

MANOBRAS DE RENDEZ-VOUS ENTRE ÓRBITAS KEPLERIANAS COM CONTROLE IMPULSIVO

Gislaine de Felipe & Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Divisão de Mecânica Espacial e Controle
Cx. P. 515.-12.227-970 – São José dos Campos, SP, Brasil
e-mail: gislaine@dem.inpe.br; prado@dem.inpe.br

RESUMO: Efetuar uma manobra de rendez-vous com um satélite significa exercer um controle para alterar a sua órbita de forma a colocá-lo em uma posição específica de uma órbita final, onde ele encontrará um segundo veículo espacial. O objetivo do trabalho é implementar, comparar e testar métodos que executem essa manobra, de maneira a fornecer informações que auxiliem na tomada de decisões do método a ser empregado em uma manobra real. A metodologia empregada para estudar esse problema será a de implementar três métodos analíticos: Método Direto Interno, Método Direto Externo, Método Indireto e um numérico, todos disponíveis na literatura, para análise dos resultados e comparações através do mapeamento de diferentes condições impostas ao problema. A importância dos resultados vem da sua imediata aplicabilidade em missões reais, incluindo problemas de manobras de constelações de satélites e da estação espacial internacional.

Abstract. To perform a rendezvous maneuver with a satellite means to use a control to change its orbit to put it in a specific position of a final orbit, where it will meet a second space vehicle. The objective of this paper is to implement, to compare and to test methods to execute that maneuver, with the goal of obtaining information to help in the decision of which method to use in a real mission. The methodology used to study this problem is the one of implementing three analytical methods: Internal Direct Method, External Direct Method, Indirect Method and a numeric method, all of them available in the literature, for analysis of the results and comparisons by drawing maps for different conditions imposed to the problem. The importance of the results comes from its immediate applicability in real missions, including problems of maneuvers involving constellations of satellites.

1 INTRODUÇÃO

Para ocorrer um encontro entre dois veículos espaciais (rendez-vous) é necessário que o instante de suas chegadas em um ponto pré-determinado no espaço seja o mesmo para os dois veículos considerados e também que suas velocidades sejam a mesma no instante do encontro. O veículo a ser transferido será chamado de “interceptor” e o veículo a ser interceptado será chamado de “alvo”.

Neste trabalho, serão analisados três métodos analíticos: Método Direto Interno, Método Direto Externo e Método Indireto, todos eles desenvolvidos em Ball & Osborne (1967) e

depois detalhados em Zanardi (1988) e um método numérico mais genérico, desenvolvido por Prado (1996), que pode resolver o problema sem as hipóteses simplificadoras utilizadas nos métodos analíticos. A contribuição pretendida é a implementação, testes e comparações entre os métodos para efetuar a escolha do método a ser aplicado, o que dependerá das circunstâncias particulares envolvidas. Todos os quatro métodos testados situam-se entre os métodos que utilizam controle impulsivo, ou seja, possuem controladores capazes de alterar a velocidade do veículo espacial instantaneamente. Outros trabalhos com hipóteses similares são: Gross e Prussing (1974) que considera a manobra com vários impulsos; Mc Cue (1963) que estuda manobras que incluem mudanças em inclinação com dois impulsos; Miirfakharie e Conway (1994) e Prussing e Chiu (1986) que levam em conta vínculos de tempo na manobra; Prussing (1969 e 1970) que considera manobras próximas a órbitas circulares. Com uma hipótese diferente quanto ao controle, assumindo um controlador que opera com empuxo finito em um tempo diferente de zero, temos o trabalho de Kechichian (1993) que estuda a manobra com mínimo consumo e tempo fixo. Alguns trabalhos acrescentam vínculos na trajetória descrita pelo veículo espacial, tais como: Stern e Fowler (1985) e Tauer *et al* (1995).

O tema considerado é relevante e bastante atual, podendo ser aplicado tanto na construção da estação espacial internacional, que necessitará de um grande número de manobras de rendez-vous com o ônibus espacial americano, como em manobras envolvendo constelações de satélites, pois estas manobras exigem a colocação do satélite em um ponto específico da órbita final, que é equivalente a uma manobra de rendez-vous com um ponto em uma órbita no espaço ao invés de um segundo veículo espacial.

2 MANOBRAS ORBITAIS DE RENDEZ-VOUS

Serão apresentados aqui encontros entre veículos que estejam inicialmente em órbitas circulares, não coplanares e de raios diferentes. As equações analíticas estão derivadas com a restrição de que o veículo alvo encontre-se em uma órbita mais alta que a do veículo interceptor, porém os cálculos do impulso requerido (controle aplicado) valem para o caso em que o veículo alvo encontra-se em uma órbita mais baixa, pois essa inversão não altera a magnitude dos controles aplicados.

Em todas as manobras, descritas na seqüência, temos que: i) R_{c1} representa o raio da órbita circular do veículo alvo; ii) R_{c2} o raio da órbita circular do veículo interceptor; iii) $\Delta\alpha$

Artigo Submetido em 02/02/00

1a. Revisão em 20/06/00; 2a. Revisão em 22/12/00;

Aceito sob recomendação do Ed. Consultor Prof. Dr. Liu Hsu

representa a inclinação entre as órbitas. O restante da nomenclatura varia caso a caso. É importante ressaltar que nenhum dos três métodos analíticos aqui analisados efetua uma manobra ótima do ponto de vista de economia de combustível. Em particular, a mudança de inclinação feita com um único impulso aplicado na linha de nodos teria o seu consumo reduzido se fosse dividida em dois impulsos aplicados nos dois pontos onde a linha dos nodos cruza com a órbita inicial. Algumas das vantagens práticas para as manobras não-ótimas aqui estudadas são: i) menor tempo de duração da manobra completa; ii) simplificação das tarefas do centro de controle, devido a redução do número de manobras; iii) maior possibilidade de efetuar todos os impulsos com o veículo espacial visível das estações terrestres, reduzindo o risco de perda da missão.

2.1 Método Direto Interno

O Método Direto Interno utiliza uma semi-elipse de transferência interna entre o veículo alvo e o interceptador para a realização da manobra de rendez-vous. O veículo alvo encontra-se em uma órbita circular de raio R_{c1} , sendo que a órbita está inclinada de um ângulo $\Delta\alpha$ com relação à órbita do interceptador. Quando o interceptador cruza a linha dos nodos (intersecção entre dois planos orbitais), receberá um impulso ΔV_α para girar seu vetor velocidade, colocando-o no plano da órbita do veículo alvo, de tal forma que ambas as órbitas se tornem coplanares. A fase seguinte inicia-se no ponto A, onde o alvo encontra-se adiantado do interceptador de um ângulo predeterminado θ (Figura 1). É neste ponto que o interceptador

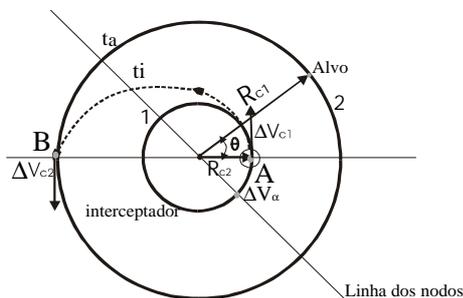


Fig. 1 - Encontro de veículos espaciais pelo Método Direto Interno

recebe um incremento de velocidade ΔV_{c1} , que causa a entrada na elipse de transferência (t_1), com o objetivo de atingir o ponto B no mesmo instante que o alvo. No ponto B, a velocidade deve ser aumentada novamente, aplicando-se um impulso ΔV_{c2} , a fim de possibilitar a entrada do interceptador na órbita do veículo alvo, igualando-se assim suas velocidades para completar o rendez-vous.

O incremento total de velocidade será de: $\Delta V = |\Delta V_\alpha| + |\Delta V_{c1}| + |\Delta V_{c2}|$. Essas grandezas podem ser calculadas utilizando-se as equações abaixo:

$$V_{c2} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{c2}}}, \quad V_{c1} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{c1}}} \quad (1)$$

$$\Delta V_\alpha = 2V_{c2} \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \quad (2)$$

$$a_t = \frac{R_{c1} + R_{c2}}{2} \quad (3)$$

$$V_{pt} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_{c2}} - \frac{\mu}{a_t}}, \quad V_{at} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_{c1}} - \frac{\mu}{a_t}} \quad (4)$$

$$\Delta V_{c1} = V_{pt} - V_{c2}, \quad \Delta V_{c2} = V_{c1} - V_{at} \quad (5)$$

$$R_{pt} = R_{c2}; \quad R_{at} = R_{c1} \quad (6)$$

Onde:

a_t = semi eixo maior da elipse de transferência t_i ;

V_{at} = velocidade no apogeu da elipse de transferência t_i ;

V_{pt} = velocidade no perigeu da elipse de transferência t_i ;

R_{at} = raio do apogeu da elipse de transferência t_i ;

R_{pt} = raio do perigeu da elipse de transferência t_i .

Para realizar uma transferência de A para B, o interceptador descreve uma semi-elipse t_i , e o tempo gasto nessa etapa é dado por: $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{R_{c1} + R_{c2}}{2} \right)^{3/2}$. O tempo correspondente para que o

veículo alvo se desloque de um ângulo $(\pi - \theta)$ radianos é:

$$t_a = \frac{(\pi - \theta)R_{c1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}}. \text{ Para que ambos os veículos se encontrem em}$$

B no mesmo instante, deve-se ter: $t = t_a$. Assim, pode-se concluir que para se dar início a esse processo de transferência:

$$\theta = \pi \left\{ 1 - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R_{c2}}{R_{c1}} + 1 \right) \right]^{3/2} \right\}.$$

2.2 Método Direto Externo

O Método Direto Externo utiliza uma semi-elipse de transferência externa entre o veículo alvo e o interceptador para a realização da manobra de rendez-vous.

Quando o interceptador cruza a linha dos nodos em A, sua velocidade é impulsivamente aumentada (ΔV_1) para colocá-lo em uma primeira elipse de transferência (t_1) com o apogeu em C. Nesse ponto, os planos orbitais do alvo e do interceptador são alinhados através da aplicação de um impulso ΔV_α e a velocidade deste último é incrementada em ΔV_2 para colocá-lo na segunda elipse de transferência (t_2), cujo perigeu é o próprio ponto de rendez-vous B. B_0 é o ponto onde o alvo deve estar localizado no início da manobra. Em B, o interceptador é posto na órbita circular final através da aplicação de um impulso ΔV_3 e o rendez-vous é completado. Quando a manobra é iniciada, o alvo deve estar atrasado com respeito ao interceptador de um

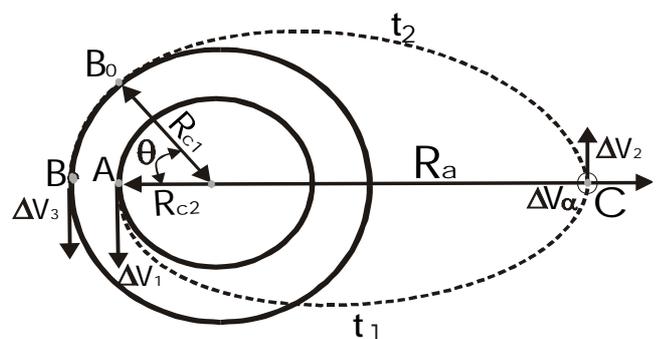


Fig. 2 - Encontro de veículos espaciais pelo Método Direto Externo

ângulo θ (Figura 2).

O incremento total é dado por:

$$\Delta V = |\Delta V_1| + |\Delta V_\alpha| + |\Delta V_2| + |\Delta V_3|.$$

As equações utilizadas são:

$$R_a = n \cdot R_{c1} \quad (7)$$

$$a_1 = \frac{R_{c2} + R_a}{2}, \quad a_2 = \frac{R_{c1} + R_a}{2} \quad (8)$$

$$V_{a1} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_a} - \frac{\mu}{a_1}}, \quad V_{p1} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_{c2}} - \frac{\mu}{a_1}},$$

$$V_{a2} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_a} - \frac{\mu}{a_2}}, \quad V_{p2} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_{c2}} - \frac{\mu}{a_2}} \quad (9)$$

$$\Delta V_\alpha = 2V_{a1} \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \quad (10)$$

$$V_{c1} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{c1}}}, \quad V_{c2} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{c2}}} \quad (11)$$

$$\Delta V_3 = V_{c1} - V_{p2}, \quad \Delta V_1 = V_{p1} - V_{c2}, \quad \Delta V_2 = V_{a2} - V_{a1} \quad (12)$$

$$R_{pt} = R_{c2}; \quad R_{a1} = R_{a2} = R_a; \quad R_{p2} = R_{c1}. \quad (13)$$

Onde:

n = constante de proporcionalidade entre R_a e R_{c1} ;

R_a = raio do apogeu das órbitas t_1 e t_2 ;

R_{a1} = raio do apogeu da órbita 1;

R_{a2} = raio do apogeu da órbita 2;

R_{p1} = raio do perigeu da órbita 1;

R_{p2} = raio do perigeu da órbita 2;

a_1 = semi-eixo maior da elipse de transferência t_1 ;

a_2 = semi-eixo maior da elipse de transferência t_2 ;

V_{a1} = velocidade no apogeu da elipse de transferência t_1 ;

V_{a2} = velocidade no apogeu da elipse de transferência t_2 ;

V_{p1} = velocidade no perigeu da elipse de transferência t_1 ;

V_{p2} = velocidade no perigeu da elipse de transferência t_2 .

O tempo gasto pelo interceptador para ir de A até B é dado por:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left\{ \left(\frac{R_a + R_{c2}}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{R_a + R_{c1}}{2} \right)^{3/2} \right\}.$$

O tempo gasto pelo alvo para chegar em B é: $t_a = \frac{(2\pi - \theta) R_{c1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$. Para que ambos os

veículos se encontrem no mesmo instante, deve-se ter: $t = t_a$; de onde se conclui que:

$$\theta = \pi \left\{ \frac{1}{R_{c1}^{3/2}} - \left[\left(\frac{R_{c1} + R_a}{2} \right)^{3/2} \right] + \left[\left(\frac{R_{c2} + R_a}{2} \right)^{3/2} \right] - 2 \right\}.$$

2.3 Método Indireto

O Método Indireto utiliza uma órbita intermediária entre o alvo e o interceptador, na qual o interceptador permanece até que o alvo se encontre na posição correta para que a manobra de rendez-vous se inicie.

Para colocar o interceptador em uma órbita elíptica de transferência t_1 é feito um incremento impulsivo de velocidade no ponto A (ΔV_1). Em B é feita a correção dos planos através da aplicação de um impulso ΔV_α e é dado um incremento de

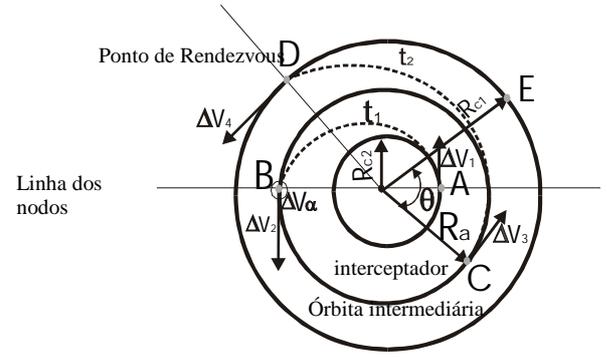


Fig. 3 - Encontro de veículos espaciais pelo Método Indireto.

velocidade (ΔV_2) para o interceptador entrar em uma órbita circular intermediária, coplanar com a trajetória do alvo. Nessa órbita intermediária o interceptador esperará o veículo alvo até estarem defasados de um ângulo θ , quando então o rendez-vous é efetuado por meio de uma segunda elipse de transferência t_2 , aplicando-se um impulso em C (ΔV_3). Em D, o Rendez-vous é completado com um aumento de velocidade (ΔV_4), aplicado como descrito no Método Direto Interno.

O incremento total é dado por:

$$\Delta V = |\Delta V_\alpha| + |\Delta V_1| + |\Delta V_2| + |\Delta V_3| + |\Delta V_4|.$$

As equações utilizadas para esses cálculos são:

$$a_1 = \frac{R_{c2} + R_a}{2}, \quad a_2 = \frac{R_{c1} + R_a}{2} \quad (14)$$

$$V_{a1} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_a} - \frac{\mu}{a_1}}, \quad V_{p1} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_{c2}} - \frac{\mu}{a_1}},$$

$$V_{a2} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_a} - \frac{\mu}{a_2}}, \quad V_{p2} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_{c2}} - \frac{\mu}{a_2}} \quad (15)$$

$$\Delta V_\alpha = 2V_{a1} \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \quad (16)$$

$$V_{c1} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{c1}}}, \quad V_{c2} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{c2}}}, \quad V_{ct} = \sqrt{\frac{\mu}{R_a}} \quad (17)$$

$$\Delta V_1 = V_{p1} - V_{c2}, \quad \Delta V_2 = V_{ct} - V_{a1},$$

$$\Delta V_3 = V_{p2} - V_{ct}, \quad \Delta V_4 = V_{c1} - V_{a2} \quad (18)$$

$$R_{p1} = R_{c2}; \quad R_{a1} = R_{p2} = R_a = R_{ct}; \quad R_{a2} = R_{c1} \quad (19)$$

Onde:

R_{ct} = raio circular da órbita intermediária;

V_{ct} = velocidade circular da órbita intermediária.

O ângulo θ que irá determinar a posição relativa entre o alvo e o interceptador é obtido igualando-se o tempo gasto pelo interceptador para ir de C a D com o tempo gasto pelo alvo para ir de E a D. O resultado é:

$$\theta = \pi \left\{ 1 - \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_a}{R_{c1}} \right) \right]^{3/2} \right\}.$$

2.4 Método Numérico

Após o estudo das soluções analíticas encontradas na literatura, o próximo passo consiste em um estudo numérico do problema. As condições iniciais para resolver este problema são: as órbitas do alvo e do interceptador, incluindo-se a informação requerida para especificar as suas posições nas órbitas (a anomalia verdadeira ou qualquer outra quantidade equivalente) e o tempo máximo de voo permitido para a manobra. A solução que é procurada é a transferência de órbita que satisfaça todas as condições iniciais e que necessite de um impulso total mínimo (a adição das magnitudes de todos impulsos aplicados). Para obter a solução deste problema, é formulado e resolvido o Problema de *Lambert* associado com cada transferência particular. Com as soluções dadas por esta rotina, é possível calcular a magnitude de todos os impulsos que devem ser aplicados. O método aqui utilizado foi desenvolvido em Prado (1996) e é utilizado para a comparação com as soluções existentes na literatura, sem nenhuma alteração.

A Figura 4 mostra a geometria da manobra. Supõe-se que exista uma nave espacial em uma órbita Kepleriana chamada órbita inicial. Deseja-se fazer um rendez-vous com outra nave espacial que se encontra em uma órbita Kepleriana final, que é coplanar com a órbita inicial. Para efetuar essa transferência, parte-se do ponto P_1 (r_1, θ_1), onde é aplicado um impulso com magnitude ΔV_1 que faz um ângulo ϕ_1 com a direção transversa local. A órbita de transferência cruza a órbita final no ponto P_2 (r_2, θ_2), onde é aplicado um impulso com magnitude ΔV_2 que faz um ângulo ϕ_2 com a direção transversa local. Existem muitas alternativas para resolver este problema, como as mostradas na seções anteriores. Para a pesquisa numérica presente, o modelo assumido para o controle do interceptador é uma manobra bi-impulsiva, onde o primeiro impulso é aplicado em um tempo t_0 , de tal modo que o interceptador e o alvo se encontrem em t_f , quando o segundo impulso é então aplicado com a intenção de colocar o interceptador na mesma órbita do alvo. A Figura 4 mostra um exemplo de uma transferência direta, onde o interceptador intercepta o alvo antes de fazer uma revolução completa ao redor do corpo atrator. Transferências onde uma ou mais revoluções são completadas pelo interceptador antes de se encontrar com o alvo também são possíveis e são consideradas no presente trabalho.

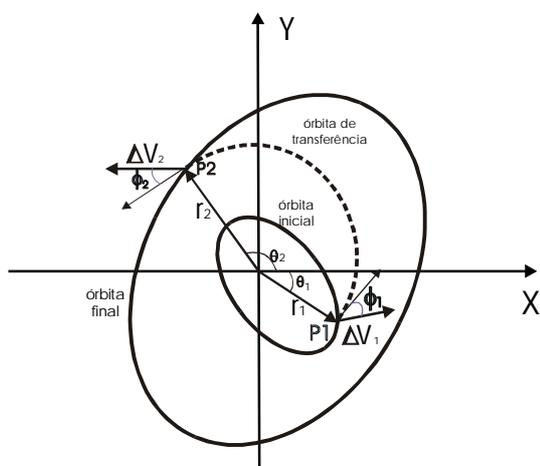


Fig.4 - Geometria do “Problema de Lambert com Mínimo Delta-V”

A questão considerada aqui é como (magnitude e direção) e quando executar esses dois controles impulsivos para obter a manobra que tem o consumo de combustível mínimo (ΔV total

mínimo). Para responder esta pergunta, foi utilizado o procedimento descrito a seguir. As órbitas inicial e final são determinadas, como uma condição do procedimento. A informação sobre a posição das espaçonaves em suas órbitas (a anomalia verdadeira ou alguma quantidade equivalente) também é requerida e é dada. Então, os parâmetros seguintes são especificados: o tempo inicial da manobra t_0 , um valor para o limite inferior do tempo de transferência ($t_f - t_0$), um valor para o limite superior do mesmo tempo de transferência, um valor para o incremento do tempo de transferência e o número de revoluções do interceptador antes de encontrar o alvo. Com esses parâmetros, aplica-se um algoritmo, cujas etapas são (Prado, 1996): i) O valor do limite inferior para o tempo de transferência é considerado como sendo o tempo de transferência $\Delta \tau$ da manobra; ii) Utilizando-se as equações básicas da Mecânica Celeste, os elementos Cartesianos do interceptador no momento inicial da manobra t_0 são calculados. Esta posição é chamada de \vec{r}_i e esta velocidade de \vec{v}_i ; iii) Utilizando-se novamente as equações básicas da Mecânica Celeste, os elementos Cartesianos do alvo no momento final da manobra $t_f = t_0 + \Delta t$ são calculados. Esta posição é chamada de \vec{r}_f e esta velocidade de \vec{v}_f ; iv) Assume-se um valor para o número de revoluções K do interceptador (número de órbitas completas que o interceptador realiza durante a manobra). Então, com $\vec{r}_i, \vec{v}_i, \vec{r}_f, \vec{v}_f, \Delta t$ e K , têm-se todos os dados necessários para resolver o Problema de *Lambert*. A solução do Problema de *Lambert* dá a órbita de transferência, o tempo de transferência e o impulso requerido, podendo ter nenhuma, uma ou duas soluções; v) Então, soma-se um passo de tempo para o tempo de transferência e retorna-se ao segundo passo com o novo tempo de transferência Δt .

Para estudar a manobra de rendez-vous ótima serão executadas várias simulações utilizando o algoritmo descrito acima. Todos os valores serão expressos em unidades canônicas, e os ângulos em graus. As unidades canônicas são adimensionais. A nomenclatura utilizada aqui é: a = semi-eixo maior, e = excentricidade, i = inclinação da órbita, Ω = argumento do nodo ascendente, ω = argumento do perigeu, T é o tempo da passagem pelo perigeu. O subscrito “c” representa a órbita do interceptador e o subscrito “t” representa a órbita do alvo.

3 RESULTADOS

Os métodos acima foram implementados e testados. Resultados preliminares foram apresentados em Felipe e Prado (1997) e resultados completos podem ser encontrados em Felipe (2000). Os métodos aqui mostrados serão aplicados com o objetivo de identificar o consumo (magnitude do impulso total aplicado) e o tempo requerido para cada manobra. Lembrando sempre que: i) R_{c1} que representa o raio da órbita circular do veículo alvo; ii) R_{c2} o raio da órbita circular do veículo interceptador; iii) $\Delta \alpha$ representa a inclinação entre as órbitas. Para o Método Indireto existe um parâmetro extra, o raio da órbita intermediária de estacionamento que deve ser variado e cujo valor deve estar entre os raios das órbitas inicial e final. Para o Método Direto Externo também é requerido um parâmetro extra para ser considerado, que é a distância entre o ponto C (ponto de aplicação do impulso que altera a inclinação do plano orbital) e o centro de gravidade (centro da Terra). Com esses dados é possível oferecer informações para um analista de missões tomar uma decisão sobre qual a melhor estratégia a ser adotada. Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 5 a 14.

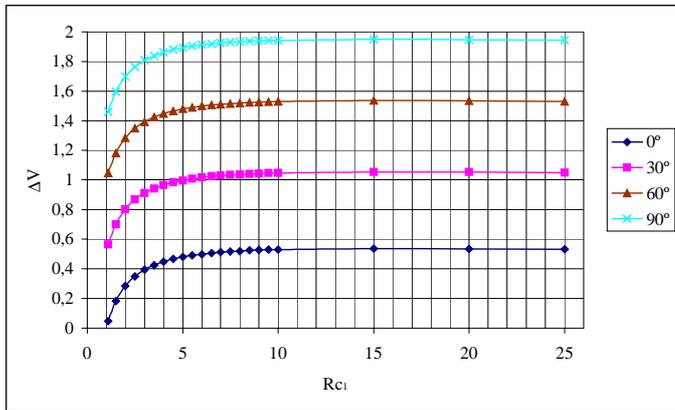


Fig. 5 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Direto Interno ($R_{c2} = 1,0$)

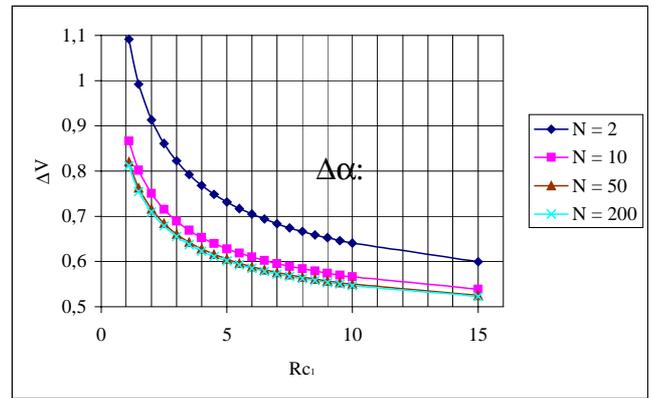


Fig. 9 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Direto Externo ($R_a = N \times R_{c1}$) para $R_{c2} = 1,0$ e $\Delta\alpha = 90^\circ$

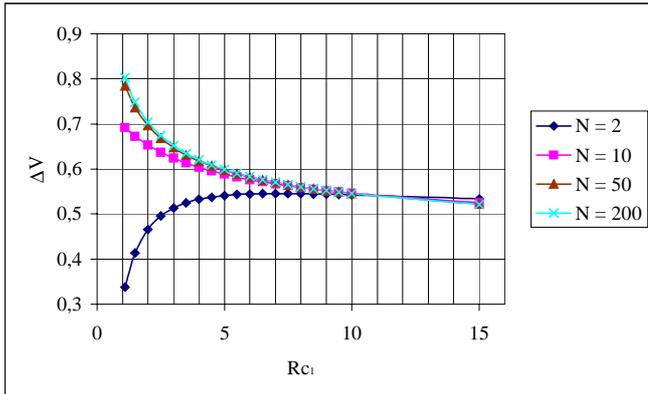


Fig. 6 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Direto Externo ($R_a = N \times R_{c1}$) para $R_{c2} = 1,0$ e $\Delta\alpha = 0^\circ$

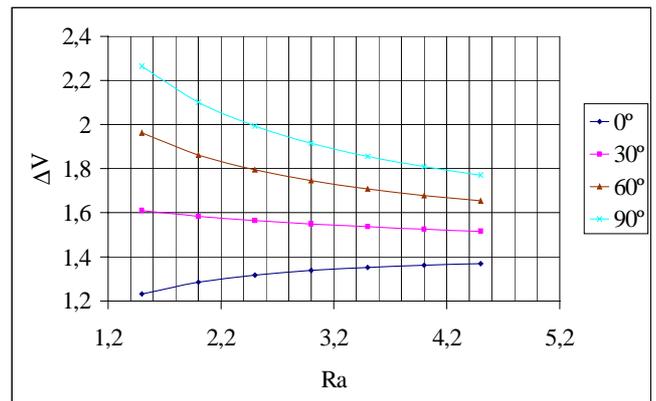


Fig. 10 - Consumo (ΔV) vs. R_a para o Método Indireto ($R_{c2} = 1,0$) com $R_{c1} = 5,0$.

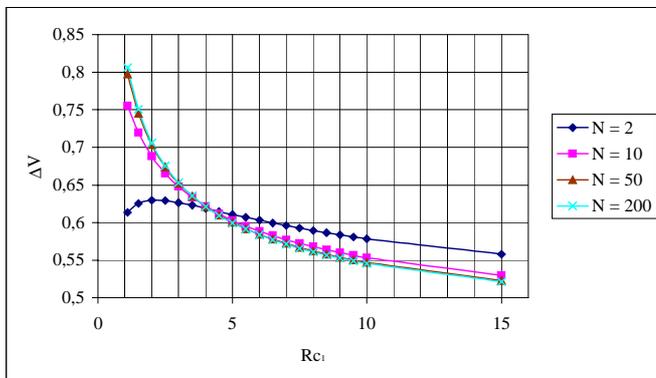


Fig. 7 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Direto Externo ($R_a = N \times R_{c1}$) para $R_{c2} = 1,0$ e $\Delta\alpha = 30^\circ$

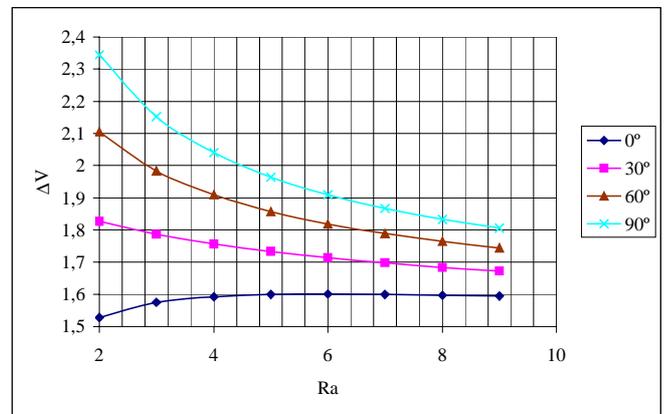


Fig. 11 - Consumo (ΔV) vs. R_a para o Método Indireto ($R_{c2} = 1,0$) com $R_{c1} = 10,0$.

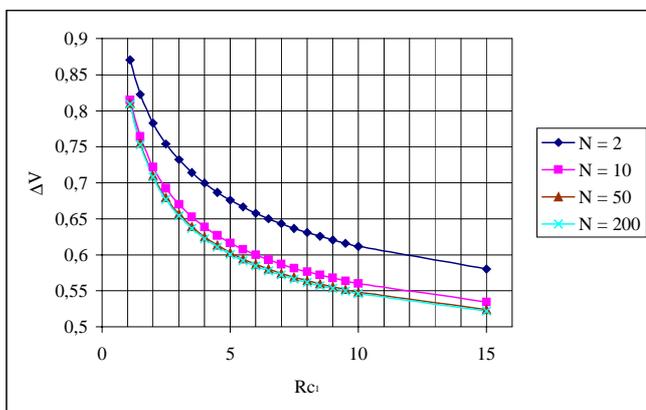


Fig. 8 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Direto Externo ($R_a = N \times R_{c1}$) para $R_{c2} = 1,0$ e $\Delta\alpha = 60^\circ$

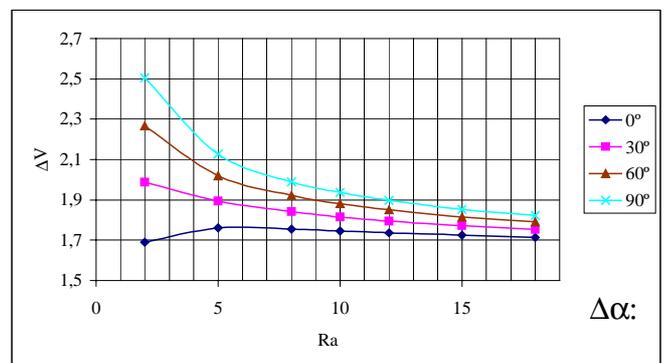


Fig. 12 - Consumo (ΔV) vs. R_a para o Método Indireto ($R_{c2} = 1,0$) com $R_{c1} = 20,0$.

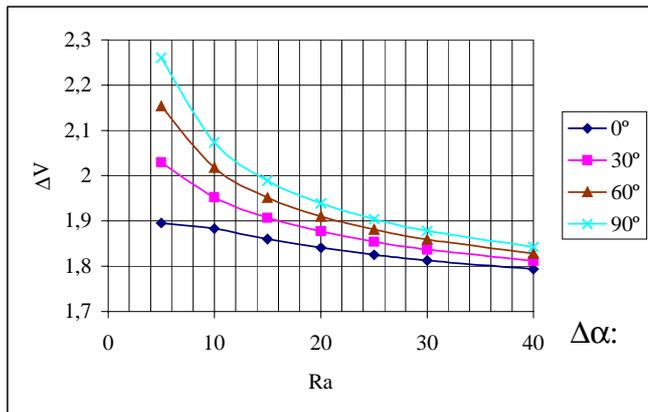


Fig. 13 - Consumo (ΔV) vs. R_a para o Método Indireto ($R_{c1} = 1,0$) com $R_{c2} = 50,0$.

Para o Método Direto Interno nota-se que o consumo de combustível cresce com o aumento de R_{c1} até o valor de $R_{c1} = 15,0$. Uma manobra de maior magnitude requer um maior consumo de combustível para a sua realização. Nesse aspecto, a Figura 5 serve para quantificar um resultado já esperado. A partir de $R_{c1} = 20,0$, o consumo passa a diminuir com o aumento de R_{c1} . A razão desse fato é que com o aumento de R_{c1} , a magnitude do primeiro impulso aumenta para que o veículo atinja a órbita final, por outro lado a magnitude do segundo impulso diminui, devido à maior distância do centro de atração. Essa economia aumenta com R_{c1} , de tal forma que a partir de um certo valor de R_{c1} o ganho no segundo impulso compensa a perda no primeiro e o saldo líquido é uma manobra mais econômica. Esse fato é esperado, pois é também observado nas conhecidas manobras de Hohmann, que consiste em uma transferência bi-impulsiva com tempo livre. Conforme pode ser visto em Marec (1979), a manobra de Hohmann deixa de ser ótima localmente quando $R_{c1}/R_{c2} > 15,58$, pelas mesmas razões físicas aqui apontadas. Não existe diferença entre as manobras com variação de inclinação, porque nesse método a mudança de plano orbital ocorre com um impulso na linha de nodos na altitude da órbita inicial, que é a mesma para todas as situações estudadas. Existe um valor constante adicionado ao consumo para efetuar as mudanças de plano orbital.

Para o Método Direto Externo, pode ser visto a partir da Figura 6 que, no caso $\Delta\alpha = 0^\circ$ e $N = 2$, o consumo cresce com R_{c1} até o valor $R_{c1} = 7,0$ e depois passa a decrescer. A razão é a mesma explicada no caso anterior: com o aumento de R_{c1} o consumo no primeiro e segundo impulsos aumentam, mas o do terceiro impulso diminui, de tal forma que existe um valor para R_{c1} no qual o saldo líquido passa a ser positivo. Com o distanciamento de R_a (aumento de N) o ganho aumenta e desde o primeiro ponto estudado ($R_{c1} = 1,1$) o saldo já é positivo. A Figura 6 também mostra que existe um valor de ($R_{c1} = 15,0$) a partir do qual é compensador enviar o veículo até uma grande distância para efetuar a manobra. Nota-se também que, quando ocorre esse fato a mudança da estratégia ótima passa diretamente do menor valor simulado ($N = 2$) para o maior valor simulado ($N = 200$).

A Figura 7 mostra que, quando existe uma mudança no plano orbital, o ponto de inversão de consumo para um valor de N fixo ocorre mais cedo ($R_{c1} = 4,0$). Da mesma forma, a manobra mais econômica para diferentes valores de N ocorre em $N = 200$ para valores menores de R_{c1} ($= 4,5$). A razão desses dois fatos é que a manobra de alteração de plano orbital é feita em R_a e uma grande economia é gerada por um valor da força elevado de R_a , devido à maior distância desse ponto ao centro

de atração. Esse fato é confirmado pelas Figuras 8 e 9, pois desde o primeiro valor estudado, a manobra é mais econômica para o caso $N = 200$. A mudança direta da estratégia ótima do menor valor simulado ($N = 2$) para o maior valor ($N = 200$) também ocorre aqui. As manobras com $N = 200$ significam que o apogeu da órbita elíptica de transferência está muito distante do centro de atração gravitacional. A medida que N aumenta a manobra se aproxima da transferência bi-parabólica (Marec, 1979) aonde as duas órbitas intermediárias são parábolas e N é infinito.

Para o Método Indireto, as Figuras 10 a 13 mostram que, para o caso coplanar ($\Delta\alpha = 0^\circ$), é a amplitude da manobra que decide o ponto de menor consumo. Para manobras de pequena amplitude o consumo aumenta com R_a , dado que a manobra ideal seria a manobra sem a existência da órbita intermediária, logo R_a tendendo a R_{c2} apresenta a maior economia. Para manobras de grande amplitude a tendência é executar o segundo impulso o mais distante possível do centro de atração, logo a manobra mais econômica ocorre quando R_a é mais elevado. Com amplitudes intermediárias, o consumo deixa de ter variação monotônica com R_a e apresenta um máximo entre os extremos de R_a . Também nota-se que quando existe mudança no plano orbital a manobra de menor consumo é sempre a que possui o valor maior de R_a , pois a manobra de inclinação é efetuada nesse ponto. Conforme esperado, quanto maior a mudança de plano orbital maior é o consumo requerido, embora a diferença diminua com o crescimento de R_a .

A seguir o método numérico foi testado para os mesmos casos mostrados até aqui. A Figura 14 mostra os valores obtidos para essa manobra. Os resultados mostram que para a mudança plana ($\Delta\alpha = 0^\circ$) o consumo cresce com o aumento de R_{c1} , o que está de acordo com o esperado, pois quanto maior for a amplitude da manobra maior será o consumo necessário para atingi-la. Para as manobras que contêm variação do plano orbital existem dois fatores a serem considerados: de um lado uma maior amplitude requer um maior consumo para ser atingida, de outro lado a manobra de mudança de plano tem o seu consumo reduzido quando efetuada mais distante do centro atrator. Com esse fato, existem situações onde ocorrem oscilações no consumo ($\Delta\alpha = 90^\circ$), diminuição contínua com o aumento de R_{c1} ($\Delta\alpha = 30^\circ$) ou até mesmo crescimento contínuo ($\Delta\alpha = 60^\circ$). Comparando esse método e todos os anteriormente estudados, podemos ver que o Método Numérico apresenta resultados muito semelhantes ao Método Direto Interno para as manobras planas. Isso ocorre devido a ambos os métodos serem bi-impulsivos. Já no caso de manobras com mudança de plano, o Método Direto Externo é superior aos demais (inclusive o Numérico). Isso se explica pela redução do consumo requerido pela mudança de plano, por esta ser efetuada mais afastada do centro de atração.

É preciso também levar em conta um limite prático existente nas simulações realizadas com o método numérico. Como o método é bi-impulsivo com tempo livre, em muitas situações a solução ótima se encontra no infinito, aonde a mudança orbital tende a zero. Como é necessário colocar um limite no tempo de manobra para a realização das simulações numéricas, isso descarta a solução teórica ótima e passamos a obter a melhor solução possível dentro do limite de tempo imposto. A Figura 14 foi construída com o limite de tempo de 100 unidades canônicas. Foram feitas algumas simulações com limites maiores e elas demonstram a existência de manobras com

consumos menores, principalmente para valores de R_{c1} maiores.

Fazendo uma análise comparativa entre os métodos verifica-se que o Método Direto Externo é superior em todas as situações estudadas aonde existe variação do plano orbital e para valores de R_{c1} acima de 15,0 no caso coplanar.

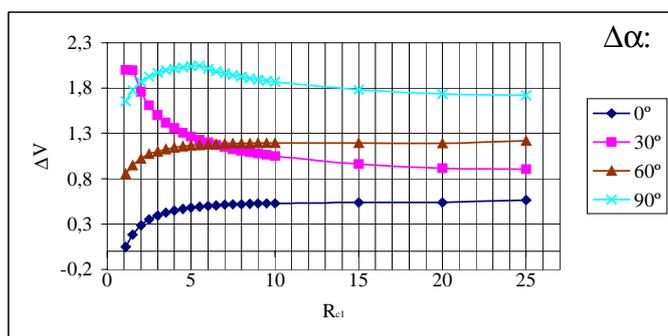


Fig. 14 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Numérico ($R_{c2} = 1,0$).

4 CONCLUSÕES

Conforme esperado, um aumento na inclinação entre os planos das duas órbitas envolvidas na manobra demanda um maior custo de combustível para a realização da manobra. A velocidade desse aumento varia de método para método. Para os Métodos Direto Interno e Indireto o aumento é muito rápido. Para o Método Direto Externo esse aumento é pequeno. A razão física desse fato é que a manobra de mudança de plano deste método é feita em um ponto (C) distante da Terra. Como esse consumo é diretamente proporcional à velocidade do veículo no ponto da manobra, ele decresce com a distância entre o veículo e a Terra. Pode-se também notar que o custo de uma correção de inclinação de plano orbital é bastante elevado, se comparado ao custo de uma correção de semi-eixo maior. A razão desse fato reside na necessidade de efetuar uma rotação no vetor velocidade para alterar o plano orbital e este custo é proporcional à velocidade orbital do veículo espacial naquele ponto, que é elevada.

No Método Direto Interno, nota-se que, a medida que o veículo se afasta de $R_{c1} = 1,0$ o consumo de combustível vai aumentando em todos os casos, pois o alvo está sendo afastado da Terra e por isso, precisa-se de um impulso maior para a órbita de transferência atingi-lo. Esse resultado é esperado, porém as simulações aqui efetuadas servem para quantificar essas variações. Esse fato também ocorre para o Método Direto Externo no caso $N = 2$. Para $N \geq 10$, o consumo diminuiu quando aumenta-se R_{c1} , porque $R_a = N \times R_{c1}$ e como o método é externo quanto mais longe estiver o alvo menos a órbita de transferência sofre a influência da gravidade, fazendo diminuir o valor do impulso. Para o Método Indireto, pode-se notar que mantendo-se R_{c1} constante e aumentando-se R_a o consumo aumenta, porque R_a é o raio da órbita interna, mostrando-se igual ao Método Direto Interno.

Assim sendo, o estudo feito nesse trabalho contribui para servir de apoio para a decisão do método a ser utilizado em uma manobra real, através de uma avaliação comparativa dos métodos que já se encontravam disponíveis na literatura, porém que não possuíam resultados que permitissem uma escolha em caso de uma missão real. O desdobramento esperado é justamente a facilidade de uma tomada de decisão por parte de um analista de missão, após consulta aos resultados numéricos aqui apresentados.

Agradecimentos

Os autores agradecem a Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP pelo auxílio concedido nos contratos 1995/9290 e 97/13739-0 e o Conselho Nacional de Desenvolvimento e Tecnológico (CNPq) pelo contrato 300221/95-9.

REFERÊNCIAS

- Ball, K.J. & Osborne, F. (1967). *Space vehicle dynamics*, University Press-Oxford, Oxford.
- Felipe, G. (2000). *Manobras Orbitais Aplicadas aos Problemas de dois e Três Corpos*. Dissertação de Mestrado. São José dos Campos, fevereiro.
- Felipe, G. e Prado, A.F.B.A. (1997). Manobras orbitais de Rendez-vous. *Anais do XX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC)*, setembro 08-12, Gramado, RS.
- Gross, L. R. E Prussing, J. E. (1974). Optimal multiple-impulse direct ascent fixed-time Rendez-vous, *AIAA Journal*, vol.12, n. 7, pp. 885-889.
- Kechichian, J. A. (1993). Minimum-fuel time-fixed Rendez-vous using constant low thrust, *AAS paper* 93-130.
- Marec, J.P. (1979). *Optimal Space Trajectories*, New York, NY, Elsevier.
- McCue, G. A. (1963). Optimum two-impulse orbital transfer and Rendez-vous between inclined elliptical orbits, *AIAA Journal*, vol. 1,n. 8, pp. 1865-1872.
- Mirfakhraie, K. e Conway, B. A. (1994). Optimal Cooperative time-fixed impulsive Rendez-vous, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 17, n. 3, pp. 607-613.
- Prado, A.F.B.A. (1996). Optimal Rendez-vous Maneuvers for Space Vehicles. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, vol. 18, n. 3, pp. 297-301.
- Prussing, J. E. (1969). Optimal four-impulse fixed-time Rendez-vous in the vicinity of a circular orbits”, *AIAA Journal*, vol. 7, n. 5, pp. 928-935.
- Prussing, J. E. (1970). Optimal two- and three-impulse fixed-time Rendez-vous in the vicinity of a circular orbit”, *AIAA Journal*, vol. 8, n. 7, pp. 1221-1228.
- Prussing, J. E. e Chiu, J. H. (1986). Optimal multiple-impulse time-fixed Rendez-vous between circular orbits”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 9, n. 1, pp. 17-22.
- Stern, S. A. e Fowler, W. T. (1985). Path constrained Rendez-vous near large space Structures”, *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 22, pp. 548-553.
- Tauer, D. R., Coverstone-Carroll, V. e Prussing, J. E. (1995). Optimal impulse time-fixed orbital Rendez-vous and interception with path constraints, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 18, n. 1, pp. 54-60.
- Zanardi, M.C. (1988). *Fundamentos da Astronáutica*, ITA, São José dos Campos, vol. 21, Cap. VIII.