

## ABORDAGEM PELO CIRCUNCENTRO PARA MALHAS NÃO ESTRUTURADAS EM TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Jerônimo dos Santos Travelho  
jeff@lac.inpe.br  
*Engenharia Mecânica*  
*Universidade de Mogi das Cruzes – UMC*  
*08780-911 – Mogi das Cruzes – SP*

Álvaro Luiz Fazenda  
alvaro@lac.inpe.br  
Eduardo Hidenori Enari  
eduardo@lac.inpe.br  
*Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada - LAC*  
*Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE*  
*C.P.515 – 12225-970 – São José dos Campos – SP*

**Resumo.** *Este trabalho apresenta a solução de um problema de transferência de calor bidimensional em uma malha triangular não estruturada com uma nova abordagem que facilita a aproximação dos termos difusivos. Tal abordagem consiste em utilizar como local geométrico onde as propriedades são calculadas, o centro do círculo que passa por todos os vértices de cada triângulo, ou seja o circuncentro, ao invés do baricentro geralmente usado.*

**Palavras-chave:** *Malhas não estruturadas, Transferência de calor, circuncentro*

### 1. INTRODUÇÃO

Dentre os métodos numéricos empregados para o estudo e solução de problemas de fenômenos de transporte, a grande maioria deles faz aplicação do próprio método sobre uma malha computacional que se adapta aos contornos do problema estudado.

Tais malhas podem ser de dois tipos: Estruturadas e Não Estruturadas. Os primeiros trabalhos em mecânica de fluídos computacional simulavam escoamentos sobre configurações geométricas simples, empregando malhas estruturadas que possibilitavam escrever uma relação explícita conectando células ou pontos nodais vizinhos. Tais malhas computacionais procuram sempre seguir o contorno do objeto de estudo, entretanto, a geração de malhas para uso em problemas com configurações geométricas complexas era ainda um grande desafio.

As malhas não estruturadas apresentam uma adaptatividade e versatilidade muito maior em comparação com malhas estruturadas, devido ao fato de não exigir a obrigatoriedade e rigidez de ordenação e vizinhança entre células ou pontos nodais. Entretanto, este aspecto também caracteriza uma de suas desvantagens: a dificuldade de estabelecer uma regra de ordenação. O resultado dessa ordenação estabelece o tamanho das bandas da matriz e o número de vizinhos. Essa variação no tamanho da banda da matriz impossibilita a aplicação de muitos métodos de solução de sistemas lineares (Maliska, 1995).

Os métodos de elementos finitos foram os primeiros a tirar vantagem deste tipo de malha (Venkatakrisnan, 1995). Posteriormente, métodos de volumes finitos (Patankar, 1980) foram também aplicados, principalmente após o sucesso obtido por Jameson e Mavriplis (1986) no qual o método de volumes finitos foi aplicado a uma malha triangular. O método de volumes finitos permite esta aplicação pois não faz distinção do formato do volume de controle elementar, conservando as propriedades nas células para a equação discretizada, assim como as propriedades são conservadas para volumes infinitesimais na equação diferencial.

Devido a dificuldade de cálculo dos termos difusivos em uma malha não estruturada, criou-se dois grupos de esquemas de solução: os esquemas centrados no vértice e os esquemas centrados na célula. No primeiro caso as propriedades discretas são calculadas nos vértices dos polígonos ou poliedros da malha e no segundo caso usa-se uma posição localizada dentro do volume de controle, usualmente o próprio centróide da célula.

Um exemplo de utilização de esquemas centrados no vértice, em duas dimensões, são as técnicas de Diagramas de Voronoi e Median-dual. Em ambas as técnicas os volumes de integração são construídos ao redor de cada vértice. No caso de esquemas centrados na célula o volume de integração é a própria célula gerada originalmente. Com Diagramas de Voronoi os bissetores perpendiculares de cada triângulo que compartilham o mesmo vértice delimitam o volume de integração, sendo também identificado por se tratar do dual da bem conhecida triangulação de Delaunay. No caso Median-dual o volume é formado pelas medianas dos triângulos.

Entretanto, conforme o trabalho de Venkatakrisnan (1995), a escolha do esquema centrado no vértice ou centrado na célula ainda motivo de muitos estudos, sendo que suas vantagens e desvantagens são discutíveis. Este trabalho procura focar a robustez e validade de uma nova abordagem (conforme Travelho, 1998) para aplicação do método de volumes finitos em malhas triangulares não estruturadas na solução de problemas difusivos seguindo um esquema centrado na célula.

## **2. ABORDAGEM BASEADA NO CIRCUNCENTRO (ABC)**

A solução de problemas difusivos em malhas estruturadas é bastante simples pois as faces do volume de integração são geralmente perpendiculares à linha que passa pelos centros das células envolvidas no *stencil*. Tal facilidade, geralmente, não é encontrada quando se usa malhas não estruturadas. O uso de Diagramas de Voronoi resolve esta questão pois as faces do volume formado são perpendiculares à linha que passa pelos centros dos triângulos. Entretanto, o uso de Diagramas de Voronoi implica na utilização de esquemas centrados no vértice.

Para esquemas centrados na célula este cálculo geralmente deve envolver métodos de solução bem mais elaborados, como o eficiente esquema proposto por Frink (1994). Travelho (1998), por sua vez, utilizou o centro do círculo ou esfera que passa por todos os vértices da célula (circuncentro) como o local onde as propriedades envolvidas são calculadas ao invés do centróide comumente usado em esquemas “cell-centered”. O centro

do círculo ou esfera que passa por um triângulo ou tetraedro é definido pelo local de encontro de suas mediatrizes. Esta propriedade garante que duas células que compartilham um mesmo lado tem a linha que passa pelos seus circuncentros perpendicular a esta mesma face. Assim, este esquema torna-se especialmente útil para problemas difusivos tanto para problemas bidimensionais quanto tridimensionais.

### 3. MODELAGEM DO PROBLEMA

Para demonstração da aplicação da abordagem pelo circuncentro, o problema a ser resolvido constitui-se da solução da equação de transferência de calor bidimensional em regime estacionário definida, na forma conservativa, pela equação a seguir:

$$\nabla \cdot k \nabla T = 0 \quad (1)$$

Onde  $T$  é a temperatura e  $k$  é a condutividade térmica definida através de uma variação linear com a temperatura dada por:

$$k = aT + b \quad (2)$$

Onde  $a$  e  $b$  são constantes.

Desta forma o problema apresenta uma não linearidade devido a dependência do valor da temperatura na determinação do valor da condutividade térmica.

O problema será resolvido em um domínio no formato de anel, na qual as condições de contorno na fronteira interna são do primeiro tipo (Dirichlet) e na fronteira externa de segundo tipo (Newman), na qual fixamos o valor do fluxo difusivo de calor.

Sendo um problema bidimensional, utilizaremos um gerador de malhas computacional que nos fornece malhas triangulares conforme o critério de triangulação de Delaunay (EasyMesh), para uma geometria que pode ser observada na figura 1 a seguir.

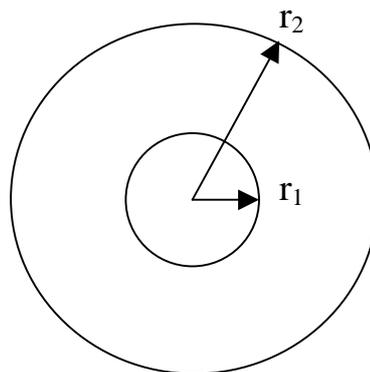


Figura 1: Domínio do problema a ser resolvido

#### 3.1 Solução analítica

Para efeito de validação, a solução numérica é comparada com a solução analítica, obtida pela integração da eq. (1) em coordenadas cilíndricas, dada por:

$$T = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 2ac}}{a} \quad (3)$$

Sendo:

$$c = q \frac{r_2}{A} \ln(r) - \left( \frac{a}{2} T_b^2 + b T_b + q \frac{r_2}{A} \ln(r_1) \right) \quad (4)$$

Onde  $A$  é a área do anel,  $r_1$  é o raio da borda interna,  $r_2$  é o raio da borda externa,  $r$  é o raio de interesse,  $T_b$  é a temperatura conhecida na borda interna e  $q$  é o fluxo de calor na borda externa. Não esquecendo que  $a$  e  $b$  são as constantes definidas na Eq. (2).

### 3.2 Discretização

A discretização da eq. (1) para uma malha triangular bidimensional pelo método de volumes finitos pode ser feita integrando o termo difusivo no volume de controle:

$$\iiint_V \nabla \cdot k \nabla T \cdot dV \quad (5)$$

Pelo teorema de Gauss teremos:

$$\iiint_V \nabla \cdot k \nabla T \cdot dV = \oint_S n \cdot k \nabla T \cdot dS \quad (6)$$

Onde  $n$  são as normais às faces do volume de controle. Desta forma poderemos ter aproximações para derivadas direcionais na direção da normal a cada face do volume de controle. Assim, para um triângulo com faces  $a$ ,  $b$  e  $c$  teremos:

$$S_a k_a F_a + S_b k_b F_b + S_c k_c F_c = 0 \quad (7)$$

Onde  $S_a$ ,  $S_b$  e  $S_c$  representam o tamanho das faces  $a$ ,  $b$  e  $c$  respectivamente.  $k_a$ ,  $k_b$  e  $k_c$  são os valores da condutividade térmica avaliada na face do volume de controle e finalmente para os componentes  $F_a$ ,  $F_b$  e  $F_c$  teremos:

$$F_i = \frac{\partial T}{\partial n_i}, \quad (8)$$

sendo  $i$  uma face da célula triangular ( $a$ ,  $b$  ou  $c$ ).

Uma vez que a linha que une os circuncentros de duas células vizinhas é perpendicular à face da célula, a aproximação para a derivada direcional, eq. (8), se resume a:

$$\frac{\partial T}{\partial n_i} = \frac{T_p - T_i}{Dist_{p-i}} \quad (9)$$

Onde  $T_p$  representa a temperatura na célula em questão e  $T_i$  representa a temperatura na célula vizinha.  $Dist_{p-i}$  representa a distância entre os circuncentros da célula  $P$  e a célula vizinha  $i$ . Assim a discretização para a eq. (7) resulta:

$$S_a k_a \frac{T_P - T_A}{Dist_{P-A}} + S_b k_b \frac{T_P - T_B}{Dist_{P-B}} + S_c k_c \frac{T_P - T_C}{Dist_{P-C}} = 0 \quad (10)$$

Lembrando que os sub-índices com letras minúsculas referem-se a propriedades calculadas nas faces da célula e aquelas cujos sub-índices apresentam letras maiúsculas referem-se a propriedades calculadas nos circuncentros das células.

Rearranjando a eq. (10) teremos:

$$a_P T_P = a_A T_A + a_B T_B + a_C T_C \quad (11)$$

$$a_A = \frac{S_a k_a}{Dist_{P-A}} \quad (12)$$

$$a_B = \frac{S_b k_b}{Dist_{P-B}} \quad (13)$$

$$a_C = \frac{S_c k_c}{Dist_{P-C}} \quad (14)$$

$$a_P = a_A + a_B + a_C \quad (15)$$

Sendo que para o cálculo do valor da condutividade térmica nas faces do volume de controle pode-se usar uma média ponderada pela distância do circuncentro à face, e assim teremos:

$$k_a = \left( \frac{1-f_a}{k_P} + \frac{f_a}{k_A} \right)^{-1}, \quad f_a = \frac{Dist_{a-A}}{Dist_{P-A}} \quad (15)$$

$$k_b = \left( \frac{1-f_b}{k_P} + \frac{f_b}{k_B} \right)^{-1}, \quad f_b = \frac{Dist_{b-B}}{Dist_{P-B}} \quad (16)$$

$$k_c = \left( \frac{1-f_c}{k_P} + \frac{f_c}{k_C} \right)^{-1}, \quad f_c = \frac{Dist_{c-C}}{Dist_{P-C}} \quad (17)$$

#### 4. RESULTADOS

A solução numérica aplicada à malhas com diferentes refinamentos, como a da figura 2, resolvida pelo método SOR, foi confrontada com a solução analítica do problema. Desta forma foi possível identificar uma queda no erro à medida que a malha se tornava mais refinada e conseqüentemente o tamanho característico da face da célula se tornava menor, conforme verifica-se nas figura 3 e 4.

A ordem do erro pode ser numericamente calculada através da expressão:

$$e = Bl^A \quad (18)$$

Onde  $e$  é o erro em alguma norma em relação à solução analítica e  $l$  é um comprimento característico da malha. Tomando-se o logaritmo da expressão acima chega-se a:

$$\log e = A \log l + \log B \quad (19)$$

No presente trabalho obteve-se o erro quadrático médio e o comprimento característico foi a raiz quadrada da área média dos triângulos. O resultado deste estudo é mostrado na figura 4. O valor de  $A$  é a ordem de convergência do método e foi obtida ajustando-se uma reta por mínimos quadrados aos valores dos logaritmos. Sendo que para os resultados obtidos, apresentou um valor de aproximadamente 2,63.

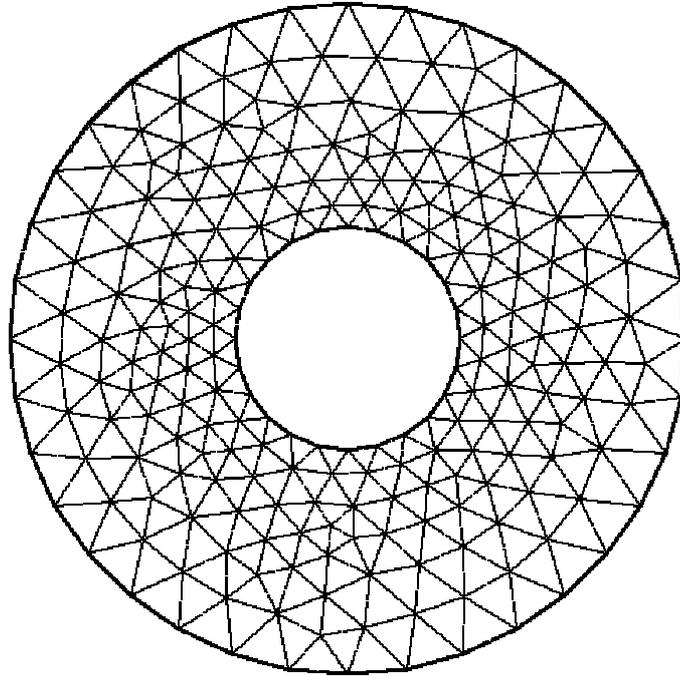


Figura 2: Exemplo de malha usada para o cálculo.

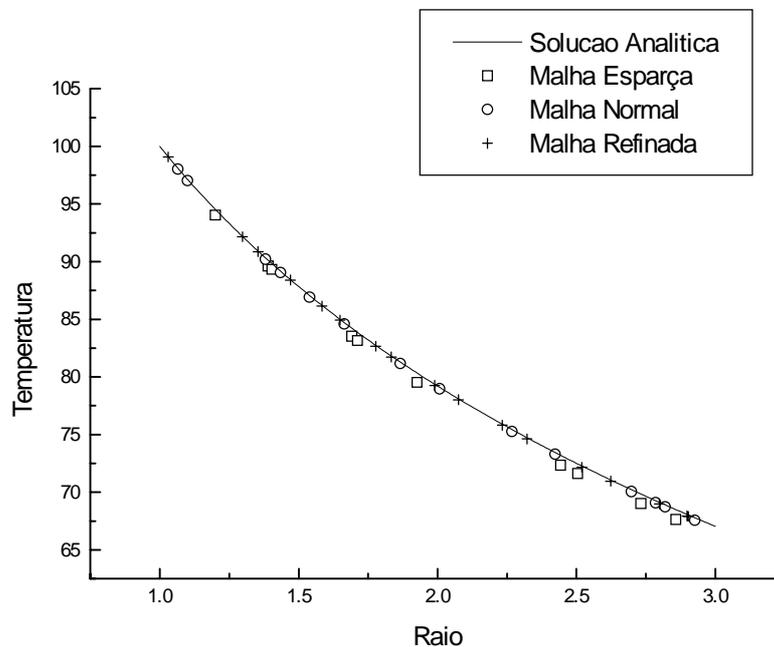


Figura 3: Perfis de temperatura em relação ao raio.

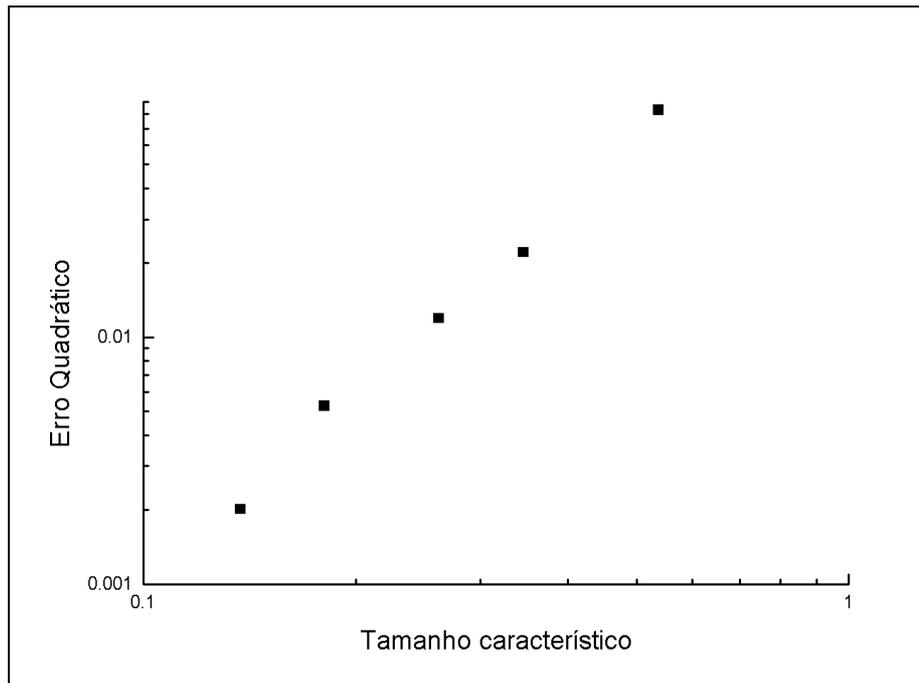


Figura 4: Erro Quadrático da solução numérica em relação ao incremento no número de células da malha.

## 5. CONCLUSÕES

Conforme pode-se observar neste trabalho, a abordagem pelo circuncentro para malhas não estruturadas apresentou uma convergência de 2ª ordem para um problema não linear, além de ter uma simples implementação computacional. O método apresenta as vantagens do uso de Diagramas de Voronoi para solução de problemas difusivos sem as dificuldades encontradas na geração da malha de Voronoi, especialmente nos contornos. Além do mais, apresenta um *stencil* menor que o diagrama de Voronoi e também um tamanho médio da célula geralmente menor. Assim, como no trabalho de Travelho (1998), pode-se observar que a abordagem por circuncentro apresenta bons resultados para problemas puramente difusivos.

## REFERÊNCIAS

- EasyMesh – version 1.4 “A Two-Dimensional Quality Mesh”. by Bojan Niceno.  
<http://www-dinma.univ.trieste.it/~nirftc/research/easymesh/easymesh.html>
- Frink, N.T. Recent Progress Toward a Three-Dimensional Unstructured Navier-Stokes Flow Solver, **AIAA Paper 94-0061**, 1994
- Jameson, A., Mavriplis, D.J. Finite Volume solution of the two-dimensional Euler equations on a regular triangular mesh, **AIAA Journal 24(4)**:611-618, 1986
- Maliska, C.R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional – Fundamentos e Coordenadas Generalizadas**, LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1995
- Patankar, S.V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. McGraw-Hill, 1980
- Travelho, J.S. “The Circuncenter Based Approach for Finite Volume Methods”, Submitted to **Numerical Heat Transfer**, 1998
- Venkatakrishnan, V. A Perspective on Unstructured Grid Flow Solvers, **NASA CR-195025, ICASE Report 95-3:01-37**, 1995

## UNSTRUCTURED GRID CIRCUNCENTER APPROACH IN HEAT TRANSFER

***Abstract.** This work uses a new approach witch makes easier the diffusion approximate terms in solution of a two-dimensional heat transfer problem in a triangular unstructured grid. This new approach consists in using the center of the circle that crosses all the vertex of a triangular cell (the circuncenter) as the geometrical place where the properties are calculated rather than the usual baricenter.*