema, ao mesmo tempo que permitem a obtenção de soluções numéricas. Obviamente que o "afrouxamento" destas hipóteses conduz a modelos mais realistas, porém, mais difíceis de serem tratados. Para as finalidades deste trabalho, as quatro hipóteses acima são amplamente satisfatórias para o cumprimento de seus objetivos.

Sendo assim, as equações de movimento para um veículo considerado desta forma podem ser escritas como:

Equação do Movimento do Centro de Massa:

$$m \frac{d^2 R_{cm}}{dt^2} = -2\dot{m}\vec{\omega} \times \vec{r}_t - \frac{\delta}{\delta t}(\dot{m}\vec{r}_t) - \dot{m}(c - u_{cm}) + F_s \quad (3.50)$$

Equação do Movimento de Atitude:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(I \cdot \vec{\omega}) = & -\dot{m}\vec{r}_t \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_t + (c - u_{cm})] - \vec{\omega} \times \int_m \vec{r} \times \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} dm - \\ & - \frac{\delta}{\delta t} \int_m \vec{r} \times \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} dm + M_{cm} \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde se tem:

m - massa instantânea do veículo;

R_{cm} - posição do centro de massa instantâneo do veículo em relação a um referencial inercial;

$\dot{m}$ - taxa de perda de massa do veículo (definida na equação 3.27 ou na equação 3.28);

$\vec{\omega}$ - velocidade angular do veículo;

r_t - centro de massa de escoamento dos gases pela tubeira (definido na equação 3.29);

c - velocidade média de exaustão dos gases da propulsão (definida na equação 3.33);

u_{cm} - velocidade do centro de massa do veículo em relação à sua estrutura rígida;

F_s - resultante das forças externas atuando no veículo;

I - tensor de inércia do veículo;

r - vetor posição de um elemento de massa do veículo, relativo a um referencial com origem no seu centro de massa;

$\frac{\delta r}{\delta t}$ - velocidade, relativa ao centro de massa instantâneo do veículo, dos gases de combustão que passam pela superfície de saída da tubeira;

M_{cm} - momento resultante no veículo em relação ao seu centro de massa, devido à resultante das forças externas, dado pela equação 3.7;

$\frac{d}{dt}$ - derivada temporal no sistema inercial OXYZ;

$\frac{\delta}{\delta t}$ - derivada temporal no sistema não inercial oxyz;

No Capítulo 4,^[1] serão analisados os graus de importância dos aspectos apresentados no item 3.2 e estudados alguns de seus aspectos ainda não vistos. Consequentemente, as equações 3.50 e 3.51 podem sofrer algumas simplificações.

REFERÊNCIAS/REFERENCES

- 1) Rodrigues, D. L. F. Análise Dinâmica da Transferência Orbital. S. José dos Campos, SP, INPE, 1991 (Dissertação de Mestrado. INPE-5352-TDI/461).
- 2) De Brum, A. G. V. Correção Orbital de um Satélite Utilizando Dispositivo de Alto Empuxo. S. José dos Campos, SP, INPE, 1996 (Monografia de Curso. INPE-5906-NTC/322).
- 3) Rocco, E. M. Transferências Orbitais Impulsivas com Limite de Tempo. S. José dos Campos, SP, INPE, 1996 (Proposta de Dissertação de Mestrado).
- 4) Santos Paulo, M. M. N. Estudo da Influência dos Erros dos Propulsores em Manobras Orbitais Tridimensionais. S. José dos Campos, SP, INPE, 1996 (Proposta de Dissertação de Mestrado).
- 5) Schulz, W. Estudo de Manobras Espaciais para Satélites em Órbita Congelada. S. José dos Campos, SP, INPE, 1996 (Proposta de Dissertação de Mestrado).
- 6) De Jesus, A. D. C. Otimização de Manobras Orbitais com Propulsão Finita Sujeita a Perturbações na Dinâmica e Não Idealidade dos Propulsores. S. José dos Campos, SP, INPE, 1996 (Proposta de Tese de Doutorado).

7 - Cornelisse, J.W. et al. Rocket propulsion and spacecraft dynamics. London, Pitman Publishing, 1979.

8 - Meirovitch, L. General motion of a variable-mass flexible rocket with internal flow. Journal of Spacecraft & Rockets, 7(2):186-195, Jan. 1970.

9 - Methods of analytical dynamics. New York, McGraw-Hill, 1970.



TÍTULO
Equacionamento e Simplificações do Problema Geral da Transferência Orbital

AUTOR
Daniel Levy de Figueiredo Rodrigues; Marcelo Lopes de Oliveira e Souza

TRADUTOR

EDITOR

ORIGEM	PROJETO	SÉRIE	No. DE PÁGINAS	No. DE FOTOS	No. DE MAPAS
DMC			13		- 824

TIPO
☐ RPQ ☒ PRE ☐ NTC ☐ PRP ☐ MAN ☐ PUD ☐ TAE ☐

DIVULGAÇÃO
☒ EXTERNA ☐ INTERNA ☐ RESERVADA ☐ LISTA DE DISTRIBUIÇÃO ANEXA

PERIÓDICO / EVENTO
Apresentado no VIII Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital realizado em Novembro de 1996 em Santos - SP

CONVÊNIO

AUTORIZAÇÃO PRELIMINAR
DATA: ____/____/____
Carimbo e Assinatura:
Título da Unidade: **Coordenador de Engenharia de Tecnologia Espacial**

REVISÃO TÉCNICA
☐ SOLICITADA ☐ DISPENSADA
RECEBIDA: ____/____/____ DEVOLVIDA: ____/____/____
Carimbo e Assinatura: _____
Título de Nível "A": _____
Assinatura do Revisor: _____

REVISÃO DE LINGUAGEM
☐ SOLICITADA ☐ DISPENSADA
RECEBIDA: ____/____/____ DEVOLVIDA: ____/____/____
Carimbo e Assinatura: _____
Título de Nível "A": _____
Assinatura do Revisor: _____

AUTORIZAÇÃO FINAL
DATA: ____/____/____
Carimbo e Assinatura:
Título de Nível "A": **Coordenador de Engenharia de Tecnologia Espacial**

PALAVRAS-CHAVE
Equacionamento e Simplificação do Problema Orbital



SECRETARIA _____		
____/____/____ DATA	RECEBIDA ____/____/____	DEVOLVIDA ____/____/____
_____ Encaminhado Por	_____ Devolvido Por	

CONTROLE E DIVULGAÇÃO _____		
____/____/____ DATA	RECEBIDO POR : <u>Yelonda</u>	DEVOLVIDO PARA : _____
INPE-8203-BRE/3998		____/____/____ DATA
PRONTO PARA PUBLICAÇÃO EM : ____/____/____		
No. _____	QUANT. <u>21</u>	_____ Assinatura

OBSERVAÇÕES.

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-8203-PRE/3998

**EQUACIONAMENTO E SIMPLIFICAÇÕES DO PROBLEMA
GERAL DA TRANSFERÊNCIA ORBITAL**

Daniel Levy de Figueiredo Rodrigues
Marcelo Lopes de Oliveira e Souza

Trabalho apresentado no VIII Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital realizado em
novembro de 1996 na cidade de Santos – SP.

INPE
São José dos Campos
2001