

EXEMPLOS DE BIFURCAÇÕES ELEMENTARES

Anna Oertel Spinelli* e Mário César Ricci

(*) Programa de Iniciação Científica, PIBIC-CNPq/INPE

e-mails: civ99001@feg.unesp.br; mcr@dem.inpe.br

Na dinâmica, a mudança no número de soluções de uma equação diferencial, quando um parâmetro é variado, é chamada *bifurcação*. O comportamento das bifurcações de equações diferenciais específicas podem ser encapsuladas em certas figuras chamadas *diagramas de bifurcação*. Determinados por um procedimento numérico, estes diagramas permitem a descoberta de regimes interessantes de parâmetros de um sistema dinâmico.

Este trabalho introduz um pouco de conhecimento da *teoria das bifurcações* (ou seja, o estudo de possíveis alterações na estrutura das órbitas de uma equação diferencial de parâmetros variáveis) e consiste de uma coleção de exemplos específicos escolhidos para ilustrar algumas das idéias principais da teoria de bifurcações. A despeito da simplicidade observa-se que esses exemplos capturam a essência do caso geral. Os tipos de bifurcações abordados neste trabalho são:

- **Equilíbrio hiperbólico:** observa-se, para qualquer valor do parâmetro, que há um *ponto de equilíbrio hiperbólico* o qual é *assintoticamente estável*.
- **Bifurcação Sela-nó:** independente de quão pequena é a variação do parâmetro, à partir de um valor crítico, o número de órbitas varia: há dois pontos de equilíbrio para valores menores que o valor crítico e nenhum para valores maiores.
- **Bifurcação transcritical:** existe um valor para o parâmetro no qual dois equilíbrios se coalescem na origem (ponto de equilíbrio instável não-hiperbólico). Para valores do parâmetro maiores que o valor crítico a origem torna-se instável transferindo sua estabilidade para outro ponto de equilíbrio.
- **Histerese:** uma importante observação com relação a este exemplo é que o sistema pratica um salto para dois valores diferentes do parâmetro; e mais, o valor de parâmetro no qual o salto acontece é determinado pela direção em que o parâmetro físico é variado! Este fenômeno se refere a *hysteresis* e a parte na figura que nos lembra um paralelogramo é chamado de *hysteresis loop*.
- **Bifurcação Pitchfork:** nesse caso a origem é sempre um ponto de equilíbrio. Entretanto, quando o parâmetro passa por um valor crítico o equilíbrio perde a sua estabilidade dando origem a dois novos ramos estáveis que coexistem com o equilíbrio trivial. A bifurcação *pitchfork* é chamada *supercritical* quando os pontos de equilíbrio adicionais, que surgem no valor de bifurcação, ocorrem para valores do parâmetro nos quais o ponto de equilíbrio original é instável. Quando os pontos de equilíbrio adicionais ocorrem para valores nos quais o ponto de equilíbrio original é estável a bifurcação é chamada *subcritical*.
- **Fold ou cusp:** a *dobra* e a *cúspide* são oriundas da determinação do equilíbrio de uma equação diferencial cúbica simples que depende de dois parâmetros reais. O diagrama de bifurcações é uma superfície, que apresenta uma dobra, no espaço de parâmetros e a cúspide é a projeção da dobra no domínio. Interessante notar que esse caso inclui casos anteriores de bifurcação: histerese, *pitchfork*, sela-nó supercrítica.

Referências:

BAKER, G.L.; GOLLUB, J.P. Chaotic Dynamics – an introduction
Cambridge University Press, 1990

HALE, J.K.; KOÇAK, H. Dynamics and Bifurcations
Springer-Verlag, 1991