



Ministério da
Ciência e Tecnologia



GOVERNO FEDERAL

INPE-7033-TDI/663-TDI

**ESTUDO NUMÉRICO DA CAPTURA
GRAVITACIONAL TEMPORÁRIA UTILIZANDO O
PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS**

Ernesto Vieira Neto

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espacial/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Atair Rios Neto, aprovada em 21 de agosto de 1998.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/>>

INPE
São José dos Campos
1999

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):**Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Membros:

Dr^a Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr^a Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr^a Regina Célia dos Santos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr. Horácio Hideki Yanasse - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Deicy Farabello - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Vivéca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da
Ciência e Tecnologia



INPE-7033-TDI/663-TDI

**ESTUDO NUMÉRICO DA CAPTURA
GRAVITACIONAL TEMPORÁRIA UTILIZANDO O
PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS**

Ernesto Vieira Neto

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espacial/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Atair Rios Neto, aprovada em 21 de agosto de 1998.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/>>

INPE
São José dos Campos
1999

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Viera Neto, Ernesto .

N384e Estudo Numérico da captura gravitacional temporária utilizando o problema restrito de três corpos / Ernesto Vieira Neto .
– São José dos Campos : INPE, 1999.
224 p. ; (INPE-7033-TDI/663-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espacial/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1999.

Orientadores : Drs. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Atair Rios Neto.

1. Captura gravitacional. 2. Problema restrito de três corpos .
3. Regulação. 4. Astrodinâmica. I.Título.

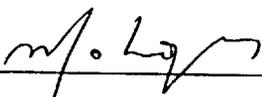
CDU 681.5.01

Copyright © 1999 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão escrita do INPE, com exceção de qualquer material fornecido especificamente com o propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 1999 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, microfilming, or otherwise, without written permission from INPE, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

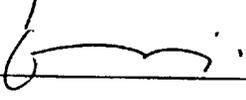
Aprovado pela Banca Examinadora em
cumprimento a requisito exigido para a
obtenção do Título de **Doutor em**
ETE/Mecânica Espacial e Controle

Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza



Presidente

Dr. Atair Rios Neto



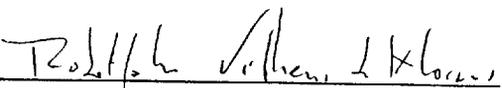
Orientador

Dr. Antonio F. Bertachini A Prado



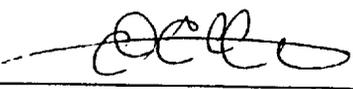
Orientador

Dr Rodolpho Vilhena de Moraes



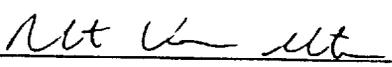
Membro da Banca

Dr. Othon Cabo Winter



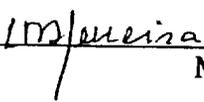
Membro da Banca

Dr. Roberto Vieira Martins



Membro da Banca
Convidado

Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira



Membro da Banca
Convidado

Candidato (a): Ernesto Vieira Neto

São José dos Campos, 21 de agosto de 1998.

Não se pode ensinar tudo a alguém, pode-se apenas ajudá-lo a encontrar a si mesmo.

Galileu Galilei

ou

Em estado de dúvida, suspenda o juízo.

Pitágoras

Dedico este trabalho aos meus pais:

Sebastião Vieira

Cleide Maria Vieira

À minha esposa:

Ísis Aimée Torello

E a minha filha:

Júlia Torello Vieira

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) pelas facilidades.

À CAPES pela bolsa de pesquisa.

Ao Dr. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado e ao Dr. Atair Rios Neto, meus orientadores, pela orientação, pelo apoio e espírito científico.

E aos colegas e amigos INPE, pela amizade.

Ao Luiz Torello, Leda Maria Torello e Rogério Torello, por terem me acolhido no seio de sua família aqui em São José dos Campos.

RESUMO

Vindo de fora da esfera de influência gravitacional de um corpo celeste, um veículo espacial pode ter sua velocidade relativa a esse corpo reduzida ao ponto de fazer com que esse veículo permaneça por algum tempo em órbita em torno desse corpo celeste. Este mecanismo é conhecido como captura gravitacional temporária, e pode ser utilizado na redução de consumo de combustível numa transferência completa de um veículo em órbita da Terra para uma órbita em torno da Lua. Este trabalho apresenta um estudo sobre as forças que atuam no sistema e, utilizando o conceito da energia de dois corpos para estudar esse fenômeno, apresenta estudos paramétricos sobre o tempo de captura e a utilização da excentricidade nas manobras de captura gravitacional, tópicos ainda pouco explorados na literatura. Além disso, diversos fenômenos relativos a esse problema foram estudados em detalhes.

NUMERICAL STUDY OF TEMPORARY GRAVITATIONAL CAPTURE USING THE RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM

ABSTRACT

Coming from outside the gravitational sphere of influence of a celestial body, a spacecraft may have its relative velocity reduced, to the point of causing it to enter in a temporary orbit around this celestial body. This phenomenon is called temporary gravitational capture and can be used to reduce the fuel consumption in a complete transfer between the Earth and the Moon. This work studies the forces acting in this system and, using the method based in the two body energy concept, shows a parametric study about the time of flight and the eccentricity of the primaries in the gravitational capture maneuver. Several others facts related to this problem are also studied in detail.

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS
LISTA DE TABELAS
LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	21
1.1. Motivações do Trabalho	21
1.2. Organização do Trabalho	22
1.3. Contribuições do trabalho	24
CAPÍTULO 2 – A CAPTURA GRAVITACIONAL NO PROBLEMA DE TRÊS CORPOS	26
2.1. Introdução	26
2.2. Dinâmica do Problema Restrito de Três Corpos	26
2.2.1. Equações de Movimento do Problema Restrito Circular de Três Corpos	27
2.2.2. O Sistema de Coordenadas Adimensionais	30
2.2.3. A Integral de Jacobi	31
2.2.4. Pontos Lagrangianos	32
2.2.5. Curvas de Velocidade Zero	34
2.2.6. Regularização de Lemaître	36
2.2.6.1. Equações de Movimento Regularizadas	37
2.2.7. Equações de Movimento do Problema Restrito Elíptico de Três Corpos	39
2.3. Revisão Bibliográfica	40
2.4. Conceitos Básicos Relativos ao Problema de Captura Gravitacional	43
2.4.1. C3 (Energia de Dois Corpos)	45
2.4.2. Esfera de Influência	45
2.4.3. Coordenadas Adimensionais	46
2.4.4. Definição de Captura Gravitacional	46
2.4.5. Formas de Captura	47
CAPÍTULO 3 – VALIDAÇÃO DOS MODELOS DESENVOLVIDOS	49
3.1. Introdução	49
3.2. Descrição do Procedimento	49
3.3. Validação do Modelo Circular	51
3.4. Validação do Modelo Elíptico	61
CAPÍTULO 4 – TESTE DAS HIPÓTESES DE YAMAKAWA	64
4.1. Introdução	64
4.2. A Esfera de Influência	64
4.3. O Tempo Limite de Integração	68
4.4. Testes do Método de Integração Numérica	71
4.5. Conclusões Finais	74

CAPÍTULO 5 – ESTUDO DAS FORÇAS QUE ATUAM NO PROBLEMA DE CAPTURA GRAVITACIONAL	75
5.1. Introdução	75
5.2. Equações de Movimento e das Forças	75
5.3. Análise das Forças que Agem Sobre o Veículo Espacial	81
5.4. Comportamento das Forças Durante as Trajetórias	92
5.5. Conclusões	118
CAPÍTULO 6 – ESTUDO DE CAPTURAS COM O MENOR C3 POSSÍVEL	120
6.1. Introdução	120
6.2. Estudo do Valor de C3 Mínimo	120
6.3. Estudo da Influência do Valor de r_p	123
6.4. Estudo da Influência do Parâmetro de Massa	125
6.5. Conclusão	126
CAPÍTULO 7 – ANÁLISE NUMÉRICA DO TEMPO REQUERIDO PARA A CAPTURA GRAVITACIONAL	128
7.1. Introdução	128
7.2. Escolha dos Parâmetros	129
7.2.1. Tempo de Captura Para C3 Fixo	129
7.2.2. Tempo de Captura em Função de α	133
7.2.3. Tempo de Captura em Função da Periluna	143
7.2.4. Tempo de Captura em Função do Parâmetro Gravitacional	151
7.3. Problemas de Otimização	153
7.4. Considerações finais	156
CAPÍTULO 8 – ESTUDO NUMÉRICO DOS EFEITOS DA EXCENTRICIDADE DOS PRIMÁRIOS NO PROBLEMA DE CAPTURA GRAVITACIONAL	158
8.1. Introdução	158
8.2. Configuração dos Parâmetros no Problema Elíptico	158
8.3. Energia Mínima de Captura	159
8.4. Efeitos da Excentricidade no Tempo Requerido para a Captura	165
8.5. Problemas de Otimização	169
8.6. Conclusões	173
CAPÍTULO 9 – SENSIBILIDADE DAS TRAJETÓRIAS DE CAPTURA GRAVITACIONAL TEMPORÁRIA	175
9.1. Introdução	175
9.2. Transferência Completa Terra-Lua	175
9.3. Classificação das Trajetórias de Captura Gravitacional	176
9.4. Estudo da Sensibilidade dessas Trajetórias	178
9.4.1. Erros na Magnitude da Velocidade	180
9.4.2 Erros na Direção da Velocidade	190
9.5. Conclusões	198

CAPÍTULO 10 – CONCLUSÃO	200
10.1. Introdução	200
10.2. Análise dos Capítulos.....	200
10.3. Conclusões	203
10.4. Propostas Para Pesquisas Futuras.....	204
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	205
APÊNDICE A –FORMULAÇÃO EM COORDENADAS POLARES DO PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS	209

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 – Sistema de coordenadas (inercial, ξ - η , e rotacional, x' - y') para o problema restrito circular de três corpos.....	28
2.2 – Pontos lagrangianos.....	33
2.3 – Regiões limites para velocidade zero.	36
2.4 – Capturas direta e retrógrada.	48
2.5 – Magnificação das capturas da Figura 2.4.	48
3.1 – Descrição dos parâmetros de captura.	50
3.2 – Órbita 1 no sistema rotacional.....	52
3.3 – Órbita 1 no sistema geocêntrico inercial.	52
3.4 – Figura 3-24 de Yamakawa (1992).....	53
3.5 – Ângulo da posição de entrada vs. C_3 na periluna.	54
3.6 – Figura 4-4 de Yamakawa (1992).....	54
3.7 – Trajetórias que produzem a descontinuidade em β entre 357.3° e 22.6°	55
3.8 – Magnificação do cúspide.....	56
3.9 – Trajetórias que produzem a descontinuidade entre $\beta = 5^\circ$ e $\beta = 178.8^\circ$	57
3.10 – Ângulo da posição de entrada vs. ângulo de posição da periluna.	58
3.11 – Semi-eixo maior vs. ângulo de posição da periluna.	58
3.12 – Figura 4-8 de Yamakawa (1992).....	59
3.13 – Semi-eixo maior vs. o ângulo da posição de saída.	60
3.14 – Influência de α no tipo de captura.....	60
3.15 – Trajetórias da descontinuidade.....	61
3.16 – Trajetórias obtidas para o problema restrito elíptico de três corpos.....	62
3.17 – Figura 3 de Benest (1970).	63
4.1 – Comportamento de C_3 em relação à distância da Lua para o valor inicial $C_3 = 0$	66
4.2 – Comportamento de C_3 em relação à distância da Lua para o valor inicial $C_3 = -0.1$	67
4.3 – Comportamento de C_3 em relação à distância da Lua para o valor inicial de $C_3 = -0.2$	68
4.4 – Comportamento de C_3 em relação ao tempo decorrido para o valor inicial de $C_3 = 0$	69
4.5 – Comportamento de C_3 em relação ao tempo decorrido para o valor inicial de $C_3 = -0.1$	70
4.6 – Comportamento de C_3 em relação ao tempo decorrido para o valor inicial de $C_3 = -0.2$	71
4.7 – Trajetória com a dinâmica D1 e com o método de integração I1.....	73
5.1 – Configuração das forças do problema restrito circular de três corpos.	76
5.2 – Força gravitacional devido a Terra na direção radial.	82
5.3 – Força gravitacional devido a Terra na direção transversal.	83
5.4 – Módulo da força gravitacional devido a Terra.	84
5.5 – Módulo da força gravitacional devido a Lua.	85
5.6 – Força gravitacional da Lua para as maiores distâncias.	86
5.7 – Força centrípeta na direção radial.	87
5.8 – Força centrípeta na direção transversal.	87
5.9 – Módulo da força centrípeta.....	88
5.10 – Força resultante das forças de gravidade devido a Terra e da centrípeta na direção transversal.....	89

5.11 – Força resultante das forças de gravidade devido a Terra e da centrípeta na direção radial.....	90
5.12 – Módulo da força de Coriolis.....	91
5.13 – Resultante das forças perturbativas.....	92
5.14 – Trajetória com $C3 = -0.15$ e $\alpha = 0^\circ$	94
5.15 – Força gravitacional devido a Terra para a primeira trajetória.....	95
5.16 – Força da gravidade da Lua para a trajetória 1.....	96
5.17 – Força centrípeta na primeira trajetória.....	97
5.18 – Resultante das forças de gravidade da Terra e centrípeta.....	98
5.19 – Força de Coriolis na primeira trajetória.....	99
5.20 – Segunda trajetória com $C3 = -0.15$ e $\alpha = 45^\circ$	100
5.21 – Força de gravidade devido a Terra na segunda trajetória.....	101
5.22 – Força da gravidade da Lua na segunda trajetória.....	102
5.23 – Força centrípeta na segunda trajetória.....	103
5.24 – Resultante das forças de gravidade da Terra e centrípeta para a segunda trajetória.....	104
5.25 – Força de Coriolis na segunda trajetória.....	105
5.26 – Terceira trajetória com condições finais de $C3 = -0.15$ e $\alpha = 90^\circ$	106
5.27 – Força da gravidade da Terra para a terceira trajetória.....	107
5.28 – Força de gravidade devido a Lua para a terceira trajetória.....	108
5.29 – Força centrípeta para a terceira trajetória.....	109
5.30 – Força resultante para a terceira trajetória.....	110
5.31 – Força de Coriolis para a terceira trajetória.....	111
5.32 – Trajetória com $C3 = -0.15$ e $\alpha = 0^\circ$, em captura retrógrada.....	112
5.33 – Força de gravidade da Terra para a quarta trajetória.....	113
5.34 – Força de gravidade da Lua para a quarta trajetória.....	114
5.35 – Força centrípeta para o terceiro caso.....	115
5.36 – Força resultante entre as forças de gravidade da Terra e centrípeta para a quarta trajetória.....	116
5.37 – Comportamento da força de Coriolis na quarta trajetória.....	117
6.1 – $C3$ mínimo do sistema Terra-Lua para capturas diretas e retrógradas.....	121
6.2 – Ampliação da descontinuidade perto de 60°	122
6.3 – Trajetórias com $C3 = -0.16$	123
6.4 – Valores mínimos de $C3$ para vários r_p na captura direta.....	124
6.5 – Valores mínimos de $C3$ para vários r_p na captura retrógrada.....	125
6.6 – Valores mínimos de $C3$ para diversos μ	126
7.1 – Tempo vs. α para valores pequenos de tempo.....	131
7.2 – Tempo vs. α para valores grandes de tempo.....	133
7.3 – Tempo de captura vs. $C3$. (Continua).....	134
7.3 – Tempo de captura vs. $C3$. (Continuação). (Continua).....	135
7.3 – Tempo de captura vs. $C3$. (Continuação). (Continua).....	136
7.3 – Tempo de captura vs. $C3$. (Continuação). (Continua).....	137
7.3 – Tempo de captura vs. $C3$. (Continuação). (Continua).....	138
7.3 – Tempo de captura vs. $C3$. (Continuação). (Continua).....	139
7.3 – Tempo de captura vs. $C3$. (Continuação). (Continua).....	140
7.3 – Tempo de captura vs. $C3$. (Conclusão).....	141
7.4 – Trajetórias que provocam a descontinuidade do ângulo $\alpha = 25^\circ$ da Figura 7.3.....	142
7.5 – Descontinuidades do ângulo 30°	144
7.6 – Periluna em função do tempo de captura.....	146
7.7 – Trajetórias com $C3 = -0.05$ e $\alpha = 180^\circ$	147

7.8 – Trajetórias com $C3 = -0.05$ e $\alpha = 270^\circ$	148
7.9 – Efeito de r_p para $C3 = -0.1$ unidades canônicas	150
7.10 – μ em função do tempo de captura	152
7.12 – Trajetória que resolve o problema 2	156
8.1 – Configuração dos parâmetros de captura para o problema elíptico de três corpos	159
8.2 – $C3$ mínimo do sistema Terra-Lua com dinâmica elíptica no caso $e = 0$	160
8.3 – Valores mínimos de $C3$ para o sistema Terra-Lua elíptico para quatro posições iniciais de γ	161
8.4 – Comportamento de $C3$ em função da anomalia verdadeira dos primários	162
8.5 – Comportamento de $C3$ mínimo vs. γ para α constante	163
8.6 – Comportamento da energia mínima para $\mu = 0.01$ e excentricidades variadas	165
8.7 – Tempos de captura para excentricidade de 0.4	167
8.8 – Tempo de captura para $\gamma = 0^\circ$	168
8.9 – Trajetória do problema 1	171
8.10 – Trajetória do problema 2	173
9.1 – Transferência completa Terra-Lua	177
9.2 – Trajetória que vai para o “lado da Terra” e a que vai para o lado oposto ao da Terra (sistema de coordenadas fixo)	178
9.3 – Mapeamento das trajetórias que vão para o “lado da Terra” e para o lado antiterra	179
9.4 – Trajetórias com erros na magnitude da velocidade	181
9.5 – Resultados para erros de 10% na magnitude da velocidade	181
9.6 – Resultados para erros de 10% na magnitude da velocidade	183
9.7 – Resultados para erros de 5% na magnitude da velocidade	183
9.8 – Resultados para erros de 5% na magnitude da velocidade	184
9.9 – Resultados para erros de 1% na magnitude da velocidade	184
9.10 – Resultados para erros de 1% na magnitude da velocidade	185
9.11 – Trajetórias com erros na magnitude da velocidade	186
9.12 – Resultados para erros de 1% na magnitude da velocidade	187
9.13 – Resultados para erros de 1% na magnitude da velocidade	187
9.14 – Trajetórias com erros na magnitude da velocidade	189
9.15 – Resultados para erros de 1% na magnitude da velocidade	189
9.16 – Resultados para erros de 1% na magnitude da velocidade	190
9.17 – Trajetórias com erros na direção da velocidade	191
9.18 – Resultados para erros de até 10° na direção da velocidade	192
9.19 – Resultados para erros de até 10° na direção da velocidade	192
9.20 – Resultados para erros de até 5° na direção da velocidade	193
9.21 – Resultados para erros de até 5° na direção da velocidade	193
9.22 – Resultados para erros de até 1° na direção da velocidade	194
9.23 – Resultados para erros de até 1° na direção da velocidade	194
9.24 – Trajetórias com erros na direção da velocidade	195
9.25 – Resultados para erros de até 1° na direção da velocidade	195
9.26 – Resultados para erros de até 1° na direção da velocidade	196
9.27 – Trajetórias com erros na direção da velocidade	197
9.28 – Resultados para erros de até 1° na direção da velocidade	197
9.29 – Resultados para erros de até 1° na direção da velocidade	198
A.1 – Configuração polar do problema restrito de três corpos	210

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 – Relação entre seção cônica e sinal de C3.....	45
2.2 – Valores das unidades utilizadas neste trabalho	46
4.1 – Tempo de processamento.....	73
7.1 – Descontinuidade do ângulo de 30°	143
7.2 – Economias para os valores de Tempos Mínimos (em unidades canônicas).....	154
8.1 – Soluções do problema 1	170
8.2 – Soluções do problema 2	172

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Distância do corpo de maior massa ao centro de massa do sistema
b	Distância do corpo de menor massa ao centro de massa do sistema
C	Constante de Jacobi adimensional
C'	Constante de Jacobi dimensional
C_3	Energia de dois corpos no problema de três corpos
d	Distância entre os dois primários
e	Excentricidade
E	Energia total de dois corpos
F	Função potencial
\mathbf{F}	Vetor força
\mathbf{F}_1	Força gravitacional devido ao primário de maior massa
\mathbf{F}_2	Força gravitacional devido ao primário de menor massa
\mathbf{F}_{ce}	Força centrípeta
\mathbf{F}_{co}	Força de Coriolis
G	Constante gravitacional
L_i	Ponto lagrangiano i
m	Massa total do sistema
m_i	Massa do corpo i
M_i	Corpo i
q	Variável complexa
r	Distância em relação ao corpo central
\mathbf{R}_i	Raio vetor do corpo i
r_{ij}	Distância adimensional do corpo i ao corpo j
r'_{ij}	Módulo do vetor \mathbf{r}_{ij} que representa a distância dimensional do corpo i ao corpo j

r_{ij}	Vetor que liga o corpo i ao corpo j
r_p	Distância da periluna
t	Tempo no sistema rotacional adimensional
T	Tempo regularizado
v	velocidade da partícula M_3 no sistema girante adimensional
v'	Velocidade da partícula M_3 no sistema girante dimensional
V	Velocidade relativa ao corpo central considerado
v_r	Velocidade radial
v_α	Velocidade transversal
x,y	Coordenadas no sistema rotacional adimensional
x',y'	Coordenadas no sistema rotacional dimensional
z	Variável Complexa que representa o sistema girante
Z	Variável Complexa que representa o sistema fixo
α	Ângulo da posição da periluna
β	Ângulo da posição de entrada
γ	Anomalia verdadeira
η_1	Posição do corpo M_1 no sistema fixo
η_2	Posição do corpo M_2 no sistema fixo
Θ	Função potencial regularizada
μ	Massa adimensional do primário de menor massa, que é o parâmetro de massa do sistema
μ_1	Massa adimensional do primário de maior massa (Lua)
μ_2	Massa adimensional do primário de menor massa (Terra)
ξ,η	Coordenadas no sistema fixo
ξ_1	Posição do corpo M_1 no sistema fixo

ξ_2	Posição do corpo M_2 no sistema fixo
ρ	Variável regularizada
τ	Tempo no sistema fixo
ψ	Ângulo entre o sistema de referência fixo e o sistema de referência girante
ω	Velocidade angular
$\boldsymbol{\omega}$	Vetor velocidade angular
Ω	Função potencial adimensional

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. Motivações do Trabalho

O problema de transferir um veículo espacial de uma órbita a outra, conhecido como transferência orbital, teve uma grande ajuda de Hohmann (1925) quando este propôs uma transferência de mínimo consumo de combustível que leva o seu nome. Desde então outros tipos de transferências foram desenvolvidas e no início da década de 90 Belbruno e Miller (1990a,b), Yamakawa (1992) e outros criaram um novo tipo de transferência orbital que utiliza conceitos modernos de astrodinâmica. Esta transferência utiliza uma manobra de *swing-by* em torno da Lua para impulsionar um veículo espacial para longe da influência gravitacional tanto da Terra como da Lua. Nesta região é possível a aquisição de uma trajetória de captura gravitacional temporária pela Lua com um mínimo de combustível. Dessa forma, pode-se economizar energia tanto no início da manobra quanto no final.

Nessa transferência, a captura gravitacional é uma das principais manobras e, no entanto, a mais desconhecida. Este trabalho tem por objetivo desvendar algumas das características do fenômeno da captura gravitacional temporária.

Este trabalho será feito de forma numérica, seguindo as linhas de pesquisa dos trabalhos existentes na literatura até o momento. As análises paramétricas feitas em cada capítulo levam a conclusões importantes e poderão servir de indicação para um trabalho analítico no futuro. Ainda assim, é feito um esforço no sentido de encontrar justificativas para os resultados numéricos obtidos na literatura e no presente trabalho, em particular.

O trabalho de Yamakawa (1992) é de grande importância, sendo referenciado diversas vezes durante presente o trabalho. Ele foi o primeiro a sistematizar a forma de estudo do problema de captura gravitacional aplicado a astrodinâmica. A aplicação do conceito de energia do problema de dois corpos ao problema de captura gravitacional, que é um problema de três corpos, leva a resultados importantes. É mais fácil entender a captura

gravitacional comparando os tipos de órbitas (fechadas ou abertas) inerentes do conceito de energia.

Seguindo estes conceitos, este trabalho faz uma análise do tempo transcorrido entre o momento em que o veículo espacial entra na esfera de influência gravitacional até o momento em que está na posição considerada de captura. Este intervalo de tempo será chamado, ao longo deste trabalho, de tempo de captura.

Ficou demonstrado nos trabalhos de Yamakawa *et al.* (1993) e Belbruno (1987;1990) que a utilização da captura gravitacional na manobra de transferência produz uma economia de combustível maior do que na transferência de Hohmann. Este trabalho irá demonstrar que também é possível economizar tempo, para um mesmo nível de energia, apenas fazendo uma melhor escolha da posição das condições finais da captura.

Esta abordagem de levar em conta o tempo requerido pela manobra de captura gravitacional é uma contribuição muito importante deste trabalho, por ser nova e por não ter sido encontrado nenhum trabalho nesse sentido na literatura aberta.

1.2. Organização do Trabalho

Este trabalho está dividido em nove capítulos, sendo este primeiro explicando a motivação, os objetivos e a organização deste trabalho. O Capítulo 2 apresenta o desenvolvimento histórico do fenômeno da captura gravitacional através das referências bibliográficas e, além disto, ele apresenta as ferramentas matemáticas utilizadas, dando uma atenção especial ao modelo restrito de três corpos, incluindo a apresentação do método de regularização que foi empregado neste trabalho.

No Capítulo 3 é feita uma validação dos modelos desenvolvidos neste trabalho. Os resultados da literatura são reproduzidos no intuito de garantir que as ferramentas matemáticas que foram usadas neste trabalho funcionam adequadamente. Essa tarefa inclui tanto a validação dos resultados da captura gravitacional comparando com os resultados obtidos por Yamakawa (1992), quanto a validação do modelo do problema restrito elíptico de três corpos comparados com Benest (1970).

No Capítulo 4 são testados os limites da esfera de influência gravitacional e o tempo máximo de integração que foram definidos por Yamakawa (1992). Dentro desse mesmo escopo foi verificada a equivalência das duas definições de captura gravitacional apresentadas por Yamakawa (1992) e repetidas no Capítulo 2 deste trabalho. Além disso, é feita uma análise da constante de Jacobi ao longo de algumas trajetórias para poder garantir os resultados dos integradores numéricos e das dinâmicas que foram utilizadas neste trabalho.

No Capítulo 5 é feito um estudo sobre as forças que agem no sistema. Ao utilizar um sistema de referências girante as forças devido ao referencial, conhecidas como centrífuga e de Coriolis, aparecem e podem explicar um pouco mais o fenômeno da captura gravitacional temporária. O Capítulo apresenta o equacionamento das forças e um estudo numérico sobre elas.

No Capítulo 6 foram feitas extensões aos resultados obtidos por Yamakawa (1992), analisando a energia mínima de captura direta e retrógrada e explicando as discontinuidades existentes. Também é mostrado o que acontece quando se varia a distância da periluna e o parâmetro gravitacional.

O Capítulo 7 apresenta resultados inéditos na literatura. É feito o estudo numérico do tempo de captura, analisando o comportamento de alguns parâmetros utilizados no problema de captura gravitacional. É também apresentado um método de otimização que aproveita os conhecimentos gerados no próprio capítulo.

No Capítulo 8 é feito um estudo numérico sobre o comportamento da excentricidade e da anomalia verdadeira dos primários no fenômeno de captura gravitacional. Além de apresentados alguns resultados sobre o comportamento da distância da periluna na manobra de captura gravitacional. Os resultados desse Capítulo também são inéditos e também são aplicados em um método de otimização.

No Capítulo 9 é feito um estudo numérico da sensibilidade das trajetórias de captura gravitacional. O objetivo do Capítulo é verificar a possibilidade de se fazer uma otimização global da manobra de transferência orbital. Este tema também ainda não foi abor-

dado na literatura.

Finalmente no Capítulo 10 são apresentadas as conclusões desse trabalho.

1.3. Contribuições do trabalho

Este trabalho apresenta várias contribuições. Nesta Seção é feito um pequeno resumo das principais, mostrando em que capítulos elas aparecem.

- a) Uso do modelo regularizado, que representa uma dinâmica mais complexa, porém mais precisa, em particular próximo de singularidades (Capítulos 2 e 4 e praticamente todas as trajetórias do problema restrito circular de três corpos);
- b) Estudo de como as forças devido ao referencial interagem com o veículo espacial provocando a captura gravitacional temporária (Capítulo 5);
- c) Otimização de tempo (existem trajetórias com tempos muito diferentes entre si para um mesmo nível de energia). Estudo e apresentação de um método de otimização (Capítulos 7 e 8), para obtenção das trajetórias com tempo mínimo para uma dada energia inicial;
- d) Teste dos limites do tempo de integração e da esfera de influência definidos por Yamakawa (1992). Teste das dinâmicas, dos integradores utilizados no trabalho e das diferentes definições de captura gravitacional feitas por Yamakawa (1992) (Capítulo 4);
- e) Extensões ao trabalhos de Yamakawa (1992) apresentando uma nova visualização da variação da distância da periluna e do parâmetro gravitacional (Capítulo 6);
- f) Extensão do problema para o problema restrito elíptico de três corpos, apresentando um método de otimização (Capítulo 8) para obtenção de trajetórias com tempo mínimo para uma dada energia inicial;
- g) Estudo numérico dos efeitos dos erros em velocidade das trajetórias de captura

gravitacional, que serve de ponto de partida para o estudo de otimização global nesse tipo de manobra (Capítulo 9);

- h) Explicação de diversos fenômenos já notados na literatura, porém ainda não explicados adequadamente, principalmente no que diz respeito a descontinuidades apresentadas nas Figuras básicas.

CAPÍTULO 2

A CAPTURA GRAVITACIONAL NO PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

2.1. Introdução

O estudo do problema de captura gravitacional iniciou-se com o objetivo de explicar a existência dos satélites planetários (Yamakawa, 1992). Porém, no início dos anos 90, Belbruno e Miller (1990a,b) e Miller e Belbruno (1991) utilizaram a captura gravitacional para reduzir a quantidade de combustível necessária para colocar um corpo em órbita da Lua, num problema de transferência orbital entre a Terra e a Lua. Atualmente, os recentes estudos sobre o assunto demonstram que esta pode ser a forma mais econômica de enviar material e suprimentos para a Lua, e talvez, a outros planetas do sistema solar.

Neste Capítulo a dinâmica do problema de três corpos é apresentada para que o leitor possa consultá-la quando for necessário. Também será feita uma revisão bibliográfica do assunto e serão apresentados alguns dos conceitos e definições do problema.

2.2. Dinâmica do Problema Restrito de Três Corpos

O problema restrito de três corpos já é estudado há bastante tempo e, portanto, muito conhecimento já foi acumulado sobre este assunto. No entanto, quando é aumentada a complexidade do sistema (como por exemplo, incluindo a excentricidade dos primários), integrais, como a de Jacobi, não existem, não sendo possível obter informações gerais sobre a trajetória. Com os avanços da informática, principalmente nestes últimos 20 anos, ficou relativamente fácil fazer simulações numéricas alcançando resultados difíceis de serem visualizados apenas pela teoria. Graças aos baixos custos computacionais, pode-se integrar milhares de órbitas variando totalmente as condições iniciais em apenas algumas horas e, dependendo do processador, somente algumas dezenas de minutos.

Nos sistemas de três corpos, será utilizado o termo “primário” para qualquer dos dois maiores planetas (ou corpos) e “veículo espacial” para o corpo de menor massa em rela-

ção aos primários.

O problema restrito de três corpos é um caso particular do problema de n corpos, onde o número de corpos é igual a três e um deles possui massa desprezível em relação aos demais.

As primeiras formulações do problema restrito de três corpos apareceram nas anotações de Euler em sua segunda teoria lunar, há quase duzentos anos atrás (Szebehely, 1967). Mesmo assim atualmente este assunto continua sendo muito estudado na literatura.

Existem diversas variantes desse problema quando se leva em conta a dimensão (duas ou três) e os possíveis tipos de órbitas (circular, elíptica, etc.) para os corpos com massa finita. O problema básico é o chamado problema restrito de três corpos plano e circular, que é definido da seguinte forma: sejam dois corpos de massas puntiformes, girando em torno do seu centro de massa, em órbitas circulares, influenciados somente por suas atrações gravitacionais mútuas. Seja um terceiro corpo movendo-se no plano definido pelos dois corpos anteriores, com uma massa desprezível em relação a estes corpos. O problema restrito de três corpos consiste em estudar o movimento deste terceiro corpo. Neste trabalho são apresentadas as equações de movimento do problema restrito circular e elíptico de três corpos.

2.2.1. Equações de Movimento do Problema Restrito Circular de Três Corpos

As equações de movimento do problema restrito, assim como as do problema geral, derivam da lei gravitacional de Newton. Só que neste caso considera-se uma das massas, por exemplo m_3 , desprezível em relação às demais, de forma que duas das equações de movimento (as equações dos dois primários) fiquem desacopladas do terceiro corpo. Assim sendo, a resolução dessas duas equações leva à solução do problema de dois corpos (órbitas circulares, elípticas, parabólicas ou hiperbólicas). Para a terceira equação, relativa à massa desprezível m_3 , tem-se:

$$\ddot{\mathbf{R}}_3 = -G \left(\frac{m_1}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} + \frac{m_2}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} \right), \text{ com} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i, \quad r'_{ij} = \|\mathbf{r}_{ij}\|,$$

onde \mathbf{R}_i é o raio vetor da massa i em relação ao centro de massa dos dois primários, G é a constante da gravidade e m_1 e m_2 são as massas dos dois primários.

Nesta versão do problema restrito de três corpos é considerado que os dois primários estão em órbita circular em torno do centro de massa do sistema, como mostra a Figura 2.1. Esta abordagem recebe o nome de problema restrito circular de três corpos.

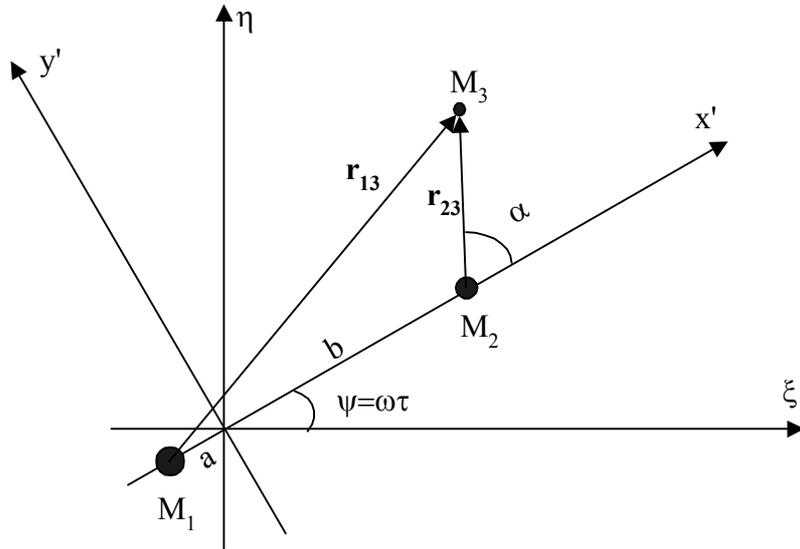


Fig. 2.1 – Sistema de coordenadas (inercial, ξ - η , e rotacional, x' - y') para o problema restrito circular de três corpos.

Conforme pode ser visto na Figura 2.1, serão chamados de a e b os raios das órbitas de M_1 e M_2 , respectivamente. O sistema x' - y' gira com velocidade angular ω de tal forma que M_1 e M_2 fiquem fixos em relação a x' , e τ é o tempo nesse sistema. Com estas definições e lembrando que neste caso a força centrífuga ($m_1 a \omega$ para o corpo M_1 e $m_2 b \omega$

para o corpo M_2) é igual à força gravitacional $\left(\frac{Gm_1m_2}{(a+b)^2}\right)$, tem-se:

$$\frac{Gm_1m_2}{(a+b)^2} = m_1a\omega^2 = m_2b\omega^2, \quad (2.2)$$

onde m_1 e m_2 são as massas dos corpos M_1 e M_2 , respectivamente, e G é a constante gravitacional universal. Sendo assim, a terceira lei de Kepler (o cubo do semi-eixo maior da órbita planetária é proporcional ao quadrado do período de revolução do planeta) toma a forma:

$$G(m_1 + m_2) = \omega^2(a+b)^3. \quad (2.3)$$

Definindo a massa total do sistema como sendo $m = m_1 + m_2$ e a distância entre os dois primários como $d = a + b$, através das equações (2.2) e (2.3) tem-se:

$$a = \frac{m_2d}{m} \quad \text{e} \quad b = \frac{m_1d}{m}. \quad (2.4)$$

Da Figura 2.1 define-se a relação de transformação do sistema fixo (ξ - η) para o sistema girante (x' - y'):

$$\begin{aligned} \xi &= x' \cos \psi - y' \sin \psi \\ \eta &= x' \sin \psi + y' \cos \psi \end{aligned}, \quad (2.5)$$

que pode ser colocada em forma exponencial (Szebehely, 1967) utilizando-se da expressão:

$$Z = ze^{i\omega\tau}, \quad \text{com } z = x' + iy', Z = \xi + i\eta, i = \sqrt{-1}, \quad (2.6)$$

já que

$$\omega = \frac{\Psi}{\tau}. \quad (2.7)$$

Levando em conta a equação (2.6), a equação (2.1) pode ser escrita na forma:

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} = \left(\frac{d^2 z}{d\tau^2} + 2i\omega \frac{dz}{d\tau} - z\omega^2 \right) e^{i\omega\tau} = G \left[m_1 \frac{(z+a)}{|z+a|^3} + m_2 \frac{(z-b)}{|z-b|^3} \right] e^{i\omega\tau}. \quad (2.8)$$

Finalmente, separando as partes real e imaginária, pode-se obter:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x'}{d\tau^2} - 2\omega \frac{dy'}{d\tau} &= \frac{\partial F}{\partial x'} \quad , \\ \frac{d^2 y'}{d\tau^2} + 2\omega \frac{dx'}{d\tau} &= \frac{\partial F}{\partial y'} \quad , \quad \text{com} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$F = \frac{\omega^2}{2} (x'^2 + y'^2) + G \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) \quad ,$$

que são as equações de movimento da partícula M_3 no sistema girante.

2.2.2. O Sistema de Coordenadas Adimensionais

O sistema de coordenadas adimensionais é um instrumento que facilita de forma considerável os cálculos numéricos do problema restrito e por isso é o mais utilizado na literatura. Para tornar o sistema adimensional, as distâncias serão divididas pela distância entre os dois primários (d) e as massas serão divididas pela massa total dos dois primários (m). Além disto será definido que a velocidade angular do sistema é unitária, de tal forma que é possível introduzir uma nova escala de tempo que é numericamente igual ao ângulo ψ . Dessas considerações, define-se as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{d} \quad ; \quad y = \frac{y'}{d} \quad ; \quad t = \omega\tau \quad ; \quad \Omega = \frac{F}{d^2\omega^2} \quad ; \\ r_{13} &= \frac{r'_{13}}{d} \quad ; \quad r_{23} = \frac{r'_{23}}{d} \quad ; \quad \mu_1 = \frac{m_1}{m} = \frac{b}{d} \quad ; \quad \mu_2 = \frac{m_2}{m} = \frac{a}{d} \quad . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Desta forma, as equações de movimento da partícula M_3 nessas novas variáveis ficam:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y,\end{aligned}\tag{2.11}$$

onde o ponto significa derivada em relação ao tempo t e $\Omega_x = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$, $\Omega_y = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$.

Neste trabalho a massa específica μ_2 referente ao primário M_2 será chamado apenas de μ , conforme o padrão adotado na literatura da área. Logo, colocando a massa específica μ_1 em função de μ tem-se que $\mu_1 = 1 - \mu$.

As seguintes propriedades representam a síntese do sistema adimensional:

- a) a unidade de distância é definida como a distância entre M_1 e M_2 , os dois corpos primários do sistema considerado;
- b) a unidade de massa do sistema é $m = m_1 + m_2$;
- c) a unidade de tempo é definida de tal forma que a velocidade angular deste sistema é unitária ($\omega = 1$);
- d) a constante gravitacional do sistema também é unitária (terceira lei de Kepler);
- e) o período do movimento dos dois primários é 2π .

2.2.3. A Integral de Jacobi

No problema restrito de três corpos a energia e o momento angular do sistema não se conservam. Este fato se deve à aproximação feita de que M_3 possui massa desprezível. Com isto o movimento de M_3 é afetado pelos dois primários, mas não afeta o movimento deles, ferindo a lei da ação e reação, que é a base da lei de conservação da energia e do momento angular no problema de n corpos. Porém, existe uma outra grandeza neste sistema que se conserva, descoberta inicialmente por Jacobi em 1836, e por isto denominada de integral de Jacobi.

Para obter a integral de Jacobi, multiplica-se a primeira equação de (2.9) por $\frac{dx'}{d\tau}$, a segunda por $\frac{dy'}{d\tau}$, somam-se os resultados e integra-se no tempo. Com isto obtém (Szebehely, 1967):

$$\frac{v'^2}{2} = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial F}{\partial x'} dx' + \frac{\partial F}{\partial y'} dy' \right) = F - \frac{C'}{2}, \quad (2.12)$$

onde C' é a chamada constante de Jacobi e

$$v'^2 = \left(\frac{dx'}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{d\tau} \right)^2 \quad (2.13)$$

representa a velocidade da partícula M_3 no sistema girante. O resultado acima também pode ser escrito da forma:

$$v'^2 = 2F - C', \quad (2.14)$$

que nas coordenadas adimensionais definidas acima fica:

$$v^2 = 2\Omega - C. \quad (2.15)$$

2.2.4. Pontos Lagrangianos

Existem pontos de equilíbrio no problema restrito de três corpos que são chamados de pontos lagrangianos. São pontos para os quais a equação $\nabla\Omega = 0$ é satisfeita. Então, para encontrar as coordenadas dos pontos lagrangianos é necessário impor as condições $\Omega_x = \Omega_y = 0$. Procedendo dessa maneira, tem-se:

$$\Omega_x = x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_{13}^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_{23}^3} = 0 \quad (2.16)$$

$$\Omega_y = y \left(1 - \frac{1-\mu}{r_{13}^3} - \frac{\mu}{r_{23}^3} \right) = 0$$

Pode-se então observar que essas equações possuem dois tipos de soluções (Szebehely, 1967):

- a) Quando $y = 0$, a segunda equação fica imediatamente satisfeita, e a primeira se transforma em uma equação cúbica em x . Resolvendo esta primeira equação, obtém-se três soluções, que correspondem a três pontos de equilíbrio, todos eles colineares e pertencentes ao eixo horizontal. Na literatura existe uma não uniformidade na nomenclatura destes pontos. Neste trabalho eles serão chamados de L_1 , L_2 e L_3 , conforme mostrado na Figura 2.2, sendo que o ponto existente entre os dois primários é o primeiro (L_1). A exata posição destes pontos depende do valor de μ . As posições mostradas na Figura 2.2 são aproximadas;

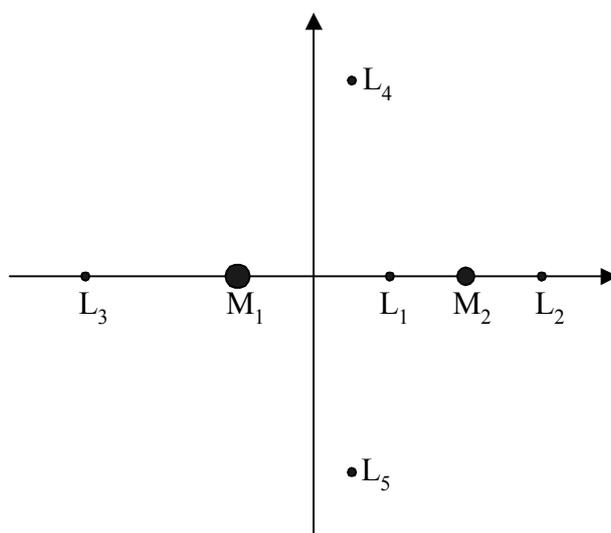


Fig. 2.2 – Pontos lagrangianos.

- b) Quando $y \neq 0$, o único modo de satisfazer a segunda equação, satisfazendo também a primeira equação, é fazendo $r_{13} = r_{23} = 1$. Isso fornece mais dois pontos de equilíbrio, que serão chamados de L_4 e L_5 , também conhecidos como pontos triangulares. Isso pode ser notado na Figura 2.2, pois junto com M_1 e M_2 eles formam um triângulo equilátero.

Conhecidas as posições destes pontos é importante estudar as condições de estabilidade

para determinar o comportamento de uma partícula que, colocada num destes pontos de equilíbrio, sofre um pequeno deslocamento. Segundo Roy (1988) têm-se os seguintes resultados para a análise da estabilidade desses pontos:

- a) Os pontos colineares são sempre instáveis;
- b) Os pontos triangulares são estáveis quando $\mu < 0.0385$ (isto engloba os sistemas mais importantes conhecidos: Terra-Lua, Sol-Terra, Sol-Júpiter, etc.).

2.2.5. Curvas de Velocidade Zero

As curvas de velocidade zero (Szebehely, 1967) se constituem numa importante ferramenta de análise de trajetórias no problema restrito de três corpos, pois fornecem resultados que permitem determinar regiões proibidas e permitidas para o movimento de um veículo espacial. Essa análise se inicia assumindo que a velocidade da partícula se anule. Assim sendo, a integral de Jacobi mostrada pela equação (2.15) fica:

$$2\Omega = C \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_{13}} + \frac{2\mu}{r_{23}} = C. \quad (2.17)$$

Essa equação determina as possíveis regiões de movimento para um determinado valor da constante de Jacobi C . Estas regiões também são conhecidas como curvas de Hill ou curvas equipotenciais.

De forma geral, o movimento de uma partícula para um determinado valor de C , só é permitido nas regiões onde $2\Omega \geq C$, caso contrário, a velocidade ao quadrado terá valor negativo (equação (2.15)), o que é uma impossibilidade física. Note que, conhecido o valor da constante de Jacobi, não se tem nenhuma informação sobre a trajetória da partícula, apenas é conhecido os limites do movimento.

Analisando o movimento da partícula com um valor elevado de C , para que a expressão (2.17) seja satisfeita, é necessário que ocorra uma das seguintes possibilidades:

- a) se a expressão $x^2 + y^2$ tem um valor elevado isso significa que a partícula deve

estar fora dos limites externos na Figura 2.3a;

b) se r_{13} for pequeno, gerando um valor elevado para o termo $2(1 - \mu)/r_{13}$, isso significa que a partícula deve estar próxima de M_1 , dentro da oval esquerda mostrada na Figura 2.3a;

c) se r_{23} for pequeno, gerando um valor elevado para o termo $2\mu/r_{23}$, isso significa que a partícula deve estar nas proximidades de M_2 , dentro da oval direita mostrada na Figura 2.3a.

As regiões em branco na Figura 2.3 são os lugares possíveis de movimento. Se a partícula estiver próxima de M_1 ou M_2 ela se mantém dentro das respectivas ovas. Neste caso é impossível que ela possa ser transferida de M_1 para M_2 , e vice-versa, sem alterar o valor de C , caso contrário ela teria que passar por uma região proibida para seu movimento (a região clara). Da mesma maneira, a partícula não pode escapar do sistema para o infinito e, se a partícula começa o movimento longe dos primários, fica impossível uma aproximação.

Reduzindo o valor de C , as ovas aumentam de tamanho e a curva externa encolhe. As ovas irão crescer com a redução de C até se encontrarem no ponto lagrangiano intermediário L_1 , como pode ser visto na Figura 2.3b. Com este valor de C é possível ocorrer uma transferência natural entre M_1 e M_2 (sem aplicação de forças não gravitacionais, tais como propulsores). A transferência do infinito para as proximidades do sistema M_1 - M_2 ainda é impossível.

Com uma nova redução de C a região de comunicação entre M_1 e M_2 aumenta (Figura 2.3c). Reduzindo mais o valor de C , as curvas internas entram em contato com as externas no ponto lagrangiano L_2 , conforme mostra a Figura 2.3d. Agora é possível uma comunicação das vizinhanças de M_1 - M_2 com o infinito.

Reduzindo novamente o valor de C a região proibida fica cada vez menor, aumentando a comunicação de M_1 - M_2 com o infinito. Ocorrendo também a ligação entre o infinito e M_1 - M_2 pelo lado esquerdo, como mostrado na Figura 2.3e. Com uma maior redução

no valor de C , a região proibida fica restringida às vizinhanças dos pontos lagrangianos L_4 e L_5 e a partícula pode mover por todo o plano, exceto nas regiões próximas de L_4 e L_5 , que são os pontos que requerem um valor de C menor para serem acessados.

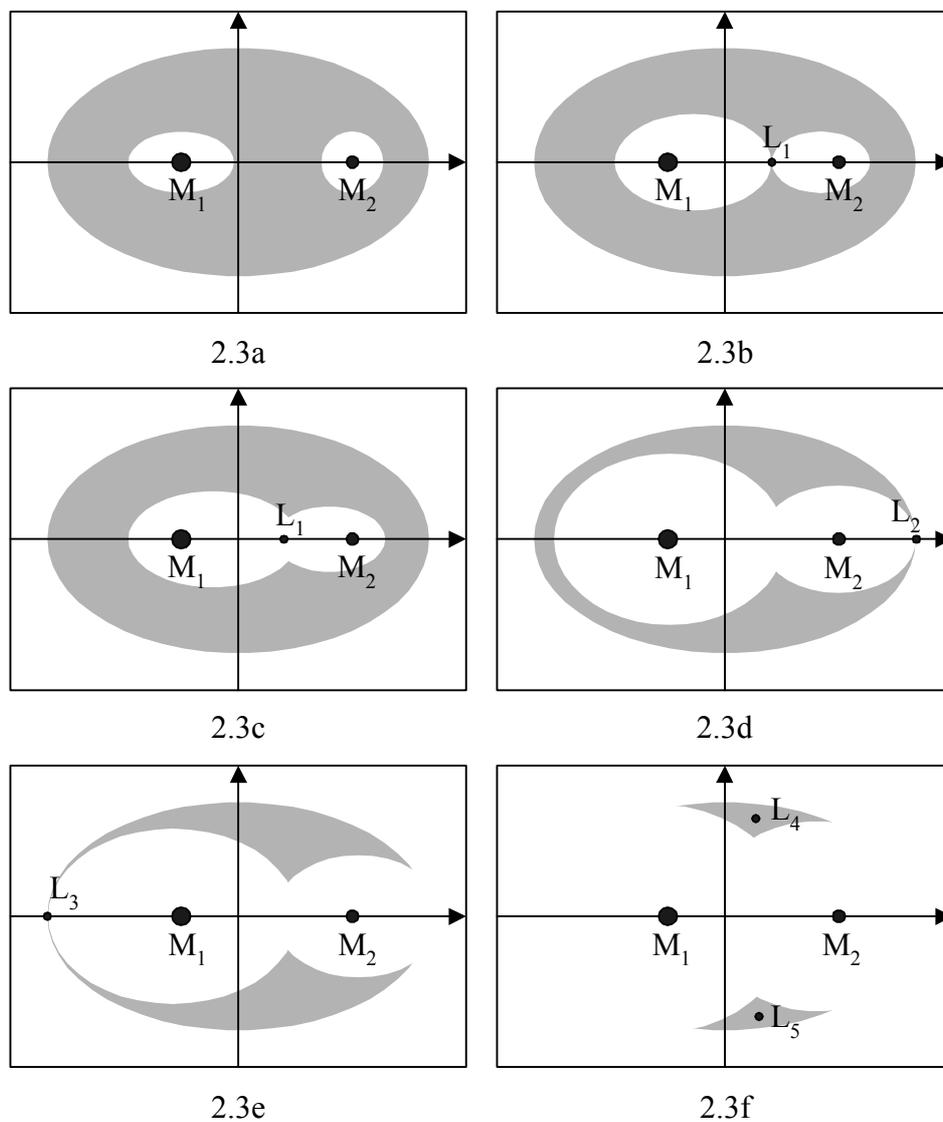


Fig. 2.3 – Regiões limites para velocidade zero.

2.2.6. Regularização de Lemaître

Regularização é uma ferramenta muito útil quando são feitas integrações numéricas de trajetórias que passem próximas de corpos celestes que se movem governados por di-

nâmicas do tipo da lei de Newton, cuja força é proporcional ao inverso do quadrado da distância. Devido a isto, quando a partícula se aproxima muito de um dos corpos envolvidos, como no caso de uma colisão por exemplo, a distância entre os corpos fica pequena, fazendo com que a força cresça rapidamente, podendo levar a erros durante o processo de integração numérica.

A eliminação deste problema numérico é obtida através de transformações de variáveis que, se bem feitas, levam a uma equação de movimento sem singularidades.

No caso do problema restrito de três corpos, as técnicas de regularização podem ser divididas em dois grupos: locais, quando eliminam uma singularidade de cada vez; e globais, quando eliminam as duas singularidades ao mesmo tempo.

2.2.6.1. Equações de Movimento Regularizadas

Existem várias técnicas de regularização global no problema restrito de três corpos citadas na literatura. Szebehely (1967) expõe as técnicas de Birkhoff, Thiele-Burrau, e outras. Neste trabalho será utilizada a regularização de Lemaître e por isto somente esta técnica será explicada em maiores detalhes.

Para efetuar essa regularização, inicialmente é feito um deslocamento da origem do sistema de coordenadas girante adimensional da Figura 2.1, através de uma mudança das variáveis x - y para a variável complexa $q = q_1 + iq_2$, onde $i = (-1)^{1/2}$ é a unidade imaginária. Essa etapa segue as seguintes equações (Szebehely, 1967):

$$\begin{aligned}q_1 &= x + \frac{1}{2} - \mu, \\q_2 &= y,\end{aligned}\tag{2.18}$$

sendo μ a massa adimensional do menor primário. Com esta transformação a origem do sistema q_1 - q_2 fica na distância média entre M_1 e M_2 .

As transformações seguintes são:

$$q = f(\rho) = \frac{1}{4} \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) \quad (2.19)$$

para a transformação de posição, onde ρ é a nova variável de estado, e:

$$\frac{dt}{dT} = |f'(\rho)|^2 = \frac{|\rho^4 - 1|^2}{4|\rho|^6} \quad (2.20)$$

para a transformação do tempo t para o tempo T , lembrando que $f'(\rho) = \frac{df(\rho)}{d\rho}$ e t é o tempo adimensional.

Nestas novas variáveis, a equação de movimento do corpo M_3 fica:

$$\rho'' + 2i|f'(\rho)|^2 \rho' = \nabla_{\rho} \Theta, \text{ com}$$

$$\nabla_{\rho} \Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_1} + i \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_2}, \text{ e} \quad (2.21)$$

$$\Theta = \left(\Omega - \frac{C}{2} \right) |f'(\rho)|^2.$$

A equação (2.21) escrita em variáveis de estado fica:

$$\rho'_1 = \rho_3; \quad ;$$

$$\rho'_2 = \rho_4; \quad ;$$

$$\rho'_3 = 2\rho_4 |f'(\rho)|^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_1}; \quad ;$$

$$\rho'_4 = -2\rho_3 |f'(\rho)|^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_2}$$

(2.22)

As equações (2.22) são as utilizadas neste trabalho.

2.2.7. Equações de Movimento do Problema Restrito Elíptico de Três Corpos

No problema de três corpos restrito elíptico, os dois primários estão em órbitas elípticas em torno do centro de massa do sistema. O eixo horizontal ξ é o eixo horizontal e o eixo vertical η é perpendicular a ξ (Figura 2.1). As variáveis, de agora em diante, serão adimensionais (ou seja, as variáveis de distância estão divididas pelo semi-eixo maior e as de massa pela massa total do sistema). Desta forma, as posições de M_1 e M_2 são (Broucke, 1969):

$$\xi_1 = -\mu r \cos \gamma \quad \eta_1 = -\mu r \sin \gamma \quad (2.23)$$

$$\xi_2 = (1 - \mu)r \cos \gamma \quad \eta_2 = (1 - \mu)r \sin \gamma \quad (2.24)$$

onde r é a distância entre os dois primários dividido pelo semi-eixo maior, dada por $r = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \gamma}$, γ é a anomalia verdadeira de M_2 e e é a excentricidade.

Nesse sistema adimensional a velocidade angular média dos primários é igual a unidade. As equações de movimento da partícula de massa desprezível M_3 são dadas pela expressão:

$$\ddot{\xi} = -\frac{(1 - \mu)(\xi - \xi_1)}{r_{13}^3} - \frac{\mu(\xi - \xi_2)}{r_{23}^3} \quad (2.25)$$

$$\ddot{\eta} = -\frac{(1 - \mu)(\eta - \eta_1)}{r_{13}^3} - \frac{\mu(\eta - \eta_2)}{r_{23}^3} \quad (2.26)$$

onde r_{13} e r_{23} são as distâncias adimensionais entre M_3 - M_1 e M_3 - M_2 , respectivamente, e são dadas pelas expressões:

$$r_{13}^2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 \quad (2.27)$$

$$r_{23}^2 = (\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 \quad (2.28)$$

e ξ_1, η_1 são as coordenadas que especificam a posição do primeiro primário e ξ_2, η_2 as coordenadas que especificam a posição do segundo primário.

Além do sistema fixo que foi apresentado aqui, também existem equações desenvolvidas para o sistema girante-pulsante. O sistema é pulsante devido a variação da distância entre os primários com a anomalia verdadeira. Neste trabalho será usado somente o modelo descrito nesta seção. Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada em Szebehely (1967).

2.3. Revisão Bibliográfica

Yamakawa (1992) foi um dos primeiros a se preocupar em ordenar os conhecimentos sobre a captura gravitacional. Os estudos sobre o tema foram inicialmente utilizados para explicar a captura dos satélites planetários. Foi somente na década de 90 que se iniciaram os estudos desse fenômeno na redução de consumo de combustível num problema de transferência orbital entre dois corpos (Belbruno e Miller, 1990a,b). Yamakawa (1992) fez uma revisão bibliográfica muito precisa, se tornando a base principal das consultas deste trabalho. Portanto, nessa seção será apresentado apenas o essencial das referências sugeridas por Yamakawa, de modo a facilitar a consulta do leitor além de dar corpo e coerência ao presente trabalho. Portanto será dada apenas uma explicação geral de como o problema de captura gravitacional começou, enfatizando principalmente as suas bases teóricas. O modelo que servirá de base para estudar esse tópico será o problema restrito de três corpos, tanto na sua versão circular como na elíptica.

No problema geral de três corpos (onde as três massas são consideradas finitas), o termo “captura” usualmente se refere ao fenômeno no qual três corpos que têm suas posições iniciais infinitamente distantes uns dos outros se aproximam, sendo que a distância entre dois dos três corpos se mantém limitada pelo resto do tempo. Foi demonstrado por Merman (1952) e outros autores (Schmidt, 1947; Sitnikov, 1952; Khil’mi, 1961; Alekseev, 1963) que a captura permanente é possível no problema geral de três corpos no caso de transições do movimento hiperbólico para o hiperbólico-elíptico, desde que a energia total do sistema seja positiva. No movimento hiperbólico as três distâncias mú-

tuas aumentam, até se tornarem infinitas. No movimento hiperbólico-elíptico, uma das três distâncias mútuas se mantém limitada, enquanto que as outras duas vão crescendo infinitamente.

Já no problema restrito de três corpos, o termo “captura” significa que a terceira partícula se aproxima de um dos dois primários a partir de uma longa distância (finita ou infinita) e depois permanece próxima desse primário (mantém uma distância que não excede um certo valor finito pré fixado). Sizova (1952) e Merman (1953) demonstraram que no problema restrito hiperbólico de três corpos, a captura permanente é possível. Também foi Merman (1954) quem demonstrou que no problema restrito parabólico de três corpos a captura permanente não é possível. Para os problemas restritos circular e elíptico de três corpos, Hopf (1930), Fesenkov (1946), Yegorov (1960), Sung (1969), e Tanikawa (1983) demonstraram que a captura permanente é impossível, o que implica que o fenômeno de captura é de natureza necessariamente temporária. Esta captura temporária significa que a terceira partícula se aproxima de um dos primários a partir de uma distância longínqua (infinita ou não) e se mantém a uma certa distância de um dos primários por um certo tempo. Em seguida ela se afasta novamente deste primário indo para longe (a uma distância infinita, ou não).

Analisando a captura temporária pelo menor dos primários nos problemas restritos circular e elíptico de três corpos, duas formas de captura podem ser encontradas: uma é utilizando o conceito de captura pelos pontos de Lagrange L_1 ou L_2 , e a outra é utilizando o conceito de espaço de fase.

No problema restrito circular de três corpos, quando a integral de Jacobi tem um valor relativamente baixo, as regiões possíveis de movimento estão restritas ao redor dos dois primários (Szebehely, 1967). Esta região é uma abertura na forma de pescoço de garrafa perto do ponto de Lagrange L_1 (Figura 2.3b e 2.3c da Seção 2.2.5). Uma partícula inicialmente perto do maior primário pode se aproximar do menor primário através dessa abertura. Este tipo de trajetória é chamada de captura pelo ponto de Lagrange e é considerada como uma trajetória potencial que pode ser adquirida pelos satélites naturais antes de serem capturados pelos seus planetas.

Em 1971 e 1972, Bailey usou o problema restrito planar elíptico de três corpos e aplicou a idéia da captura pelo ponto de Lagrange L_1 para explicar a origem dos satélites de Júpiter (Bailey, 1971a,b; 1972). Ele utilizou o fato de que a integral de Jacobi é constante ao longo da trajetória, para obter trajetórias com formas de órbitas elípticas em torno de Júpiter depois da captura. Bailey concluiu que a excentricidade da trajetória dos dois primários (Sol e Júpiter) tem grande influência no mecanismo de captura pelo ponto de Lagrange. Porém, em 1975, Heppenheimer investigou os resultados de Bailey concluindo que a influência da excentricidade não é essencial (é de terceira ordem), e a órbita dos dois primários pode ser considerada circular (Heppenheimer, 1975; Heppenheimer e Porco, 1977).

Byl e Ovenden (1975) confirmaram numericamente que o conceito de captura pelo ponto de Lagrange usando a integral de Jacobi não pode ser usada para explicar as origens dos satélites jupiterianos, sendo necessário utilizar algum outro mecanismo, com por exemplo o arrasto atmosférico ou as forças de marés. O último resultado também foi evidenciado por Malcuit e outros (Malcuit, 1989; Szebehely e Evans, 1980). Horedt (1976) analisou órbitas de pré e pós captura do satélites jupiterianos, utilizando o modelo do problema restrito circular de três corpos, também baseando-se no conceito de captura pelo ponto de Lagrange.

A idéia de aplicação de trajetórias de captura pelo ponto de Lagrange em órbitas de satélites artificiais já havia aparecido nos trabalhos de Darwin em 1897 com cálculos e análises (Darwin, 1897). Depois, maiores contribuições para esta área foram conduzidas por Yegorov (1958), Thuring (1959), Arenstorf (1963), Davidson (1964), e Conley (1968). Todos estes trabalhos lidam com captura pelo ponto de Lagrange numa transferência Terra-Lua, porém o início da transferência não ocorre na Terra, e sim em regiões próximas da Terra. Na realidade, as transferências ocorrem entre regiões próximas da Terra e próximas da Lua.

Em 1977, uma aplicação interessante da captura gravitacional foi mostrada por Heppenheimer: o transporte de material da Lua (Heppenheimer e Kaplan, 1977; Heppenheimer, 1978a,b,c) foi proposta com o uso de trajetórias de transferência começando a par-

tir do ponto de Lagrange L_2 até uma órbita geocêntrica passando pelas vizinhanças de L_1 . Em 1987, Belbruno fez uma tentativa de utilizar uma trajetória de captura pelo ponto de Lagrange em uma transferência Terra-Lua, onde a principal característica foi o uso de propulsão iônica, gerada por ventos solares nas fases terminais (próximas da Terra e da Lua), obtendo a saída da Terra e inserção na órbita lunar (Belbruno, 1987). Em 1990, Belbruno e Miller aplicaram o mecanismo de captura gravitacional temporária numa trajetória de transferência Terra-Lua utilizando a gravidade solar e a manobra de *swing-by*. Os resultados mostraram uma economia de combustível em relação as transferências do tipo de Hohmann, ao custo de um tempo maior para a transferência (Belbruno e Miller, 1990a,b; Miller e Belbruno, 1991; Sweetser, 1991; Belbruno *et al.*, 1991). Eles introduziram um conceito chamado limite de estabilidade fraca (ou limite nebuloso) para deduzir uma esfera de influência gravitacional mais realista em relação a esfera de influência clássica (Belbruno, 1989, 1990). Pelo ponto de vista de perfil de órbita, notas semelhantes também são encontradas nos trabalhos de Tanabe e outros, para transferências para pontos de Lagrange começando a partir da Terra (Tanabe *et al.*, 1982).

2.4. Conceitos Básicos Relativos ao Problema de Captura Gravitacional

Os conceitos e definições aqui apresentados foram extraídos da tese de doutorado de Yamakawa (1992). Ele foi o primeiro a sistematizar o estudo da utilização da captura gravitacional em transferência orbital, o que justifica a utilização dos mesmos termos e valores numéricos que ele empregou em seu trabalho, embora vários desses valores terão a sua validade testada no decorrer do presente trabalho.

O fenômeno de captura em sistemas de três corpos é importante porque a maioria dos sistemas que são estudados se baseiam em três corpos, como no caso da Terra, Lua e um veículo espacial; ou ainda o Sol, um planeta e um veículo espacial; etc..

Quanto ao modelo utilizado, a análise da captura gravitacional pode ser dividida em duas categorias:

- a) no problema geral de três corpos, onde cada corpo afeta mutuamente o movimento dos outros dois corpos;

- b) no problema restrito de três corpos, onde um dos corpos tem massa desprezível em relação aos outros dois e não influencia o movimento desses.

No problema restrito ainda existem quatro possibilidades de estudo, correspondendo ao movimento relativo dos dois primários:

- a) hiperbólico;
- b) parabólico;
- c) elíptico;
- d) circular.

Assim como Yamakawa (1992), também neste trabalho será focado o sistema Terra-Lua, mas também serão apresentados alguns estudos com outros sistemas com o objetivo de generalizar os resultados que forem encontrados. Será utilizada a dinâmica do problema restrito de três corpos e, diferentemente de Yamakawa (1992), além do movimento circular para os dois primários, também será estudado o movimento elíptico.

A captura gravitacional referida neste trabalho é de caráter temporário, já que os modelos estudados são os dados pelo problema restrito circular e elíptico de três corpos e, como foi mencionado nas referências bibliográficas na Seção 2.2, é impossível a captura gravitacional permanente nestes dois tipos de modelo. Mesmo assim, a captura gravitacional temporária no problema de transferência de um veículo espacial da Terra para a Lua é de grande importância. Como será demonstrado nos capítulos seguintes deste trabalho, no momento da captura gravitacional o veículo espacial está com uma velocidade relativamente baixa em relação a Lua, o que implica que o consumo de combustível para a estabilização da órbita (tornar a órbita circular em torno da Lua) é baixo.

Alguns dos termos que aparecerão com frequência neste texto serão apresentados a seguir.

2.4.1. C3 (Energia de Dois Corpos)

Expressa pela soma da energia cinética e da energia potencial do veículo espacial em relação a um dos primários (no caso deste trabalho, a Lua):

$$C3 = V^2 - \frac{2\mu}{r} \quad (2.29)$$

onde r e V são a distância e a velocidade do veículo espacial em relação à Lua, e μ é a massa adimensional (ou específica) da Lua. Para os sistemas de dois corpos $C3$ é constante, desde que nenhuma outra força, além da atração gravitacional do corpo central, exista. Nota-se que $C3 = 2E$, onde E é a energia total por unidade de massa do corpo M_3 dada pelo problema de dois corpos.

A Tabela 2.1 mostra a relação entre o tipo de seção cônica que representa a órbita do veículo espacial e o sinal de $C3$.

TABELA 2.1 – RELAÇÃO ENTRE SEÇÃO CÔNICA E SINAL DE $C3$

Sinal de $C3$	Seção Cônica
$C3 > 0$	hipérbole
$C3 = 0$	parábola
$C3 < 0$	elipse

2.4.2. Esfera de Influência

A esfera de influência da Lua será definida como uma esfera cujo raio é de 100.000 km. Esta esfera de influência está além da esfera de influência clássica (Roy, 1988), cujo raio é da ordem de 66.000 km para a Lua. Este número está próximo da distância crítica para a Lua, que é definida por $r = (2\mu)^{1/3}$ (Yamakawa, 1992), onde μ , neste caso, é a massa da Lua (o Apêndice A apresenta a demonstração da equação da distância crítica). A distância crítica marca a fronteira onde a energia de dois corpos $C3$ ainda é negativa, o que é uma das condições para a captura gravitacional.

2.4.3. Coordenadas Adimensionais

Para manter maior precisão nas integrações numéricas, serão utilizadas coordenadas adimensionais neste trabalho. Considerando o sistema Terra-Lua, as unidades de distância, velocidade, tempo e massas são as mostradas na Tabela 2.2 a seguir.

TABELA 2.2 – VALORES DAS UNIDADES UTILIZADAS NESTE TRABALHO

Tipo	Representado Por	Valor
unidade de distância	–	384400 km
Unidade de velocidade	–	1.023157299 km/s
Unidade de tempo	–	4.3483774 dias
Massa da Terra	$1-\mu$	0.9878493317
Massa da Lua	μ	0.0121506683

Com estes valores, a constante gravitacional G fica a unidade e o período de revolução da Lua em torno do centro de massa do sistema é de 2π .

2.4.4. Definição de Captura Gravitacional

Baseado no que foi colocado até agora, pode-se definir captura gravitacional de duas formas distintas (Yamakawa, 1992).

Definição 1:

- a) Embora o valor de $C3$ de um veículo espacial com respeito a Lua seja positivo fora da esfera de influência (ou seja, o veículo espacial está numa órbita hiperbólica), ele se torna negativo na periluna (a órbita é transformada em elíptica) sem o uso de forças não gravitacionais. Essa definição é conceitual.

Uma segunda definição, mais adequada para análise numérica, é dada abaixo.

Definição 2:

Considera-se que ocorreu uma captura gravitacional quando ocorrem os seguintes fatos:

- a) C_3 com respeito a Lua é negativo na periluna;
- b) A distância entre a Lua e o veículo espacial excede 100000 km antes de completar 50 dias, sem que haja uma colisão com a Lua.

Nos cálculos computacionais que serão utilizados nesse trabalho para o estudo da captura gravitacional, esta segunda definição será aplicada, devido a sua objetividade e por ser praticável do ponto de vista computacional. No Capítulo 4, as duas definições serão estudadas analisando a influência nos resultados.

2.4.5. Formas de Captura

Do ponto de vista da mecânica orbital, existem duas possibilidades para a captura gravitacional em torno do primário de menor massa: uma captura circulando na direção horária do sistema, ou uma captura circulando numa direção anti-horária do sistema. Para o primeiro tipo dá-se o nome de captura retrógrada, e para o segundo tipo, de captura direta. A Figura 2.4 apresenta os dois tipos de captura cujas condições iniciais são $C_3 = -0.10$ e $\alpha = 60^\circ$. Estas duas trajetórias têm o mesmo valor de C_3 e de α .

A Figura 2.5 mostra a magnificação das capturas ocorridas nas trajetórias da Figura 2.4

Com estes conceitos e definições será possível estudar o problema de captura gravitacional aplicando a dinâmica de três corpos.

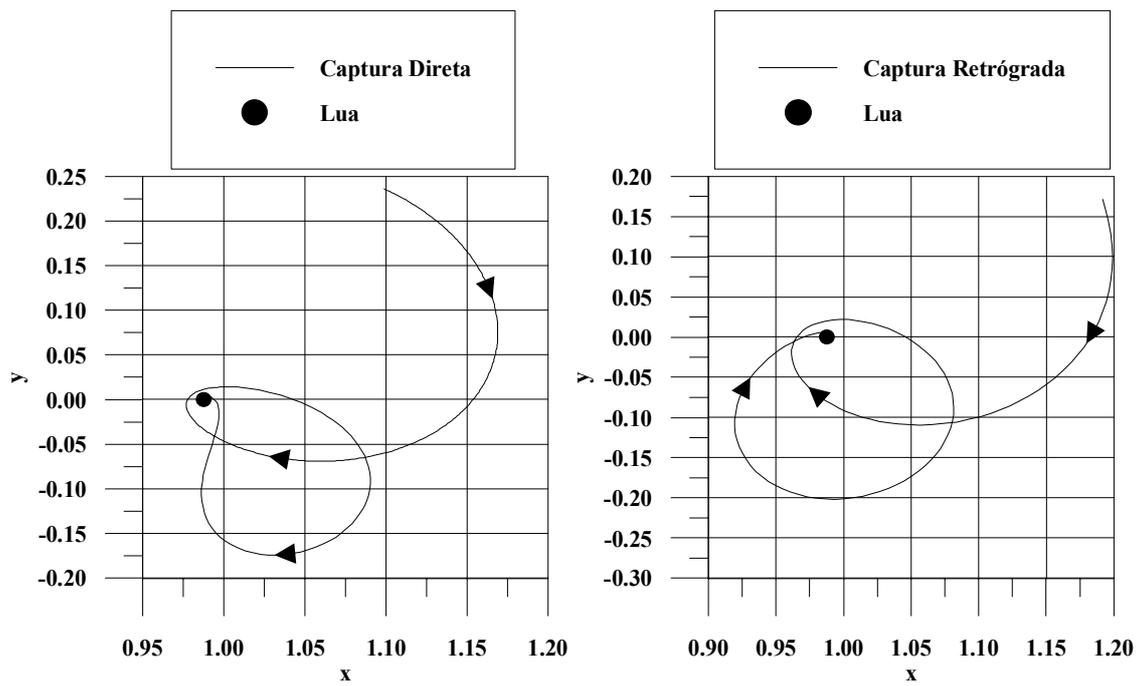


Fig. 2.4 – Capturas direta e retrógrada.

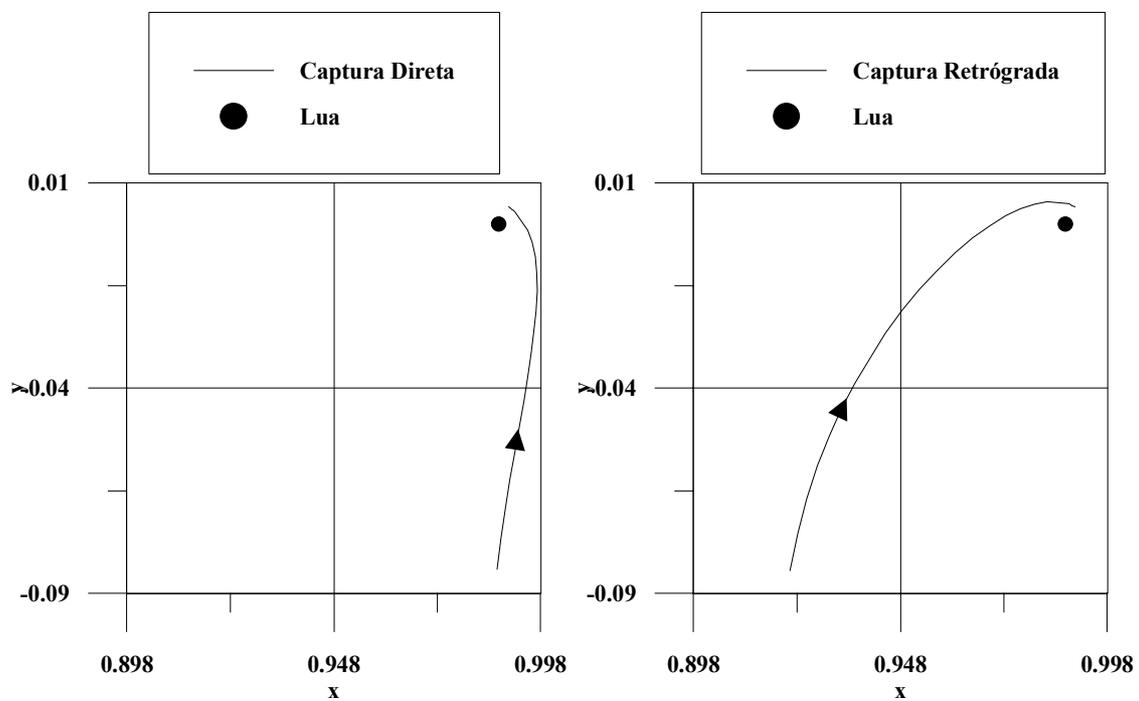


Fig. 2.5 – Magnificação das capturas da Figura 2.4.

CAPÍTULO 3

VALIDAÇÃO DOS MODELOS DESENVOLVIDOS

3.1. Introdução

Neste Capítulo são apresentados e reproduzidos alguns dos resultados obtidos por Yamakawa em sua tese de doutorado (Yamakawa, 1992). O objetivo é fazer uma comparação que garanta que os passos seguidos e os *softwares* desenvolvidos neste trabalho estejam de acordo com os publicados na literatura, garantindo assim a qualidade deste trabalho. Em seguida a essa comparação serão apresentados resultados que ratificam o modelo desenvolvido para o problema restrito elíptico de três corpos. Uma literatura adicional foi procurada, dado que Yamakawa (1992) não considerou esse modelo.

3.2. Descrição do Procedimento

Nesta etapa foi utilizado o modelo restrito circular de três corpos. Os cálculos foram feitos no sistema de coordenadas rotacionais adimensionais, apresentado no Capítulo 2. Também foi utilizada a regularização de Lemaître, que também foi apresentada no Capítulo 2.

O objetivo desta etapa do trabalho é o de encontrar trajetórias que terminem em captura gravitacional próximas da Lua. Para fazer isto, foram geradas várias trajetórias cujas características são explicadas abaixo.

- a) Foi utilizado o sistema Terra-Lua como sistema de binários para o modelo dinâmico;
- b) O movimento é sempre estudado no plano do sistema Terra-Lua. Isso se deve ao fato de que foi demonstrado por Yamakawa (1992) que a captura fora desse plano não melhora as eventuais economias de combustível;
- c) O ponto de partida de cada trajetória fica a uma distância de 100 km da superfície da Lua ($r_p = 1838$ km a partir do centro da Lua) e na integração numérica o

passo de tempo é negativo (portanto as condições ditas iniciais, são na realidade as condições finais da órbita, após a captura). Para especificar completamente a posição inicial, é necessário conhecer o valor de mais uma variável. A variável usada é o ângulo α , que é o ângulo da posição da periluna. Este ângulo é medido a partir da linha Terra-Lua, no sentido anti-horário, a partir do lado da Lua oposto à Terra (Figura 3.1);

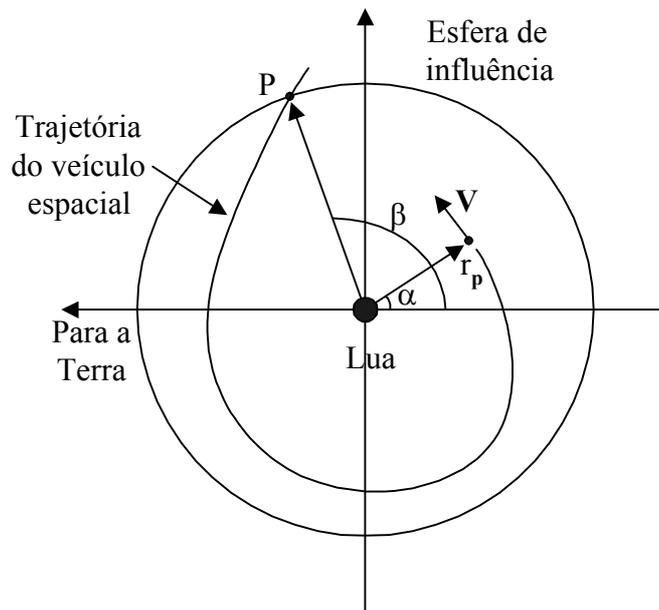


Fig. 3.1 – Descrição dos parâmetros de captura.

- d) A magnitude da velocidade inicial V é calculada a partir do valor de $C3 = 2E = V^2 - \frac{2\mu}{r}$, onde E é a energia por unidade de massa obtida pelo modelo de dois corpos do veículo espacial com respeito a Lua, V é a velocidade do veículo espacial em relação a Lua, μ é a massa adimensional da Lua e que tem o mesmo valor do parâmetro gravitacional da Lua já que o sistema de adimensional (Capítulo 2), e r é a distância adimensional entre o veículo espacial e o centro da Lua. A direção inicial da velocidade é escolhida como sendo perpendicular à linha que une o veículo espacial ao centro da Lua, apontando na direção anti-horária para as órbitas diretas e na direção horária para as órbitas

retrógradas (Figura 2.4). O valor inicial de r é escolhido de forma que o veículo espacial passe na periluna desejada (r_p);

- e) É considerada como sendo uma órbita de escape (logo, de captura no sentido normal do tempo), uma órbita que satisfaça a definição 2 mostrada na Seção 2.4.4 do Capítulo 2, ou seja, quando o veículo espacial alcança a distância de 100000 km (0.26 em unidades canônicas) a partir do centro da Lua, num tempo menor do que 50 dias (aproximadamente 12 unidades canônicas de tempo). A Figura 3.1 mostra o ponto P onde o veículo espacial escapa da esfera de influência. O ângulo que define este ponto é chamado de ângulo da posição de entrada (Yamakawa, 1992) e é designado pela letra grega β . Também existem testes para verificar se ocorrem colisões com a Lua durante o processo de escape.

Serão utilizados dois integradores numéricos: um Runge-Kutta de quarta ordem e passo fixo (Press *et al.*, 1992), e um Runge-Kutta de sétima ordem com passo variável e oitava ordem quando o passo é fixado (Kondapalli e Kuga, 1986). O integrador de 7/8 ordem será o mais usado neste trabalho, enquanto que o de quarta ordem será usado apenas para a comparação que será feito no Capítulo 4. O computador utilizado é um PC com processador Pentium de 100 Mhz, e o compilador FORTRAN é o Microsoft Fortran Power-Station 4.0.

3.3. Validação do Modelo Circular

A primeira comparação feita foi com as trajetórias geradas no problema restrito circular de três corpos. Foi tentado obter as mesmas trajetórias do trabalho de Yamakawa (1992) utilizando-se as condições iniciais dadas por ele. A reprodução da órbita 1 da figura 3-24 da tese de doutorado de Yamakawa (1992), cujas condições iniciais dadas na periluna são: distância de 1838 km do centro da Lua; velocidade de 2.265 km/s; C_3 de $-0.204 \text{ km}^2/\text{s}^2$ (que equivale a -0.18175959 unidades canônicas) e $\alpha = 180^\circ$, está apresentada nas Figuras 3.2 e 3.3 a seguir.

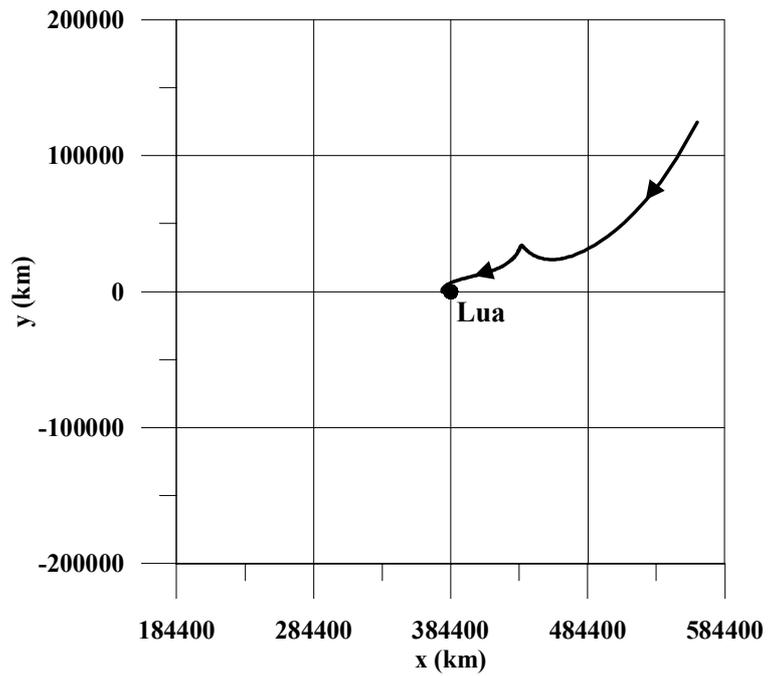


Fig. 3.2 – Órbita 1 no sistema rotacional.

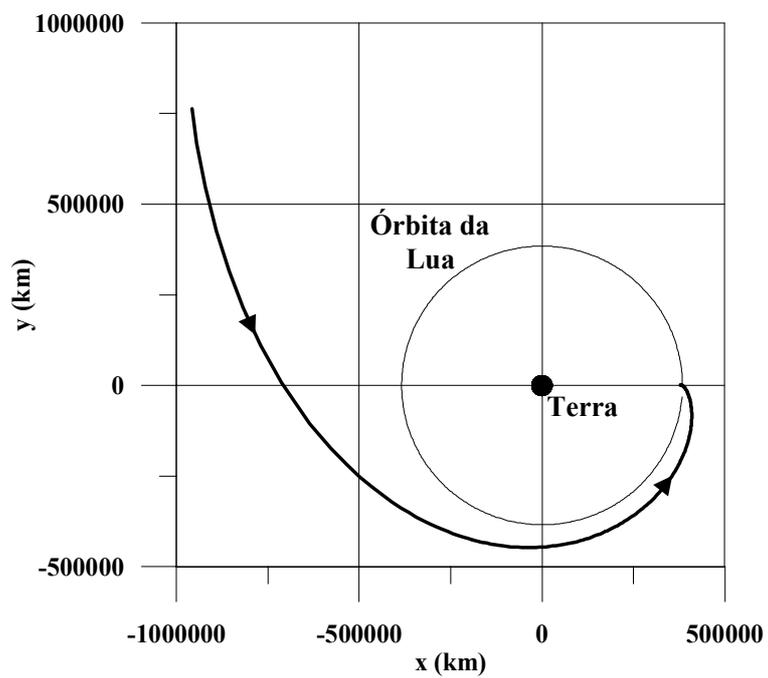


Fig. 3.3 – Órbita 1 no sistema geocêntrico inercial.

As duas figuras correspondem exatamente aos resultados obtidos por Yamakawa (1992)

como demonstra a Figura 3.4 onde está apresentada a cópia traduzida da figura original. Neste trabalho a dinâmica está sendo governada por equações diferenciais regularizadas, diferentes das equações usadas por Yamakawa (1992) (o Apêndice A mostra a dinâmica utilizada por ele). Isto significa que o simulador de órbitas utilizado, apesar das diferenças, funciona de forma equivalente.

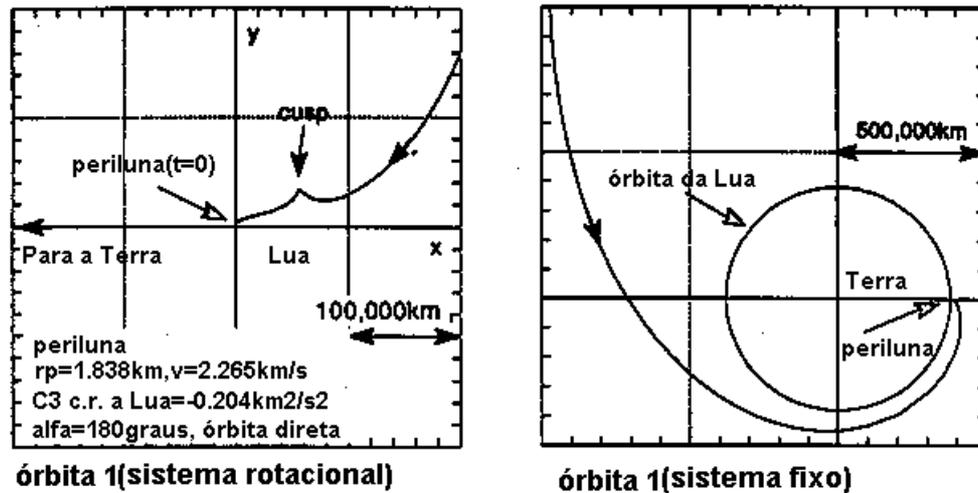


Fig. 3.4 – Figura 3-24 de Yamakawa (1992).

FONTE: Adaptada de Yamakawa (1992, pg. 45).

A segunda comparação feita foi com o ângulo da posição de entrada β . Para isto foram propagadas várias órbitas com as especificações acima, mantendo-se fixo o ângulo α e variando C3 até que se chegasse a uma energia mínima em que as condições de captura ainda eram respeitadas. Foram geradas duas curvas para β , uma com órbitas diretas e outra com órbitas retrógradas. Em todas, o ângulo α foi mantido em 180° . O resultado está apresentado na Figura 3.5.

A Figura 3.5 corresponde à figura 4-4 da tese de doutorado de Yamakawa (1992) e é apresentada aqui na Figura 3.6 para comparação. A área sombreada representa a região onde há colisão com a Lua, ou quando o veículo espacial não escapa da esfera de influência da Lua no tempo estipulado na condição v da Seção 3.2. Esta figura assegura que a esfera de influência da Lua e o tempo limite de captura estão de acordo com as sugeri-

das em Yamakawa (1992).

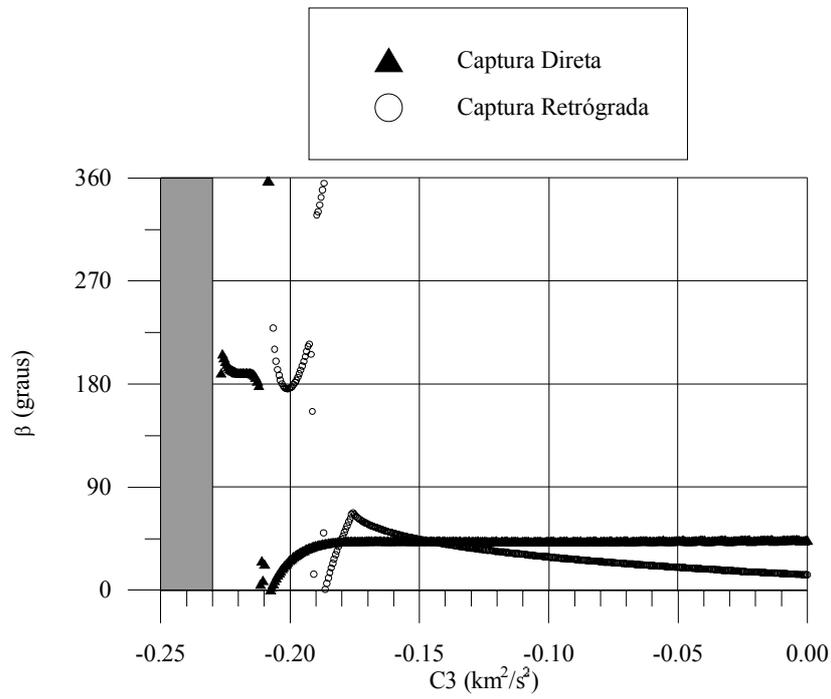


Fig. 3.5 – Ângulo da posição de entrada vs. $C3$ na periluna.

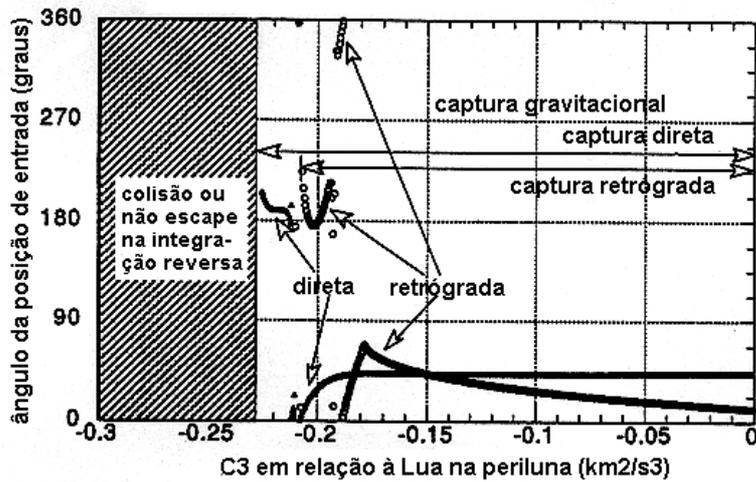


Fig. 3.6 – Figura 4-4 de Yamakawa (1992).

FONTE: Adaptada de Yamakawa (1992, pg. 64).

Para verificar por que acontece a descontinuidade na captura direta em β entre 357.3° e

22.6°, com C3 igual a $-0.2087593 \text{ km}^2/\text{s}^2$ e $-0.2098816 \text{ km}^2/\text{s}^2$ (-0.186000029 e -0.186999974 unidades canônicas), essas trajetórias são apresentadas na Figura 3.7. Pensando em termos do escape, ou seja, as condições iniciais estão na periluna e as finais na esfera de influência, as trajetórias são praticamente idênticas até o cúspide e, a partir desse ponto, a trajetória que tem a velocidade inicial menor, devido a energia menor, é novamente atraída pela Lua e depois escapa numa posição mais distante do que a da outra trajetória. O cúspide ocorre quando a velocidade total do veículo, no sistema de referências girante, é igual a zero (Yamakawa, 1992). A magnificação do cúspide é apresentada na Figura 3.8.

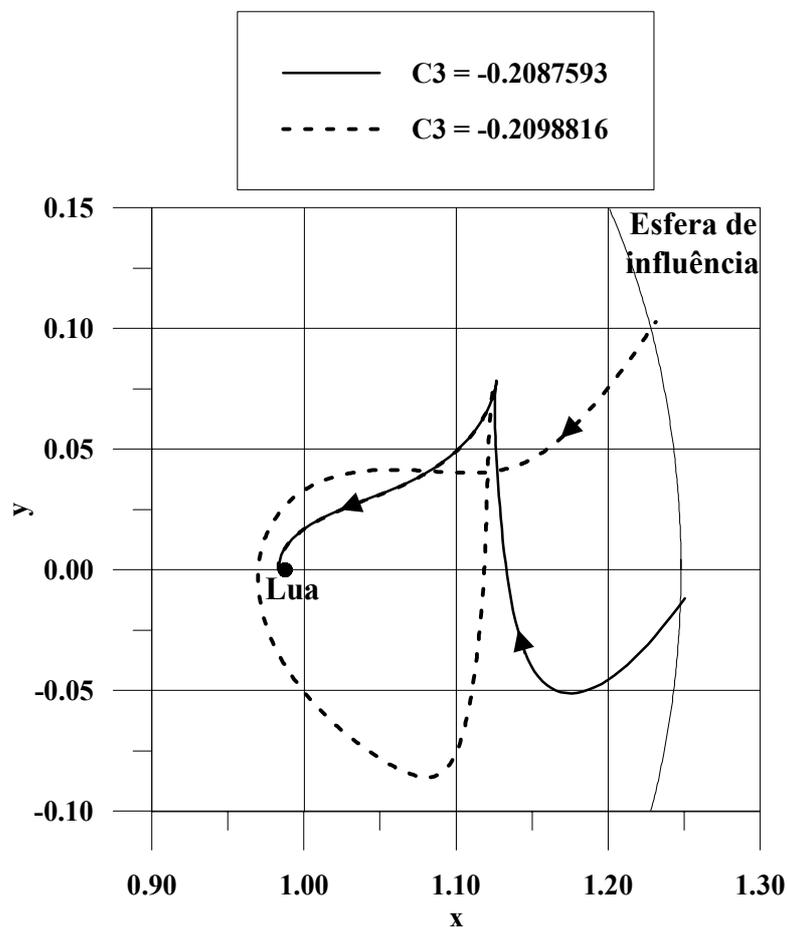


Fig. 3.7 – Trajetórias que produzem a descontinuidade em β entre 357.3° e 22.6° .

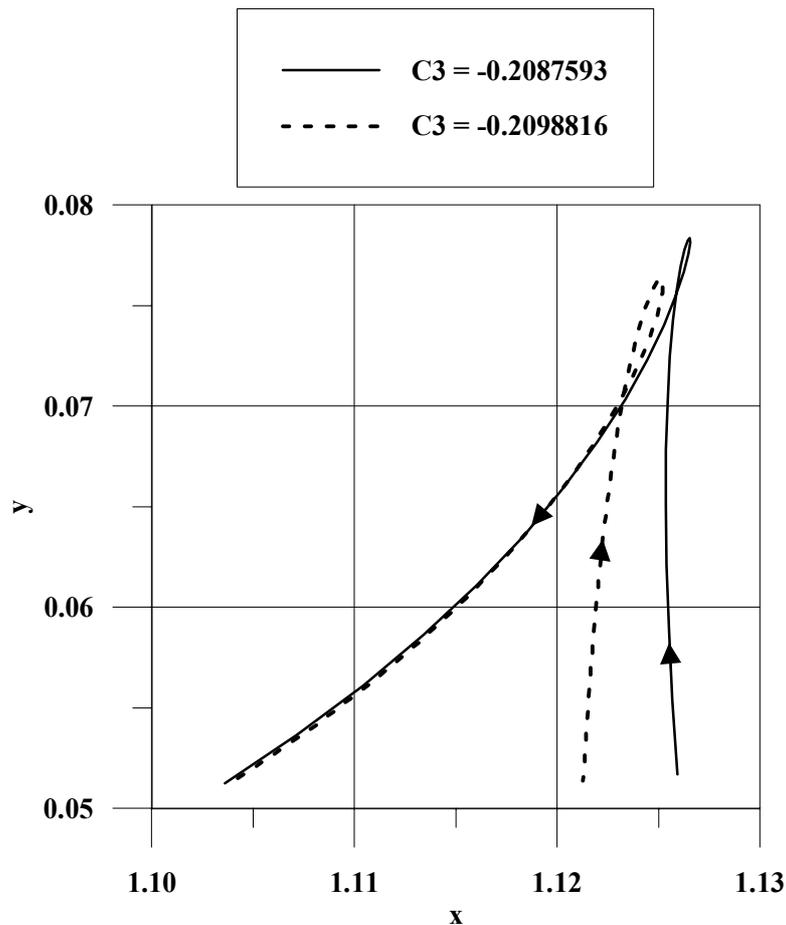


Fig. 3.8 – Magnificação do cúspide.

Uma outra descontinuidade na captura direta que é mais evidente ocorre entre as energias $C3 = -0.2115652 \text{ km}^2/\text{s}^2$ e $C3 = -0.2121263 \text{ km}^2/\text{s}^2$ (-0.188500025 e -0.188999953 unidades canônicas) com $\beta = 5^\circ$ e $\beta = 178.8^\circ$ respectivamente. As duas trajetórias estão apresentadas na Figura 3.9. Neste caso também aparece a coincidência de caminhos entre a Lua e o cúspide, para as duas trajetórias.

Os próximos dois testes reproduzem o estudo feito por Yamakawa (1992) em relação ao comportamento do ângulo da posição de entrada β e do semi-eixo maior em relação ao ângulo da posição da periluna α , definido na Seção 3.2 e mostrado na Figura 3.1. As Figuras 3.10 e 3.11 apresentam os resultados obtidos quando α é variado de 0 a 360 graus com incrementos de 1 grau e $C3$ é mantido constante em $-0.182 \text{ km}^2/\text{s}^2$

(-0.16215807 unidades canônicas).

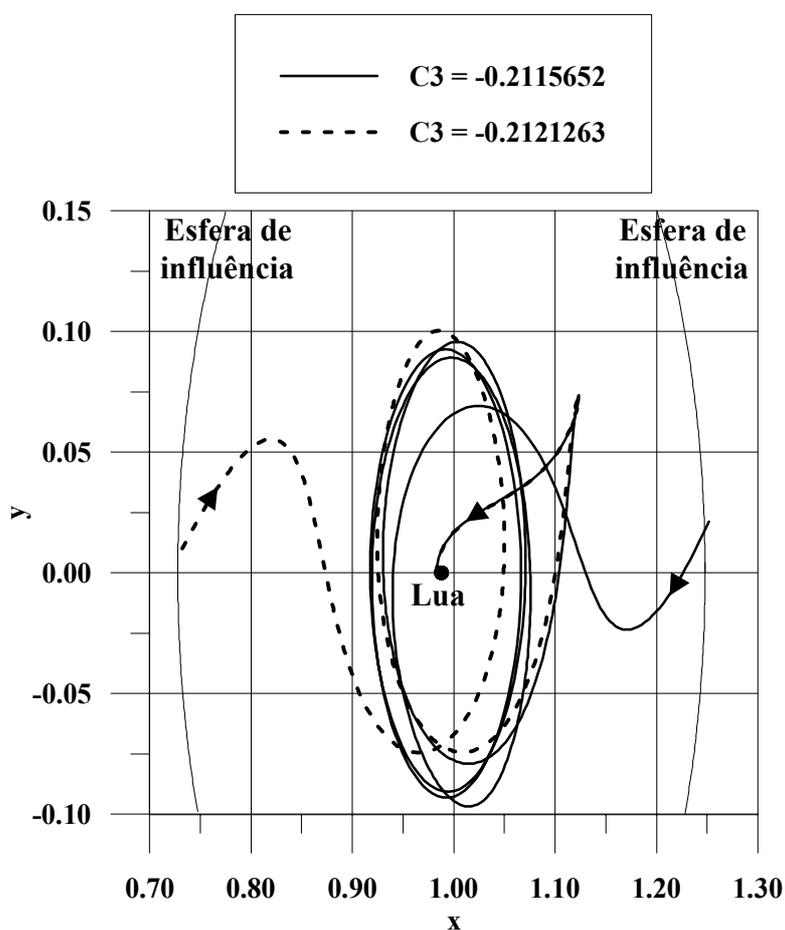


Fig. 3.9 – Trajetórias que produzem a descontinuidade entre $\beta = 5^\circ$ e $\beta = 178.8^\circ$.

Estas duas figuras, com a exceção de uns poucos pontos, são similares as figuras mostradas na Figura 4-8 de Yamakawa (1992) e que estão reproduzidas aqui na Figura 3.12. Os pontos extras que aparecem neste trabalho provavelmente se devem a diferença entre as dinâmicas dos modelos utilizadas. Estas Figuras garantem que a definição de captura do lado da Terra e a captura pelo lado contrário ao da Terra (definidas no Capítulo 6), estão corretas.

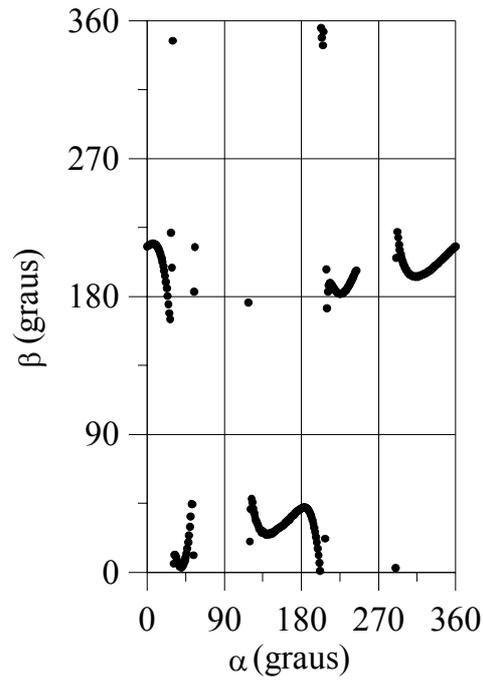


Fig. 3.10 – Ângulo da posição de entrada vs. ângulo de posição da periluna.

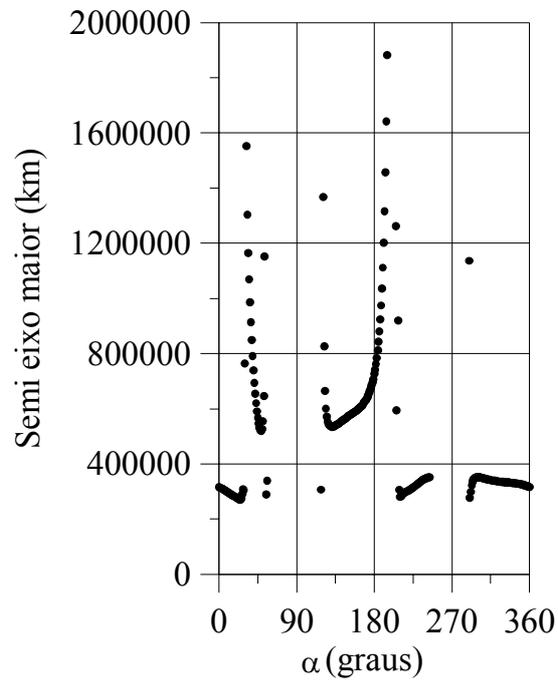


Fig. 3.11 – Semi-eixo maior vs. ângulo de posição da periluna.

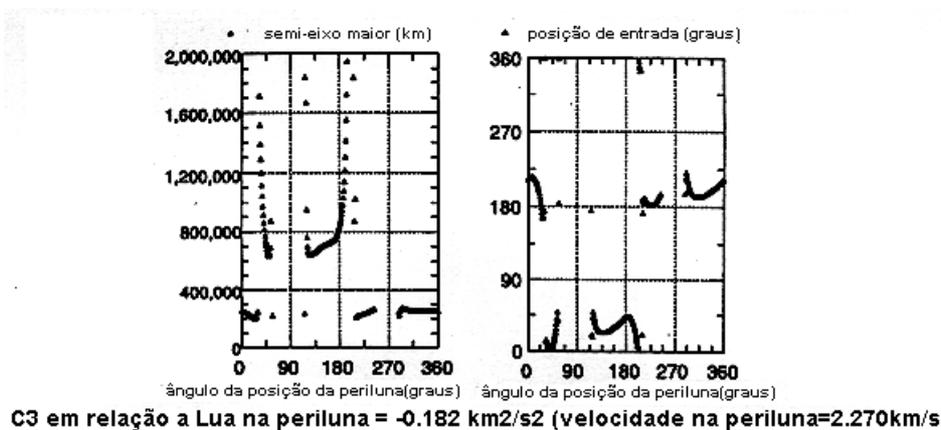


Fig. 3.12 – Figura 4-8 de Yamakawa (1992).

FONTE: Adaptada de Yamakawa (1992, pg. 67).

Uma experiência interessante é fazer um gráfico do semi-eixo maior vs. o ângulo da posição de saída β . A Figura 3.13 mostra esse resultado. Nota-se que se formaram dois grupos: o primeiro quando o semi-eixo maior tem um valor superior a 400000 km e β tem um valor próximo de 0° ; no outro grupo os valores do semi-eixo maior é inferior a 400000 km e β está próximo de 180° . Estes grupos fazem a definição da captura pelo lado oposto ao da Terra (primeiro grupo) e da captura pelo lado da Terra (segundo grupo) (Yamakawa, 1992). Na Figura 3.1 se vê que quando $\beta = 0^\circ$ o veículo espacial está do lado oposto ao da Terra e quando $\beta = 180^\circ$ o veículo espacial está do lado da Terra.

Utilizando-se da definição destes dois tipos de captura é possível ver a influência da escolha do ângulo da posição inicial da periluna α no tipo de trajetória. A Figura 3.14 apresenta um gráfico que mostra esta relação. A variação do ângulo α faz com que as trajetórias pulem de um tipo a outro. Essas transições explicam as descontinuidades das Figuras 3.11 e 3.12. Para ver o que está acontecendo na transição, foram reproduzidas duas trajetórias, uma com $\alpha = 29^\circ$ e outra com $\alpha = 30^\circ$, a primeira transição da Figura 3.14. Estas trajetórias estão apresentadas na Figura 3.15. Nesta Figura é visível que uma trajetória vai em direção a Terra enquanto que a outra vai em direção oposta ao da Terra. Novamente as trajetórias se unem no cúspide e seguem juntas até a periluna, sendo

que uma é capturada em $\alpha = 29^\circ$ e outra com $\alpha = 30^\circ$.

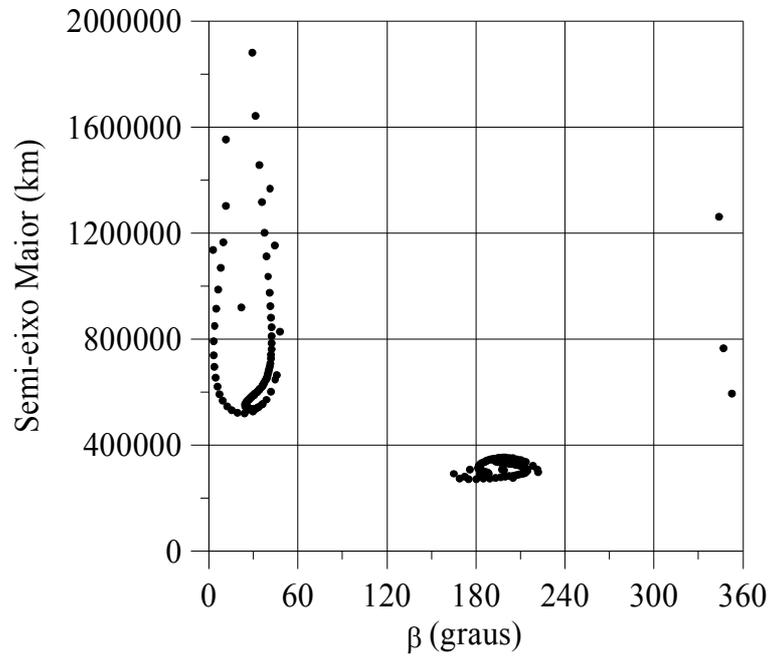


Fig. 3.13 – Semi-eixo maior vs. o ângulo da posição de saída.

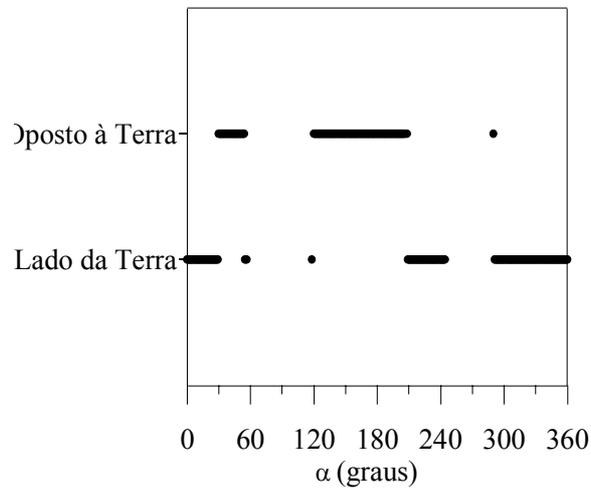


Fig. 3.14 – Influência de α no tipo de captura.

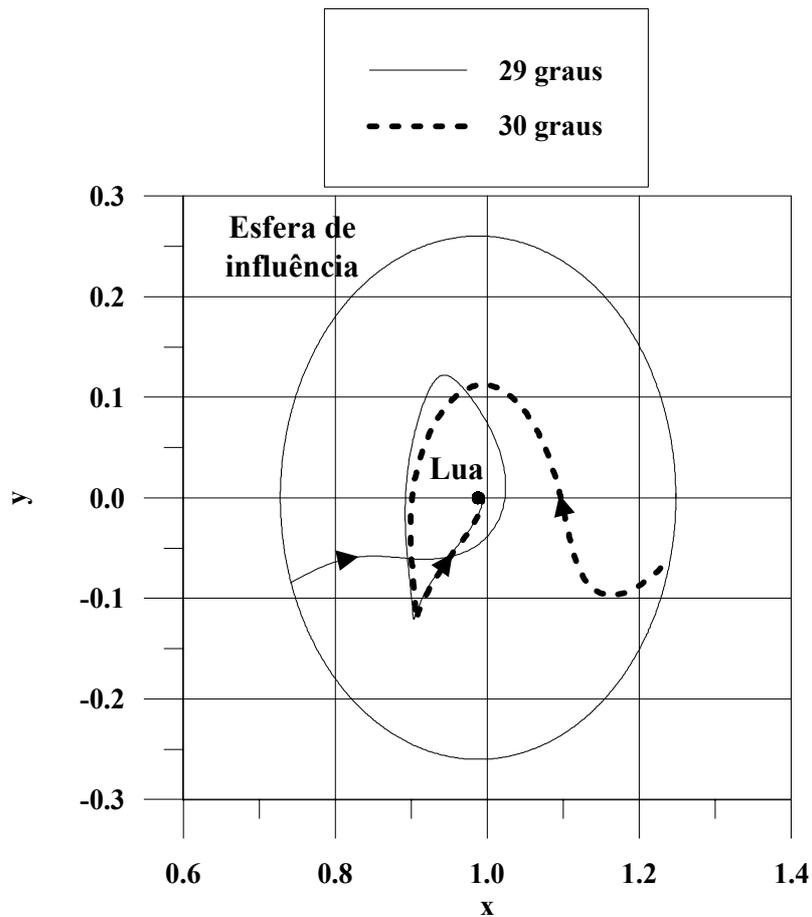


Fig. 3.15 – Trajetórias da descontinuidade.

Assim sendo, conclui-se, da série de estudos realizados neste Capítulo, que os modelos desenvolvidos neste trabalho estão em alto grau de concordância com os resultados mostrados em Yamakawa (1992) e pode-se passar a uma nova etapa, com novos resultados sendo buscados.

3.4. Validação do Modelo Elíptico

O próximo teste se refere a dinâmica do sistema restrito elíptico de três corpos. Como esse modelo não foi utilizado por Yamakawa (1992), outros trabalhos da literatura serão utilizados para comparação e validação dos modelos desenvolvidos. Com esse objetivo, foram propagadas as órbitas a, c e f da tabela 1 do artigo de Benest (1970). A Figura 3.16 mostra essas órbitas que correspondem exatamente às órbitas a, c e f da Figura 3 da

literatura citada e são apresentadas aqui na Figura 3.17.

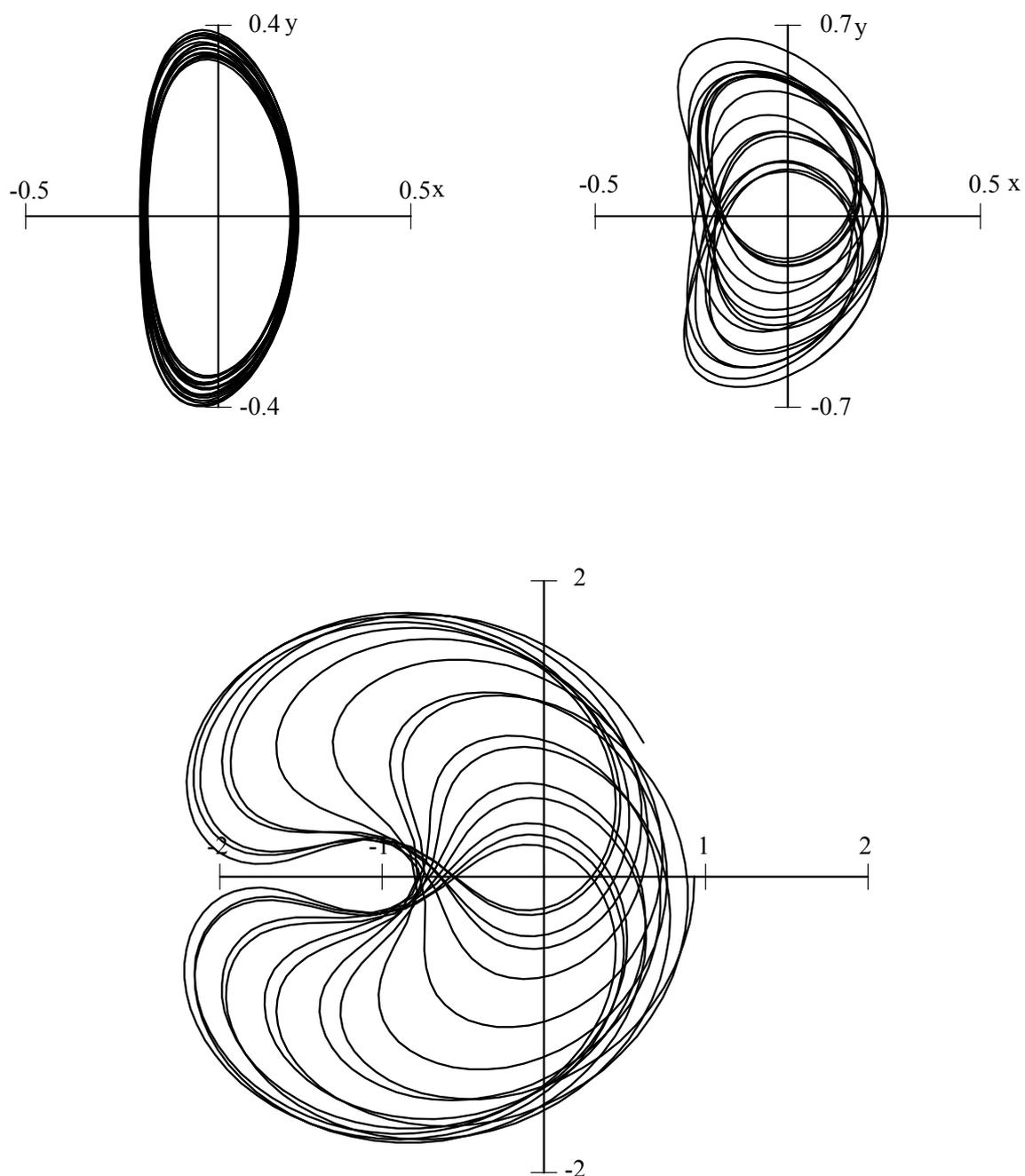


Fig. 3.16 – Trajetórias obtidas para o problema restrito elíptico de três corpos.

A Figura 3.17 mostra as Figuras originais de Benest (1970) para serem comparadas com que foram conseguidas utilizando a dinâmica desenvolvida no Capítulo 2. E com a similaridade dessas trajetórias é possível garantir a validação do modelo elíptico desenvol-

vido e que será aplicado nos resultados do Capítulo 8.

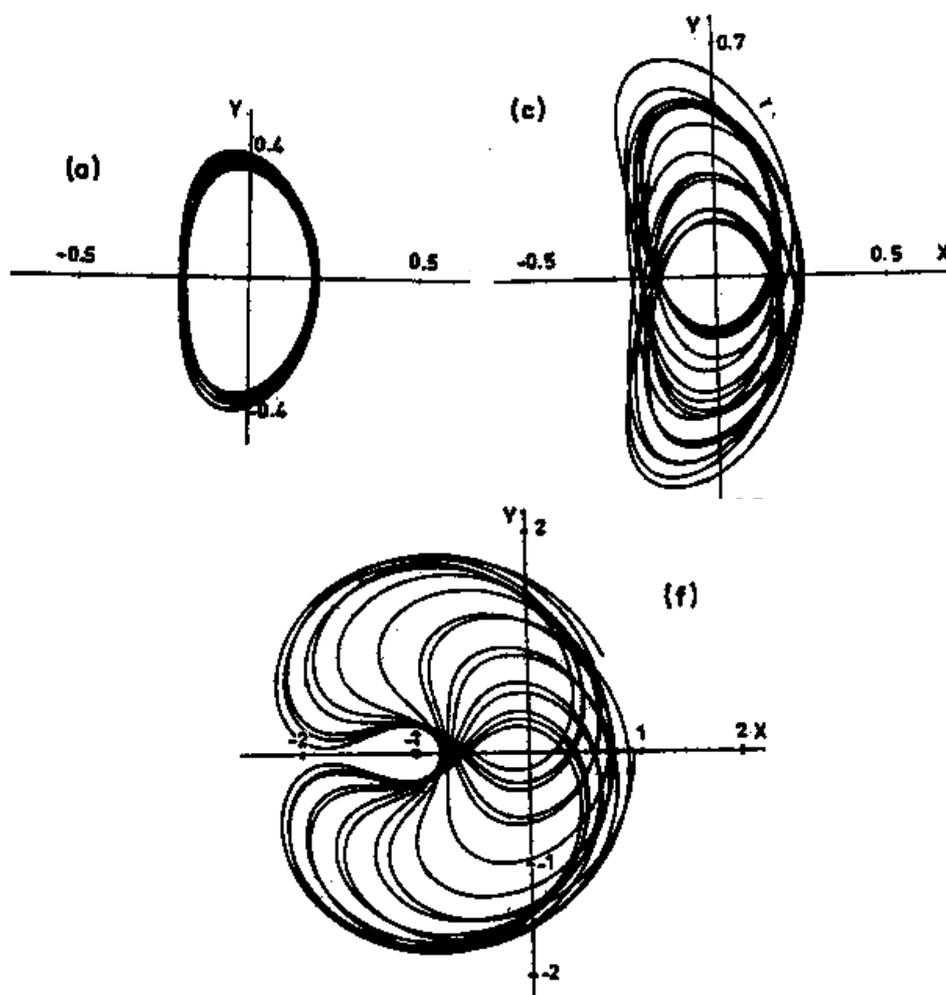


Fig. 3.17 – Figura 3 de Benest (1970).

FONTE: Adaptada de Benest (1970, pg. 159).

CAPÍTULO 4

TESTE DAS HIPÓTESES DE YAMAKAWA

4.1. Introdução

Neste Capítulo serão feitos testes numéricos com as principais hipóteses feitas por Yamakawa (1992) e que foram apresentadas nos Capítulos 2, 3 e Apêndice A do presente trabalho. Serão testados a esfera de influência de 100000 km, que define as trajetórias de captura gravitacional, e o tempo máximo de 50 dias para que o veículo espacial escape da gravidade da Lua, que foi utilizado por Yamakawa (1992). Além disto serão feitos testes referentes aos métodos de integração numérica para garantir que não existem erros numéricos significativos interferindo nos resultados aqui apresentados. Sendo assim, esse Capítulo tem a pretensão de começar a apresentar resultados novos referentes a esse tópico, dado que esses testes não foram encontrados na literatura.

4.2. A Esfera de Influência

Para testar o valor da esfera de influência da Lua, definida a partir da distância crítica apresentada no Apêndice A, foram integradas diversas trajetórias variando os valores iniciais de $C3$, α e r_p . Para cada uma dessas trajetórias foi monitorado o comportamento de $C3$ enquanto o veículo espacial se afastava da Lua. A condição para interromper a integração numérica das trajetórias é a primeira que ocorrer entre as três seguintes: i) o veículo espacial ultrapassar a distância de 150000 km da Lua; ii) o veículo espacial colidir com a Lua; iii) a integração numérica ultrapassar o tempo de 50 dias sem que nenhuma das duas condições anteriores se realize. O objetivo desse procedimento é, ao estender a distância limite de 100000 km para 150000 km, verificar o comportamento das trajetórias nessa faixa adicional de 50000 km. Com isso, pode-se atingir dois importantes objetivos: i) verificar a influência de valores diferentes para a esfera de influência no problema de captura; ii) verificar a diferença, em termos de resultados, das duas definições de captura gravitacional mostradas no Capítulo 2, Seção 2.4. Essa verificação será efetuada, pois as únicas trajetórias que satisfazem a definição conceitual (definição 1) e não satisfazem a definição prática (definição 2) são as trajetórias que atingem a dis-

tância de 100000 km da Lua com um $C3$ ainda negativo e que não conseguem atingir um valor de $C3$ positivo na seqüência da integração numérica. Logo, ao estender essa integração para uma distância maior (no caso de 150000 km) pode-se verificar se existem trajetórias que possam ser enquadradas nessa situação.

A Figura 4.1 apresenta os casos escolhidos para $C3 = 0$. Nesta Figura, assim como nas próximas, foram escolhidos os valores 0° , 90° , 180° e 270° para o ângulo α , devido a simetria, e os valores 64° e 288° foram escolhidos arbitrariamente, para dar maior cobertura aos valores testados. Para este valor inicial de $C3$ todas as trajetórias são de escape. Para as trajetórias apresentadas na figura, somente para $\alpha = 64^\circ$ $C3$ não é positivo quando a distância atingida é de 100000 km. No entanto, logo que a distância ultrapassa os 100000 km $C3$ muda de sinal rapidamente demonstrando que há captura gravitacional. Esse fato indica que as definições 1 e 2 levam ao mesmo resultado numérico, e que aumentar a esfera de influência para além dos 100000 km, utilizado na literatura, não traria nenhuma influência nos resultados aqui apresentados. A Figura 4.1 foi construída com dois valores de r_p (1838 km e 6738 km) para uma maior generalidade do estudo.

Na Figura 4.2 estão apresentadas as trajetórias para as quais $C3 = -0.1$. Agora existe um maior número de trajetórias onde $C3$ é negativo ao atingir a distância de 100000 km da Lua. Mas está bem claro que todas as trajetórias que alcançam essa distância não retornam mais para a Lua e o valor de $C3$ atinge valores positivos. Para $\alpha = 64^\circ$ e $r_p = 6738$ km a trajetória é de colisão com a Lua. A trajetória que escapa ($r_p = 1838$ km), inicialmente faz algumas evoluções em torno da Lua, demorando a se aproximar da esfera de influência, até atingir um determinado momento que ganha energia suficiente e vai para fora da esfera de influência da Lua. Uma vez mais fica confirmado a equivalência, do ponto de vista prático, das definições 1 e 2 e a adequação do valor de 100000 km para a esfera de influência para a Lua.

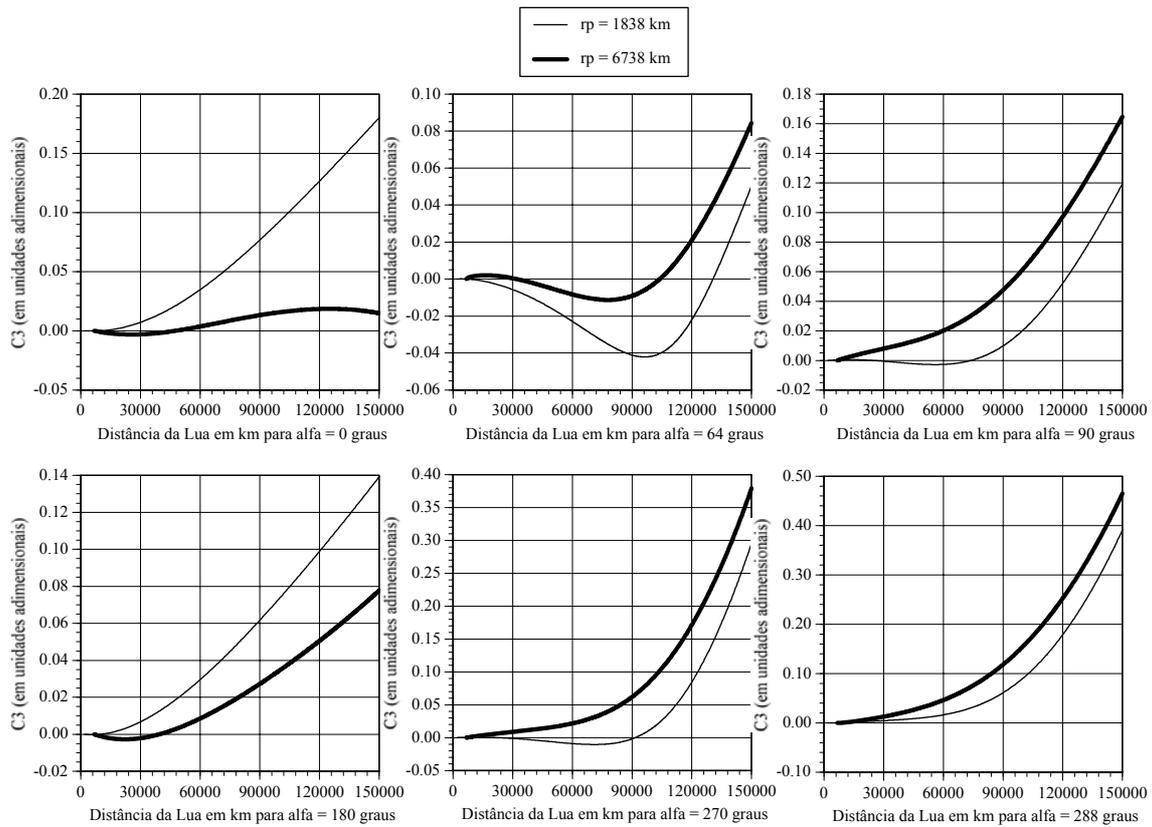


Fig. 4.1 – Comportamento de C_3 em relação à distância da Lua para o valor inicial $C_3 = 0$.

A Figura 4.3 apresenta o caso extremo em que C_3 inicia-se com o valor de -0.2 . Neste caso ocorreram situações que resultaram na utilização dos três critérios para a interrupção da integração numérica. Esse fato era esperado, pois com a redução do valor inicial de C_3 as trajetórias de captura gravitacional tendem a ocorrer com menos frequência e os critérios que indicam a sua não ocorrência (tempo de integração excessivo e colisão com a Lua) passam a ocorrer. Para o valor de $r_p = 1838$ km em $\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 180^\circ$, a integração numérica foi interrompida porque as trajetórias alcançaram o limite de 150000 km. Para o valor de $r_p = 6738$ km, também em $\alpha = 0^\circ$ e 180° , houve interrupção devido ao excesso de tempo de integração numérica. Nas demais situações ocorreram colisões com a Lua. É interessante ressaltar que, para as trajetórias em que houve colisão e para as situações onde o tempo limite de integração foi alcançado, a maior distância atingida foi inferior a 50000 km a partir da Lua.

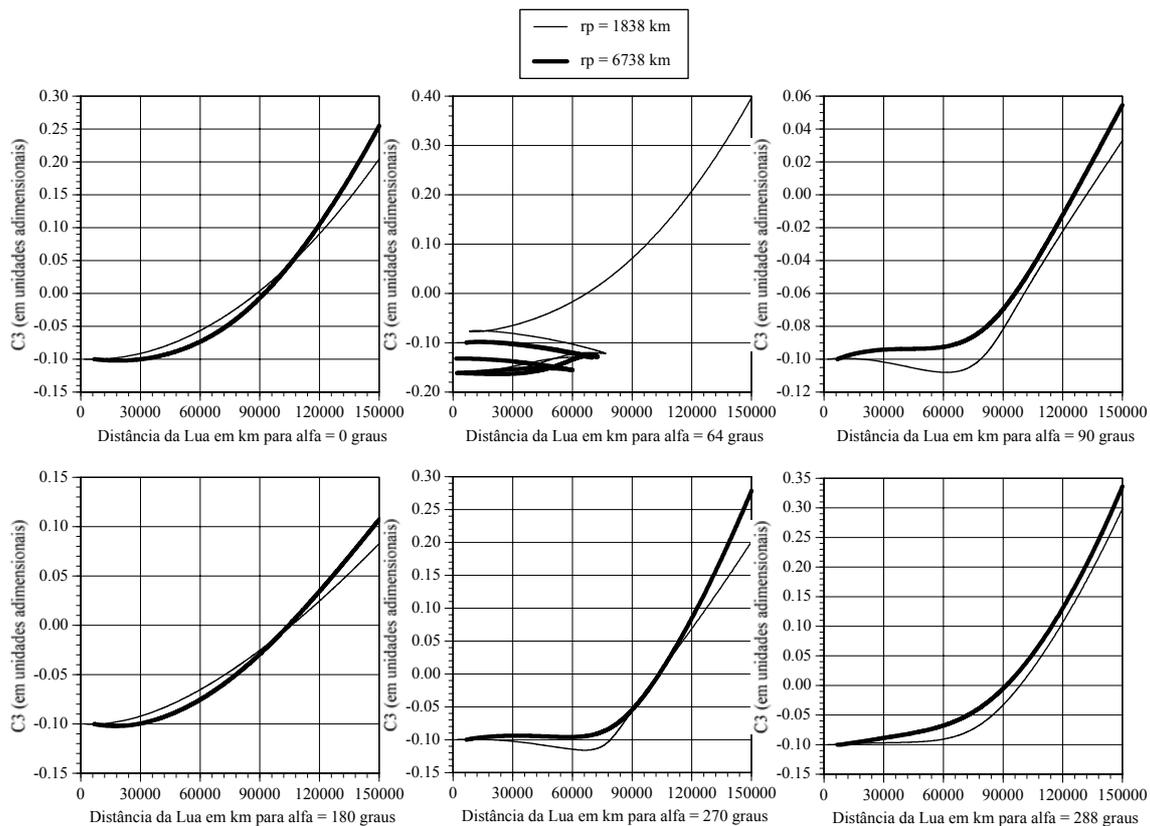


Fig. 4.2 – Comportamento de C_3 em relação à distância da Lua para o valor inicial $C_3 = -0.1$.

Analisando os casos apresentados acima pode-se concluir que, embora não se ultrapasse a distância de 50000 km nos casos em que não há escape, a distância de 100000 km da Lua é uma medida segura e razoável para ser escolhida como limite entre as trajetórias que escapam da Lua e as que não escapam. Em outras palavras, pode-se dizer que, do ponto de vista das trajetórias aqui analisadas, qualquer valor da esfera de influência a partir de 50000 km geraria os mesmos resultados. Assim sendo, é feita a opção por manter o mesmo valor de 100000 km utilizado por Yamakawa (1992) para facilitar as comparações aqui efetuadas.

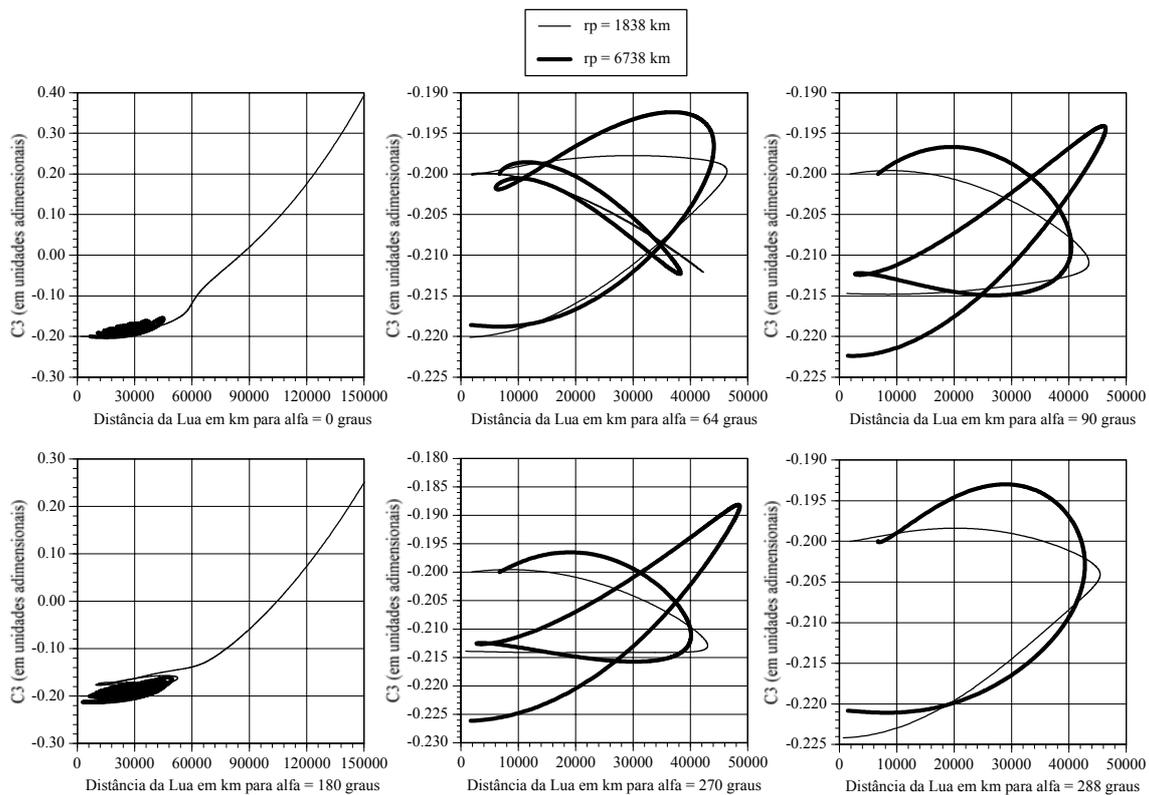


Fig. 4.3 – Comportamento de C_3 em relação à distância da Lua para o valor inicial de $C_3 = -0.2$.

4.3. O Tempo Limite de Integração

Para analisar o efeito do tempo limite de integração numérica nos resultados aqui apresentados, serão estudados as mesmas situações da Seção anterior. O tempo limite para integração numérica foi aumentado para 100 dias. A distância limite nos casos abaixo é de 100000 km da superfície da Lua. Com isso pretende-se conhecer o comportamento das trajetórias estudadas entre os tempos de 50 e 100 dias e verificar se essa alteração de tempo gera conseqüências nos resultados aqui apresentados.

A Figura 4.4 apresenta as trajetórias em que C_3 inicia com o valor 0. Como a Figura 4.1 já mostrava, na situação em que $\alpha = 64^\circ$ as duas trajetórias alcançam o limite de distância com C_3 ainda negativo. No entanto, como a Figura 4.1 mostra, a trajetória é de escape.

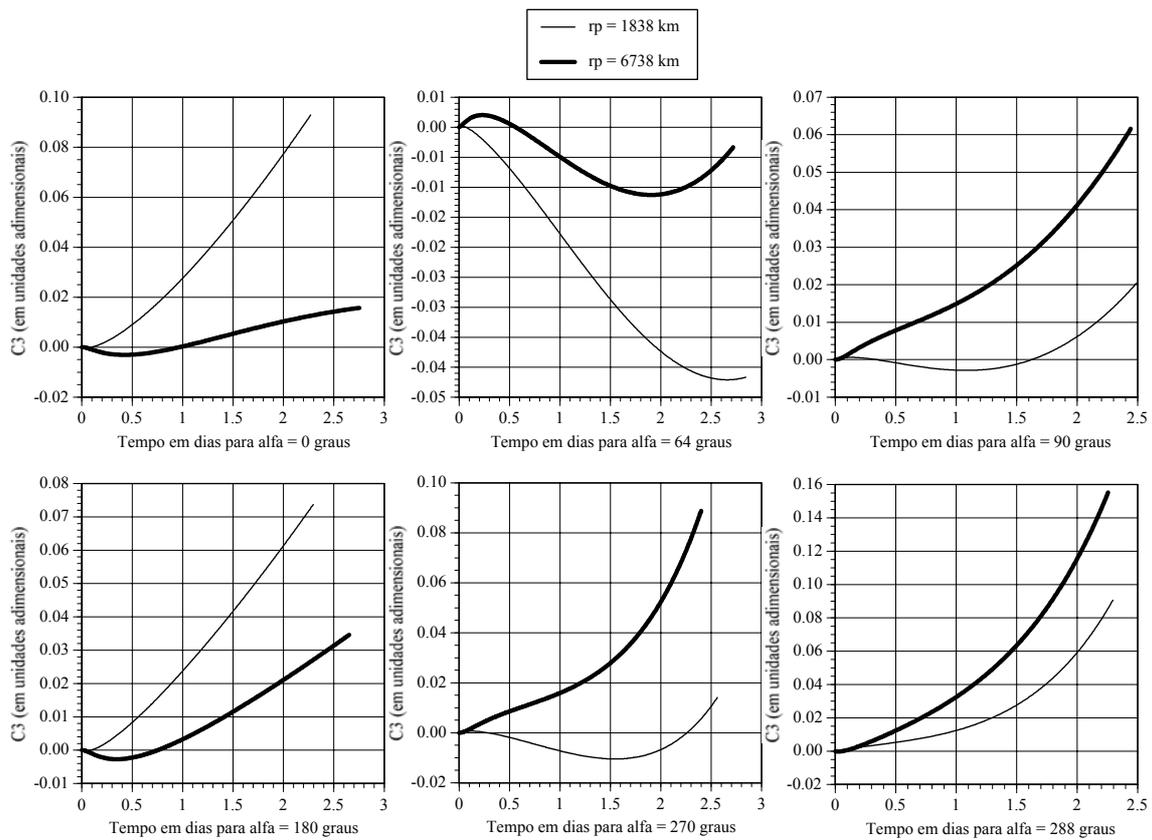


Fig. 4.4 – Comportamento de $C3$ em relação ao tempo decorrido para o valor inicial de $C3 = 0$.

A Figura 4.5 apresenta as trajetórias em que $C3$ se inicia com o valor de -0.1 . Para $\alpha = 64^\circ$ ocorre colisão para $r_p = 6738$ km e uma demora razoável para $r_p = 1838$ km. Essa demora é de cerca de 20 dias, correspondendo a cerca de cinco vezes o tempo requerido para as demais trajetórias apresentadas na Figura.

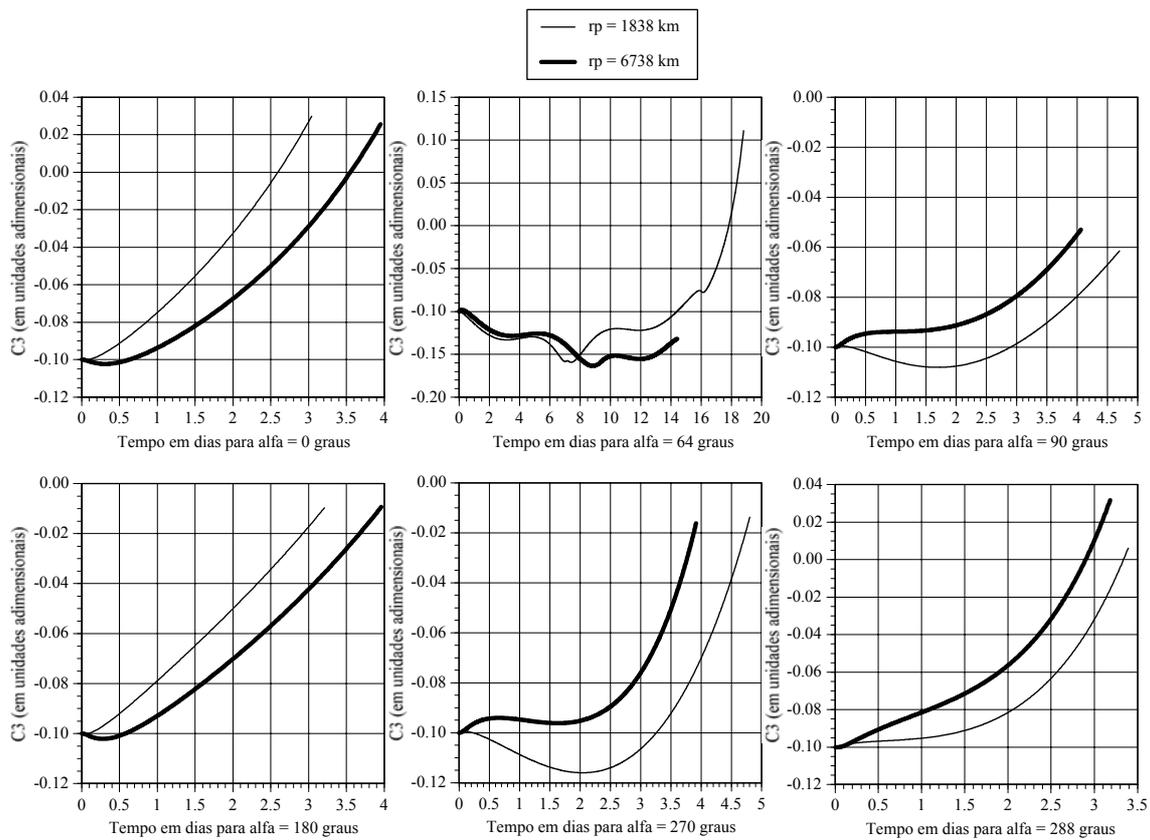


Fig. 4.5 – Comportamento de $C3$ em relação ao tempo decorrido para o valor inicial de $C3 = -0.1$.

A Figura 4.6 mostra as trajetórias em que $C3$ inicia com -0.2 . Pode-se notar que os casos em que ocorre colisão com a Lua os valores máximos de tempo não ultrapassam cerca de oito dias. Observando a Figura fica mais fácil entender o que ocorre quando não acontece colisão nem escape. A oscilação de $C3$ entre -0.20 e -0.15 implica em que o veículo espacial está fazendo várias evoluções em torno da Lua, sem ocorrer um escape ou uma colisão.

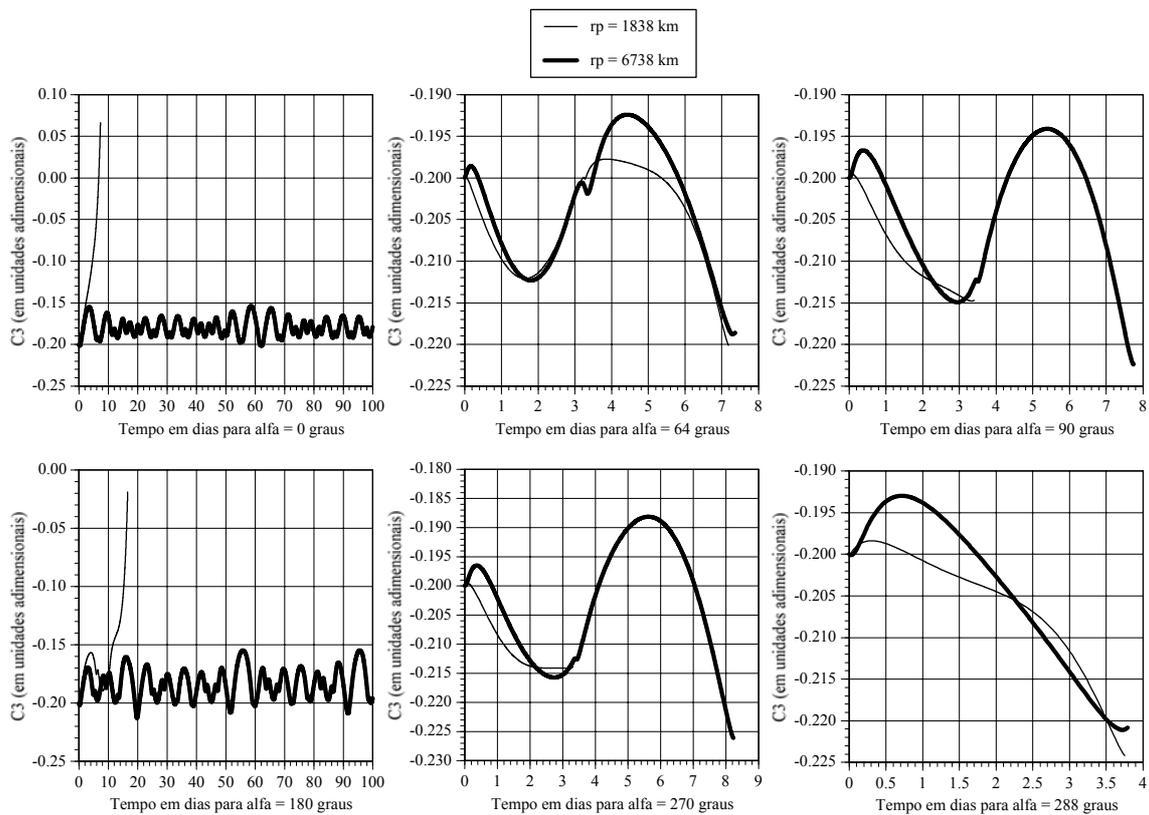


Fig. 4.6 – Comportamento de $C3$ em relação ao tempo decorrido para o valor inicial de $C3 = -0.2$.

A partir das trajetórias estudadas acima é possível concluir que o tempo máximo de 50 dias como limite entre as trajetórias que escapam ou não, é um valor razoável e seguro. Todas as trajetórias de escape estudadas definiram o seu escape num tempo menor do que oito dias e todas as trajetórias que permaneceram em órbita em torno da Lua (sem colisão ou escape) ao final dos primeiros 50 dias permaneceram nessa situação até o 100º dia. Ou seja, do ponto de vista dos resultados, aqui apresentados, o aumento do tempo de integração numérica não teria nenhuma consequência.

4.4. Testes do Método de Integração Numérica

Para verificar se não existem erros devidos ao método de integração numérica foi escolhida uma trajetória com os valores iniciais de $C3 = -0.1$ (em unidades canônicas), $r_p = 1838$ km e $\alpha = 64^\circ$. O passo de tempo de integração numérica para todas as trajetórias é

negativo e nas figuras estão sendo utilizados os valores absolutos do tempo. Foram utilizados dois métodos de integração numérica: o Runge-Kutta de 7/8 ordem e passo variável, que será chamado de I1; e o Runge-Kutta de quarta ordem e passo fixo, que de agora em diante será chamado de I2. Além disto, foram utilizados dois equacionamentos diferentes para a dinâmica: o regularizado, apresentado no Capítulo 3, que será chamado de D1; e o polar, desenvolvido por Yamakawa (1992) e que é apresentado no Apêndice A e será chamado de D2. Com esse procedimento pretende-se eliminar qualquer possibilidade de erro nos resultados devido a problemas relacionados a métodos de integração numérica ou escolha de dinâmica para o problema.

A trajetória escolhida está apresentada na Figura 4.7 no sistema de referência girante adimensional. Esta trajetória foi obtida a partir da utilização da dinâmica D1 e o método de integração I1. As outras trajetórias com a combinação dos equacionamentos e integradores não estão apresentadas porque são graficamente idênticas. Devido a regularização envolvida na dinâmica D1 o tempo flui de forma diferente em relação a dinâmica D2, caracterizando uma quantidade de pontos quase três vezes maior em D2 em relação a D1, dado que o tempo representa o limite final da integração numérica. Contudo, esse fato em nada dificulta a comparação aqui desejada porque as trajetórias podem ser plotadas integralmente, ainda que não tenham sido obtidas para os mesmos valores de tempos finais.

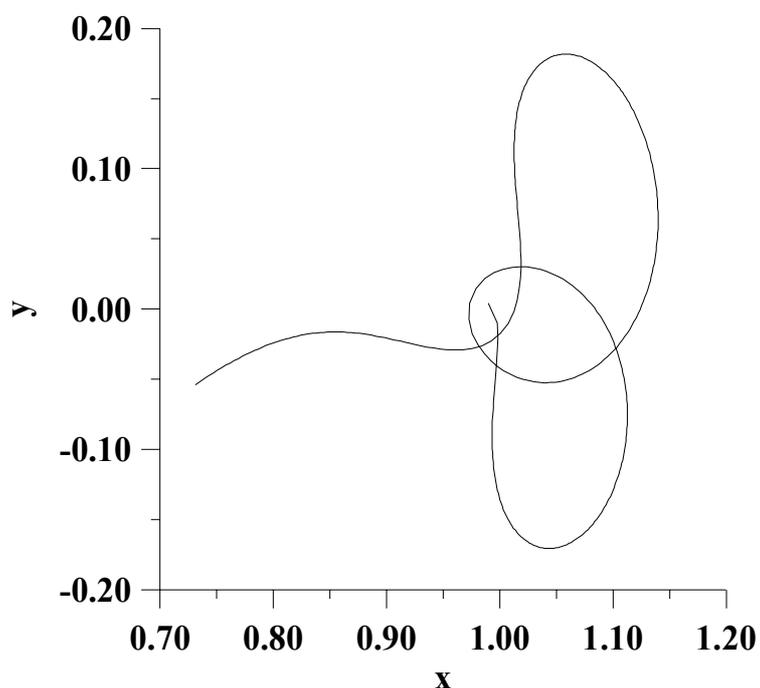


Fig. 4.7 – Trajetória com a dinâmica D1 e com o método de integração I1.

Um outro parâmetro escolhido para validar os equacionamentos e métodos de integração é a constante de Jacobi, definida no Capítulo 2. Nos quatro casos elas tiveram o valor de 3.08488425671 durante todo o tempo de integração, com variações na última casa decimal.

Um último parâmetro para testar os integradores e as dinâmicas foi o tempo real de processamento. O resultado está apresentado na Tabela 4.1.

TABELA 4.1 – TEMPO DE PROCESSAMENTO

Conjunto	tempo (segundos)
I1D1	0.94
I1D2	3.73
I2D1	6.10
I2D2	5.82

O melhor conjunto foi o integrador de passo variável I1 com a dinâmica regularizada D1. Quando se utiliza o integrador de passo fixo I2 o resultado é melhor quando se usa a dinâmica não regularizada.

Como neste trabalho muitas trajetórias terão que ser processadas, o fator tempo é de grande importância. Por isso o conjunto I1D1 será utilizado ao longo deste trabalho.

4.5. Conclusões Finais

Dos estudos efetuados nesse Capítulo pode-se concluir que: i) os valores utilizados para a esfera de influência e o tempo limite de integração são adequados, e aumentar esses valores aumenta o tempo consumido pelo computador sem alterar os resultados obtidos; ii) as duas definições apresentadas para a captura gravitacional são equivalentes, do ponto de vista de resultados; iii) o método de integração numérica não interferiu nos resultados obtidos e simulações realizadas com um segundo método confirmam os valores aqui mostrados.

Além disto, os testes aqui realizados servem para a definição do tipo do integrador e da dinâmica que será usado ao longo do trabalho. Como o integrador I1 é mais rápido do que o I2 (Tabela 4.1). E como a rapidez da dinâmica depende do integrador utilizado, podendo ser D1 no caso do uso de I1, ou de D2, quando I2 é usado. O conjunto escolhido foi I1D1.

CAPÍTULO 5

ESTUDO DAS FORÇAS QUE ATUAM NO PROBLEMA DE CAPTURA GRAVITACIONAL

5.1. Introdução

Neste Capítulo serão estudadas as forças que atuam sobre um veículo espacial em trajetória de captura gravitacional temporária. Para compreender as forças que agem no sistema, elas serão definidas e equacionadas para que se faça um estudo detalhado de cada uma delas. Para fazer isto será mostrado como obter as equações de movimento pelo método newtoniano, já que Yamakawa utilizou o método de Lagrange. Através da rotação do sistema de referências as forças de Coriolis e centrípeta aparecerão.

5.2. Equações de Movimento e das Forças

No Apêndice A deste trabalho as equações de movimento foram encontradas a partir do método de Lagrange, que é um método baseado em energia. Para conhecer as forças que estão agindo sobre a partícula é necessário utilizar o método newtoniano. Neste método verifica-se quais são as forças que estão agindo sobre a partícula e daí se consegue a lei de movimento. Ou seja:

$$\mathbf{F} = m_i \frac{d^2 \mathbf{R}_i}{d\tau^2}, \quad (5.1)$$

onde \mathbf{F} é a força total aplicada sobre a partícula i , m_i é a massa da partícula i , \mathbf{R}_i é o raio vetor que localiza a partícula i e τ é o tempo.

A Figura 5.1 apresenta as forças que agem numa partícula sobre influência gravitacional de dois corpos. Neste sistema, as duas partículas mais pesadas, os primários, estão em movimento circular uniforme em torno de seu baricentro e a massa da partícula estudada é desprezível.

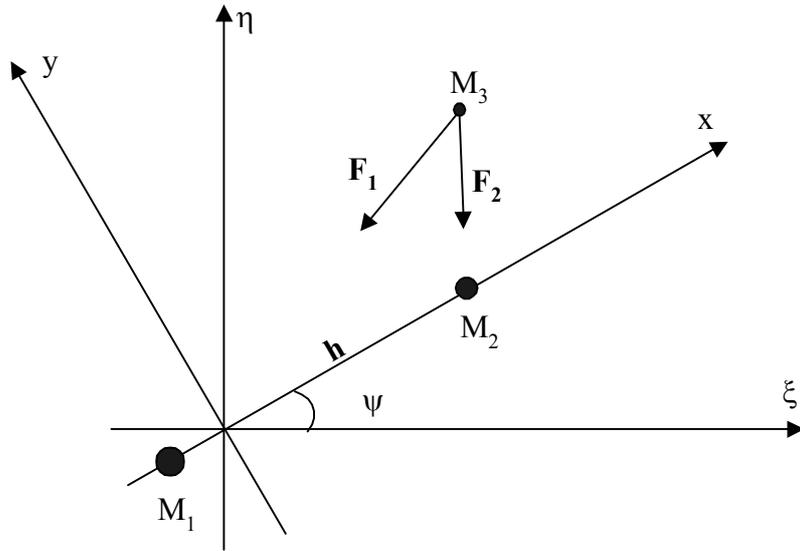


Fig. 5.1 – Configuração das forças do problema restrito circular de três corpos.

Portanto, a força total no sistema fixo de coordenadas é dado por:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad (5.2)$$

sendo que \mathbf{F}_1 é devido a gravidade do corpo 1:

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{Gm_1m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13}, \quad (5.3)$$

e \mathbf{F}_2 é devido a gravidade do corpo 2:

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{Gm_2m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23}, \quad (5.4)$$

onde o vetor \mathbf{r}_{13} vai do primário de maior massa até a partícula, o vetor \mathbf{r}_{23} vai do primário de menor massa até a partícula e G é a constante da gravidade.

Por ser um sistema fechado a soma total das forças é zero (Symon, 1986), portanto:

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{R}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{R}_2}{dt^2} + m_3 \frac{d^2 \mathbf{R}_3}{dt^2} = 0. \quad (5.5)$$

Usando:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_3 - \mathbf{r}_{13} \text{ e } \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_3 - \mathbf{r}_{23} \quad (5.6)$$

e a equação (5.5), chega-se a:

$$(m_1 + m_2 + m_3) \frac{d^2 \mathbf{R}_3}{dt^2} = m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_{13}}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_{23}}{dt^2}. \quad (5.7)$$

Para restringir o problema, será considerado que a massa m_3 é muito menor que as massas dos dois primários e, portanto, será desprezada. Feito isto e definindo:

$$m = m_1 + m_2, \mu_1 = \frac{m_1}{m}, \mu_2 = \frac{m_2}{m}, \quad (5.8)$$

chega-se a:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_3}{dt^2} = \mu_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_{13}}{dt^2} + \mu_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_{23}}{dt^2}. \quad (5.9)$$

Para tornar o sistema adimensional a força total \mathbf{F} será dividida pela massa total dos dois primários (m) e o vetor \mathbf{h} (que representa a distância entre os dois primários, como mostra a Figura 5.1) será considerado unitário. Além disto a escala de tempo será definida de tal forma que a velocidade angular dos dois primários em torno do baricentro seja unitária. A partir da equação (5.8) tem-se que:

$$\mu_1 + \mu_2 = 1, \quad (5.10)$$

e usando a terceira lei de Kepler chega-se a conclusão que a constante gravitacional G é também unitária nesse sistema.

Como no Capítulo 2, será definido que $\mu = \mu_2$ e $\mu_1 = 1 - \mu$, e é esta nomenclatura que será utilizado de agora em diante.

Aplicando a equação (5.1) para a partícula 3, usando os resultados das equações (5.2), (5.3), (5.4) e (5.8), e utilizando as hipóteses do parágrafo anterior, chega-se a:

$$-\frac{1-\mu}{r_{13}^3}\mathbf{r}_{13} - \frac{\mu}{r_{23}^3}\mathbf{r}_{23} = (1-\mu)\frac{d^2\mathbf{r}_{13}}{dt^2} + \mu\frac{d^2\mathbf{r}_{23}}{dt^2} \quad (5.11)$$

Colocando o vetor \mathbf{r}_{13} em função do vetor \mathbf{r}_{23} , tem-se que:

$$\mathbf{r}_{13} = \mathbf{r}_{23} + \mathbf{h} ,$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_{13}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_{23}}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{h}}{dt^2} \text{ e} \quad (5.12)$$

$$r_{13}^2 = 1 + r_{23}^2 + 2r_{23}\cos\alpha ,$$

onde r_{13} e r_{23} são os módulos de \mathbf{r}_{13} e \mathbf{r}_{23} , 1 é o módulo de \mathbf{h} e α é igual a 180° menos o ângulo entre os vetores \mathbf{r}_{23} e \mathbf{h} . α está definido na Figura A.1.

Como esta derivada está no sistema inercial (não girante) para conhecer o movimento da partícula em relação ao sistema de coordenadas girantes aplica-se o teorema de Coriolis (Symon, 1986):

$$\frac{d^2\mathbf{r}_{23}}{dt^2} = \frac{d^{*2}\mathbf{r}_{23}}{dt^2} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_{23}) + 2\vec{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{23}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{23} \quad (5.13)$$

O vetor $\vec{\omega}$ é o vetor velocidade angular do sistema. A derivada com asterísco representa a derivada no sistema girante. O primeiro termo do segundo membro é a aceleração em relação ao sistema com asterísco. O segundo termo denomina-se aceleração centrípeta. O terceiro termo denomina-se aceleração de Coriolis. O último não tem uma denominação específica e neste caso é nulo já que o sistema girante está em movimento circular uniforme. As forças centrípeta e de Coriolis aparecerão na equação de movimento da partícula devido ao movimento do sistema de referência.

Utilizando (5.12) e (5.13) a equação (5.11) se torna:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1-\mu}{(1+r_{23}^2+2r_{23}\cos\alpha)^{3/2}}(\mathbf{r}_{23}+\mathbf{h}) - \frac{\mu}{r_{23}^3}\mathbf{r}_{23} = \\
& = \frac{d^{*2}\mathbf{r}_{23}}{dt^2} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_{23}) + 2\vec{\omega} \times \frac{d^*\mathbf{r}_{23}}{dt} + (1-\mu)\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{h})
\end{aligned} \quad (5.14)$$

Agora usando as seguintes identidades:

$$\mathbf{r}_{23} = r_{23}\hat{\mathbf{r}}_{23}, \mathbf{h} = \cos\alpha\hat{\mathbf{r}}_{23} - \sin\alpha\hat{\boldsymbol{\alpha}} \text{ e } \vec{\omega} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (5.15)$$

onde os versores $\hat{\mathbf{r}}_{23}$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ e $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ indicam a direção do vetor \mathbf{r}_{23} , a direção de crescimento do ângulo α e a direção do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$, respectivamente. Todos estes versores são perpendiculares entre si. E definindo:

$$v_r = \frac{d^*\mathbf{r}_{23}}{dt} \text{ e } v_\alpha = r_{23} \frac{d^*\alpha}{dt}, \quad (5.16)$$

é possível escrever as equações de movimento nas direções $\hat{\mathbf{r}}_{23}$ e $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ a partir da equação (5.14):

$$\frac{d^{*2}\mathbf{r}_{23}}{dt^2} - \frac{v_\alpha^2}{r_{23}} - 2v_\alpha - (1-\mu)\cos\alpha - r_{23} + \frac{(1-\mu)(r_{23} + \cos\alpha)}{(1+r_{23}^2+2r_{23}\cos\alpha)^{3/2}} + \frac{\mu}{r_{23}^2} = 0, \quad (5.17)$$

$$\frac{2v_r v_\alpha}{r_{23}} + r_{23} \frac{d^{*2}\alpha}{dt^2} + 2v_r + (1-\mu)\sin\alpha - \frac{(1-\mu)\sin\alpha}{(1+r_{23}^2+2r_{23}\cos\alpha)^{3/2}} = 0. \quad (5.18)$$

Estas equações são as mesmas equações (A.8) e (A.9) obtidas a partir do método de Lagrange utilizado por Yamakawa (1992).

Colocando a força centrípeta e de Coriolis no mesmo lado das forças gravitacionais na equação (5.13) e fazendo comparações com as equações (5.14) e (5.15) é possível identificar cada uma das forças que atuam sobre a partícula:

Força gravitacional devido ao primário de maior massa:

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{(1-\mu)(r_{23} + \cos \alpha)}{(1 + r_{23}^2 + 2r_{23} \cos \alpha)^{3/2}} \hat{\mathbf{r}}_{23} + \frac{(1-\mu)\sin \alpha}{(1 + r_{23}^2 + 2r_{23} \cos \alpha)^{3/2}} \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \quad (5.19)$$

cujo módulo é:

$$F_1 = \frac{(1-\mu)}{1 + r_{23}^2 + 2r_{23} \cos \alpha}. \quad (5.20)$$

Força gravitacional devido ao primário de menor massa:

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{\mu}{r_{23}^2} \hat{\mathbf{r}}_{23}, \quad (5.21)$$

cujo módulo é:

$$F_2 = \frac{\mu}{r_{23}^2}. \quad (5.22)$$

Força centrípeta:

$$\mathbf{F}_{ce} = [r_{23} + (1-\mu)\cos \alpha] \hat{\mathbf{r}}_{23} - (1-\mu)\sin \alpha \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \quad (5.23)$$

cujo módulo é:

$$F_{ce} = [r_{23}^2 + 2r_{23}(1-\mu)\cos \alpha + (1-\mu)^2]^{1/2}. \quad (5.24)$$

Força de Coriolis:

$$\mathbf{F}_{co} = 2v_\alpha \hat{\mathbf{r}}_{23} - 2v_r \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \quad (5.25)$$

cujo módulo é:

$$F_{co} = 2(v_\alpha^2 + v_r^2)^{1/2}. \quad (5.26)$$

5.3. Análise das Forças que Agem Sobre o Veículo Espacial

Nessa Seção serão analisadas as forças que agem sobre a partícula do problema restrito de três corpos que, neste caso, é o veículo espacial, no momento da captura gravitacional direta e com um $C3 = -0.10$ unidades canônicas. Para isto será usado o sistema Terra-Lua com as definições dadas no Capítulo 2.

As equações (5.19) e (5.20) demonstram que a força gravitacional devido a Terra só depende da distância e da posição em relação a Lua, isto é, de r_{23} e de α . Nas próximas Figuras cada linha representa uma distância da periluna com valores de 2000 km, 5000 km, 10000 km, 15000 km, 20000 km, 30000 km e 50000 km, respectivamente, e a seta indica a direção em que a distância da periluna cresce.

A Figura 5.2 apresenta o comportamento da força gravitacional devido a Terra em relação a direção radial (direção que une o veículo espacial ao centro Lua). A principal característica dessa força nessa direção é que ela tem o maior valor positivo em 180° (o lado da Lua voltado para a Terra, conforme convenção adotada para α na Figura 2.1) e o maior valor negativo em 0° (o lado da Lua oposto ao da Terra).

A força radial age sobre o veículo espacial aumentando ou diminuindo a velocidade radial do veículo, dependendo da direção da força e da direção do movimento do veículo. Se a força for positiva, ou seja, se a sua direção for para fora do centro a que ela se refere, ela aumenta a velocidade radial do veículo se este também estiver indo para fora do centro, ou diminui, se o veículo estiver indo em direção ao centro. Se a força na direção radial for negativa ela age de forma oposta.

Isto significa que, para o caso da captura gravitacional onde o veículo está indo na direção do centro, no caso a Lua, no lado da Lua voltado para a Terra (de 90° a 270°) a gravidade da Terra age sobre o veículo espacial empurrando-o para a direção oposta a da Lua repelindo-o, enquanto que no lado da Lua oposto ao da Terra (de 0° a 90° e de 270° a 360°) a gravidade da Terra trabalha no mesmo sentido da gravidade da Lua o atraindo. Outro comportamento esperado dessa força é que com o aumento da distância da peri-

luna a força se torna maior (mais positiva) na direção da Terra e menor (menos negativa) no lado oposto. A mudança de sinal ocorre em torno de 90° e 270° , mas à medida que a distância da periluna aumenta a mudança de sinal ocorre depois de 90° e antes de 270° , aumentando a região negativa, ou seja, se tornando mais atrativa em direção a Lua do que repulsiva. Devido a simetria do sistema existem dois pontos em que a força de atração tem praticamente o mesmo valor negativo e outros dois pontos em que a força de repulsão tem praticamente o mesmo valor positivo.

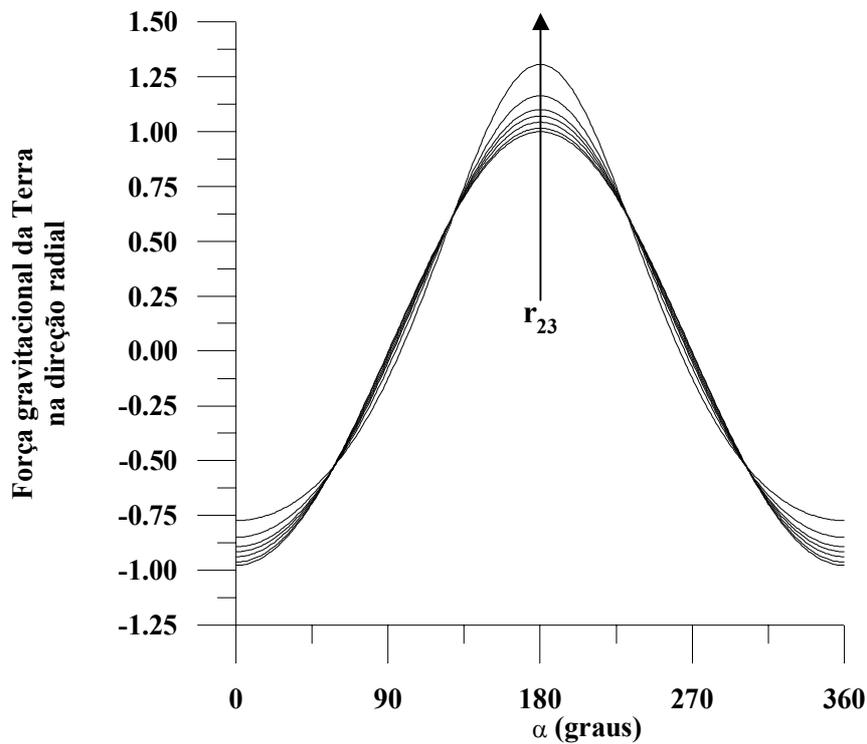


Fig. 5.2 – Força gravitacional devido a Terra na direção radial.

Na direção transversal, como visto na Figura 5.3, a força gravitacional devido a Terra atua na direção de crescimento do ângulo α quando a posição da periluna está entre 0° e 180° , e na direção contrária ao crescimento do ângulo α quando a posição da periluna está entre 180° e 360° .

Da mesma forma que a força radial, a força transversal age sobre o veículo espacial aumentando ou diminuindo a velocidade transversal. Mas agora, seguindo as definições

deste trabalho, a força é considerada positiva se agir na direção anti-horária e negativa, na horária. Portanto, se a força for positiva e se o veículo estiver girando em torno da Lua no sentido anti-horário, sua velocidade transversal é aumentada, enquanto que se estiver girando no sentido horário, sua velocidade é diminuída, sendo o inverso verdadeiro.

Como esta análise está sendo feita para a captura direta (sentido anti-horário), isto significa que a força de gravidade da Terra aumenta a velocidade transversal na primeira região e diminui na segunda região. Existem quatro comportamentos para essa força com o crescimento da distância da periluna: de 0° até 93° a força é diminuída (menos positiva) quando a distância da periluna aumenta; de 93° a 180° a força aumenta (mais positiva) junto com a distância da periluna, de 180° a 267° a força fica mais negativa com o aumento da distância da periluna, e de 267° a 360° a força fica menos negativa com o aumento da distância.

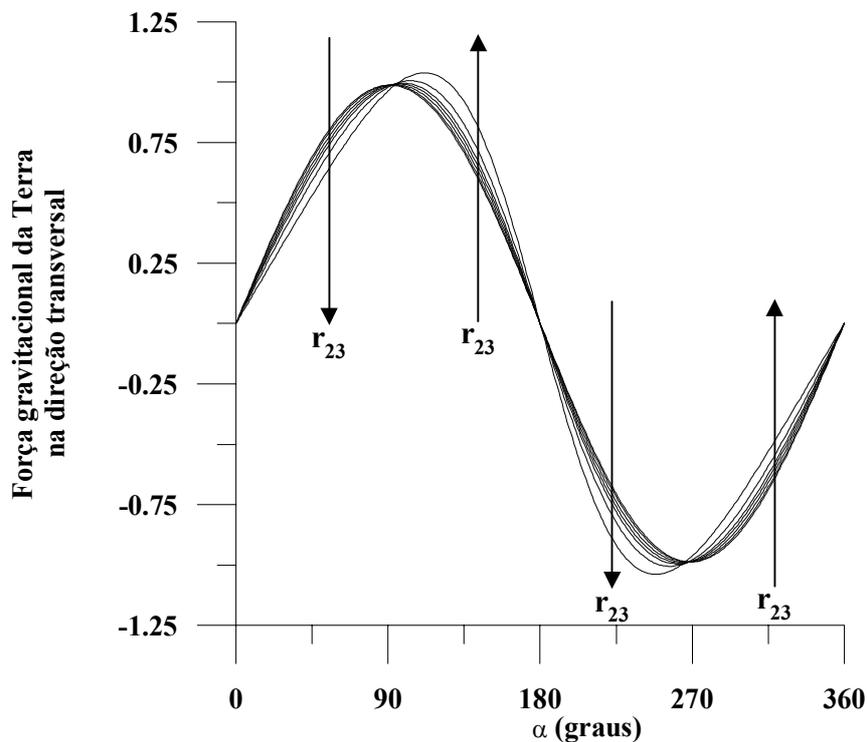


Fig. 5.3 – Força gravitacional devido a Terra na direção transversal.

A Figura 5.4 apresenta o comportamento do módulo da força gravitacional da Terra. Quanto maior a distância da periluna, maior é a distância entre as linhas. O comportamento geral demonstra que ela é maior no lado da Lua voltado para a Terra e menor no lado da Lua oposto ao da Terra.

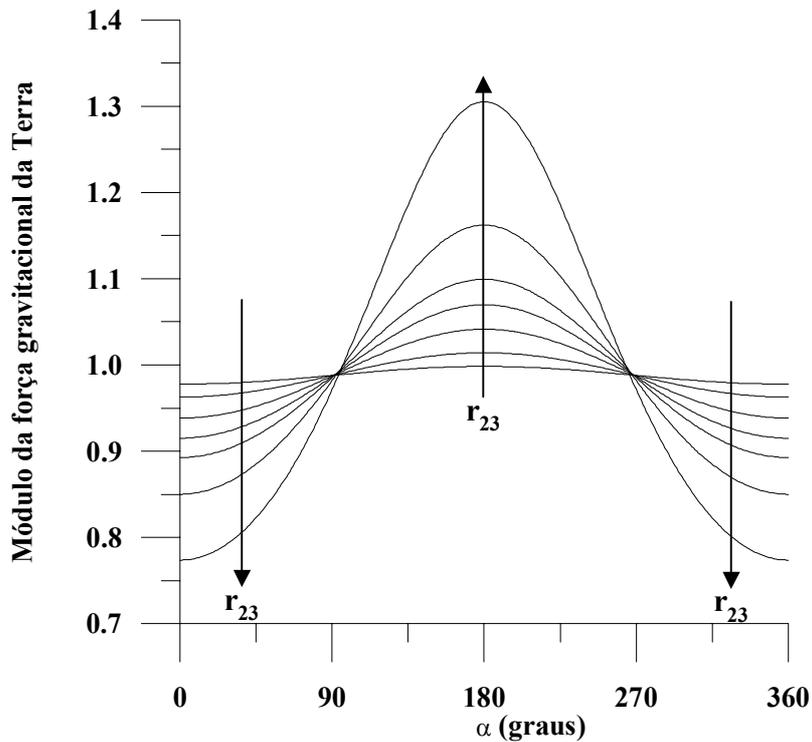


Fig. 5.4 – Módulo da força gravitacional devido a Terra.

A força gravitacional devido a Lua, equações (5.21) e (5.22), só depende da distância da periluna. A Figura 5.5 apresenta o comportamento do módulo dessa força. Ela é bem maior do que a força gravitacional devido a Terra e ela decai muito rapidamente com o aumento da distância da periluna.

A Figura 5.6 mostra a mesma Figura 5.5 mas para as distâncias de 10000 km, 15000 km, 20000 km, 30000 km e 50000 km.

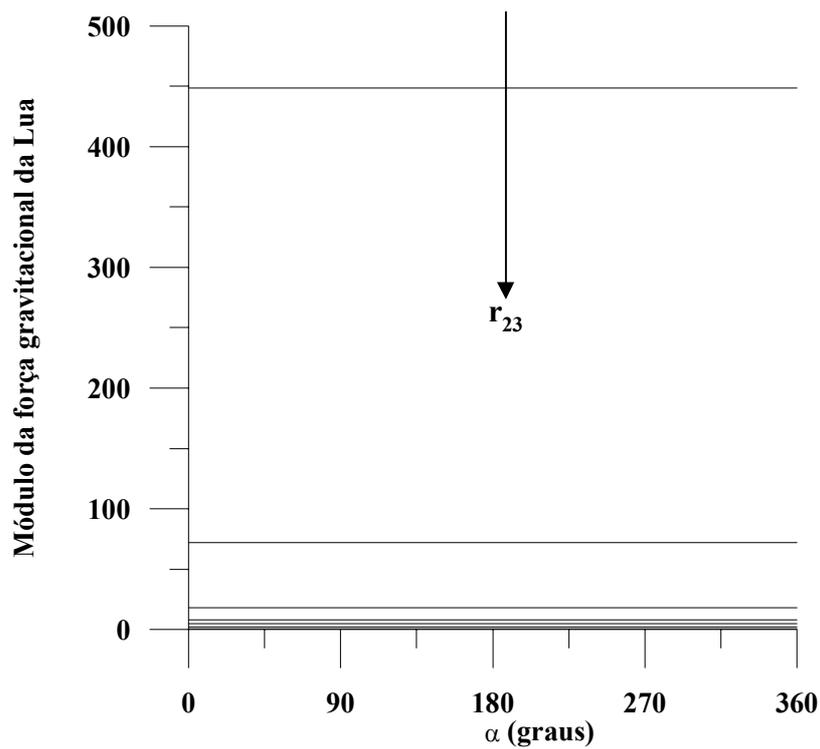


Fig. 5.5 – Módulo da força gravitacional devido a Lua.

A força centrípeta, apresentada nas equações (5.23) e (5.24), varia com a distância e com a posição da periluna. A Figura 5.7 mostra o comportamento da força centrípeta na direção radial para os mesmos valores da distância da periluna apresentadas nos parágrafos anteriores. É bom lembrar que essa força centrípeta é devido ao movimento do sistema de referências e que o veículo espacial sentirá sobre ele a contribuição da força centrífuga, que é na direção oposta ao centro de coordenadas do sistema. Portanto o comportamento radial da força centrípeta é oposto ao da força da gravidade da Terra. Ela é de repulsão no lado da Lua oposto ao da Terra e de atração no lado da Terra. Vê-se, pelas escalas das Figuras 5.7 e 5.2 que a resultante das duas forças é repulsiva no lado da Lua voltado para a Terra porque a força da gravidade da Terra é maior do que a força centrípeta, e é também repulsiva no lado da Lua oposto ao da Terra porque a força centrípeta neste caso é maior do que a da gravidade da Terra. Outro comportamento esperado dessa força é que quanto maior a distância da periluna mais ela se torna repulsiva no lado da Lua oposto ao da Terra é menos atrativa no lado da Lua voltado para a Terra.

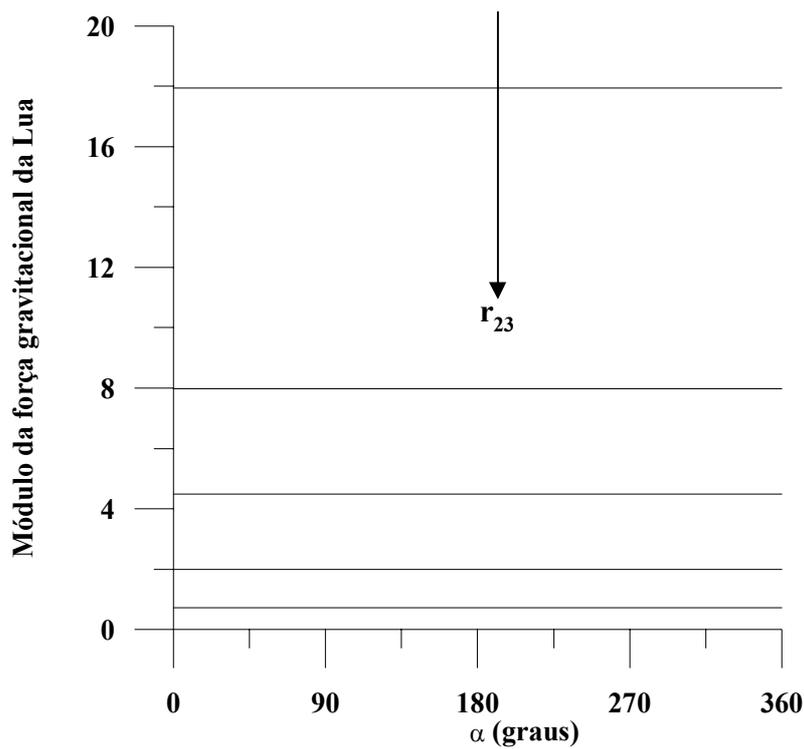


Fig. 5.6 – Força gravitacional da Lua para as maiores distâncias.

A força centrípeta na direção transversal não depende da distância da periluna (equação (5.23)) e, portanto todas as linhas de níveis se tornam uma só, como pode ser visto na Figura 5.8. O comportamento é semelhante ao da força gravitacional devido a Terra, só lembrando que os sinais são contrários para esse caso.

O módulo da força centrípeta é apresentado na Figura 5.9. O resultado é o esperado, apresentando o maior valor no lado da Lua oposto ao da Terra e o menor valor no lado da Terra. Esta diminuição do módulo da força centrípeta nessa direção é consistente porque todo o sistema está girando em torno da origem das coordenadas, e quanto mais próximo dessa origem, menor a força centrípeta.

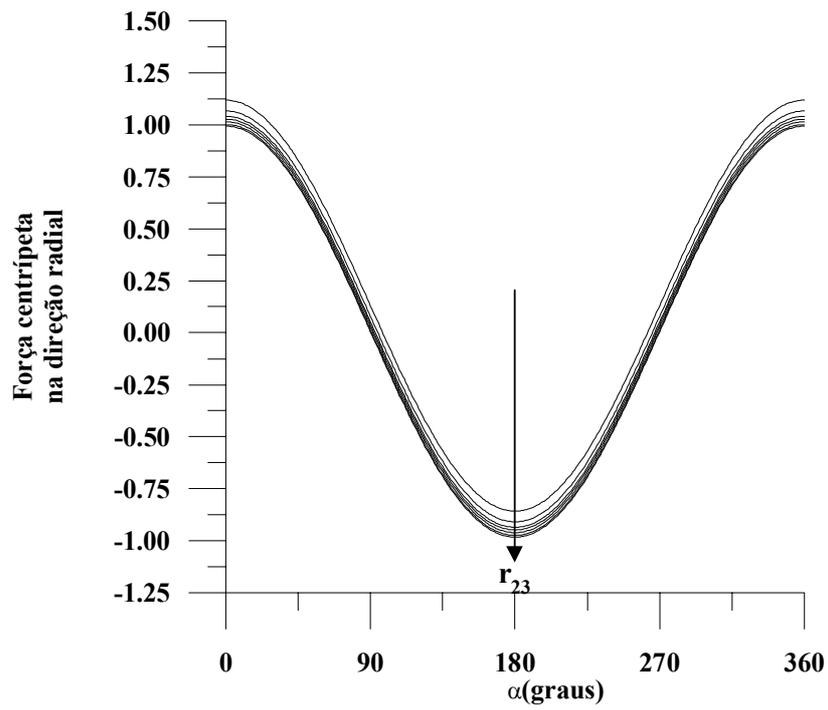


Fig. 5.7 – Força centrípeta na direção radial.

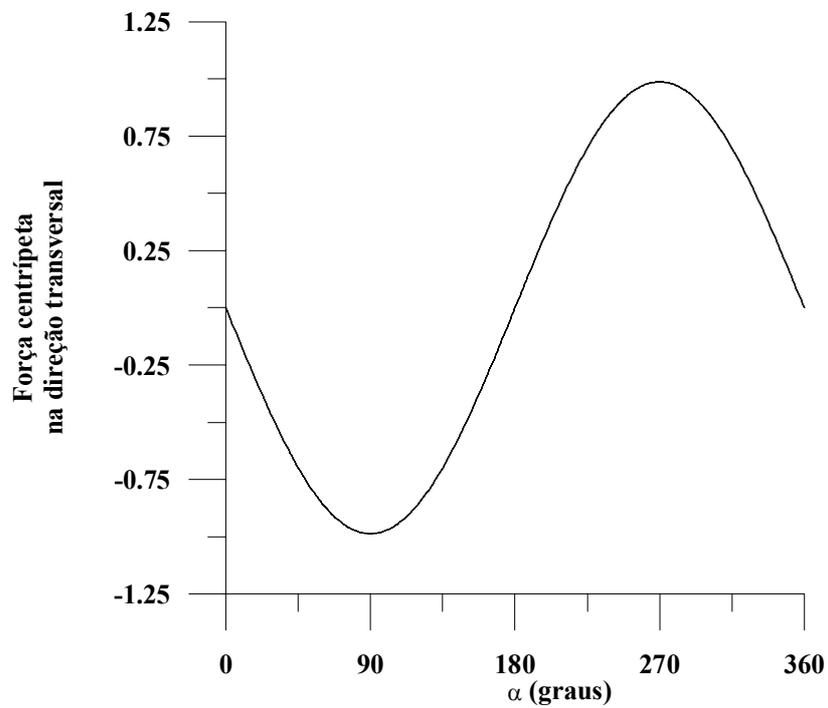


Fig. 5.8 – Força centrípeta na direção transversal.

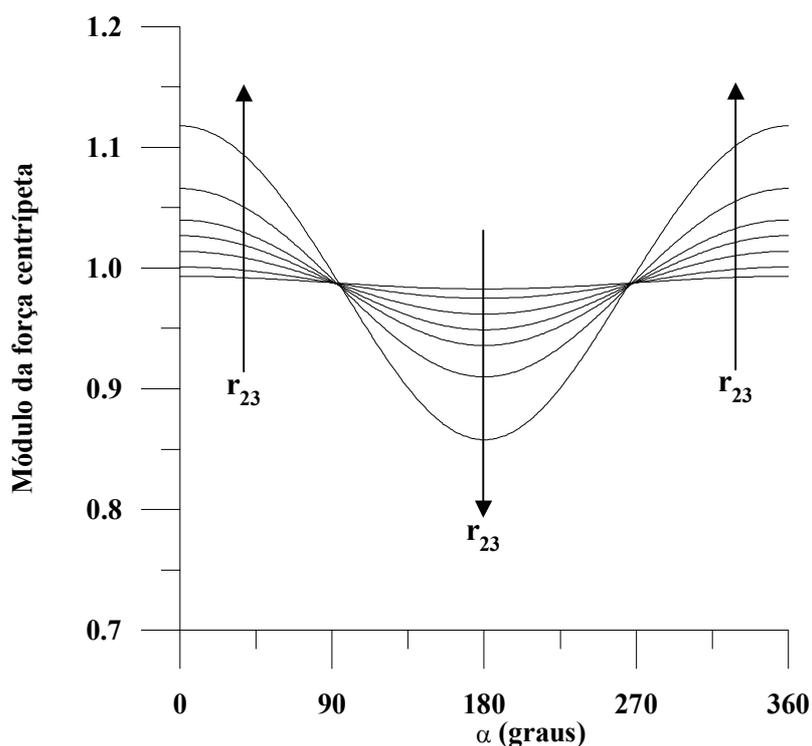


Fig. 5.9 – Módulo da força centrípeta.

A Figura 5.10 mostra a força resultante na direção transversal entre a força de gravidade devido a Terra e a força centrípeta. Esta resultante apresenta um comportamento para cada quadrante: no primeiro quadrante ela é negativa, diminuindo a velocidade transversal; no segundo ela é positiva, aumentando a velocidade transversal; no terceiro ela é negativa, diminuindo a velocidade transversal; e no quarto ela é positiva, aumentando a velocidade transversal. É interessante ressaltar que os picos e vales não estão nos centros dos quadrantes, e sim um pouco deslocados. O primeiro vale começa a mudar de sinal após os 90° e esse ângulo aumenta à medida que a distância da periluna também aumenta. O oposto ocorre em 270° . Isto implica que a região positiva da força resultante é maior no quarto quadrante (inclusive começando no terceiro quadrante) do que no segundo quadrante.

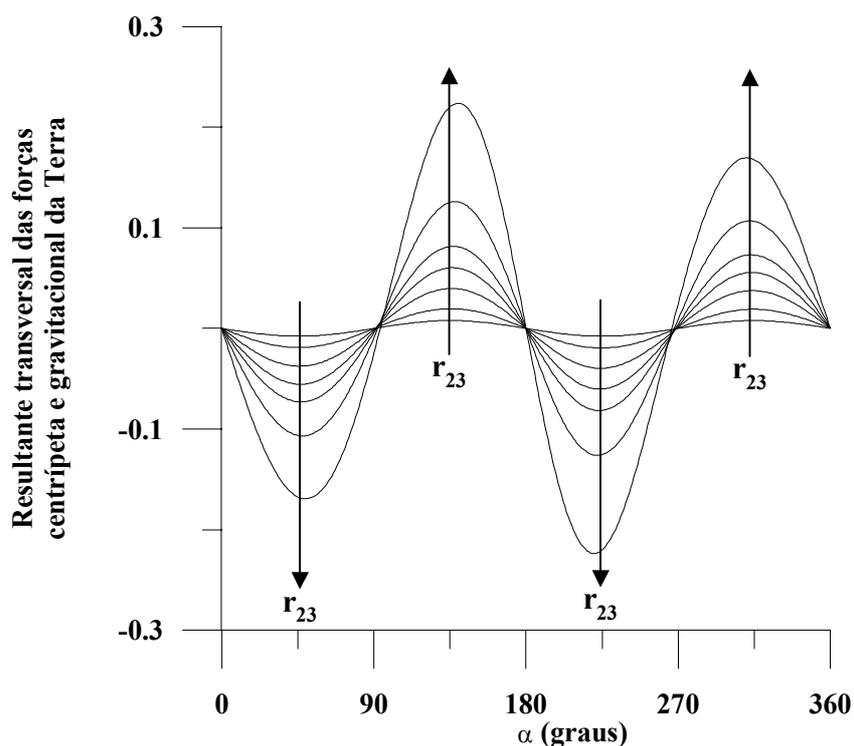


Fig. 5.10 –Força resultante das forças de gravidade devido a Terra e da centrípeta na direção transversal.

A Figura 5.11 apresenta a força resultante na direção radial das forças centrípeta e gravitacional da Terra. A força resultante na direção radial tem uma magnitude positiva maior em torno do ângulo 180° (na direção da Terra) do que em 0° . Isto significa que existe uma maior repulsão em 180° . Para distâncias da periluna estudadas não existem magnitudes negativas até 10000 km. As demais apresentam magnitudes negativas nas regiões próximas de 90° e 270° . Isto explica, mais uma vez, porque as capturas nessa região não alcançam níveis de energia C3 tão baixos quanto nas outras regiões.

No momento da captura gravitacional, que é este que se esta estudando, a velocidade radial tem que ser nula para que se possa aplicar um impulso e tornar a órbita circular em torno da Lua. Por esta razão quanto mais a força for positiva, mais rapidamente ela diminui a velocidade radial, possibilitando capturas com energias (C3) mais baixas.

O fato dessa força resultante ser negativa nas regiões próximas de 90° e 270° para peri-

lunas maiores que 10000 km, significa que o veículo espacial indo na direção da Lua tem sua velocidade radial aumentada nessa região, dificultando a captura gravitacional.

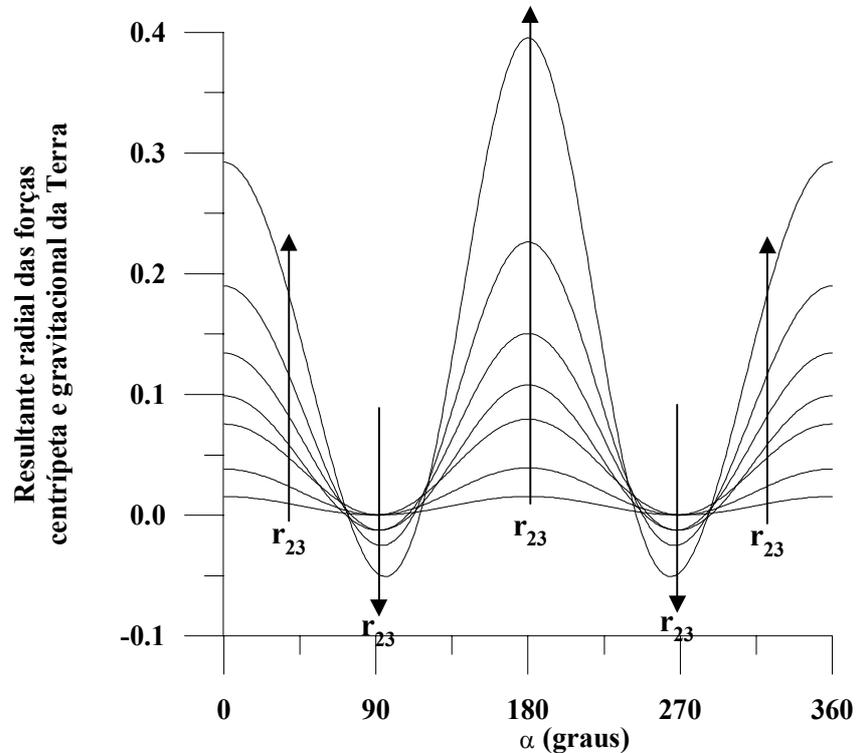


Fig. 5.11 –Força resultante das forças de gravidade devido a Terra e da centrípeta na direção radial.

Uma outra força que aparece devido ao sistema de referências é a força de Coriolis, apresentada nas equações (5.25) e (5.26). Esta força depende somente das velocidades radiais e tangenciais. No entanto, nas análises feitas até o momento tem sido considerada as perilunas iniciais com velocidades radiais nulas, o que será mantido também nessa análise. Isto implica que, neste caso, a força de Coriolis só atua na direção radial e é nula na direção transversal. Para calcular a velocidade transversal está sendo utilizada um valor de $C3 = -0.1$ unidades canônicas. A definição de $C3$ foi apresentada no Capítulo 2, onde se constata que esta grandeza depende tanto da velocidade relativa a Lua quanto da distância da periluna.

Como $C3$ está sendo mantido constante haverá uma velocidade diferente para cada dis-

tância da periluna, como é verificado na Figura 5.12. Isto posto, nota-se que o comportamento dessa força é igual ao da gravidade da Lua, só que ela decai linearmente, enquanto que a força da gravidade da Lua decai inversamente com o quadrado da distância da periluna.

Pela definição de aceleração de Coriolis, mostrada na equação (5.13) como sendo o produto vetorial entre a velocidade angular do sistema e a velocidade do veículo espacial, é possível descobrir em que direção ela atua. No caso da captura direta, do mesmo modo em que a força centrípeta age contra a gravidade da Terra, a força de Coriolis atua em oposição a força de gravidade da Lua. E para um valor fixo de C_3 quanto mais distante da Lua menor é a força de Coriolis. A força de Coriolis está em torno de 10% da força da gravidade da Lua quando a distância da periluna é de 2000 km e fica em torno de 50% em 50000 km. No caso da captura retrógrada ela tem o mesmo sinal da aceleração da gravidade da Lua.

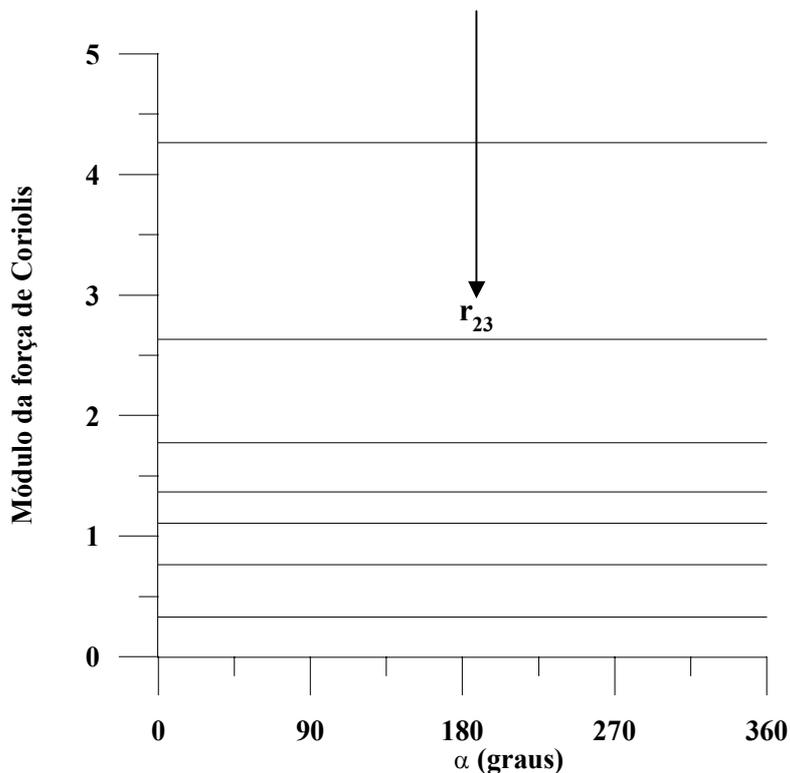


Fig. 5.12 – Módulo da força de Coriolis.

Em síntese, as perturbações das forças de gravidade da Terra e centrípeta agem sobre o veículo principalmente quando ele está mais distante da Lua. Perto da Lua, a força de Coriolis é maior do que as demais sendo a perturbação dominante. Isto fica demonstrado na Figura 5.13. De forma geral as forças perturbativas na captura direta são repulsivas (positivas), no entanto, para a distância de 50000 km as regiões próximas de 90° e 270° são atrativas.

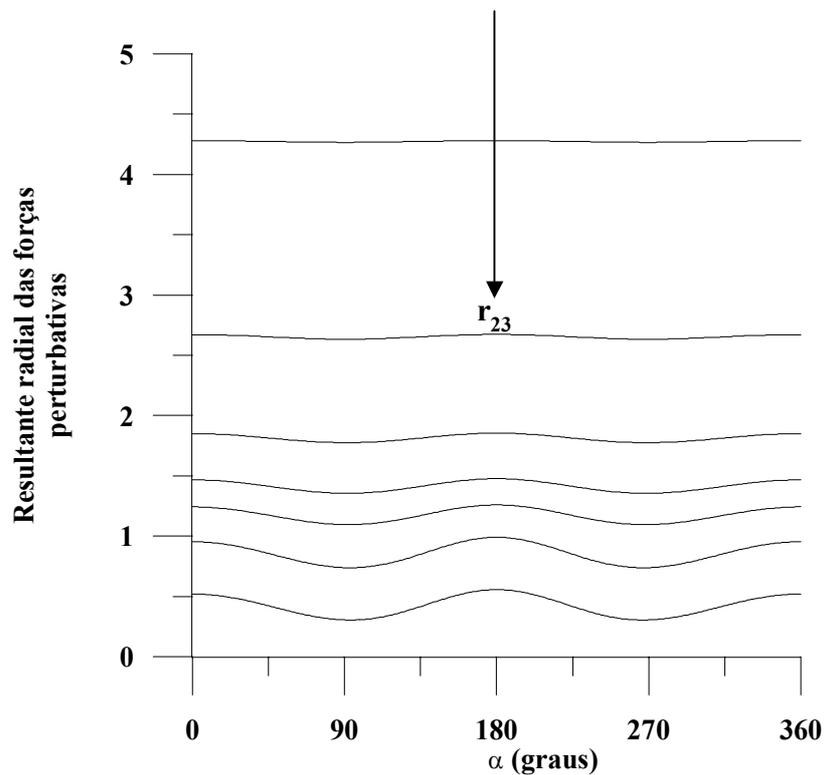


Fig. 5.13 – Resultante das forças perturbativas.

Como na direção transversal para o ponto de captura a força de Coriolis é nula, a resultante das forças perturbativas nesta direção é a mesma Figura 5.10.

5.4. Comportamento das Forças Durante as Trajetórias

Uma outra forma de analisar as forças que agem sobre o veículo espacial é verificando o comportamento dessas forças durante a trajetória. Para isto a força é analisada em seu módulo e em três direções: a radial, a transversal e a direção do movimento. Para calcu-

lar o módulo da força e as componentes radiais e transversais foram usadas as equações (5.19) a (5.26). E para calcular a força na direção do movimento, foi calculado o produto escalar da força na direção da velocidade do veículo espacial, ou seja,

$$F_d = \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{v} \right), \quad (5.27)$$

onde F_d é a componente da força na direção do movimento, \mathbf{F} é o vetor força, \mathbf{v} é o vetor velocidade do veículo e v é o módulo dessa velocidade. O ponto representa o produto escalar. Dessa forma, quando a força tiver a mesma direção que o movimento do veículo espacial, ela terá um valor positivo e, neste caso, aumenta a velocidade na direção do movimento. Quando ela tem valor negativo ela age contra o movimento do veículo diminuindo sua velocidade.

Pensando assim, foram escolhidas quatro trajetórias para serem analisadas. Na primeira trajetória ocorre uma captura rápida, na segunda ocorre algumas revoluções em torno da Lua antes do veículo chegar ao ponto de captura, na terceira o veículo espacial é prisioneiro do campo gravitacional da Lua e a quarta tem as mesmas características da primeira porém é de captura retrógrada. Como a integração é feita com passo de tempo negativo para que o veículo chegue na periluna com as condições de posição e velocidade desejadas, o tempo 0 representa o momento da chegada do veículo na periluna.

Todas as quatro trajetórias terminam numa periluna de 100 km da superfície da Lua, sendo as três primeiras em captura direta (sentido anti-horário) e a última em captura retrógrada (sentido horário). A primeira trajetória estudada tem uma periluna com $C3 = -0.15$ e $\alpha = 0^\circ$. A Figura 5.14 apresenta esta trajetória.

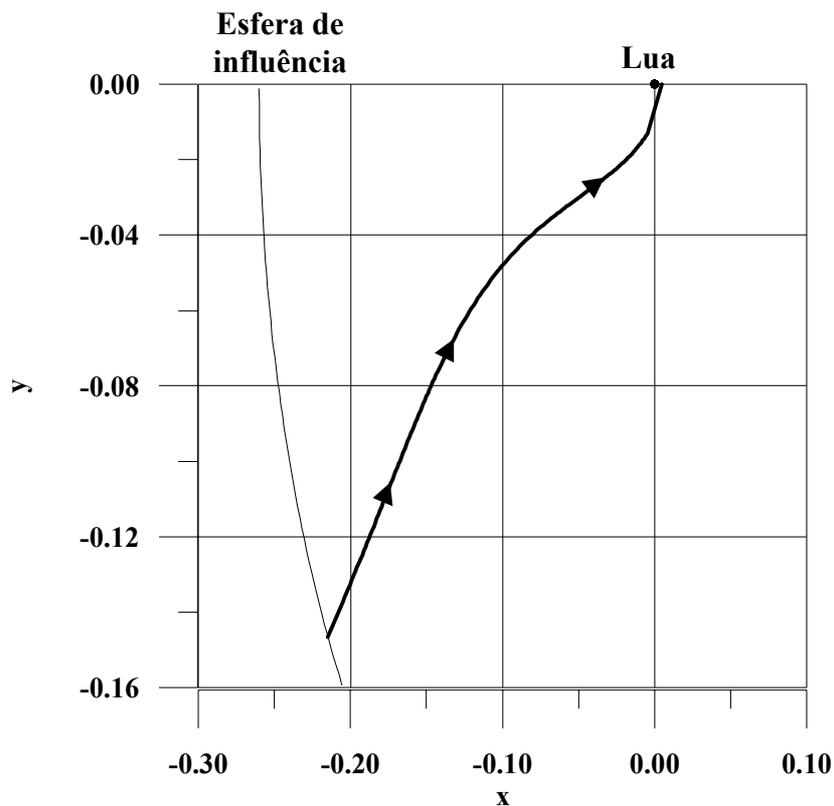


Fig. 5.14 – Trajetória com $C3 = -0.15$ e $\alpha = 0^\circ$.

A Figura 5.15 mostra o comportamento da força de gravidade da Terra sobre o veículo espacial em módulo e nas direções radial, transversal e do movimento. Na direção radial a força inicia-se com um caráter repulsivo (positiva), mudando de sinal somente nos últimos instantes, bem próximo da Lua. Isto significa que a maior parte do tempo a força de gravidade da Terra na direção radial está freando o veículo que está indo de encontro a Lua.

Na direção transversal, a força se inicia com o valor negativo, permanecendo assim durante quase toda a trajetória, e indo a zero no momento da captura. Ou seja, durante toda a trajetória a força gravitacional da Terra tenta fazer com que a velocidade transversal diminua.

Na direção do movimento a força também tem sinal negativo, e também termina com um valor zero. Isto porque a periluna está com $\alpha = 0^\circ$, ou seja, no momento da captura a

velocidade é perpendicular a força de gravidade da Terra. Portanto a força de gravidade da Terra, nesse caso, diminui a velocidade total do veículo durante quase toda a trajetória.

Já o módulo da força é monotonamente decrescente durante toda a trajetória, o que era esperado já que, como pode ser visto na Figura 5.14, o veículo espacial está se afastando da Terra.

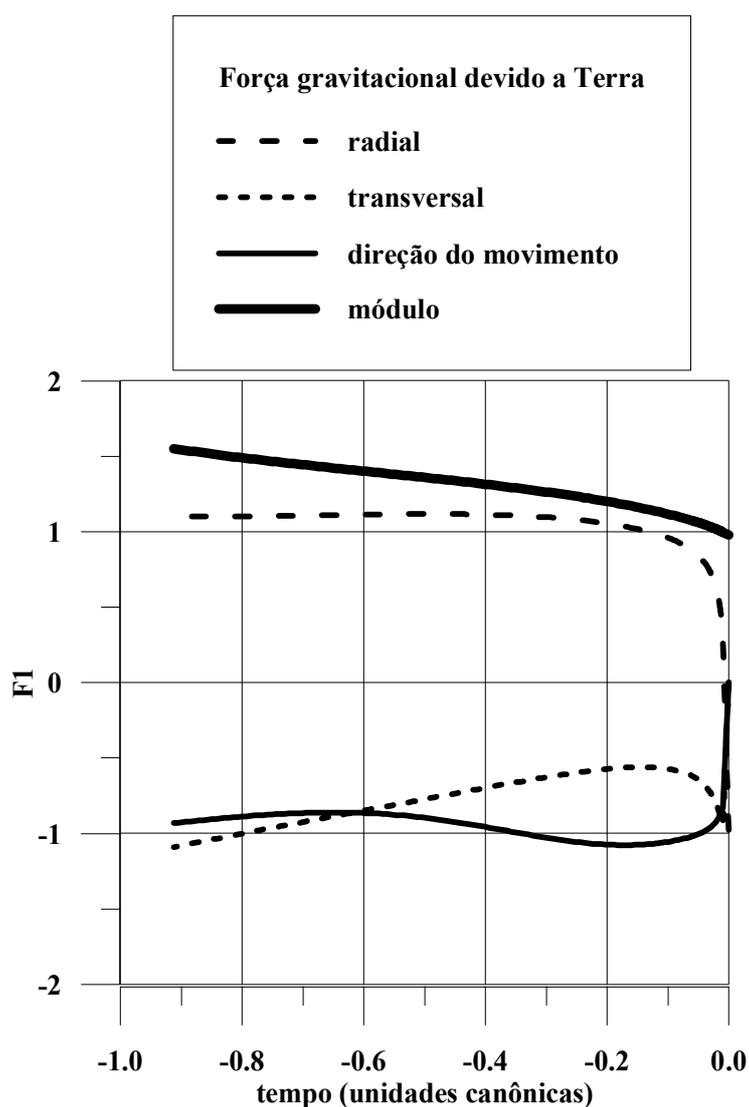


Fig. 5.15 – Força gravitacional devido a Terra para a primeira trajetória.

A Figura 5.16 mostra que a força de gravidade da Lua é inicialmente pequena na forma

atrativa (negativa), mas cresce rapidamente quando está próximo da Lua. Isto acontece devido a sua dependência com o inverso do quadrado da distância.

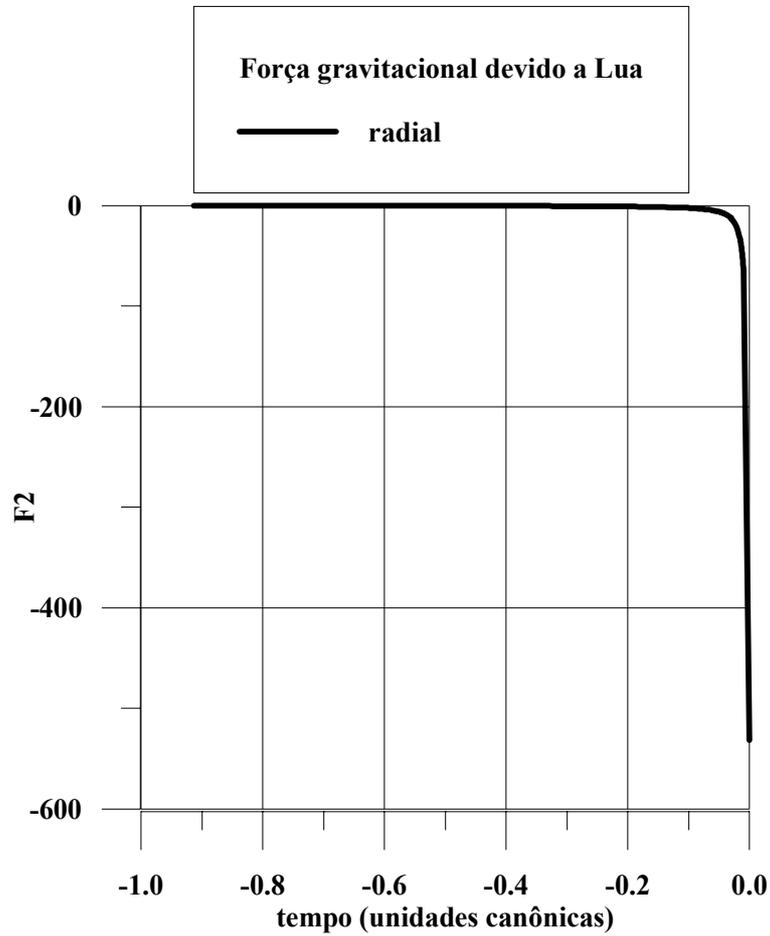


Fig. 5.16 – Força da gravidade da Lua para a trajetória 1.

A força centrípeta, apresentada na Figura 5.17, age de forma oposta a força de gravidade da Terra. Porém como ela possui valores absolutos menores do que os valores absolutos da força de gravidade da Terra, esta se sobressai, sendo uma das razões da captura.

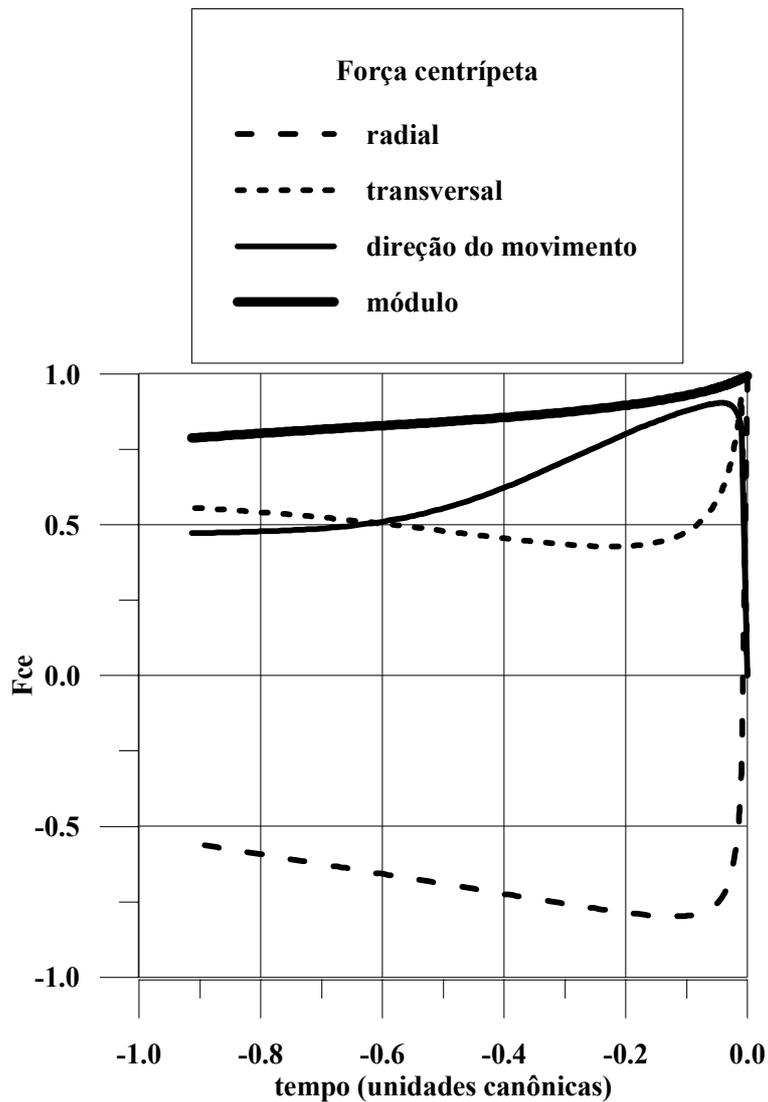


Fig. 5.17 – Força centrípeta na primeira trajetória.

A Figura 5.18 mostra a resultante entre as forças de gravidade da Terra e centrípeta nas três direções. Com esta Figura é possível confirmar o que foi dito no parágrafo anterior. A força radial resultante é sempre positiva, contrária ao movimento de aproximação que o veículo está fazendo. A força resultante na direção do movimento e na direção transversal são negativas, implicando em diminuição da velocidade nas direções citadas. É bom lembrar que a área sob as curvas ($F\Delta\tau$) é a variação da quantidade de movimento ($m \Delta V$) que estas perturbações aplicam sobre o veículo espacial.

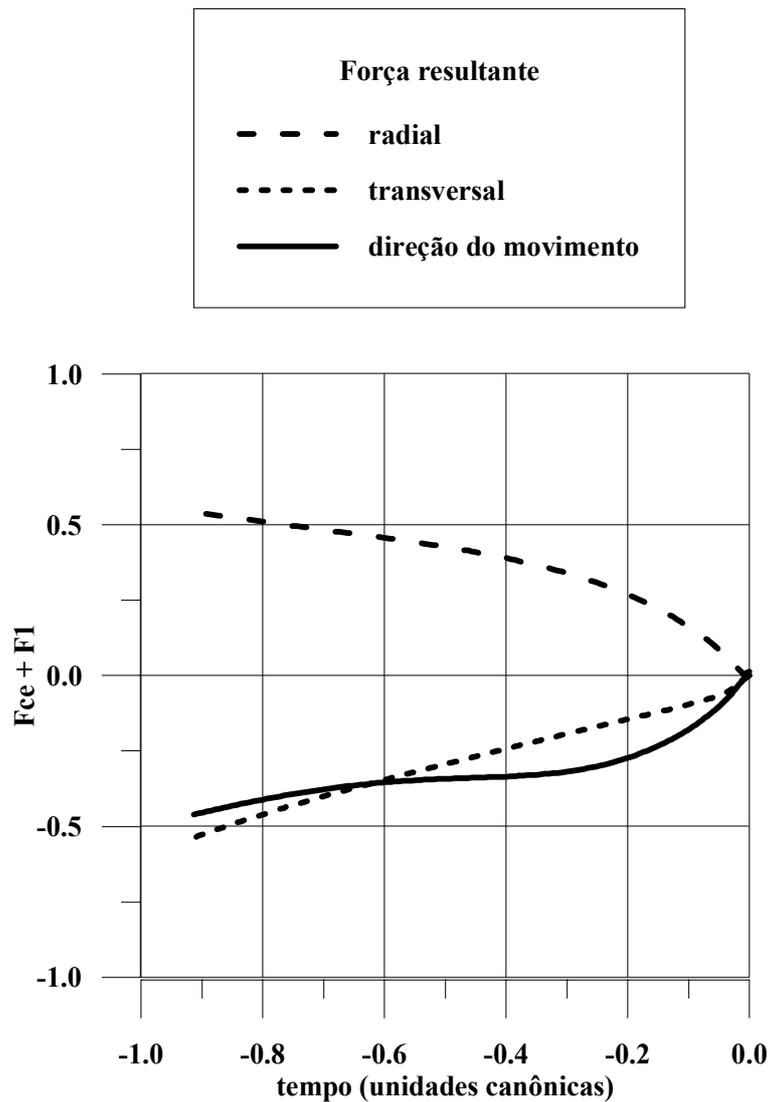


Fig. 5.18 – Resultante das forças de gravidade da Terra e centrípeta.

A força de Coriolis, mostrada na Figura 5.19, age de forma oposta a força de gravidade da Lua, mas da mesma forma, ela aumenta com o tempo. Apesar dessa força não depender da distância, ela depende apenas da velocidade do veículo espacial, ela está sendo aumentada à medida que se aproxima da Lua porque tanto a velocidade radial, como a velocidade transversal, aumentam devido ao maior efeito da força da gravidade da Lua. A componente transversal tem valor final nulo porque no ponto de captura a velocidade radial também é nula. Mas um pouco antes do ponto de captura essa velocidade tem um valor significativamente alto, como pode ser visto na Figura 5.19. Isto ocorre porque o

veículo, que está indo da direção da Lua, muda sua direção rapidamente.

A componente radial inicialmente é negativa, ou seja, ela é atrativa em relação a Lua aumentando a velocidade radial, mas próximo da Lua essa componente tem valor positivo, que faz diminuir a velocidade nessa direção.

A força de Coriolis não possui a componente na direção do movimento porque essa força é sempre perpendicular ao movimento. Ou seja, essa força não produz trabalho, não ajudando na diminuição da velocidade na direção do movimento.

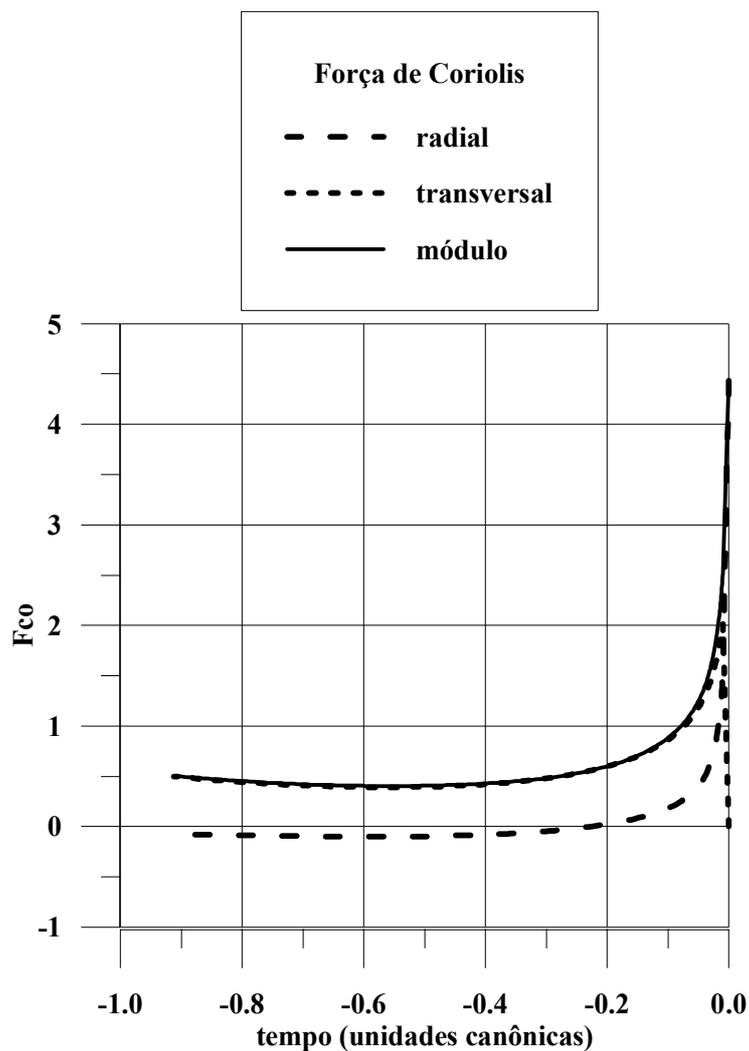


Fig. 5.19 – Força de Coriolis na primeira trajetória.

A segunda trajetória possui valores para a periluna de $C3 = -0.15$ e $\alpha = 45^\circ$. Esta trajetória, mostrada na Figura 5.20, faz uma revolução em torno da Lua antes da captura.

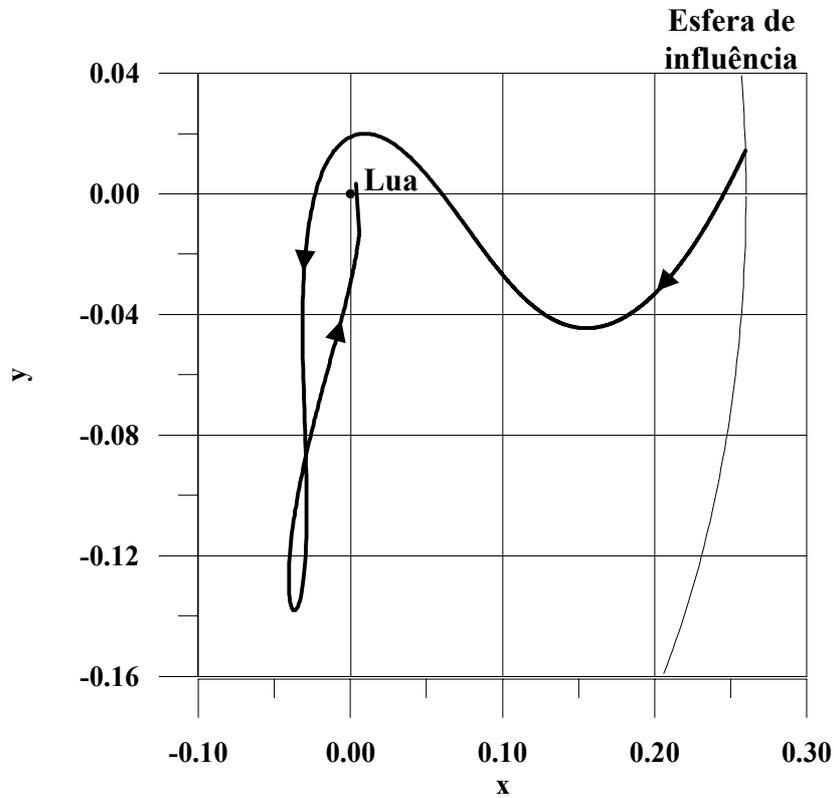


Fig. 5.20 – Segunda trajetória com $C3 = -0.15$ e $\alpha = 45^\circ$.

Na segunda trajetória, a força de gravidade da Terra na direção radial, mostrada na Figura 5.21, se inicia atrativa (com sinal negativo), se torna rapidamente repulsiva, ficando assim até perto do momento da captura quando se torna negativa de novo. Isto se deve ao fato da trajetória dar uma volta em torno da Lua, e como foi visto na Seção anterior, esta força é positiva na região voltada para a Terra e negativa na região oposta. Ou seja, as mudanças de sinal ocorrem quando o veículo muda de lado em relação à Lua.

Já na direção transversal, as mudanças de sinal ocorrem na mudança vertical, ou seja, quando a trajetória cruza o eixo x. Nesta direção a força tem sinal positivo quando o veículo está na parte acima do eixo x e valor negativo quando o veículo está na parte abaixo do eixo x.

Na direção do movimento a força é positiva quase todo o tempo. Os dois picos positivos ocorrem no momento em que o veículo muda sua direção radial. Primeiro quando ele passa perto da Lua e se afasta. E o segundo quando o veículo chega na distância máxima e torna a voltar para a Lua.

O módulo dessa força inicialmente tem um valor próximo de 0.75 unidades e depois começa a aumentar, indicando que o veículo espacial se aproxima da Terra. Depois fica constante em torno de uma unidade. Nesse momento é que o veículo está temporariamente capturado pela gravidade da Lua.

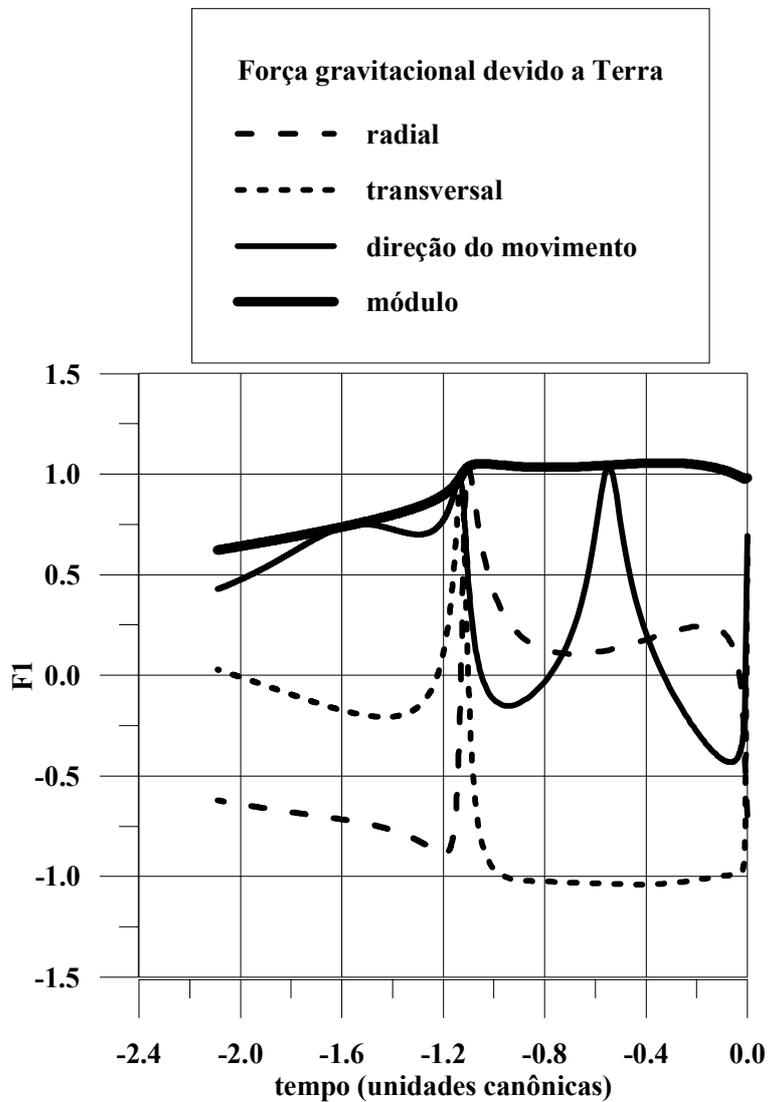


Fig. 5.21 – Força de gravidade devido a Terra na segunda trajetória.

Como na primeira trajetória, a força da gravidade da Lua na direção radial, mostrada na Figura 5.22, se inicia com um valor atrativo pequeno que aumenta ao se aproximar da Lua. Depois diminui e, ao se aproximar novamente da Lua a força volta a aumentar, alcançando um valor mais negativo em relação ao anterior, devido a proximidade do veículo espacial com a Lua.

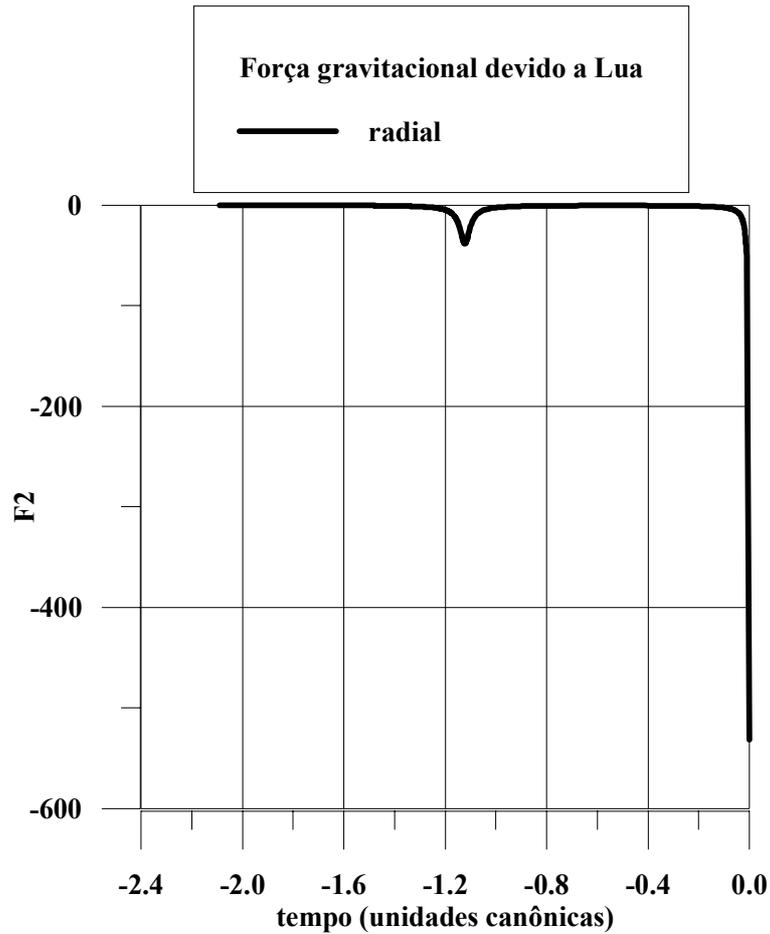
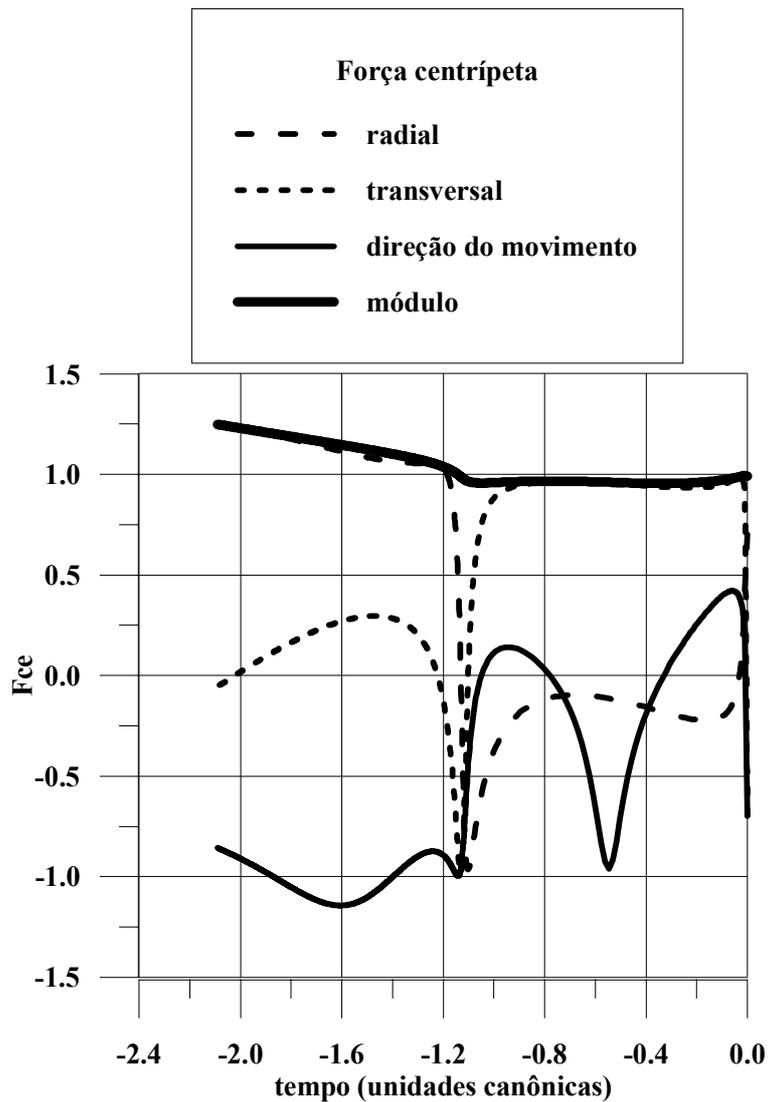


Fig. 5.22 – Força da gravidade da Lua na segunda trajetória.

Na Figura 5.23 está apresentado o comportamento da força centrípeta na segunda trajetória. De forma geral essa força age de forma oposta à força de gravidade da Terra apresentado na Figura 5.21. Mas para esta trajetória, de forma oposta a trajetória anterior, a força centrípeta é que se sobressai sobre a força gravitacional da Terra. Com o distanciamento da Lua, esta força cresce enquanto que a força de gravidade da Terra diminui.



Na Figura 5.24 está a comprovação do que foi dito no parágrafo anterior. A força resultante na direção radial é positiva o tempo todo diminuindo a velocidade radial quando o veículo se encaminha na direção da Lua.

Na direção transversal a força resultante é positiva enquanto o veículo espacial se aproxima da Lua, e é negativa durante os momentos de captura gravitacional.

Na direção do movimento a força resultante é negativa enquanto o veículo espacial se aproxima da Lua. Isto significa que a força resultante nesta direção está freando o veí-

culo espacial neste momento. Depois a resultante oscila entre positivo e negativo devido às evoluções que o veículo está dando em torno da Lua.

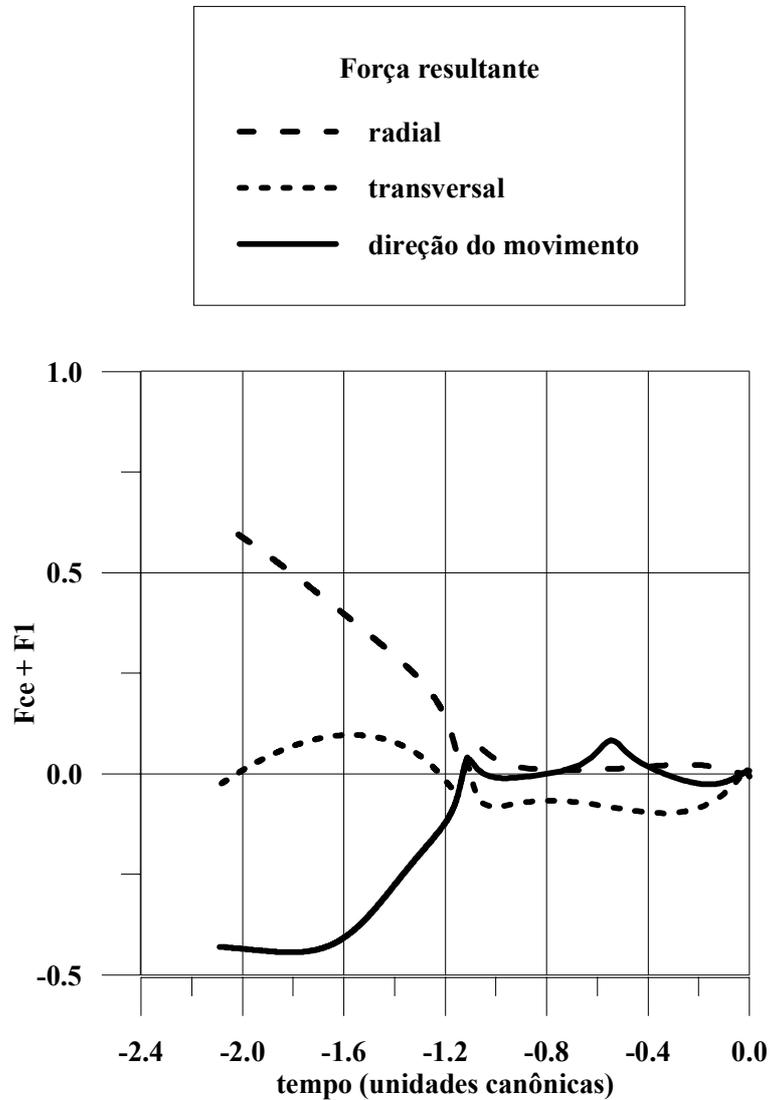


Fig. 5.24 – Resultante das forças de gravidade da Terra e centrípeta para a segunda trajetória.

A Figura 5.25 apresenta o comportamento da força de Coriolis. Assim como a força gravitacional da Lua, na primeira aproximação há também um aumento dessa força. No entanto esse aumento chega a quase cinquenta por cento da força final. Ela age de forma oposta a gravidade da Lua, ou seja, ela age na partícula de forma repulsiva na aproximação com a Lua. No entanto ela começa atrativa, ficando repulsiva depois do tempo -1.5 ,

ficando atrativa novamente quando o veículo se afasta da Lua.

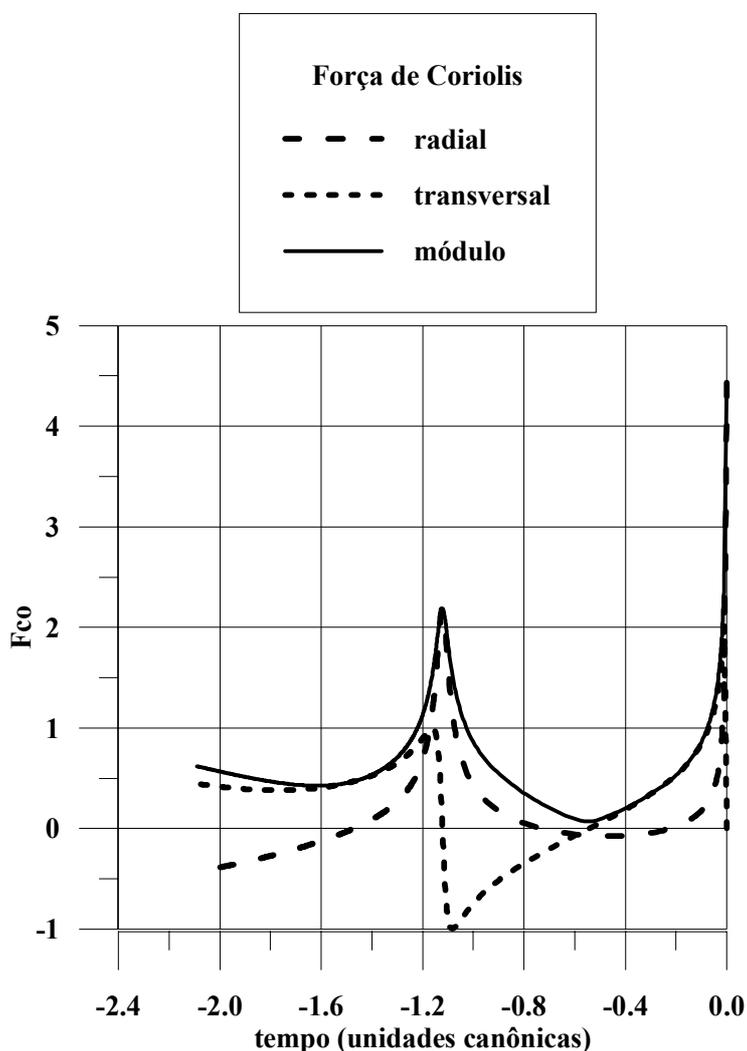


Fig. 5.25 – Força de Coriolis na segunda trajetória.

A terceira trajetória tem as condições finais com $C3 = -0.15$ e $\alpha = 90^\circ$. A Figura 5.26 mostra essa trajetória. Esta última trajetória não vem de fora da esfera de influência gravitacional da Lua como as anteriores. Isto ocorre porque na região escolhida para a periluna (90°) não é possível encontrar uma trajetória vinda de longe que chegue na periluna com os valores desejados. Pensando na situação oposta à captura gravitacional, o escape, é possível entender melhor esta questão. Se o veículo começar sua trajetória na periluna, com as mesmas condições iniciais que são as finais para o caso da captura, ele não tem velocidade suficiente para escapar da gravidade da Lua e colide com ela.

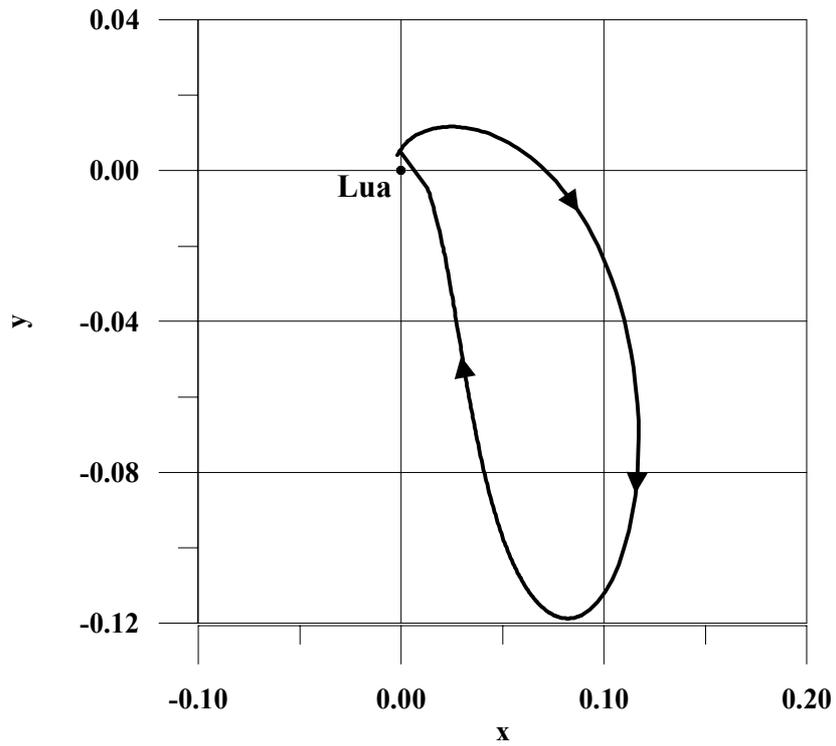


Fig. 5.26 – Terceira trajetória com condições finais de $C3 = -0.15$ e $\alpha = 90^\circ$.

A força gravitacional da Terra está apresentada na Figura 5.27. Como o veículo está em órbita da Lua, as forças adquirem um padrão oscilatório. A força gravitacional da Terra na direção radial vai da atração à repulsão dependendo da posição do veículo espacial. O módulo da força é quase uniforme em torno do valor de uma unidade.

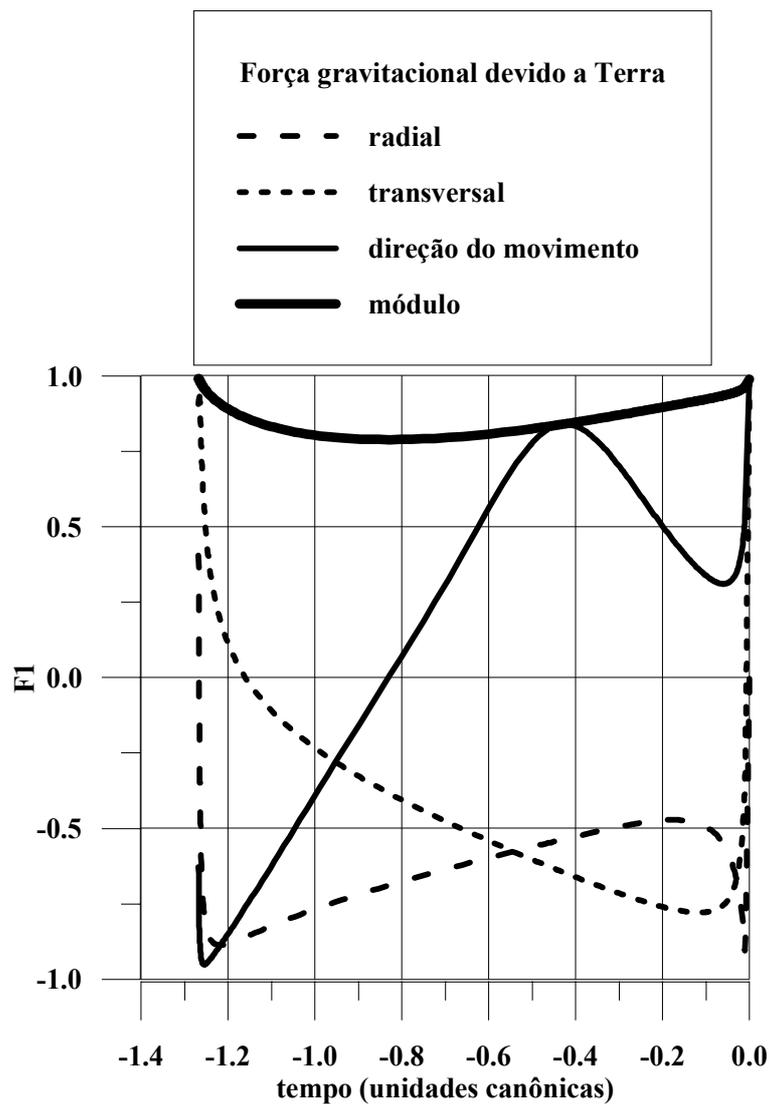


Fig. 5.27 – Força da gravidade da Terra para a terceira trajetória.

A força gravitacional devido a Lua, apresentada na Figura 5.28, também tem caráter oscilatório. A cada passagem próximo da Lua essa força aumenta de forma considerável.

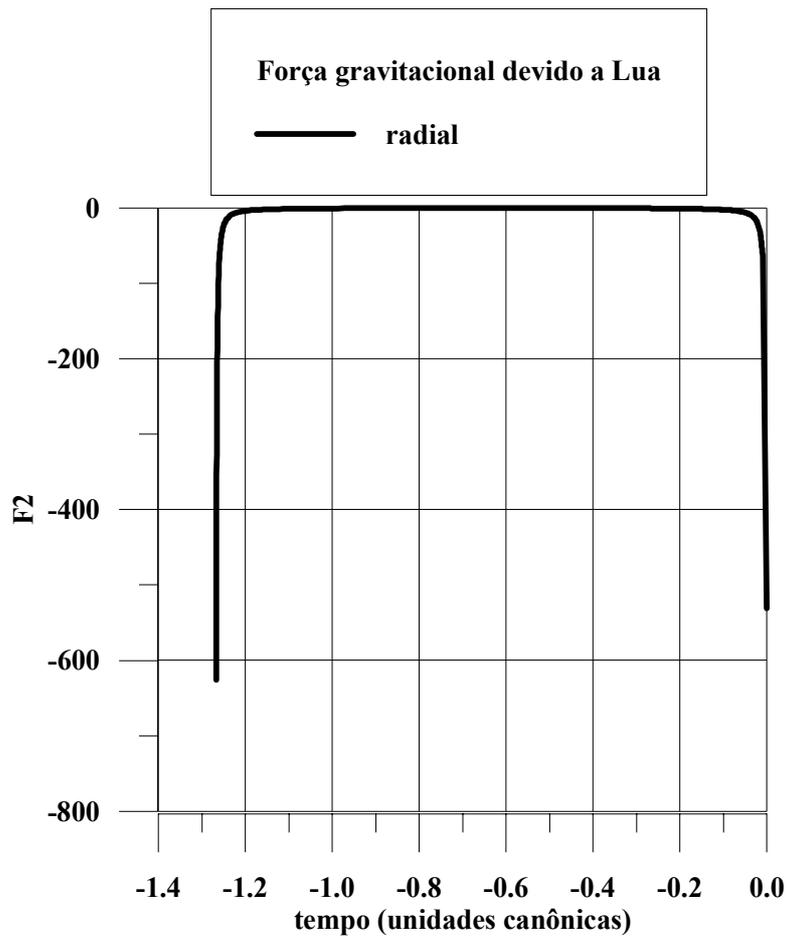


Fig. 5.28 – Força de gravidade devido a Lua para a terceira trajetória.

Na Figura 5.29 está apresentada a força centrípeta para esta terceira trajetória. Ela apresenta o mesmo comportamento da força gravitacional da Terra.

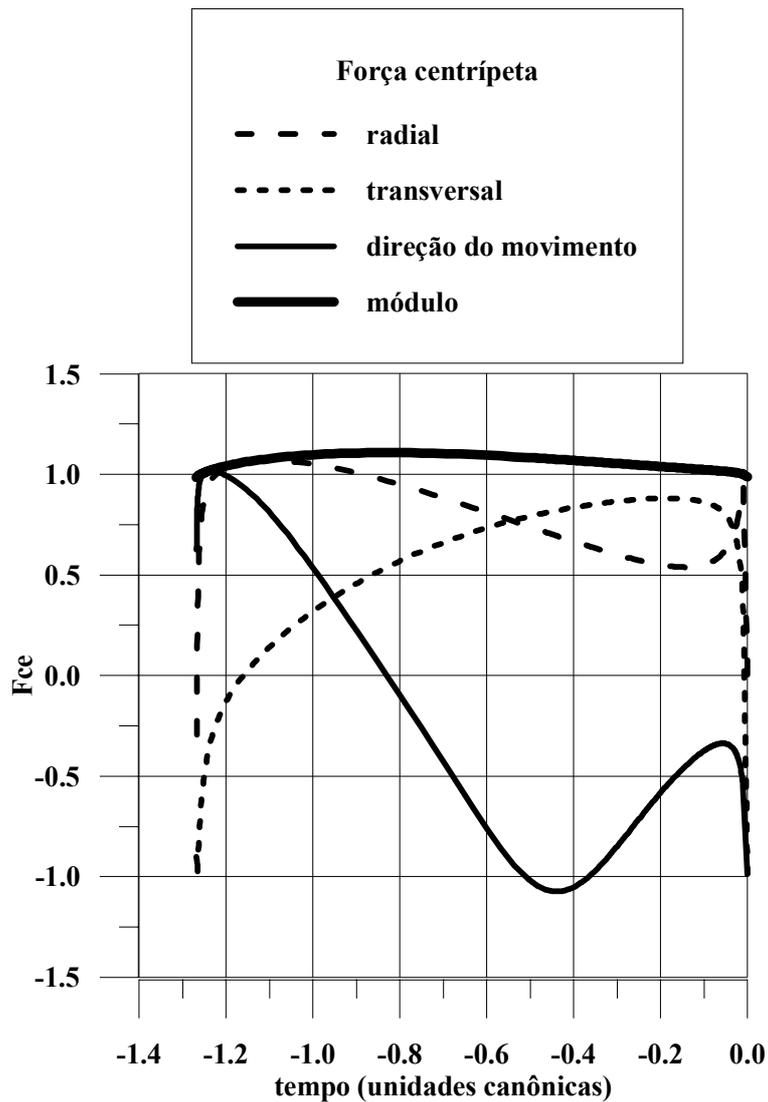


Fig. 5.29 – Força centrípeta para a terceira trajetória.

A Figura 5.30 apresenta a resultante das forças de gravidade da Terra e centrípeta. Nos dois momentos em que o veículo passa próximo da Lua a força resultante nas três direções é nula. Este fato também é observado na Figura 5.24, elas também passam pelo zero no momento em que o veículo passa próximo da Lua. Isto se deve à mudança de direção do veículo.

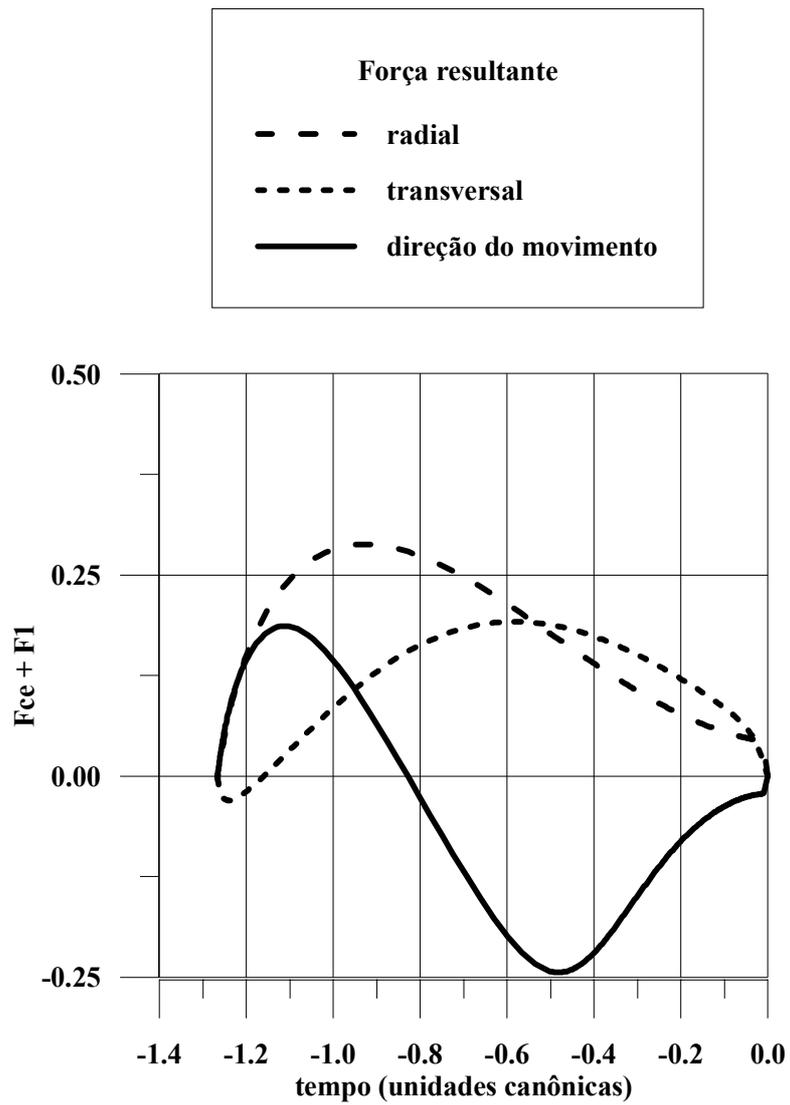


Fig. 5.30 – Força resultante para a terceira trajetória.

Na Figura 5.31 está a força de Coriolis para a terceira trajetória. Toda vez que o veículo espacial se aproxima da Lua a sua velocidade é aumentada, por isso é que esta força se torna maior nessas regiões.

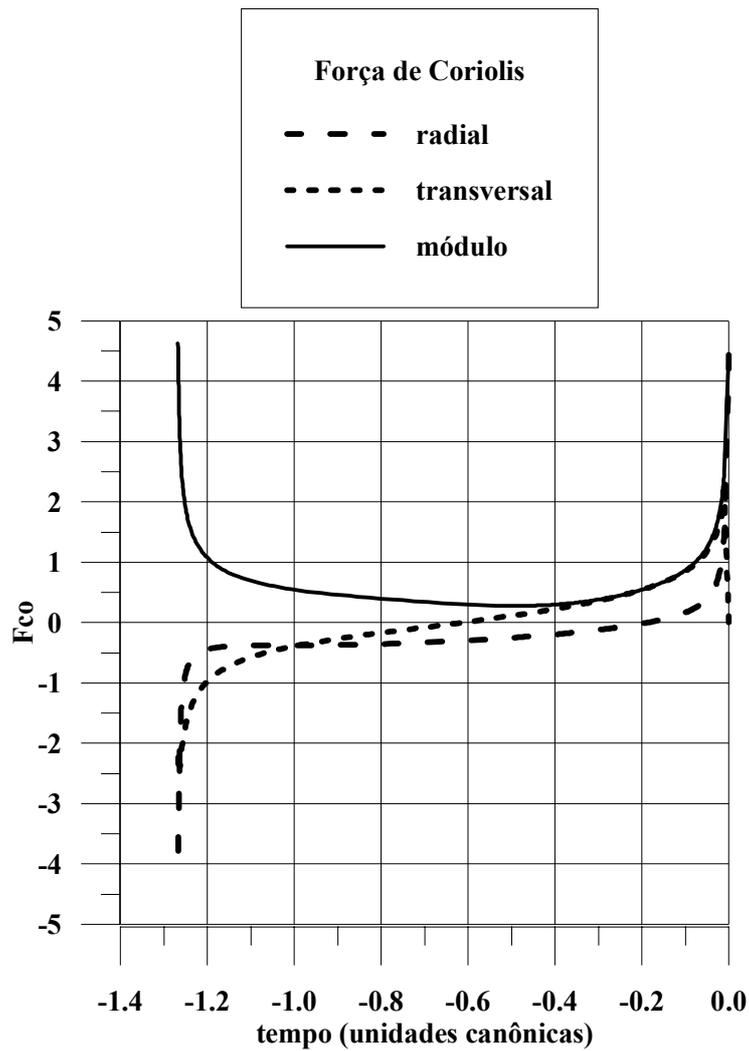


Fig. 5.31 – Força de Coriolis para a terceira trajetória.

A quarta trajetória, assim como a primeira, possui condições para a periluna com $C3 = -0.15$ e $\alpha = 0^\circ$. No entanto essa trajetória é de captura retrógrada, como pode ser visto na Figura 5.32.

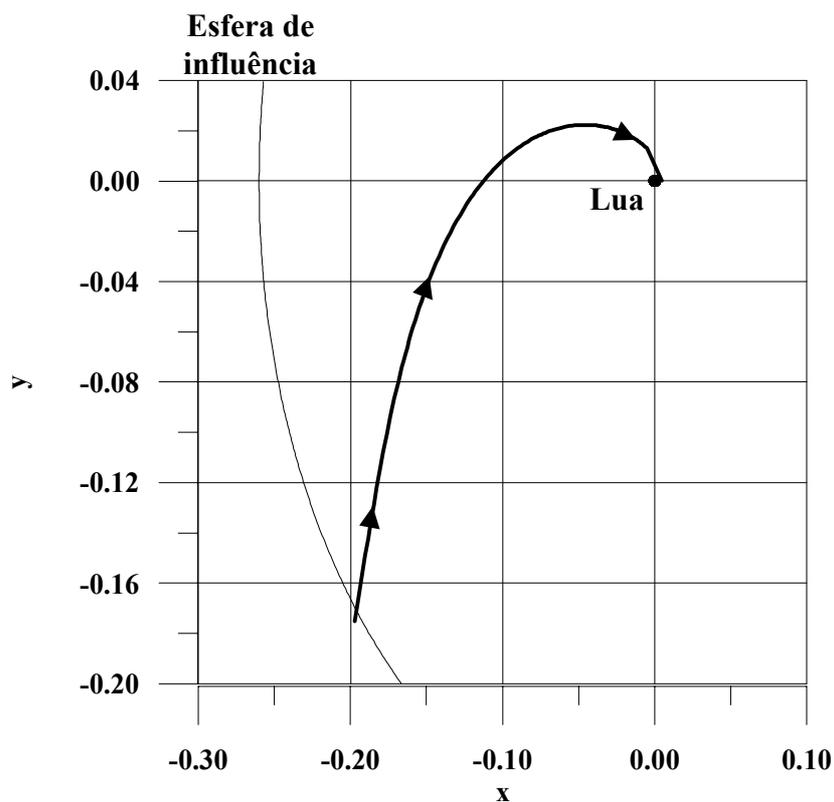


Fig. 5.32 – Trajetória com $C3 = -0.15$ e $\alpha = 0^\circ$, em captura retrógrada.

O comportamento da força de gravidade da Terra ao longo da trajetória é apresentado na Figura 5.33. O módulo dessa força tem quase o mesmo comportamento do caso da captura direta (Figura 5.15).

Na direção radial, em vez de permanecer quase constante com valor próximo da unidade, a força nessa direção cresce e depois decresce.

O comportamento da força na direção transversal é bem diferente do caso da captura direta. Nos dois casos a força tem um valor inicial próximo, mas o valor final é positivo nesse caso, e negativo na captura direta. Isso se deve ao fato de que as direções do movimento são opostas para cada caso.

Na direção do movimento, a força de gravidade da Terra tem um valor inicial menor (menos negativo) para este caso em relação ao caso da captura direta.

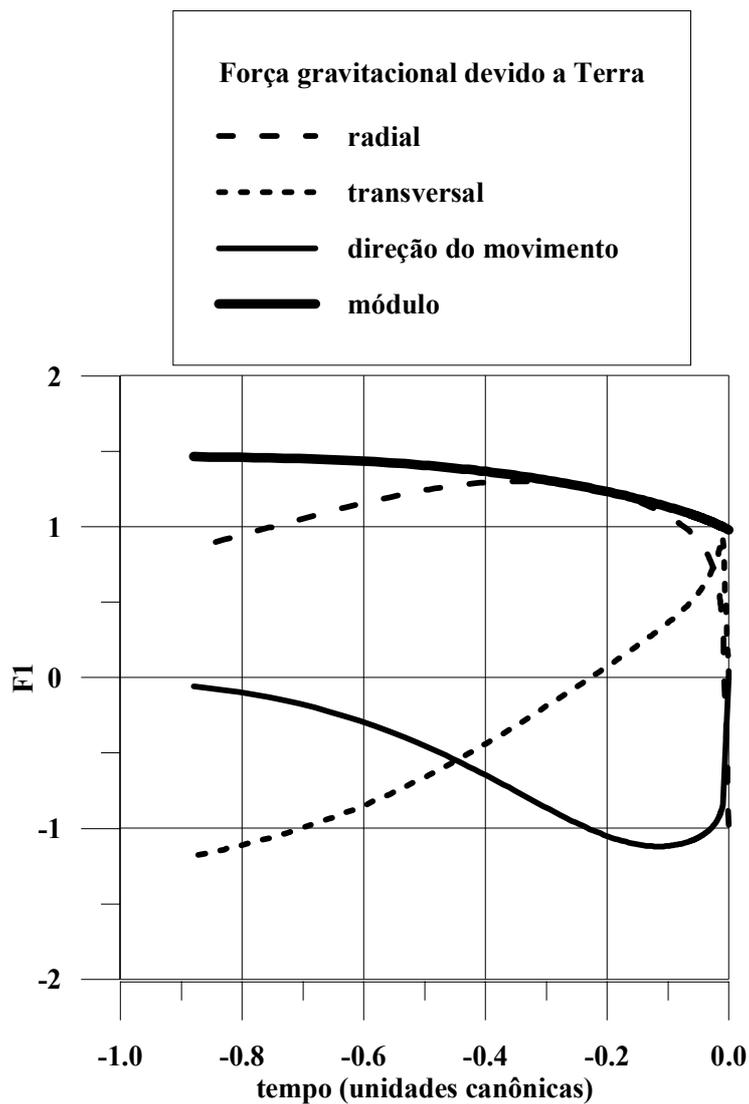


Fig. 5.33 – Força de gravidade da Terra para a quarta trajetória.

A Figura 5.34 apresenta o comportamento da força de gravidade da Lua. Nesse caso não existem diferenças entre os dois casos, quando comparado com a Figura 5.16.

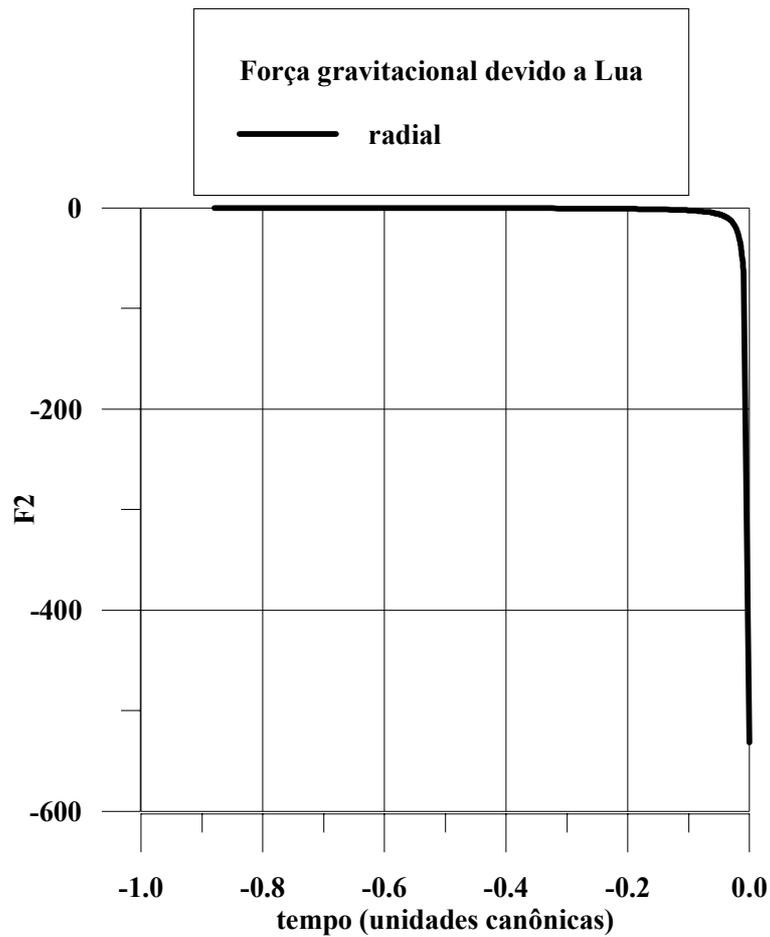


Fig. 5.34 – Força de gravidade da Lua para a quarta trajetória.

A Figura 5.35 apresenta o comportamento da força centrípeta para este caso.

Na direção radial e na direção do movimento o comportamento das curvas são semelhantes ao do caso da captura direta (Figura 5.17), porém nesse caso os valores iniciais estão mais próximos de zero do que no caso da captura direta.

A direção transversal apresenta comportamento semelhante à força de gravidade da Terra em relação à captura direta. Também nesse caso a força nessa direção se inicia com o mesmo sinal da captura direta, mas termina com sinal oposto.

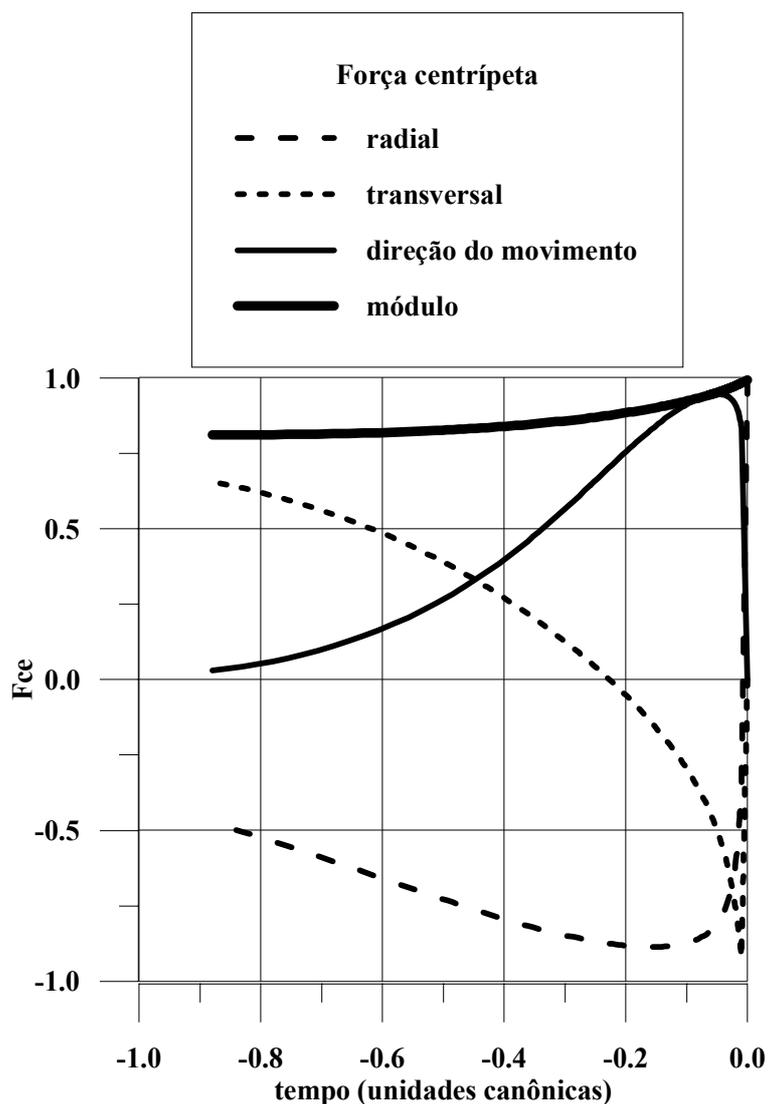


Fig. 5.35 – Força centrípeta para o terceiro caso.

O gráfico mais importante desta série é o que mostra a força resultante entre as forças de gravidade da Terra e centrípeta, apresentada na Figura 5.36. Comparando esse gráfico com a Figura 5.18 nota-se que todas as três curvas apresentam uma área menor do que no caso da captura direta. Ou seja, neste caso de captura retrógrada a variação da quantidade de movimento é menor do que no caso da captura direta.

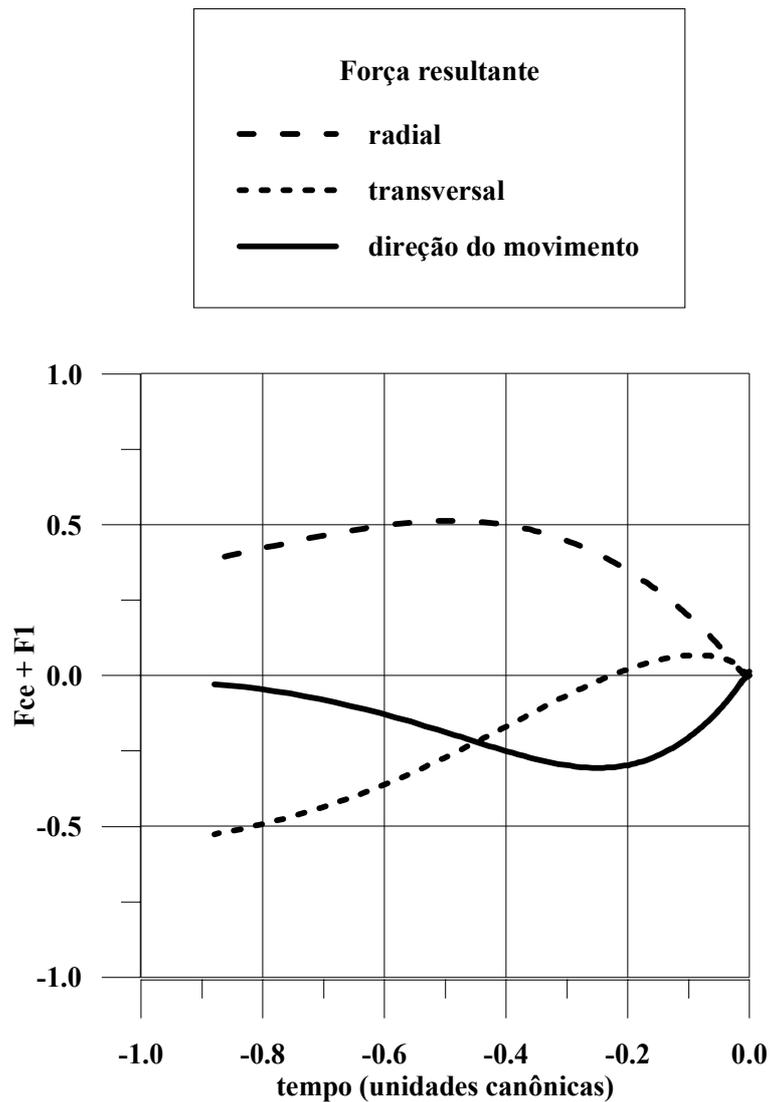


Fig. 5.36 –Força resultante entre as forças de gravidade da Terra e centrípeta para a quarta trajetória

A Figura 5.37 apresenta o comportamento da força de Coriolis. O módulo e a força na direção transversal são parecidas com as da Figura 5.19. Mas na direção radial a força é sempre negativa, diferente do caso da captura direta em que a força se inicia negativa e depois muda de sinal.

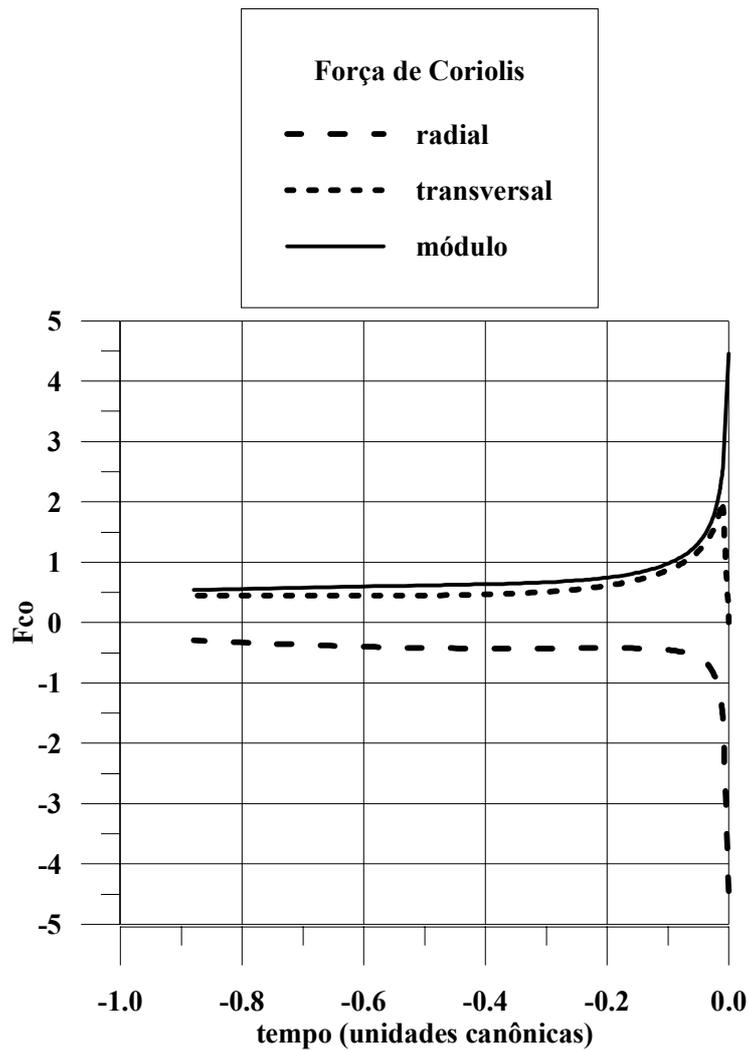


Fig. 5.37 – Comportamento da força de Coriolis na quarta trajetória.

O comportamento das forças nos quatro casos estudados foram coerentes entre si. Esses resultados também estão coerentes com os estudos feitos na Seção anterior sobre o comportamento das forças em torno da Lua no momento da captura. Este estudo é de grande importância para a compreensão do fenômeno de captura gravitacional temporária. As forças centrípeta e de Coriolis aparecem devido a rotação do sistema de referências e essa rotação é feita para que se consiga equações mais simples. Num sistema de referências fixo essas forças não aparecem, mas o fenômeno, que é indiferente ao sistema de referências, continua acontecendo.

Yamakawa (1992) ao estudar o fenômeno aplicando o método de Lagrange menciona e

explica a captura gravitacional utilizando o balanço das forças gravitacional da Terra e centrípeta, como feito aqui. No entanto ele não menciona a força de Coriolis e, como pôde ser visto nesta Seção, ela não produz trabalho na direção do movimento sendo inútil para frear o veículo nessa direção.

5.5. Conclusões

Neste Capítulo, o estudo das forças esclarece melhor o fenômeno da captura gravitacional temporária. Na Seção 5.3 quando é estudado o comportamento das forças no momento em que o veículo espacial passa pela periluna desejada, a Figura 5.11 e principalmente a Figura 5.13, demonstram que as forças perturbativas são de natureza repulsiva, ou seja, elas tentam expulsar o veículo espacial para longe da Lua. Isto parece contradizer o fenômeno de captura, já que à primeira vista se entende que estas forças deveriam atrair o veículo espacial para a Lua, capturando-o. Fazendo uma análise mais profunda do que é a captura gravitacional é possível entender está aparente contradição. Quando ocorre a chamada captura gravitacional temporária, o veículo espacial possui uma energia de dois corpos (C3) negativa, isto significa que a velocidade do veículo é menor do que a velocidade de escape da Lua. Ora, se o veículo espacial possui uma velocidade menor do que a velocidade de escape como ele fez para diminuir a sua velocidade? E já que o veículo está com uma velocidade baixa o comportamento do veículo deveria ser o de permanecer próximo da Lua, e não se afastar novamente, como ocorre. Este é o significado das forças perturbativas terem natureza repulsiva no momento da captura. No mecanismo de captura gravitacional essas forças funcionam como um empuxo contínuo aplicado em direção contrária ao movimento do veículo espacial, ou seja, quando o veículo está indo em direção à Lua, ao passar perto da periluna desejada, as forças perturbativas sendo repulsivas, fazem com que o veículo diminua a sua velocidade, ficando menor do que a velocidade de escape, e depois a devolve para que o veículo vá embora novamente.

Ao analisar o comportamento radial das forças ao longo da trajetória, na Seção 5.4, o que foi escrito no parágrafo anterior fica mais claro. As forças de gravidade da Terra e centrípeta tendem a se equilibrar, com uma tendência a serem repulsivas. Ou seja, elas

começas a amortecer a velocidade do veículo desde a entrada na esfera de influência da Lua. Essas forças equivalem a um impulso negativo que diminui a velocidade do veículo espacial. Já a força de Coriolis não atua na direção do movimento, pois esta força é sempre perpendicular ao movimento, e por esta razão ela nem freia, nem acelera o veículo nessa direção.

Ao comparar a quarta trajetória com a primeira nota-se que a primeira trajetória possui uma variação da quantidade de movimento maior do que o da quarta trajetória. Essas duas trajetórias terminam na mesma periluna com a mesma energia C3, porém a primeira é capturada de forma direta (no sentido anti-horário) e a quarta de forma retrógrada (no sentido horário). O fato da trajetória de captura direta ter uma variação da velocidade maior do que a da captura retrógrada demonstra que na captura direta pode se alcançar valores menores de C3 do que no caso das capturas retrógradas.

CAPÍTULO 6

ESTUDO DE CAPTURAS COM O MENOR C3 POSSÍVEL

6.1. Introdução

Na mesma linha de investigação de Yamakawa (1992), este Capítulo apresenta uma série de estudos sobre o menor valor possível da energia de dois corpos C3 que ainda permite a captura gravitacional.

O valor de C3 está ligado à quantidade de combustível gasto na manobra, ou seja, quanto menor o valor de C3, menor é a quantidade de combustível gasto. Por esta razão a busca dos valores mínimos de C3 para a captura gravitacional é de grande importância.

6.2. Estudo do Valor de C3 Mínimo

Os resultados obtidos por Yamakawa (1992) levam a uma fronteira de mínima energia C3. Essa fronteira representa o menor valor possível de C3 para o qual ainda existem trajetórias com captura gravitacional. A fronteira para o sistema Terra-Lua é apresentada na Figura 6.1 para as capturas diretas e retrógradas. Nestas Figuras a variável radial representa o valor absoluto de C3 em unidades canônicas. A variável angular é o ângulo α , que representa o ângulo da posição da periluna (Figura 3.1). Para alcançar estas energias mínimas foram feitas integrações das trajetórias com o ângulo α fixo e variando C3 de 0 até -0.3 unidades canônicas em passos de -0.01 . Somente os menores valores de C3 que proporcionam captura gravitacional estão apresentadas nas figuras abaixo.

Com a observação das Figuras pode-se concluir que existem regiões mais favoráveis à captura gravitacional, no sentido em que a energia mínima C3 é menor do que o valor dessa mesma grandeza em outras regiões. Esse resultado já havia sido demonstrado no capítulo anterior quando as forças foram analisadas. É interessante notar que a captura retrógrada, de forma geral, proporciona valores mínimos de C3 maiores do que os valores obtidos na captura direta, embora as diferenças não sejam grandes. A explicação para esse efeito é que na captura direta, como foi visto no Capítulo 5, existe uma variação

de velocidade maior do que no caso da captura retrógrada. Ou seja, as forças perturbativas atuam com um impulso contínuo menor no caso da captura retrógrada do que no caso da captura direta fazendo com que esse tipo de captura não alcance os valores de $C3$ tão baixo quanto no caso da captura direta.

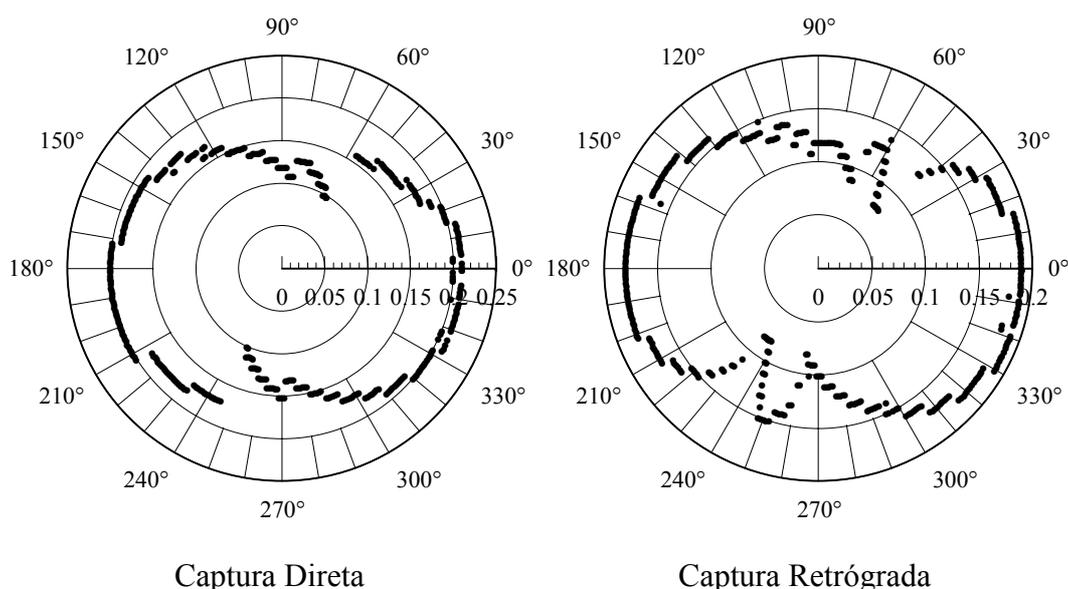


Fig. 6.1 – $C3$ mínimo do sistema Terra-Lua para capturas diretas e retrógradas.

Yamakawa (1992) fez um estudo semelhante a esse, calculando os valores mínimos para as trajetórias que escapam na direção da Terra e depois para as trajetórias que escapam na direção oposta, como as trajetórias das Figuras 5.13 e 5.18, respectivamente. Por essa razão é difícil fazer uma comparação entre os dois resultados.

A descontinuidade em torno de $\alpha = 60^\circ$ na Figura 6.1 é apresentada de forma ampliada na Figura 6.2, com incrementos de 1° e de 0.1° na variável α e variações de 0.01 e 0.001 em $C3$. Essa descontinuidade está evidente também em Yamakawa (1992), mas não recebeu um estudo detalhado das razões que levaram a essa particularidade. A descontinuidade aparece entre 57° e 58° , para um incremento de 1° em α e variação de 0.01 em $C3$, mas, neste mesmo intervalo de ampliação, quando α é incrementado de 0.1° , aparece uma outra descontinuidade pontual para $\alpha = 56.5^\circ$, e nota-se que a descontinuidade agora está entre 57.5° e 57.6° . A outra experiência com esta descontinuidade com variação de $C3$ em milésimos a energia mínima (os valores de $C3$

ção de C3 em milésimos a energia mínima (os valores de C3 estão apresentados em magnitude) apresenta um outro perfil. Além disto, a descontinuidade da variação de grau em grau está entre 58° e 59°.

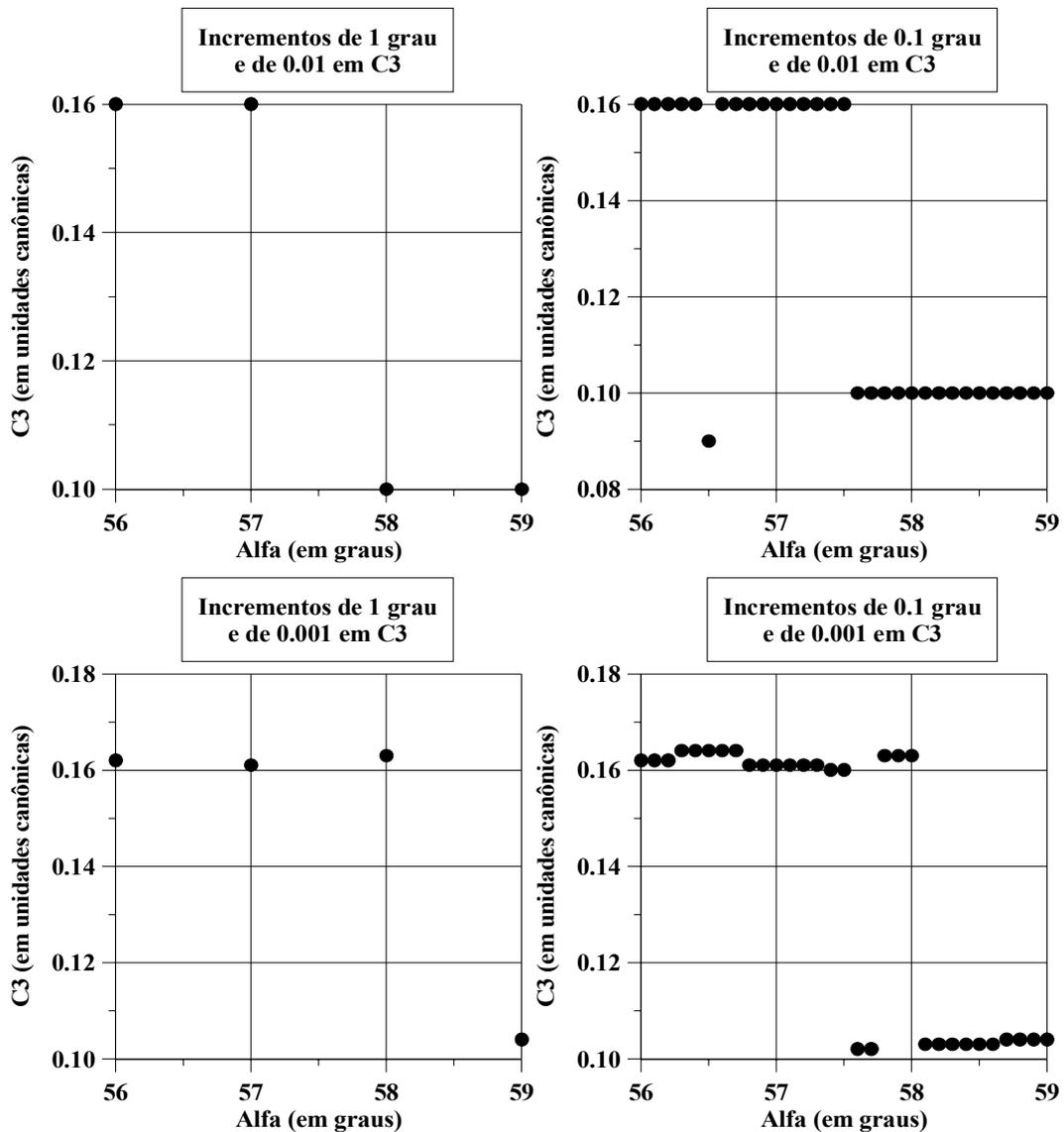


Fig. 6.2 – Ampliação da descontinuidade perto de 60°.

Para entender o que está acontecendo nesse fenômeno a Figura 6.3 apresenta duas trajetórias, ambas com valor de $C3 = -0.16$, que é o valor mínimo mostrado na Figura 6.2 quando C3 tem incrementos de 0.01. Uma trajetória tem $\alpha = 57.5^\circ$ e a outra tem $\alpha = 57.6^\circ$. Nota-se que para a mesma energia, mudando apenas 0.1° em α nas condições ini-

ciais, uma trajetória consegue sair da esfera de influência gravitacional da Lua, enquanto que a outra colide com a Lua. Essa particularidade pode ser facilmente observada na Figura 6.3, pois a trajetória do veículo espacial inicialmente se afasta da Lua, depois faz um retorno para uma passagem próxima da Lua. Neste ponto a primeira trajetória continua seu caminho se afastando definitivamente da Lua, enquanto que a segunda trajetória colide com a Lua. Quando α é variado, mantendo-se a mesma energia de dois corpos C3, o vetor velocidade mantém sua intensidade fixa, mas varia sua direção. Isto provoca as discontinuidades apresentadas na Figura 6.1. Na Figura 6.2 verifica-se que a pequena variação de C3 (de centésimos, para milésimos) provoca uma variação na intensidade do vetor velocidade, agora ficando fixo sua direção (para cada trajetória). A conclusão que se pode chegar é que a procura de mínimos absolutos é muito difícil devido a grande sensibilidade das condições iniciais.

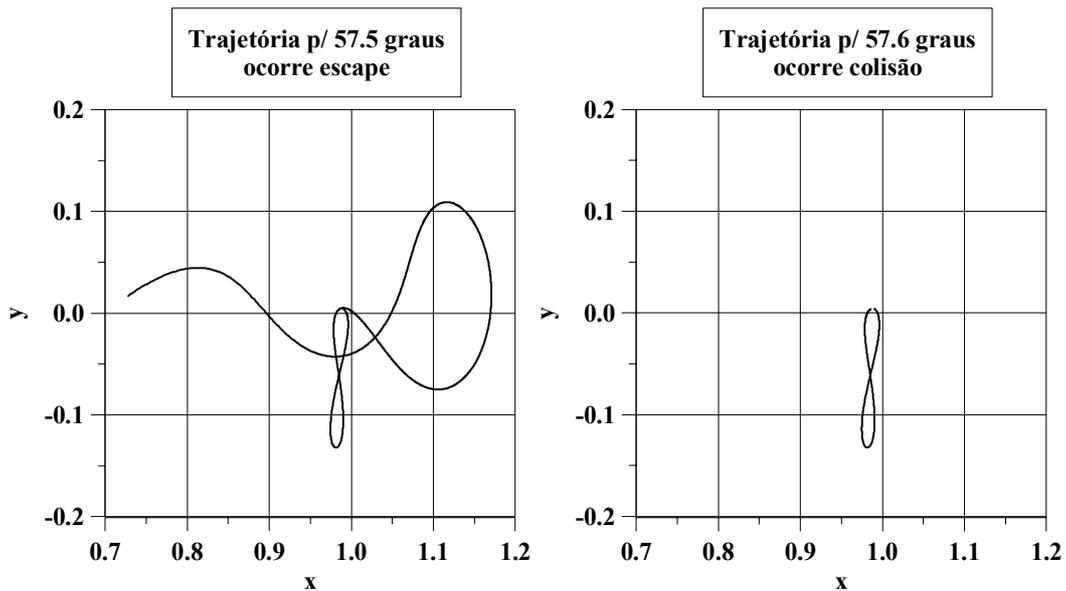


Fig. 6.3 – Trajetórias com $C3 = -0.16$.

6.3. Estudo da Influência do Valor de r_p

Para o estudo do comportamento dos valores mínimos de C3 em que ocorrem capturas gravitacionais com variação da altura da periluna r_p , serão utilizados os valores para perilunas de 100 km, 10000 km, 20000 km e 50000 km (r_p de 1838 km, 11738 km, 21738

km e 51738 km, respectivamente). O sistema utilizado é o sistema Terra-Lua. Os valores das magnitudes das energias mínimas estão representadas no eixo radial e a variável angular é o ângulo α . Na Figura 6.4 é apresentado o caso de capturas diretas e na Figura 6.5 o caso para capturas retrógradas. Em ambos os casos as energias mais baixas aparecem para r_p de 1838 km, sendo que para o caso retrógrado existe uma maior variação entre o primeiro r_p e os demais, e a medida que o r_p aumenta a energia de dois corpos vai diminuindo, porém de forma lenta. É possível concluir que não existem grandes variações nos níveis de energia mínima na captura gravitacional. Isto quer dizer que se pode utilizar uma grande variedade de perilunas sem perder muito na economia de combustível. Assim sendo, podem ser projetadas várias tipos de missões utilizando a captura gravitacional e com um certo ganho em energia.

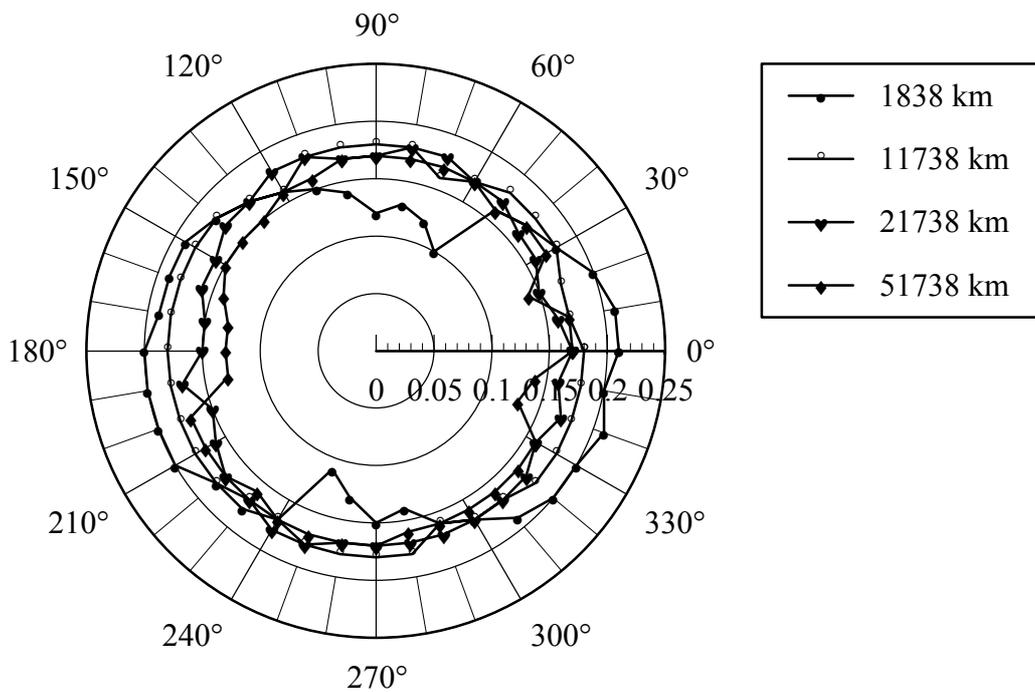


Fig. 6.4 – Valores mínimos de C3 para vários r_p na captura direta.

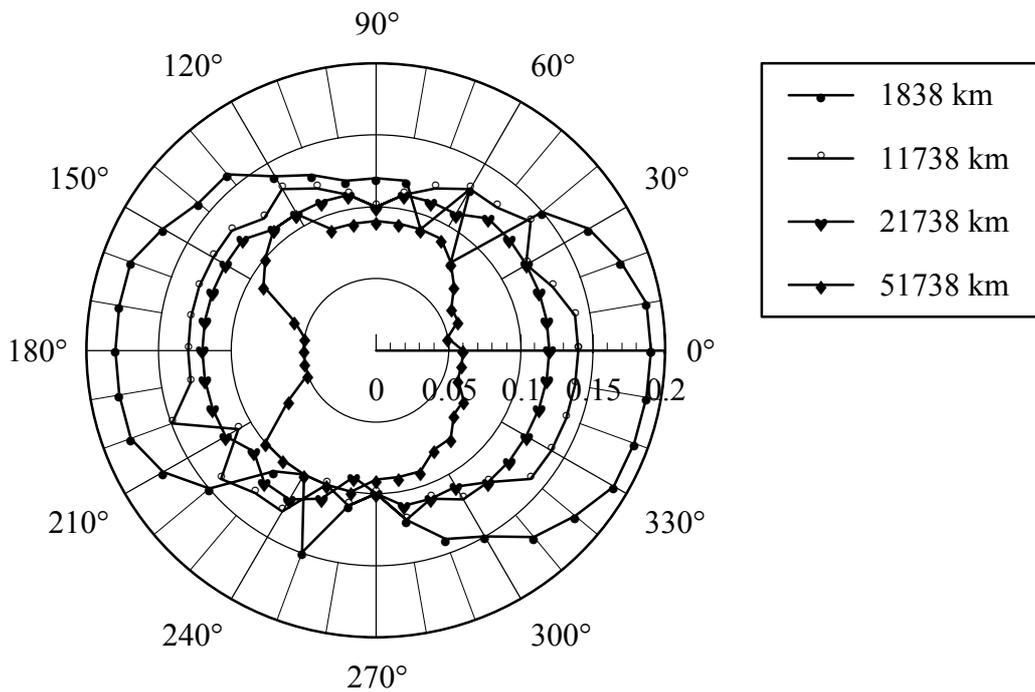


Fig. 6.5 – Valores mínimos de C_3 para vários r_p na captura retrógrada.

As variações abruptas (descontinuidades) existentes nos dois casos podem ser explicadas da mesma forma anterior. Pequenas variações angulares faz com que o veículo espacial colida com a Lua.

6.4. Estudo da Influência do Parâmetro de Massa

A Figura 6.6 apresenta o comportamento da energia de dois corpos C_3 quando se varia o parâmetro gravitacional μ no problema de captura gravitacional. Essa Figura segue o padrão das Figuras anteriores, onde a magnitude de C_3 está representada pela variável radial e o valor da condição inicial α está representado pela variável angular. Uma família de curvas foi feita para cada valor de μ . Para esta figura foram criados alguns sistemas hipotéticos baseados inteiramente no sistema Terra-Lua só, sendo modificado o valor do parâmetro gravitacional.

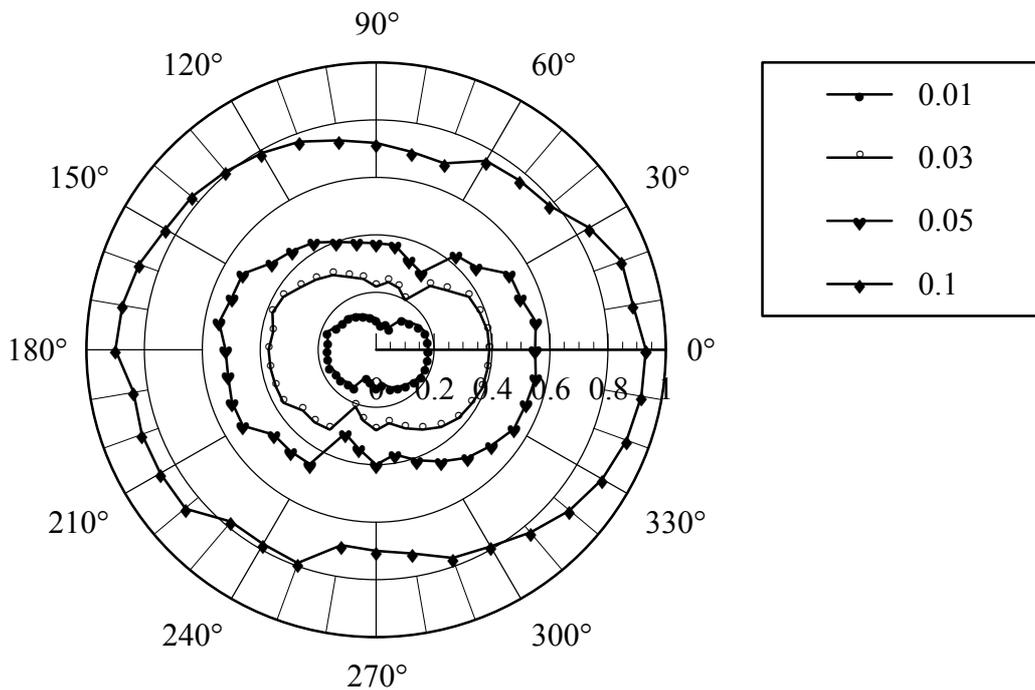


Fig. 6.6 – Valores mínimos de C3 para diversos μ .

Nota-se que com o aumento do parâmetro gravitacional a energia de dois corpos diminui drasticamente. Para $\mu = 0.01$ o comportamento é bem semelhante ao do sistema Terra-Lua, indicando que pequenas variações no parâmetro gravitacional não alteram de maneira significativa o resultado (mas é bom lembrar que o parâmetro gravitacional de um sistema de binários não pode ser modificado, já que este parâmetro gravitacional representa a relação de massas entre os dois primários e que dificilmente pode ser alterada). Este estudo demonstra que sistemas que possuem valores de μ maiores do que o do sistema Terra-Lua tem condições de proporcionar maiores economias em uma manobra de captura gravitacional. A razão disto é que quanto maior o valor do parâmetro gravitacional maior é a perturbação gravitacional no sistema e, conseqüentemente, maior é a possibilidade de ocorrer a captura gravitacional temporária.

6.5. Conclusão

O resultado mais importante desse estudo é o fato de terem sido encontradas regiões em que a captura gravitacional ocorre com um valor de C3 mais negativo do que em outras.

Isso vem corroborar o estudo feito no capítulo anterior sobre o comportamento das forças. Naquele capítulo, os estudos numéricos demonstraram que a captura gravitacional era melhor justamente nas regiões em que os estudos deste Capítulo mostraram os melhores mínimos.

O estudo da periluna também tem sua correspondência no capítulo anterior. Este estudo da periluna oferece uma generalização ao problema, pois, com esta análise é possível escolher perilunas mais altas que satisfaça algum tipo de missão.

Outro estudo que oferece generalização foi o estudo feito sobre os diversos valores do parâmetro de massa. Como a variação desse parâmetro demonstrou que o princípio da captura gravitacional continua, apesar de que com o crescimento do parâmetro os valores de C_3 tornam mais negativo. Sendo o oposto também verdadeiro, ou seja, com a diminuição desse parâmetro, C_3 se torna menos negativo.

CAPÍTULO 7

ANÁLISE NUMÉRICA DO TEMPO REQUERIDO PARA A CAPTURA GRAVITACIONAL

7.1. Introdução

Neste Capítulo é estudado o comportamento do tempo necessário para completar a captura gravitacional. Os resultados são obtidos através de uma análise paramétrica efetuada com base em integrações numéricas de trajetórias. Esta análise é muito importante, primeiro porque num problema de transferência orbital o tempo de captura pode ser de grande relevância, dependendo do tipo da missão. Caso a missão seja transportar equipamentos, por exemplo, pode-se economizar o máximo de combustível sem levar em conta o tempo gasto no transporte, dentro de certos limites. Mas, se a missão for transportar seres humanos ou mantimentos e/ou medicamentos necessários à manutenção de pessoal numa base lunar, é preciso fazer uma análise procurando o melhor termo entre consumo de combustível e de tempo. Além disso, dado a grande sensibilidade desse fenômeno, a redução do tempo requerido para essa fase da missão reduz a duração da ação de forças perturbadoras, o que garante uma maior precisão dos resultados e evita um número excessivo de manobras corretivas.

Outra razão da análise de tempo neste trabalho, é a falta deste tipo de abordagem nas pesquisas disponíveis na literatura sobre o tema. Isto se explica devido ao fato desse tópico de pesquisa ser muito recente na literatura e poucos trabalhos acadêmicos o abordaram. A análise de tempo aqui efetuada é o resultado dos trabalhos publicados por Vieira Neto e Prado (1995; 1998). Antes desses trabalhos os demais autores que pesquisaram o problema da captura gravitacional se preocuparam em entender melhor o fenômeno em relação à economia de energia, nunca levando em conta o tempo envolvido. Este tipo de análise mostra o quanto é possível economizar em combustível quando se opta por este tipo de transferência, mas não apresenta soluções em relação ao tempo necessário na transferência

Para fazer esta análise, será utilizado o modelo restrito de três corpos circular apresen-

tado no Capítulo 2 e os conceitos e parâmetros numéricos apresentados no Capítulo 3. O sistema utilizado é o sistema Terra-Lua. Em certas etapas serão utilizados outros sistemas, para generalizar o trabalho e estudar o efeito de algum parâmetro em particular. Porém, quando isto for feito, será explicitamente mencionado no texto. Todos os valores numéricos estão escritos nas variáveis adimensionais descritas nos capítulos anteriores.

7.2. Escolha dos Parâmetros

Os parâmetros mais importantes na análise de tempo são: $C3$, a energia de dois corpos; α , o ângulo da posição da periluna; r_p , a distância do periapside da trajetória de captura gravitacional ao centro da Lua; e μ , o parâmetro gravitacional do sistema de primários considerado. Este último parâmetro será variado para uma maior generalização da análise, mas deve-se levar em conta que no sistema Terra-Lua o parâmetro gravitacional é constante e igual a 0.0121506683 no sistema de coordenadas adimensionais, conforme utilizado por Yamakawa (1992).

Para cada um desses parâmetros serão analisadas as suas relações com o tempo de captura. Aqui se entende como tempo de captura o tempo gasto entre o momento da entrada na esfera de influência gravitacional (como definida no Capítulo 2) até o momento em que o veículo espacial chega na posição escolhida para a periluna.

Muitos desses parâmetros serão estudados em conjunto com outros. Por exemplo, será estudado o comportamento de α mantendo fixo o valor de $C3$ e verificando como o tempo de captura varia para cada α . Para estudar o comportamento de $C3$, será feito o oposto, ou seja, será mantido constante o valor de α e verificado o comportamento do tempo enquanto $C3$ é variado.

7.2.1. Tempo de Captura Para $C3$ Fixo

Esta subseção apresentará o comportamento do tempo de captura quando é mantido fixo a energia de dois corpos $C3$, enquanto o ângulo α é variado. Isso significa que os ganhos de tempo aqui encontrados não são obtidos a partir de uma redução na economia, que é relacionada com $C3$.

O ângulo α será variado de 0° a 360° para diversos valores fixos de $C3$ e mantendo-se $r_p = 1838$ km (uma periluna de 100 km). O tempo é mostrado em valores absolutos, lembrando que o passo de tempo para a integração numérica é negativo. A direção da órbita de captura é sempre direta, pois essa é a família de órbitas que fornece as melhores economias, como foi verificado no Capítulo 5.

Os resultados para esse estudo são mostrados nas Figura 7.1 a seguir.

Para analisar o comportamento do tempo, as curvas de energia foram reunidas em grupos de três. A seqüência destas curvas lembra curvas de níveis com a energia de dois corpos em função do tempo de captura. Elas especificam com clareza as faixas nas quais o ângulo da posição da periluna (o ângulo α) tem os menores tempo de captura.

A maioria das curvas das Figura 7.1 está truncada para evitar que uma escala muito grande de valores para o tempo dificultasse o entendimento do comportamento das trajetórias com menores tempos de captura. Existem duas regiões de mínimo, uma próxima de 330° e outra próxima de 150° , que estão bem ressaltadas. A região próxima de 0° , visível em todas as Figuras, é uma continuação da região próxima de 360° . Observando com atenção as figuras é possível concluir que a região próxima de 150° possui valores mínimos um pouco maiores do que a região próxima a 330° , principalmente para energias menores do que -0.18 . Isto significa que para as energias mais baixas a região próxima de 330° oferece as melhores escolhas para a periluna, onde os tempos de captura são menores do que em outras regiões e as curvas de energia estão mais próximas uma das outras.

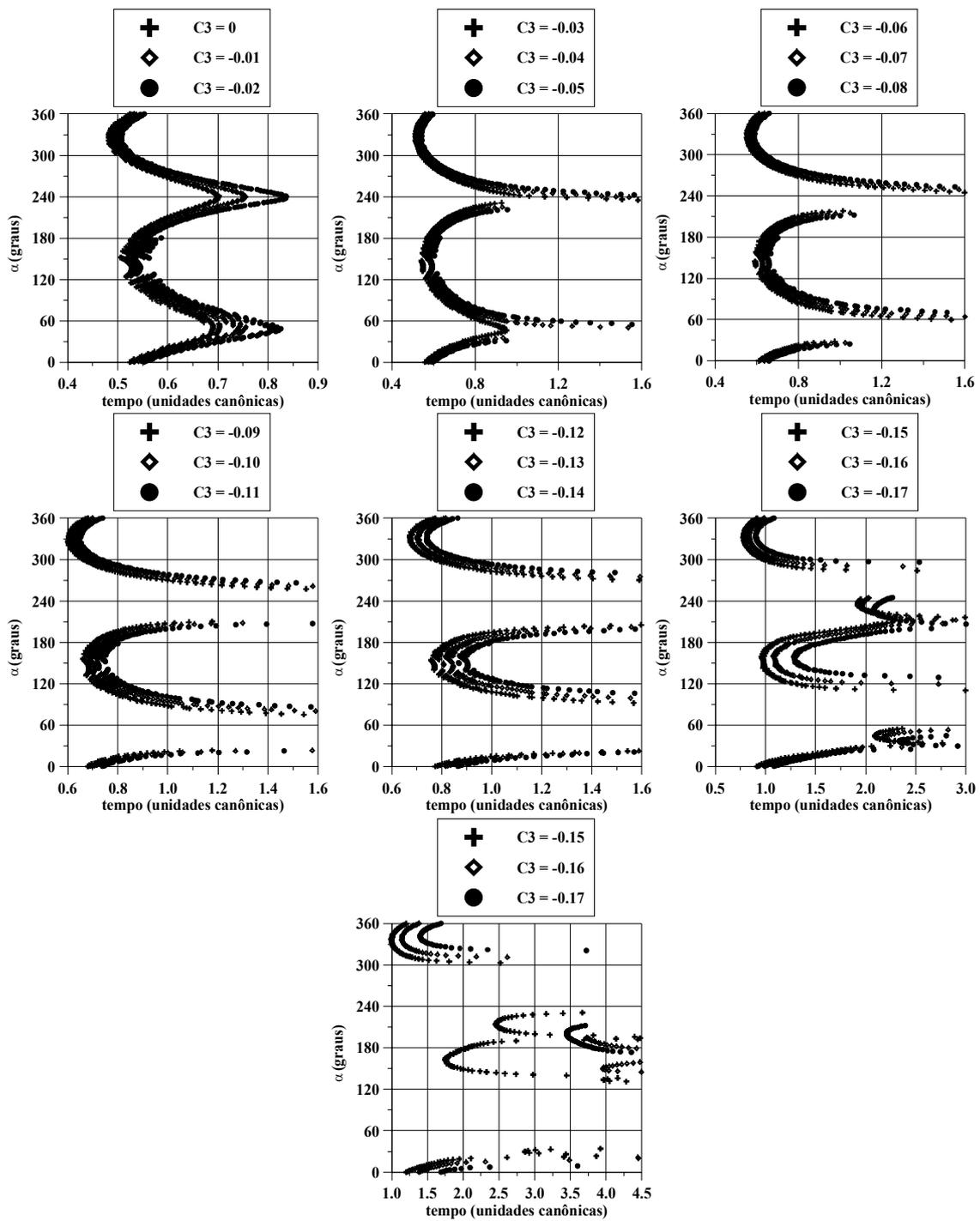


Fig. 7.1 – Tempo vs. α para valores pequenos de tempo.

De forma geral o tempo oscila quase que como uma senóide com os menores valores próximos de 0° e 180° , e os maiores valores próximos de 90° e 270° . Este comportamento é melhor notado no intervalo $-0.02 \leq C_3 \leq 0$, que demonstram claramente que exis-

tem posições privilegiadas em relação ao tempo de captura em determinados ângulos. Ou seja, em certas posições da periluna é exigido um menor tempo para que a captura ocorra. Lembrando sempre que esse ganho em tempo não é obtido às custas de uma perda na economia de combustível, pois o valor de $C3$ está sendo mantido constante e isso implica numa economia de combustível constante.

As curvas apresentadas na Figura 7.2 são a complementação das curvas da Figura 7.1 para tempos maiores, iniciando com energia $C3 = -0.03$. Estas curvas demonstram que quando a energia vai diminuindo, as regiões onde existem os maiores tempos crescem, o que constitui um resultado esperado, já que é normal ter a necessidade de mais tempo para que ocorra uma captura mais forte (com $C3$ mais negativo). Também se distingue claramente as regiões de máximo tempo: em torno de 60° e em torno de 240° .

O comportamento em torno dos ângulos 60° e 240° está de acordo com as conclusões de Yamakawa (1992) sobre a explicação da captura gravitacional e com os resultados obtidos no Capítulo 5 sobre a análise das forças. De acordo com Yamakawa e como ficou demonstrado no Capítulo 5, a diminuição da energia de dois corpos $C3$, responsável pela captura gravitacional temporária, ocorre devido a diminuição da força gravitacional da Lua em dois locais: do lado da Terra a força gravitacional da Terra tende a reduzir a força gravitacional da Lua, por estarem em direções opostas; do lado contrário da Terra a força centrífuga gerada pela revolução da Lua em torno do baricentro do sistema também tem direção oposta a força gravitacional da Lua, diminuindo o efeito desta sobre o veículo espacial. Este efeito também é verificado na Figura 6.1 onde são apresentados os menores valores de $C3$ em relação ao ângulo α para a captura direta. Com a análise do tempo verifica-se que quando α está próximo de 180° , ou seja, a periluna está do lado da Terra, a força gravitacional da Terra age sobre o veículo espacial diminuindo mais rapidamente sua velocidade até que ele chegue na posição desejada da periluna com um tempo menor do que em outras regiões. Quando α está próximo de 360° , a periluna está no lado oposto ao da Terra, a força centrífuga da Lua em torno da Terra é a componente que contribui para diminuir o tempo gasto na captura.

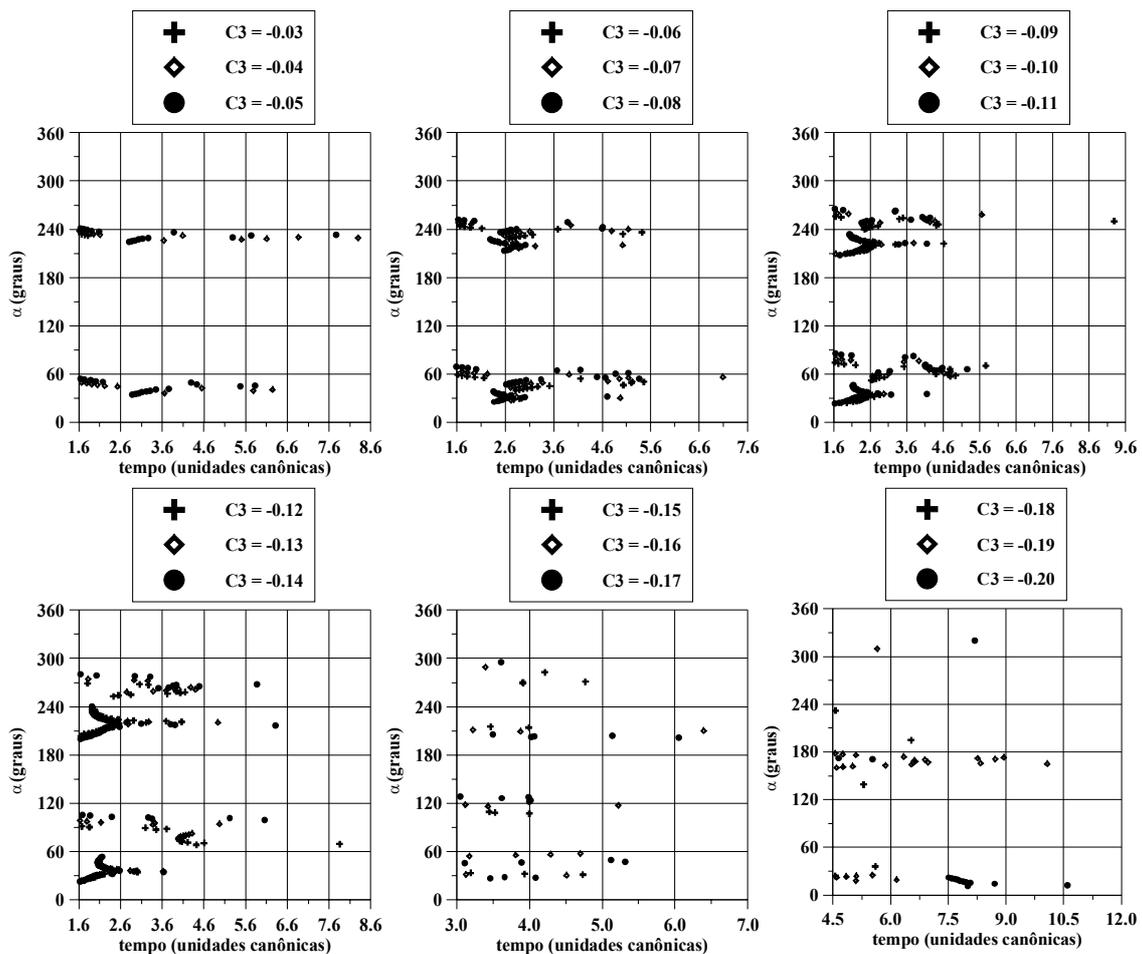


Fig. 7.2 – Tempo vs. α para valores grandes de tempo.

As Figuras demonstram que as regiões de menores tempo estão próximas do ângulo 330° e 150° , em vez de 360° e 180° . A razão deste fato pode ser explicado pela Figura 5.8 onde fica demonstrado que o segundo e quarto quadrantes possibilitam o aumento da velocidade transversal devido ao balanço transversal entre as forças de gravidade da Terra e centrípeta. Portanto o equilíbrio transversal e radial das forças provoca esse desvio.

7.2.2. Tempo de Captura em Função de α

Fixando α pode-se analisar a influência do parâmetro $C3$ no tempo de captura. Os gráficos desta Seção foram obtidos mantendo o ângulo da posição da periluna fixo enquanto que a energia de dois corpos foi sendo reduzida gradualmente.

Os resultados estão apresentados na Figura 7.3. Nos gráficos desta Figura, a distância da periluna, r_p , é mantida em 1838 km medido em relação ao centro da Lua e o ângulo α é variado com incrementos de 5° de um gráfico para a outro.

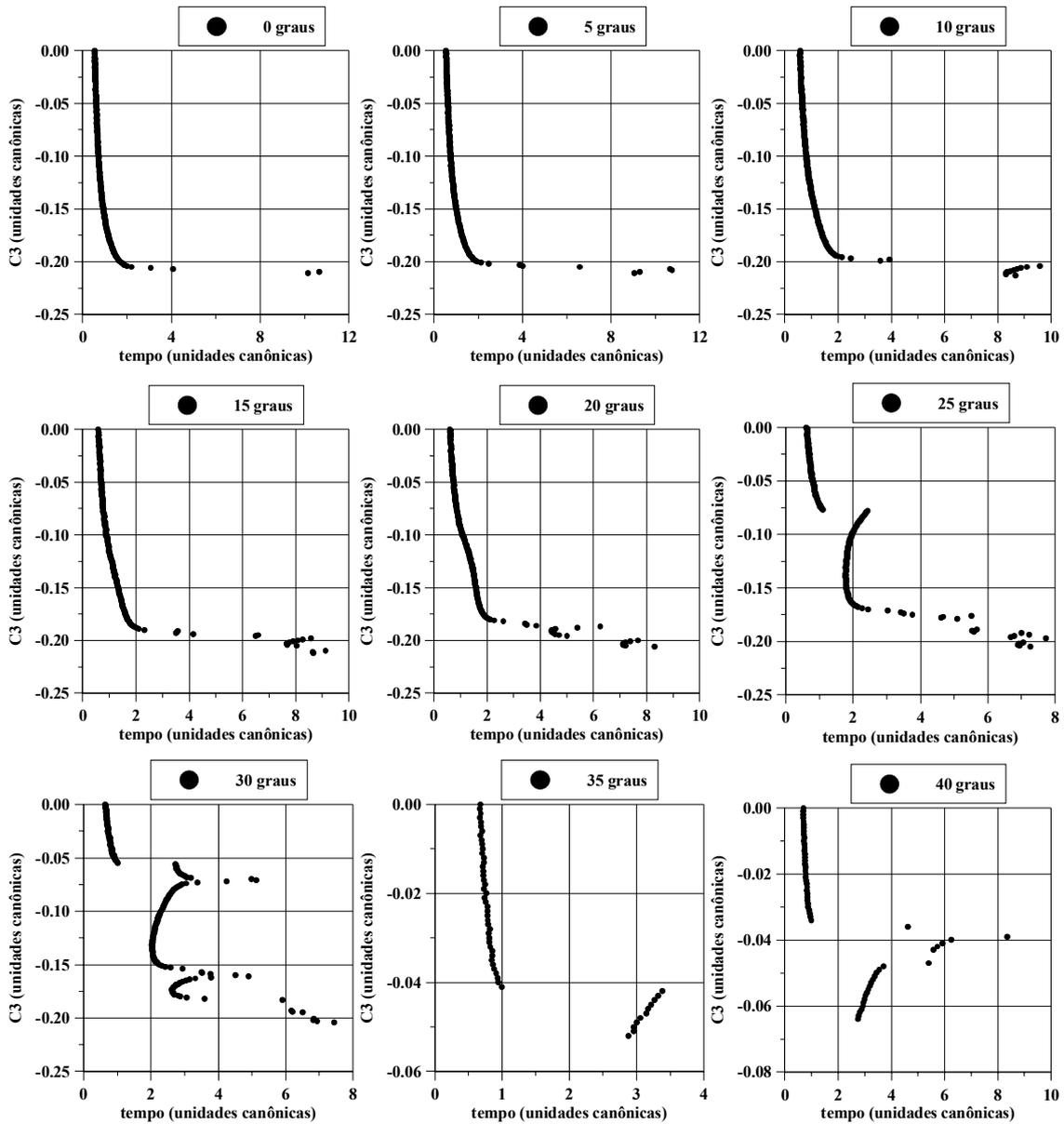


Fig. 7.3 – Tempo de captura vs. C3. (Continua).

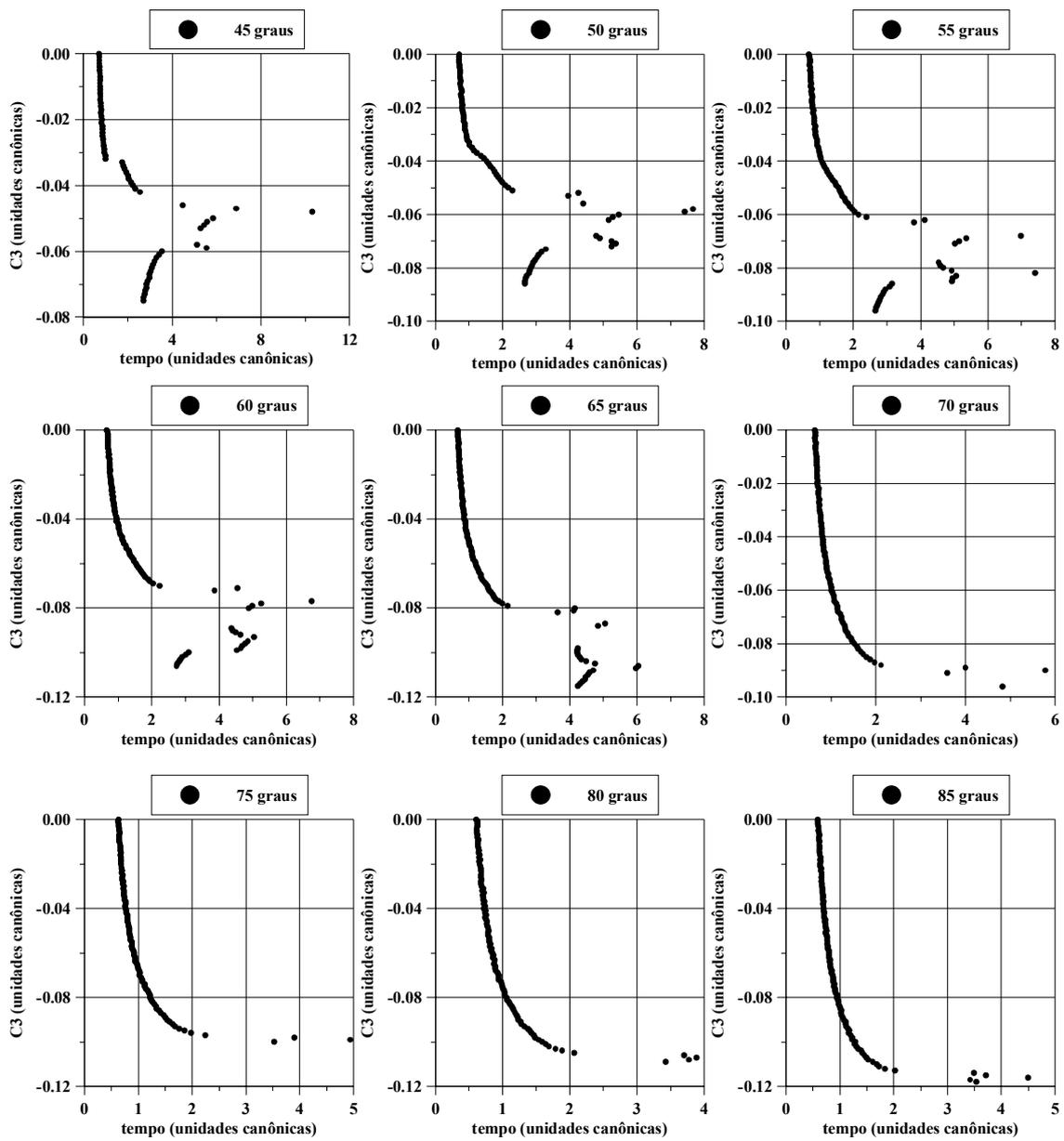


Fig. 7.3 – Tempo de captura vs. C3. (Continuação). (Continua).

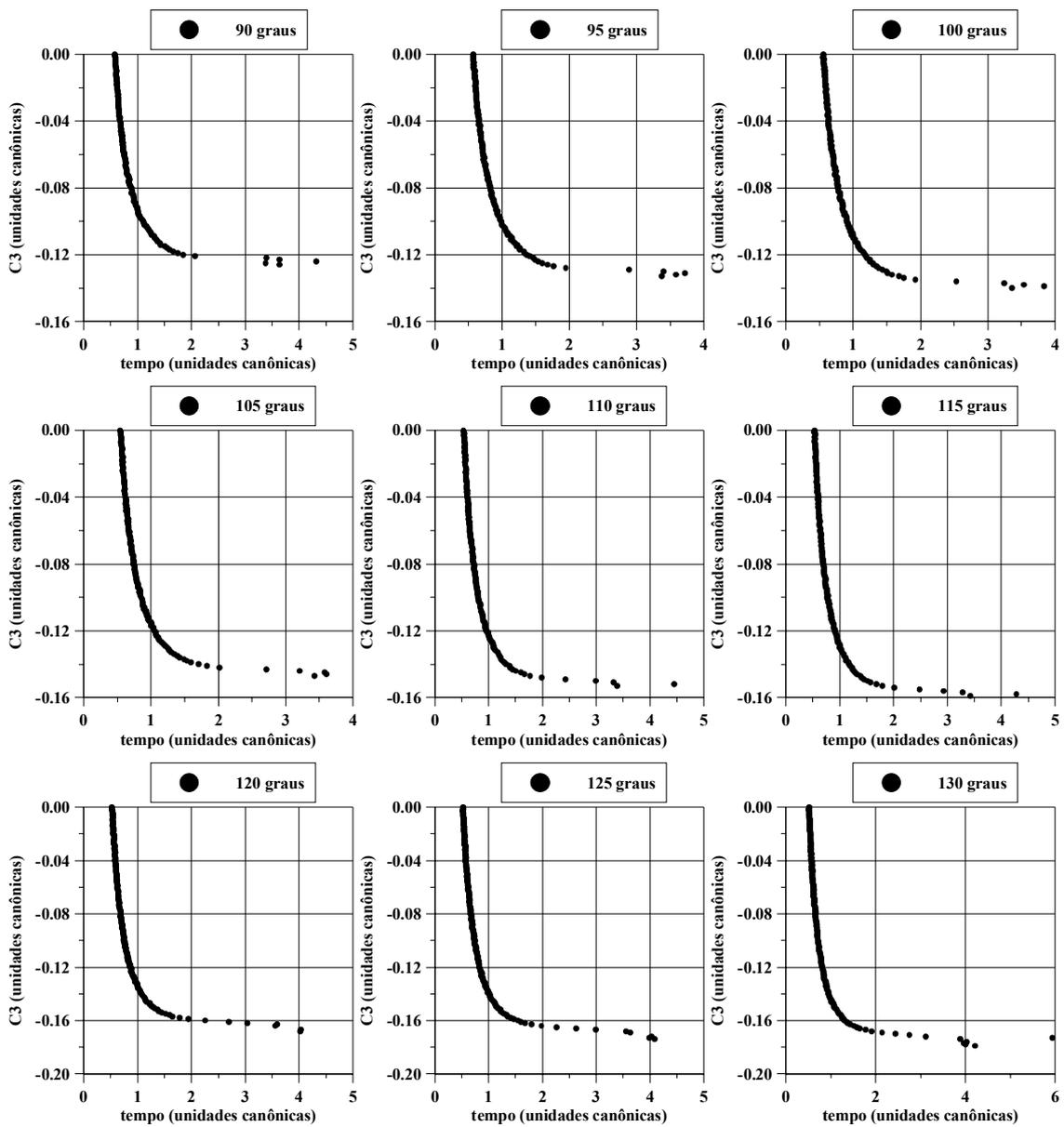


Fig. 7.3 – Tempo de captura vs. C3. (Continuação). (Continua).

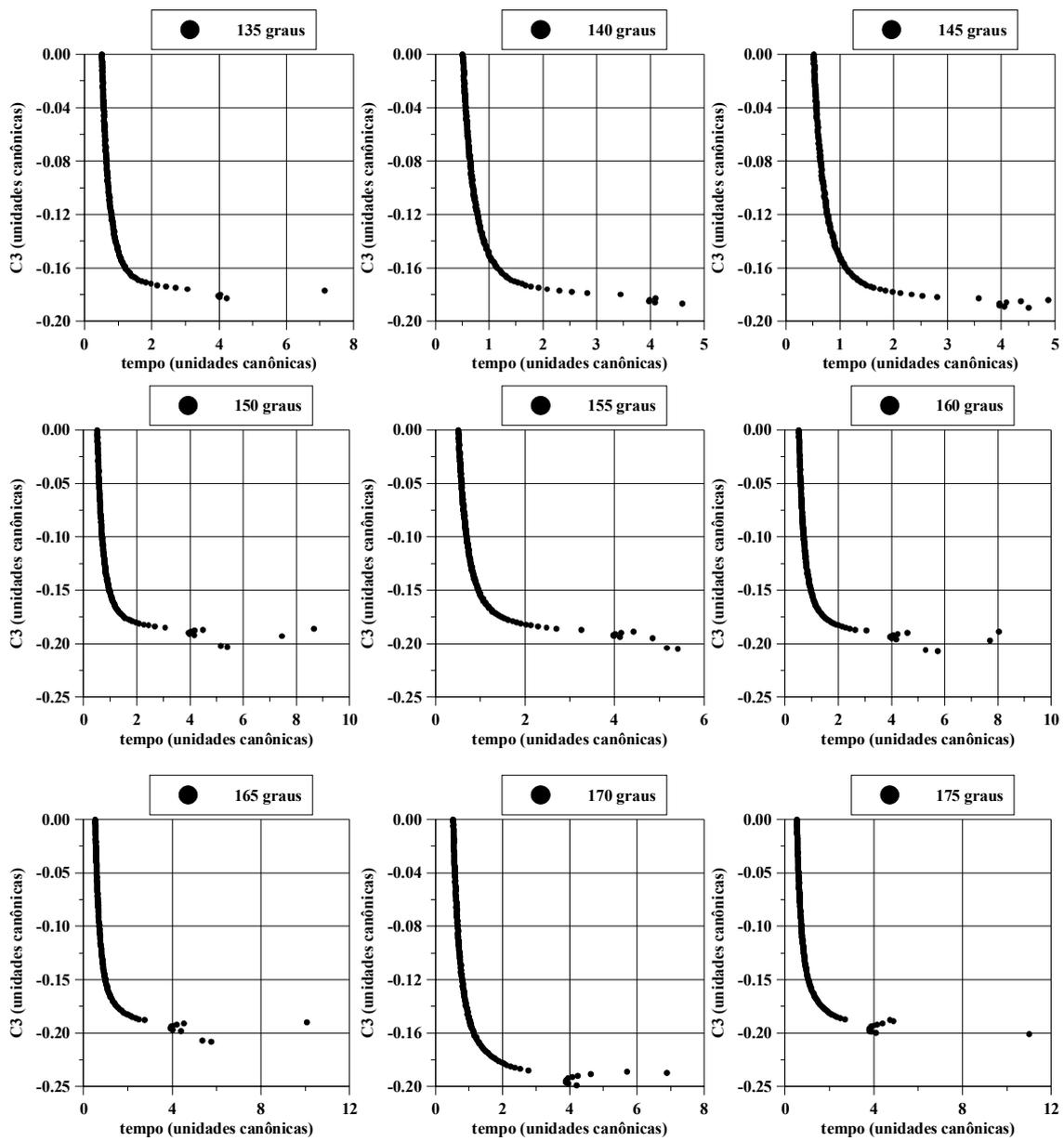


Fig. 7.3 – Tempo de captura vs. C3. (Continuação). (Continua).

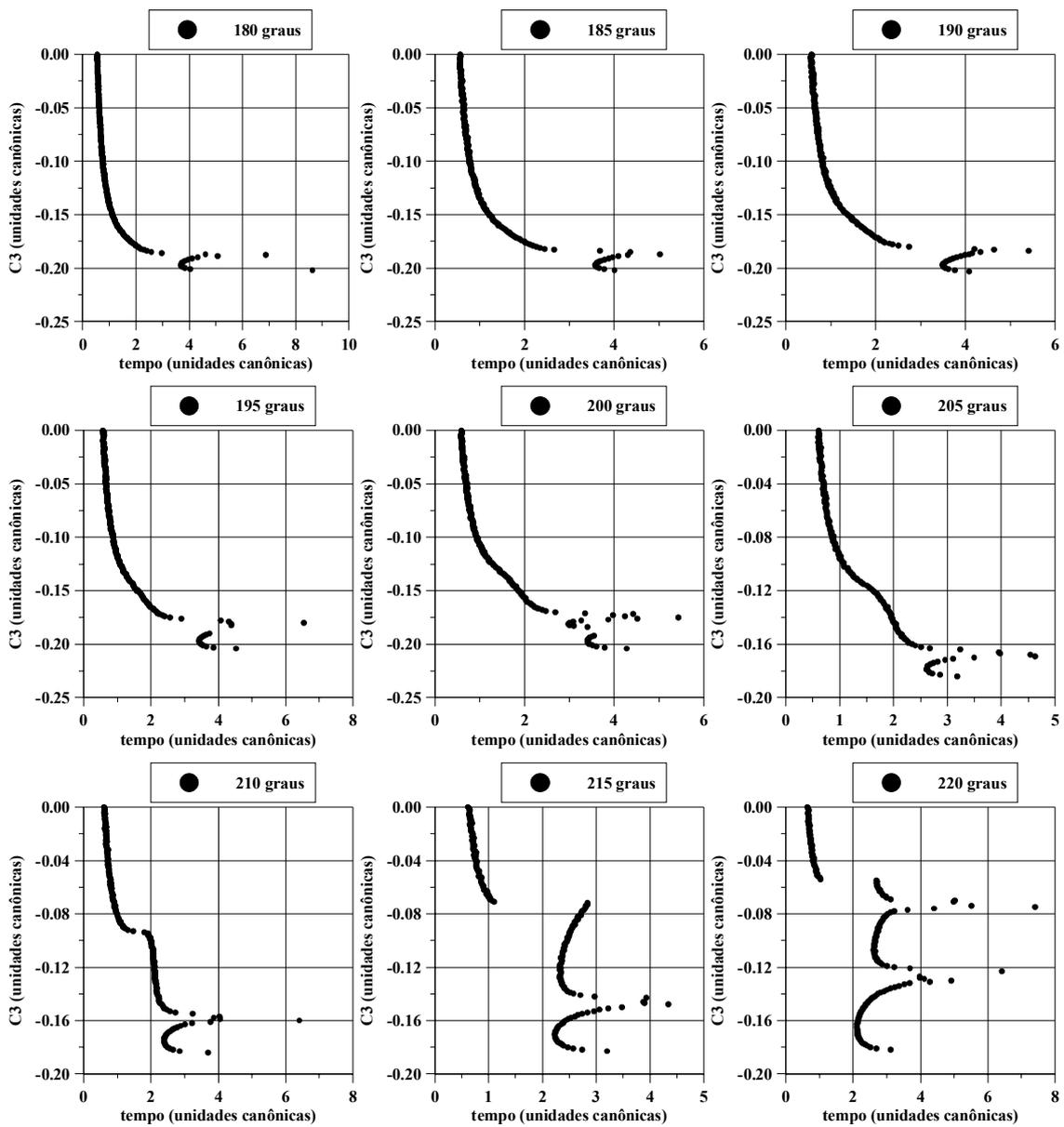


Fig. 7.3 – Tempo de captura vs. C3. (Continuação). (Continua).

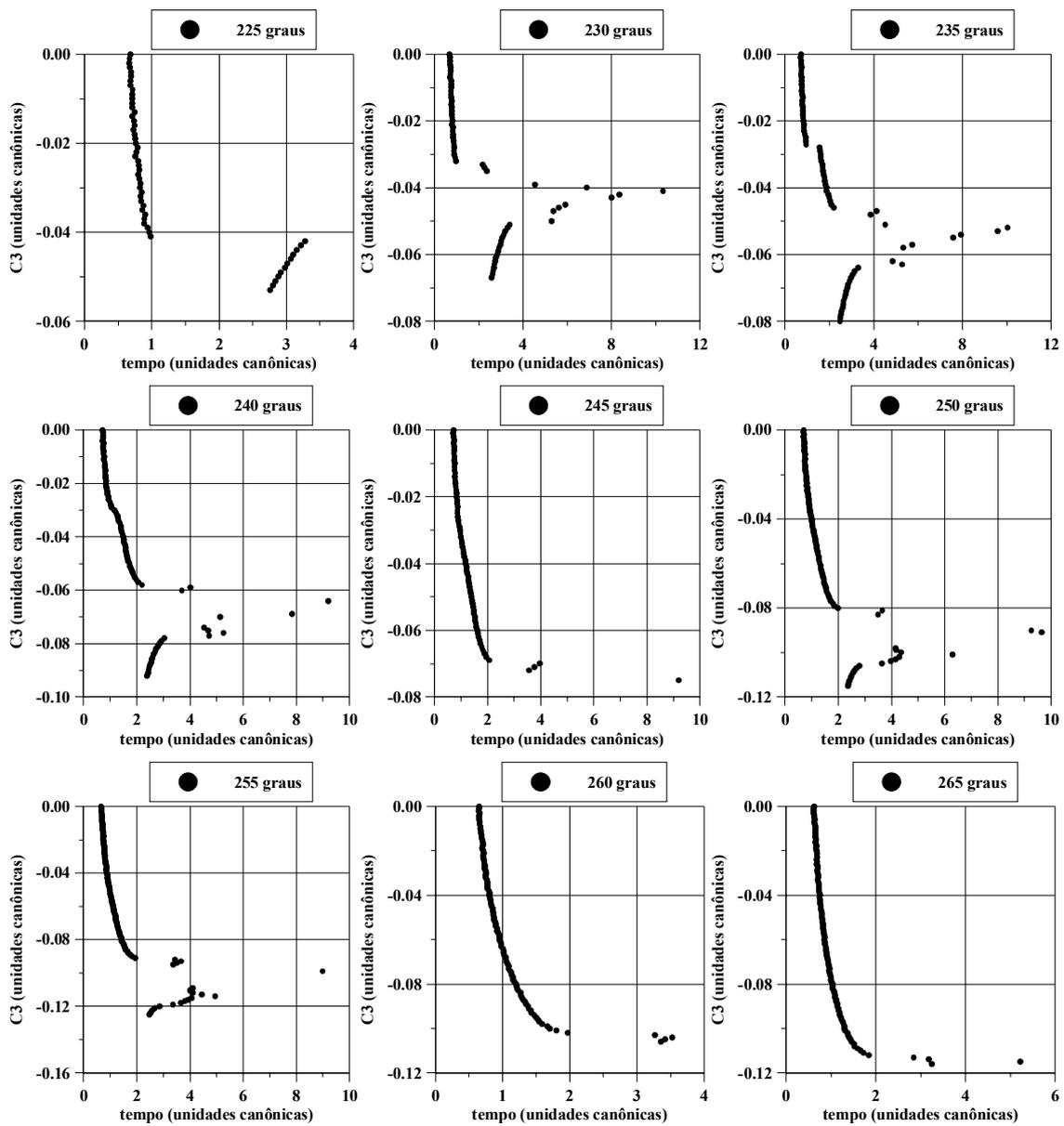


Fig. 7.3 – Tempo de captura vs. C3. (Continuação). (Continua).

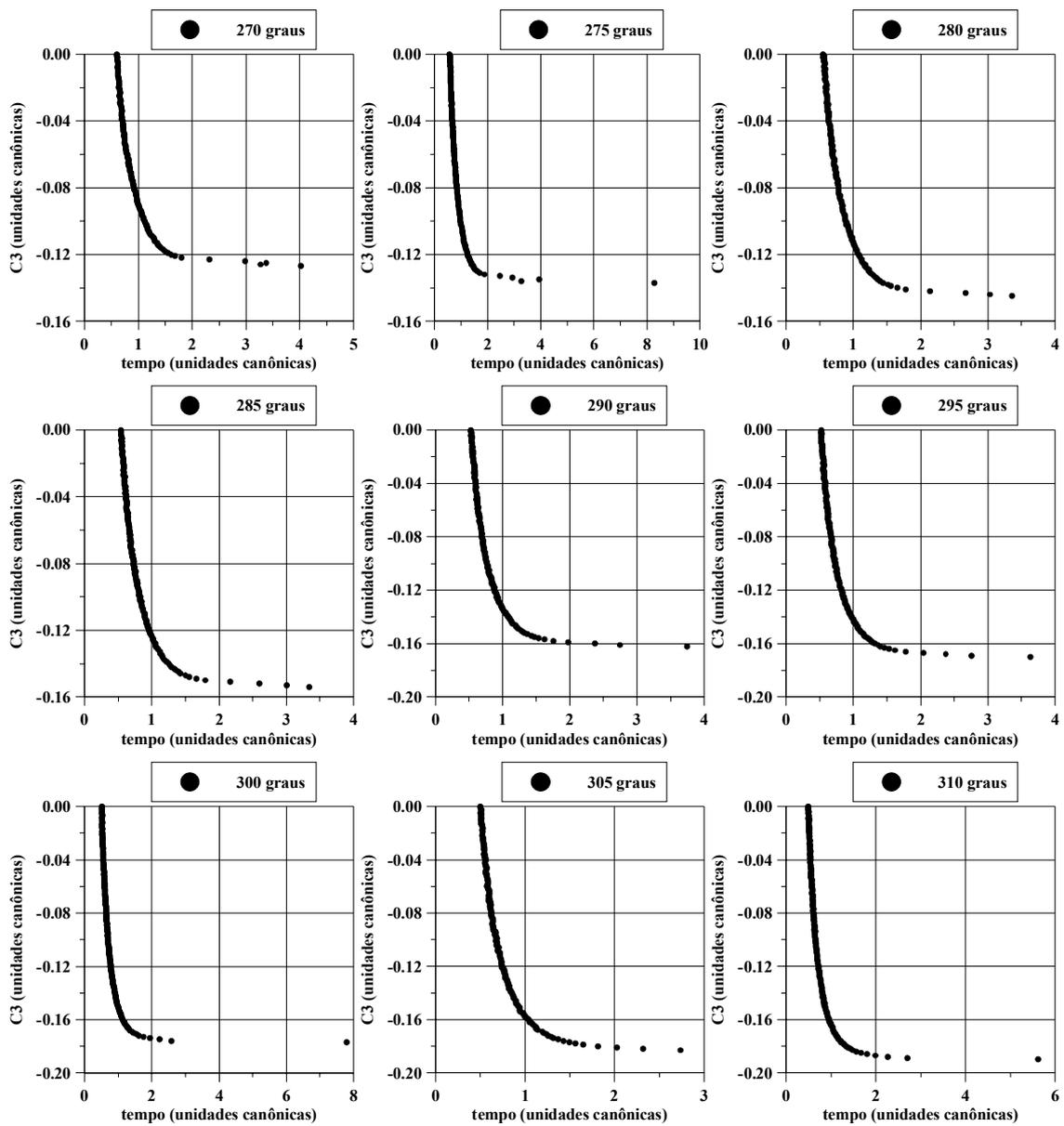


Fig. 7.3 – Tempo de captura vs. C3. (Continuação). (Continua).

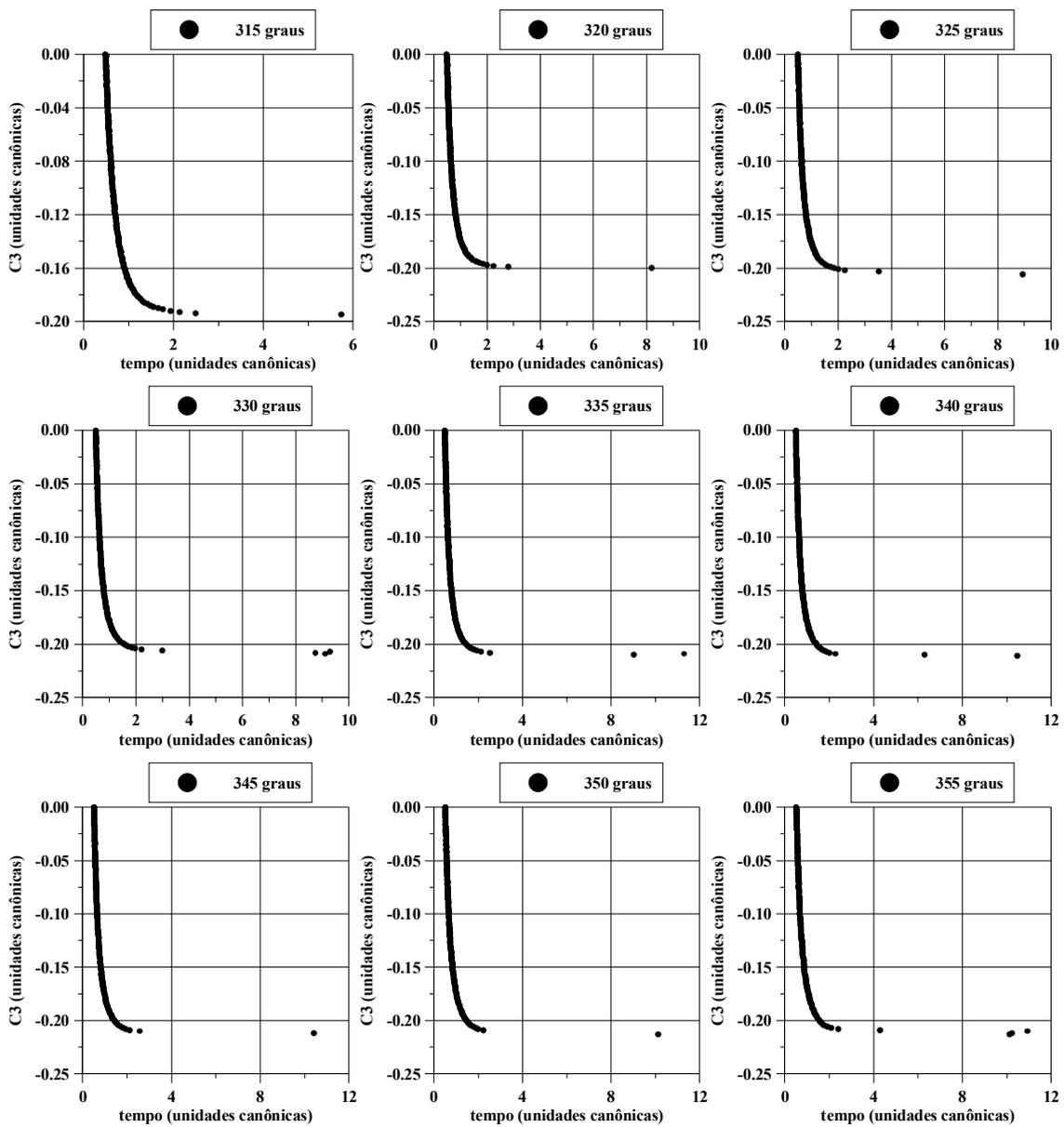


Fig. 7.3 – Tempo de captura vs. C3. (Conclusão).

Analisando esses gráficos é possível chegar a algumas conclusões. Entre 0° e 20° não ocorre nenhuma surpresa. À medida que a energia vai diminuindo, o tempo de captura vai aumentando. Para o ângulo de 25° , de $C3 = -0.077$ a $C3 = -0.078$ unidades canônicas, ocorre um aumento abrupto do tempo, que passa de aproximadamente 1.25 unidades canônicas para 2.45 unidades canônicas. Fenômenos parecidos como este também ocorrem para os ângulos de 30° , 35° , 215° e 225° . Esta descontinuidade ocorre porque uma

pequena diminuição da energia $C3$ (que representa uma diminuição na magnitude da velocidade inicial) faz com que a trajetória não alcance a esfera de influência gravitacional da Lua num ponto próximo ao ponto atingido pela da trajetória anterior. Esse encontro ocorre em um outro ponto da esfera de influência, muito distante do ponto de encontro da trajetória anterior. Esse fato gera o comportamento descontínuo observado na Figura anterior. A Figura 7.4 mostra as trajetórias com $C3 = -0.077$ e $C3 = -0.078$ no sistema de coordenadas girante. O primeiro gráfico mostra as duas trajetórias completa e o segundo faz uma ampliação da região em que a trajetória correspondente a $C3 = -0.077$ alcança a esfera de influência. As duas trajetórias seguem caminhos idênticos até próximo da esfera de influência, quando a trajetória com $C3 = -0.077$ toca a esfera, enquanto a outra segue seu caminho.

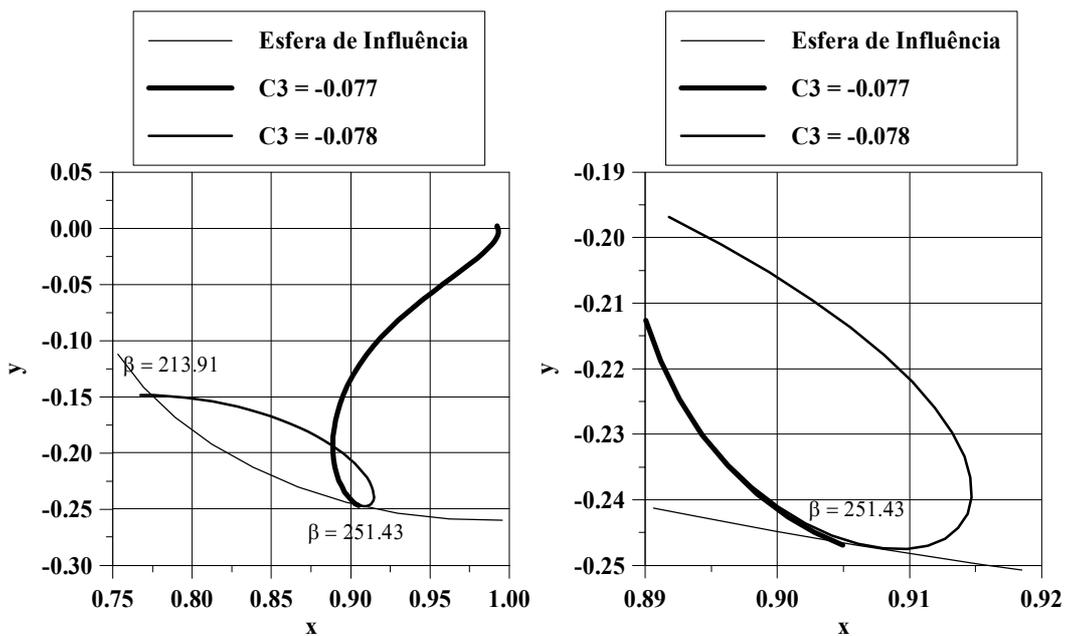


Fig. 7.4 – Trajetórias que provocam a descontinuidade do ângulo $\alpha = 25^\circ$ da Figura 7.3.

De modo geral, o comportamento do tempo em relação a energia segue um princípio lógico. Quanto menor o nível de energia, maior o tempo gasto para a captura. No entanto, como foi mostrado no parágrafo acima, existem algumas regiões que não seguem esta lei devido ao atraso para escapar da esfera de influência.

Uma outra descontinuidade analisada é a do caso do ângulo $\alpha = 30^\circ$. Entre $C3 = -0.069$ e $C3 = -0.073$ ocorre um aumento e uma diminuição do tempo. A Tabela 7.1 mostra os valores de $C3$ iniciais, o tempo gasto em cada trajetória e o ângulos que elas tocam na esfera de influência. E a Figura 7.5 mostra todas as trajetórias e os pontos em que elas tocam a esfera de influência.

TABELA 7.1 – DESCONTINUIDADE DO ÂNGULO DE 30°

C3	Tempo	β
-0.069	3.1859	87.4
-0.070	4.9971	215.3
-0.071	5.1339	204.0
-0.072	4.2472	214.9
-0.073	3.3757	148.6

Mais uma vez fica claro que a diminuição de $C3$, que representa uma diminuição da velocidade inicial, faz com que os desvios próximos da esfera de influência que mudam o seu local de saída, provoque um aumento substancial de tempo.

7.2.3. Tempo de Captura em Função da Periluna

Para o estudo da periluna, a energia de dois corpos e o ângulo da posição da periluna foram mantidos fixos. Foram escolhidos dois valores para $C3$: -0.05 e -0.10 unidades canônicas, pois estes números representam valores intermediários da faixa existente. E quatro valores para o ângulo α : 0° , 90° , 180° e 270° .

A Figura 7.6 apresenta os resultados obtidos. Inicialmente é possível classificar os gráficos em dois grupos: o grupo das trajetórias que terminam na linha Terra-Lua ($\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 180^\circ$), caracterizado pelo aumento do tempo de captura com a distância r_p até em torno dos 20000 km da Lua e a diminuição desse tempo depois dessa distância crítica; e o grupo das trajetórias que terminam na linha perpendicular à linha Terra-Lua ($\alpha = 90^\circ$

e $\alpha = 270^\circ$), caracterizado por uma reversão dessa característica, ou seja, o tempo de captura diminui com a distância r_p até cerca de 10000 km para $C3 = -0.05$ e até cerca de 15000 km para $C3 = -0.10$ e a partir daí esse tempo aumenta com o aumento da distância r_p .

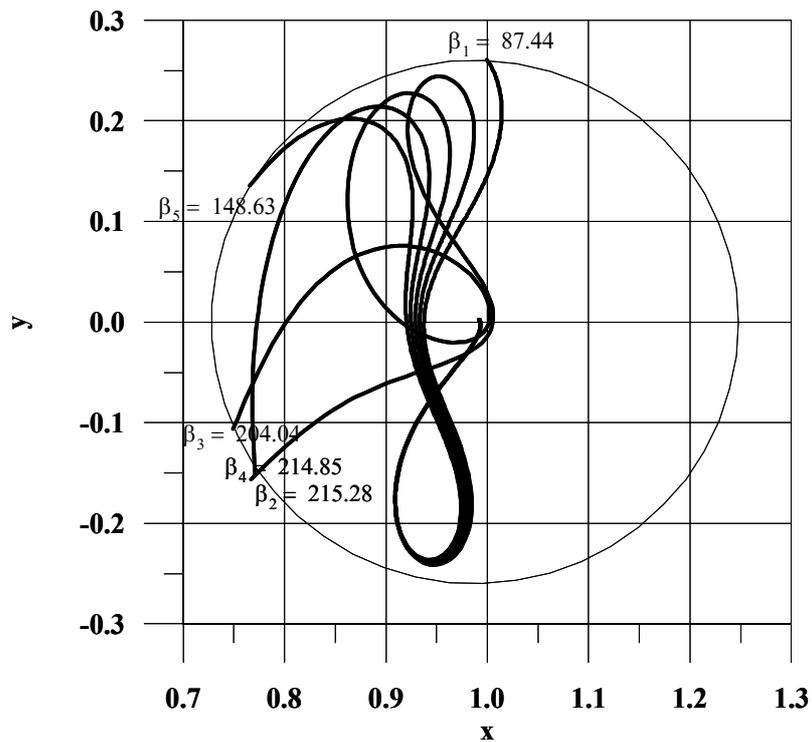


Fig. 7.5 – Descontinuidades do ângulo 30° .

O primeiro grupo, com α igual a 0° e 180° , tem dois comportamentos. Primeiro quando a energia de dois corpos está mais alta ($C3 = -0.05$ unidades canônicas), ou seja, a velocidade transversal em relação a Lua está mais alta, o tempo de captura inicialmente vai aumentando com a distância da periluna. Depois existe uma região de comportamento aleatório, onde inclusive não existem capturas. E finalmente os tempos de captura voltam a diminuir.

Quando a energia de dois corpos está mais baixa ($C3 = -0.10$ unidades canônicas), o tempo de captura aumenta junto com a periluna até por volta dos 30000 km da Lua. Depois o tempo de captura diminui e volta a aumentar por volta dos 40000 km da Lua.

Quatro trajetórias foram escolhidas para estudar o comportamento de r_p em relação ao tempo de captura. Todas pertencem ao gráfico com $C3 = -0.05$ e $\alpha = 180^\circ$. A trajetória t1 tem $r_p = 10038$ km, t2 tem $r_p = 24038$ km, t3 tem $r_p = 39038$ km e t4 tem 42038 km. Estas trajetórias estão apresentadas na Figura 7.7. A circunferência da Figura representa a esfera de influência da Lua. Na Figura é possível ver que as primeiras trajetórias, como a t1, saem rapidamente da esfera de influência até que em um certo momento aparece um cúspide, como em t2. Estes cúspides ocorrem quando a velocidade total no sistema de referências girante se anula (Yamakawa, 1992). Com a velocidade diminuída o veículo espacial é atraído para a Lua e devido a perturbações gravitacionais ele escapa da esfera de influência. Devido a esse processo o tempo de captura aumenta.

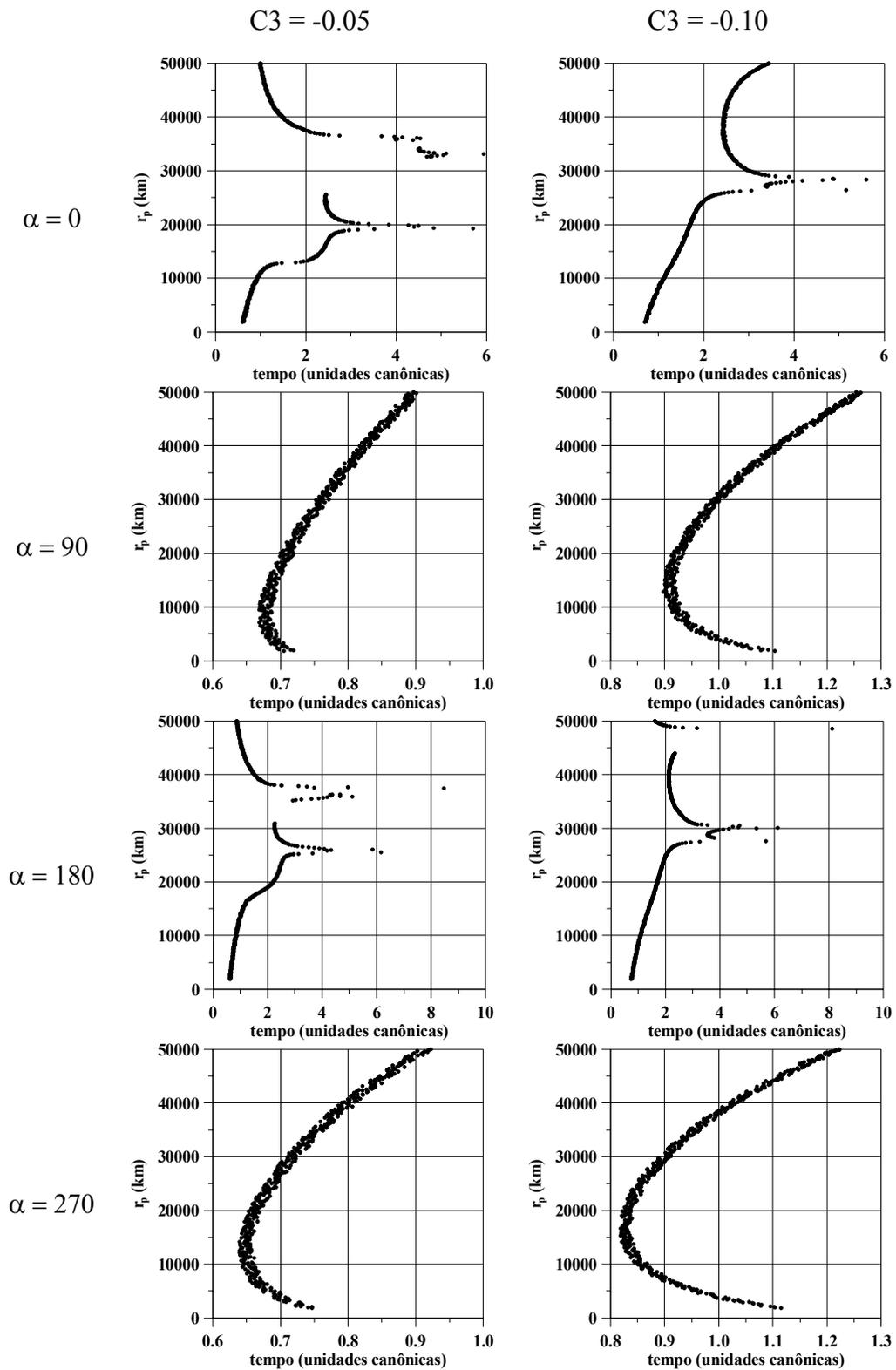


Fig. 7.6 – Periluna em função do tempo de captura.

Terminada essa fase, como pode ser visto pela trajetória t3, o tempo de captura diminui. E à medida que o valor de r_p vai aumentando, as trajetórias vão saindo da esfera de influência com menor tempo, como é representado pela trajetória t4.

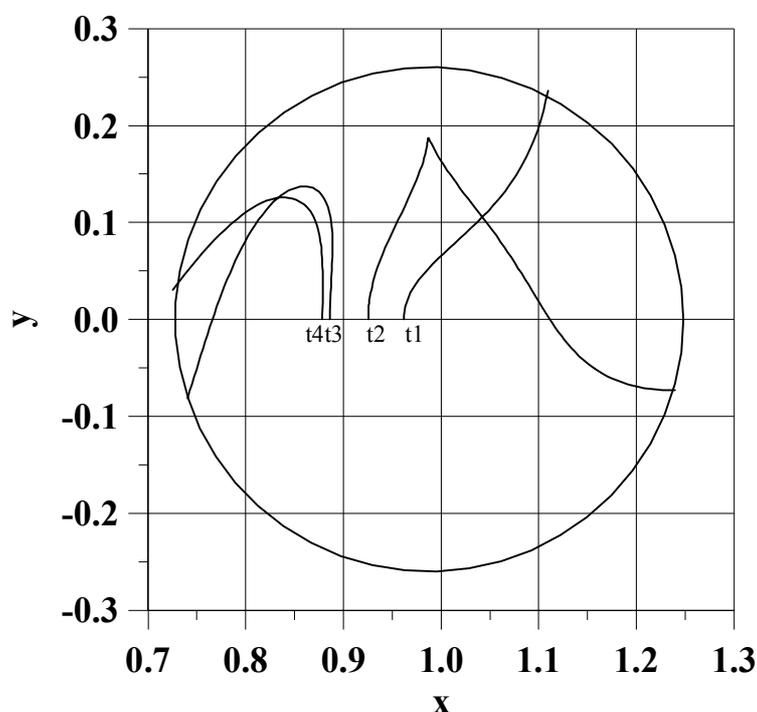


Fig. 7.7 – Trajetórias com $C3 = -0.05$ e $\alpha = 180^\circ$.

O segundo grupo de trajetórias, com $\alpha = 90^\circ$ e 270° , tem uma característica muito interessante. O tempo de captura tende a diminuir com o aumento da periluna até por volta dos 10000 km da Lua. Esse comportamento é muito importante porque, como foi visto nas duas Seções anteriores onde a periluna estava fixa em 100 km da superfície da Lua, os piores desempenhos do tempo de captura ocorriam perto dessa região. O efeito de espalhamento dos pontos em relação ao tempo de captura nesse grupo de trajetórias também ocorre no primeiro grupo. Esse efeito não é visível no primeiro grupo devido a escala de tempo utilizada.

Para esse caso foram escolhidas cinco trajetórias para o estudo do comportamento de r_p em função do tempo de captura do conjunto de trajetórias do gráfico em que $C3 = -0.05$ e $\alpha = 270^\circ$. A Figura 7.8 apresenta estas trajetórias. Estas cinco trajetórias dão uma boa

idéia do que está acontecendo com o tempo de captura. A trajetória t1 tem $r_p = 3038$ km, t2 tem $r_p = 8038$ km, t3 tem $r_p = 12038$ km, t4 tem $r_p = 28438$ km e t5 tem $r_p = 45038$ km. Dessas trajetórias, t3 tem o menor tempo de captura com o valor de 0.6395 unidades canônicas e as trajetórias t1 e t4 possuem praticamente mesmo tempo de escape, com 0.7050 e 0.7049 unidades canônicas respectivamente. As primeiras trajetórias não saem tão rapidamente da esfera de influência porque a gravidade da Lua dificulta esse processo, como pode ser visto na trajetória t1 que curva a sua trajetória na direção da Lua. No lado oposto com $\alpha = 90^\circ$ ocorre o mesmo para trajetórias com $C3 = -0.05$ e mesmo valor de r_p .

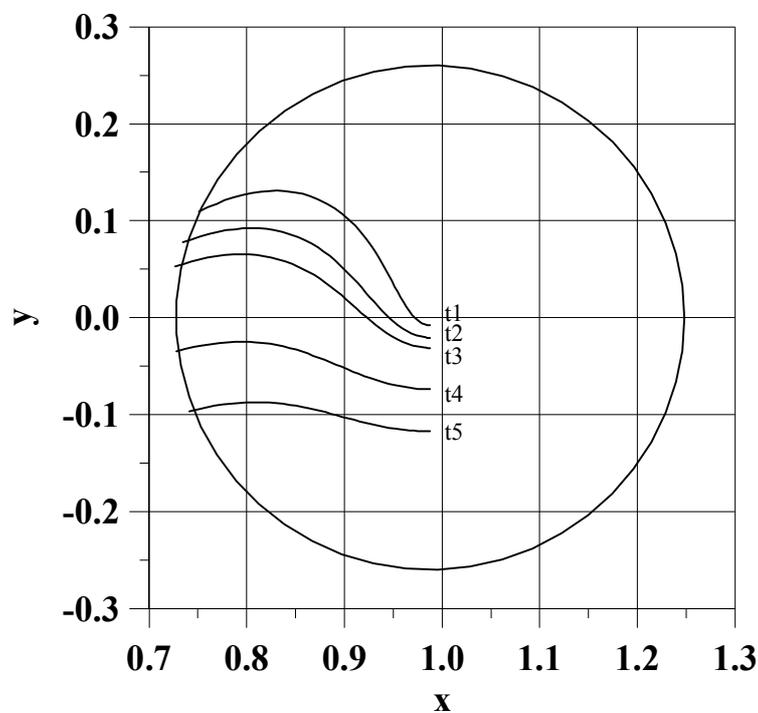


Fig. 7.8 – Trajetórias com $C3 = -0.05$ e $\alpha = 270^\circ$.

À medida que a altura da periluna vai aumentando, a influência gravitacional da Lua vai diminuindo, possibilitando escapes com menores tempos de captura. O tempo de captura volta a aumentar depois de t3 porque com o aumento de r_p , mantendo constante o valor de $C3$, a velocidade inicial diminui fazendo com que o veículo espacial necessite de um maior tempo para alcançar a esfera de influência.

Outra observação que tem que ser feita é que o comportamento do tempo de captura para as perilunas de 100 km e 1000 km da superfície da Lua não se diferenciam muito.

A Figura 7.9 apresenta o resultado de um estudo similar ao da Seção 7.2.1, onde foi fixado $C3$ em -0.1 unidades canônicas e variado α de 0° a 360° , para diversos valores para a distância da periluna. As perilunas de 100 km e de 1000 km tem comportamento muito similares. Enquanto que as demais perilunas, apesar de se parecerem na forma, apresentam um deslocamento das regiões de captura, ou seja, os maiores tempos ocorrem por volta do ângulo de 60° e 240° nos dois primeiros gráficos, mas começam a ocorrer antes desses ângulos nas Figuras subseqüentes. Este comportamento está em acordo com o que foi explicado no Capítulo 5 sobre o comportamento da força resultante das forças gravitacionais da Terra e centrípeta na direção transversal. Esta resultante tende a diminuir a velocidade transversal no primeiro e terceiro quadrantes, como pode ser visto na Figura 5.8, e lembrando que as velocidades iniciais dessas trajetórias só possuem a componente transversal. Fica demonstrado, na Figura 5.8, que a força resultante tem maior influência nos ângulos de 60° e 240° quando a periluna está mais baixa e se movem para mais de 60° e para menos de 240° quando a periluna é elevada. Este efeito de deslocamento é muito mais evidente para o caso do terceiro quadrante onde a intensidade negativa resultante é maior. Na Figura 7.9 este efeito pode ser comprovado, o deslocamento dos tempos de captura próximos do ângulo de 240° é muito mais visível do que o deslocamento próximo do ângulo de 60° .

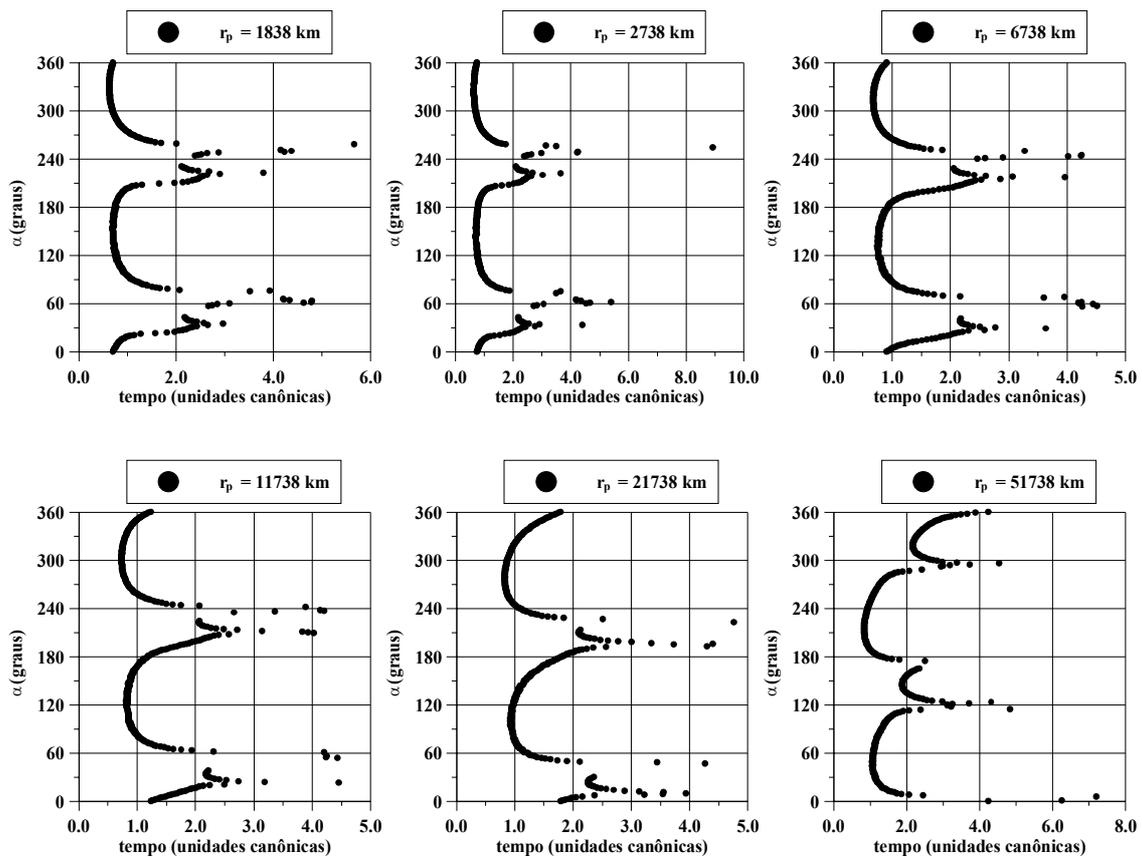


Fig. 7.9 – Efeito de r_p para $C3 = -0.1$ unidades canônicas.

Nestes estudos sobre a influência da distância da periluna também é possível concluir que não existem muitas diferenças em relação ao tempo de captura quando a periluna está entre 100 km e 1000 km. Este resultado é bem interessante, porque dá uma ampla possibilidade da escolha da distância da periluna, favorecendo muitos tipos de missões.

Sobre as perilunas de 50000 km têm que ser ressaltado que a esta distância da Lua a força gravitacional é menor, e por isso, bastante instável. Este ponto para a periluna foi escolhido somente para generalização do estudo, não tendo muito significado prático.

De forma geral, o comportamento do tempo de captura em relação ao ângulo da posição da periluna matem a mesma propriedade da Seção 7.2.1. Ou seja, existem posições da periluna que são mais privilegiadas do que outras, onde o tempo de captura gravitacional é menor. As razões deste fato são as mesmas já explicadas na referida Seção.

7.2.4. Tempo de Captura em Função do Parâmetro Gravitacional

Como o parâmetro gravitacional é uma constante do sistema, este estudo é puramente hipotético. Para a experiência foram considerados somente valores adimensionais. Ou seja, a distância entre os dois primários é igual a unidade e o período de rotação é de 2π . A esfera de influência foi mantida em um valor fixo igual, em valores adimensionais, ao do sistema Terra-Lua. A distância da periluna tem o valor de 0.004781477 (baseado no sistema Terra-Lua, que equivale a uma periluna de 100 km). Também foi mantido o tempo limite para o escape de 12 unidades canônicas. A variação de μ foi no intervalo $0.01 \leq \mu \leq 0.5$.

A Figura 7.10 apresenta os resultados para alguns ângulos selecionados. De forma geral não há desvios do comportamento do tempo de captura em relação ao parâmetro gravitacional, quanto maior o parâmetro, menor o tempo de captura. Isto deve ao equilíbrio dos campos gravitacionais dos dois primários, à medida que o parâmetro gravitacional cresce, as massas dos dois primários se equiparam. E isso faz com que o efeito da perturbação gravitacional, que é a razão física da captura gravitacional, seja maior.

A validade deste experimento está no poder de generalização. Na Figura 7.10 fica demonstrado, devido a igualdade de comportamento, indiferente do ângulo da posição da periluna, que o efeito de captura gravitacional é válido para todos os sistemas de primários. O tempo de captura é menor para os sistemas que possuem uma maior equivalência entre as suas massas.

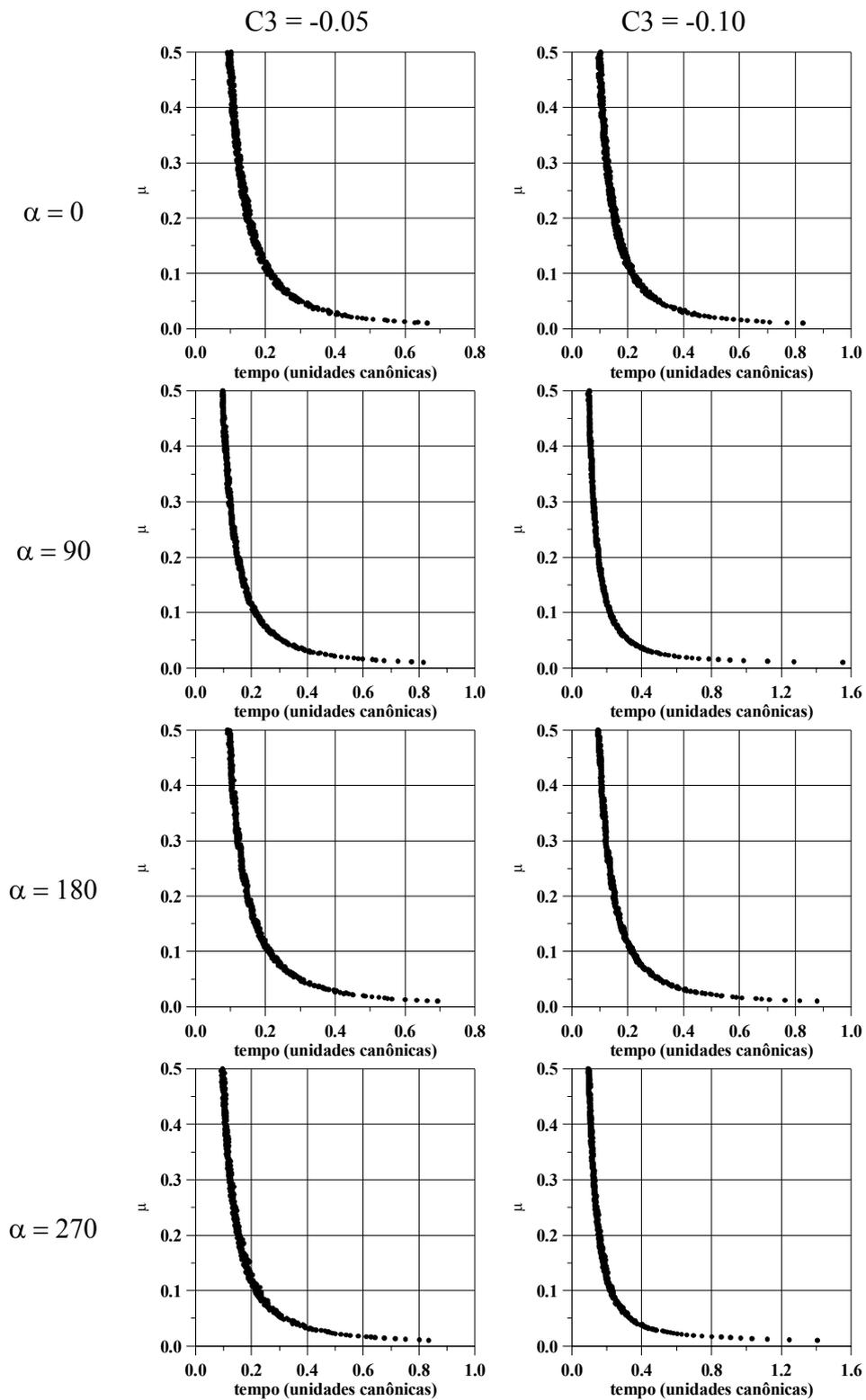


Fig. 7.10 – μ em função do tempo de captura.

7.3. Problemas de Otimização

Muitas famílias de problemas de otimização podem ser estudadas e resolvidas usando os resultados apresentados nesta pesquisa. Para exemplificar, vamos estudar duas famílias desses problemas, que serão apresentados nos parágrafos seguintes. Para essa tarefa será construída a Tabela 7.2. Esta Tabela apresenta o menor tempo de captura para cada nível de energia do sistema Terra-Lua com um r_p fixo em 1838 km (uma periluna de 100 km da superfície da Lua). Nessa Tabela os valores do tempo estão em valores absolutos e em unidades canônicas. A Tabela também apresenta os valores do ângulo da posição da periluna em que ocorre o menor tempo e os ganhos na variação da velocidade (ΔV) obtidos da transformação da trajetória de captura gravitacional em uma órbita circular em torno da Lua.

TABELA 7.2 – ECONOMIAS PARA OS VALORES DE TEMPOS MÍNIMOS (EM UNIDADES CANÔNICAS)

C3	α	Tempo	Ganhos em ΔV
0	309	0.49	0.00000
-0.01	310	0.5	0.00222
-0.02	311	0.51	0.00444
-0.03	312	0.52	0.00667
-0.04	315	0.53	0.00890
-0.05	319	0.54	0.01113
-0.06	314	0.56	0.01336
-0.07	320	0.57	0.01559
-0.08	318	0.59	0.01783
-0.09	318	0.61	0.02007
-0.1	319	0.63	0.02231
-0.11	322	0.65	0.02455
-0.12	321	0.68	0.02680
-0.13	323	0.71	0.02905
-0.14	327	0.74	0.03130
-0.15	331	0.78	0.03355
-0.16	328	0.84	0.03580
-0.17	329	0.91	0.03806
-0.18	333	1	0.04032
-0.19	337	1.14	0.04258
-0.2	340	1.41	0.04484
-0.21	345	3.32	0.04711

Problema 1: Suponha que seja necessário encontrar uma trajetória que termina numa

captura gravitacional em um dado sistema binário cujo valor de r_p tenha que ser fixo. Assuma que o valor da constante gravitacional seja de $\mu = 0.0121506683$ (o sistema Terra-Lua) e $r_p = 0.004781477$ (que representa uma altura de 100 km acima da superfície da Lua). O desejado nesse problema é que esta trajetória use a menor quantidade de tempo possível, mas mantendo um valor fixo de $C3 = -0.14$ (economia fixa). A Tabela 7.2 pode ser usada para resolver este problema e encontrar o tempo de captura de 0.74 unidades canônicas em $\alpha = 327^\circ$. É mostrado também que o ganho na variação de velocidade necessária para transformar a trajetória de captura gravitacional temporária em órbita circular em torno da Lua é de 0.031296 unidades canônicas. A Figura 7.11 mostra a trajetória do veículo espacial visto do sistema de referência girante. Este tipo de problema pode ser resolvido para diversos valores de μ , r_p , $C3$, etc. Situações semelhantes com um maior número de graus de liberdade (por exemplo, com um valor livre para r_p), também podem ser resolvidas usando a mesma técnica.

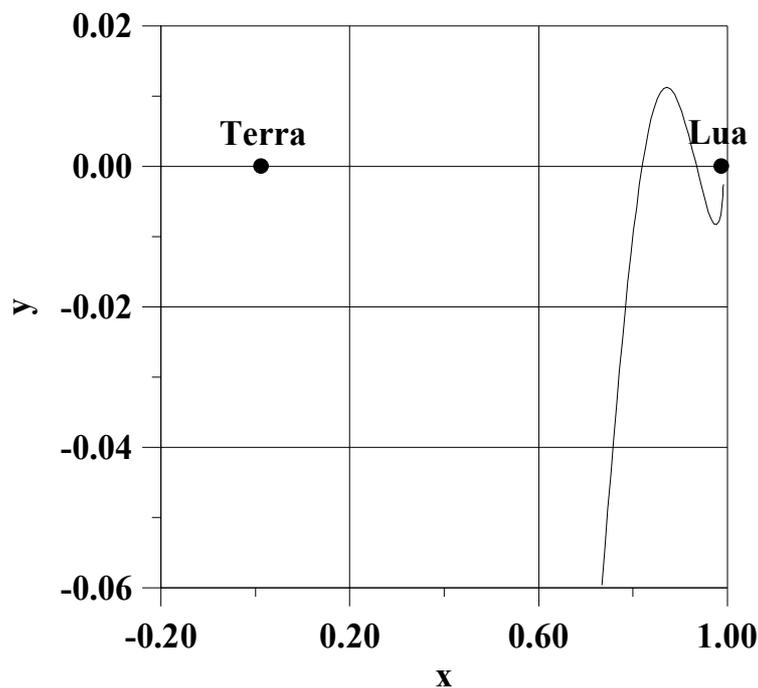


Fig. 7.11 – Trajetória que resolve o problema 1.

Problema 2: Outra variante de problema de otimização que pode ser resolvido com os dados mostrados neste trabalho é o problema de procurar por uma trajetória que permite

o máximo de economia de combustível sujeito a um vínculo de desigualdade no tempo (tempo de captura menor do que um limite especificado). A Tabela 7.2 também pode ajudar a resolver este problema. Conhecendo o limite de tempo então é só escolher um dos valores de $C3$ que se ajustam ao problema. Supondo que o mesmo sistema binário e r_p do problema anterior estejam sendo usados, e que o limite no tempo seja de 0.8 unidades canônicas. Então a economia de combustível máxima que pode ser conseguida é a que utiliza $C3 = -0.15$. Na Tabela 7.2 vê-se que o valor de α associado é de 331° . A Figura 7.18 mostra a trajetória obtida.

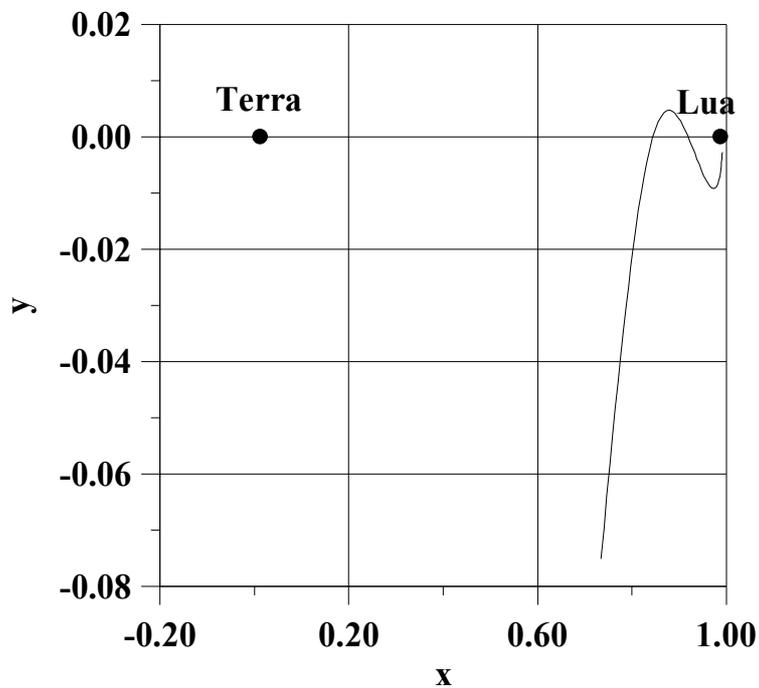


Fig. 7.12 – Trajetória que resolve o problema 2.

7.4. Considerações finais

Estes primeiros estudos sobre o comportamento do tempo de captura são as bases para o estudo de otimização. Até recentemente só existiam algumas informações sobre o comportamento de $C3$, a energia de dois corpos, no problema de captura gravitacional (Yamakawa, 1992). Juntam-se a esses conhecimentos agora estes estudos sobre o comportamento do tempo de captura. Estes dois fatores são imprescindíveis para que se consiga

encontrar melhores economias de combustíveis associados a tempos razoáveis para o transporte (ou viagens).

CAPÍTULO 8

ESTUDO NUMÉRICO DOS EFEITOS DA EXCENTRICIDADE DOS PRIMÁRIOS NO PROBLEMA DE CAPTURA GRAVITACIONAL

8.1. Introdução

Até o momento existem poucos estudos sobre a redução dos custos de transferência orbital utilizando os conceitos da captura gravitacional temporária. Nesses estudos o modelo mais explorado na literatura foi o do problema restrito circular de três corpos. Poucos foram os trabalhos que estudaram o problema restrito elíptico de três corpos.

Bailey (1971a, 1971b, 1972) foi um dos primeiros a estudar o efeito da excentricidade nos mecanismos de captura gravitacional dos satélites de Júpiter e concluiu que esses efeitos eram significativos. Mas Heppenheimer (1975) investigou os resultados de Bailey e concluiu que os efeitos da excentricidade não eram tão importantes quanto Bailey imaginara, podendo ser utilizada a órbita circular entre os dois primários (Sol e Júpiter) para a maioria das situações.

Com o enfoque em astronáutica, o trabalho de Vieira Neto e Prado (1996), que é a principal base do presente Capítulo, é um dos primeiros que aborda essa questão. O problema restrito elíptico de três corpos está mais próximo da realidade do que o problema restrito circular de três corpos por não fazer a hipótese de órbitas perfeitamente circulares para os primários. Por isso é preciso obter maiores informações a respeito dos efeitos da excentricidade sobre a economia de combustível num problema de transferência entre dois corpos que utiliza a captura gravitacional. Neste Capítulo serão feitas algumas comparações entre as duas dinâmicas, com ênfase na investigação da economia de energia que pode ser obtida a partir do modelo elíptico.

8.2. Configuração dos Parâmetros no Problema Elíptico

Nesta nova formulação do problema, as configurações dos parâmetros basicamente seguem a mesma estrutura do problema circular. No entanto, agora existem dois novos

parâmetros que são: a anomalia verdadeira do corpo de menor massa em relação ao corpo de maior massa, que neste trabalho será chamada de γ ; e a excentricidade dos dois primários. A nova configuração está apresentada na Figura 8.1 abaixo.

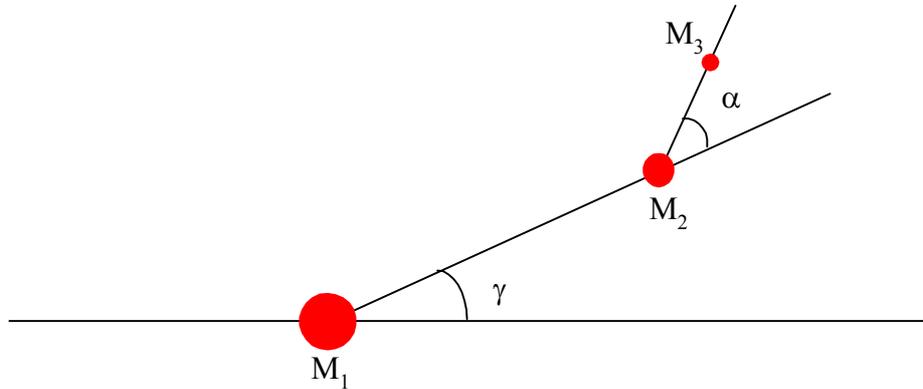


Fig. 8.1 – Configuração dos parâmetros de captura para o problema elíptico de três corpos.

É bom lembrar que neste problema os dois primários (M_1 e M_2) estão em órbitas elípticas em torno do centro de massa do sistema. Isto implica que a distância entre os dois primários varia, dependendo do ângulo γ . Quando $\gamma = 0^\circ$ os dois primários estão na distância mínima, enquanto que para $\gamma = 180^\circ$ os dois primários estão na distância máxima.

8.3. Energia Mínima de Captura

Inicialmente serão estudadas as diferenças entre a energia mínima em que ocorre a captura para o problema circular e para o problema elíptico. Tanto para o problema circular quanto para o problema elíptico, será utilizado o sistema Terra-Lua. Neste sistema a excentricidade dos dois primários tem o valor de 0.0549 (quando for dito que se está usando o modelo circular, a excentricidade do sistema Terra-Lua será assumida como sendo zero). A Figura 8.2 apresenta o comportamento da energia mínima para o problema circular. Na Figura estão sendo usados valores absolutos em unidades canônicas para C3 para a variável radial e o ângulo α para a variável angular. Essa Figura é idêntica a figura 6.1, no entanto, esta Figura foi obtida utilizando a dinâmica do problema restrito elíptico, apresentada no Capítulo 3, fazendo $e = 0$ nas equações de movimento, en-

quanto que a Figura 6.1 foi conseguida utilizando a dinâmica regularizada. Assim sendo, a semelhança entre essas Figuras é uma forma de validação do modelo elíptico aqui desenvolvido. A explicação geral da forma desse gráfico, bem como a justificativa das descontinuidades apresentadas são as mesmas da Figura 6.1.

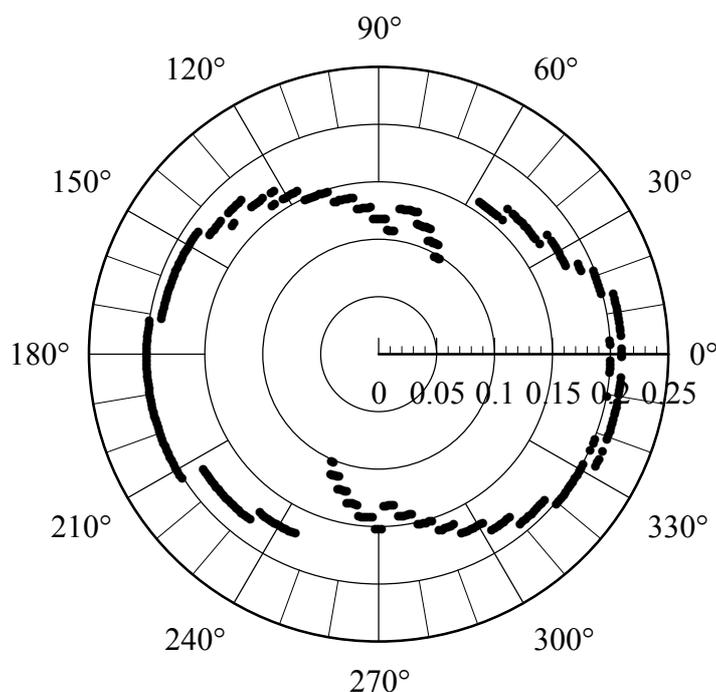


Fig. 8.2 – C3 mínimo do sistema Terra-Lua com dinâmica elíptica no caso $e = 0$.

A Figura 8.2 serve para comparação visual entre as capturas com menores energias utilizando a dinâmica elíptica, apresentadas na Figura 8.3, onde estão os resultados em que a anomalia verdadeira γ foi fixada em 0° , 90° , 180° e 270° . A excentricidade utilizada foi de $e = 0.0549$. Para o caso em que $\gamma = 0^\circ$, ou seja, quando a Lua está no perigeu, quase não existem diferenças entre o circular e o elíptico. Os pontos que se destacam estão entre 10° e 20° e entre 340° e 350° , estes pontos chegam a -0.22 unidades canônicas para C3, enquanto que para o caso circular, nas mesmas regiões, os pontos estão com valores de -0.21 unidades canônicas. Outras regiões de interesse estão em alguns pontos no intervalo de 70° a 80° para α . Estes pontos têm o valor de -0.09 , que é um número maior do que os encontrados no caso anterior, que estão na faixa de -0.10 .

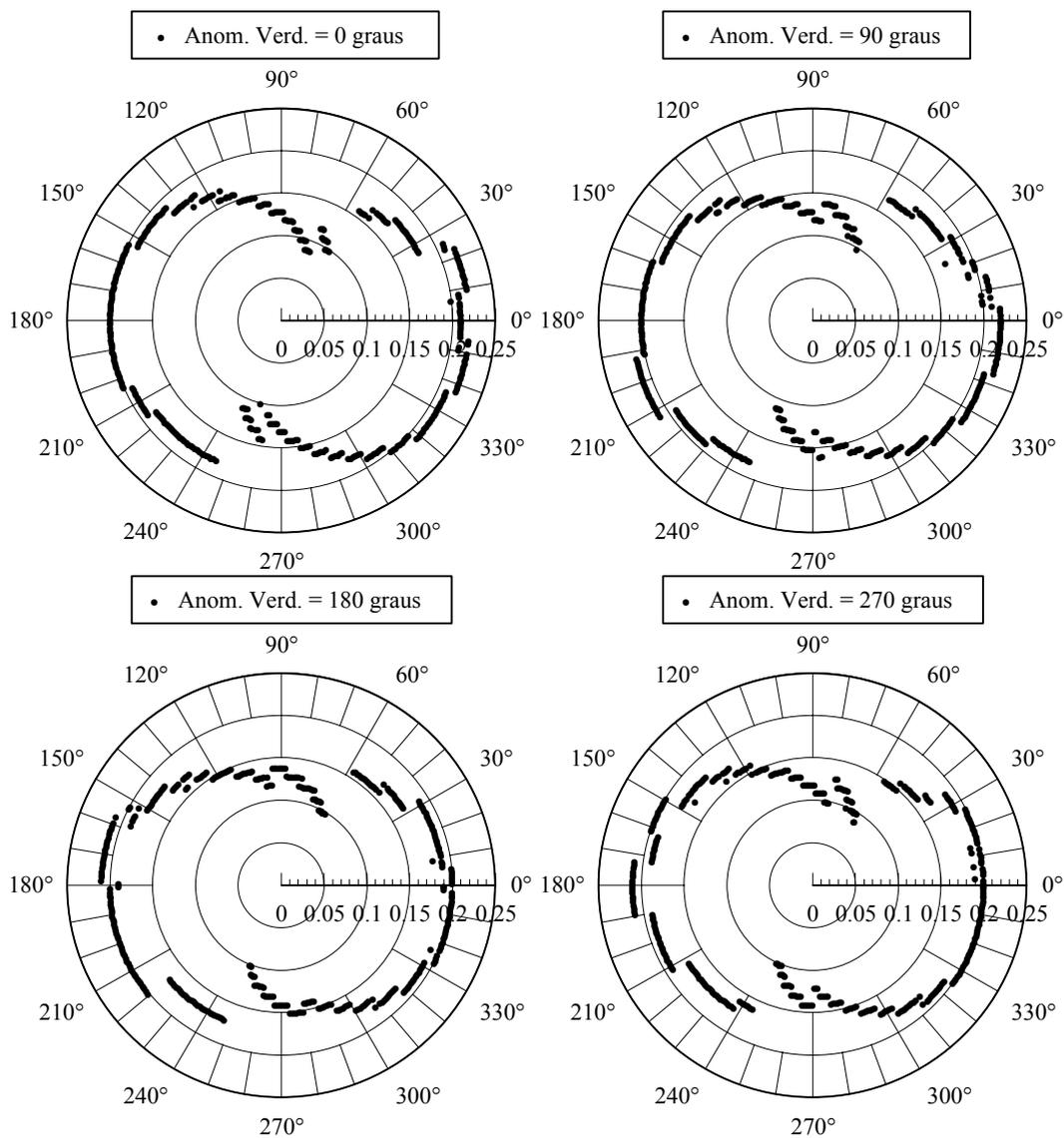


Fig. 8.3 – Valores mínimos de C3 para o sistema Terra-Lua elíptico para quatro posições iniciais de γ .

Os casos em que $\gamma = 90^\circ, 180^\circ$ e 270° são parecidos com $\gamma = 0^\circ$. Para verificar melhor as diferenças entre essas situações os gráficos foram plotados juntos na Figura 8.4 e, devido a escala, agrupados em conjuntos de 60° para o ângulo α . O incremento do ângulo α foi de 1° . O ângulo $\gamma = 180^\circ$, representado pelo triângulo, é o ângulo que apresenta os piores resultados por apresentar menores valores de energia na maioria das situações. Em seguida, o ângulo $\gamma = 270^\circ$, representada pelo losango, apresenta o segundo pior de-

sempenho. O melhor desempenho ocorre quando $\gamma = 0^\circ$, que está representado pelo quadrado. O segundo melhor desempenho ocorre em $\gamma = 90^\circ$.

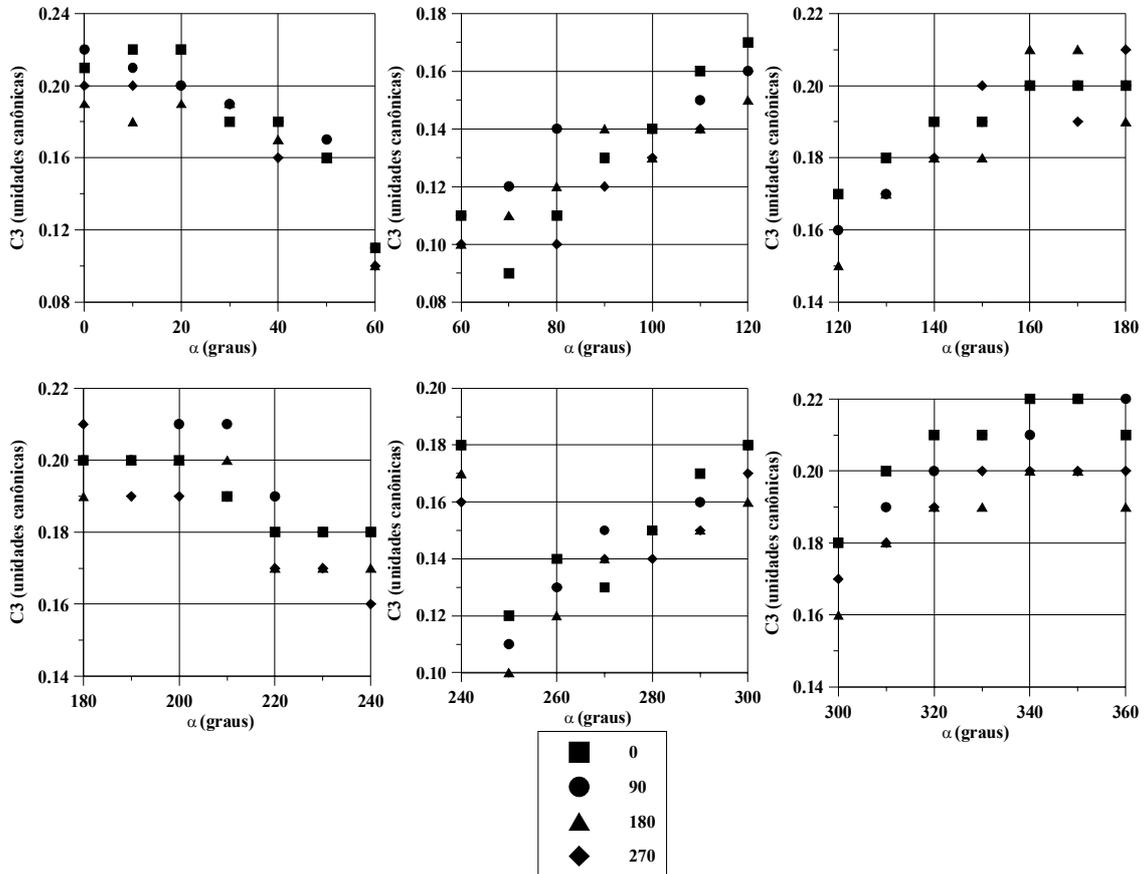


Fig. 8.4 – Comportamento de C_3 em função da anomalia verdadeira dos primários.

O fato do caso excêntrico apresentar pelo menos alguns pontos com energias mais baixas do que o caso circular é um bom resultado. A dinâmica excêntrica se aproxima mais da realidade do que o caso circular e, além do maior realismo, pode-se explorar essa dinâmica para a obtenção de uma economia de energia extra, da ordem 4.76% (de -0.21 para -0.22 unidades canônicas).

Para conhecer melhor o efeito da anomalia verdadeira inicial (ângulo γ) na economia de energia, a Figura 8.5 apresenta o comportamento da energia mínima de captura quando se mantém constante o ângulo α e se varia o ângulo γ .

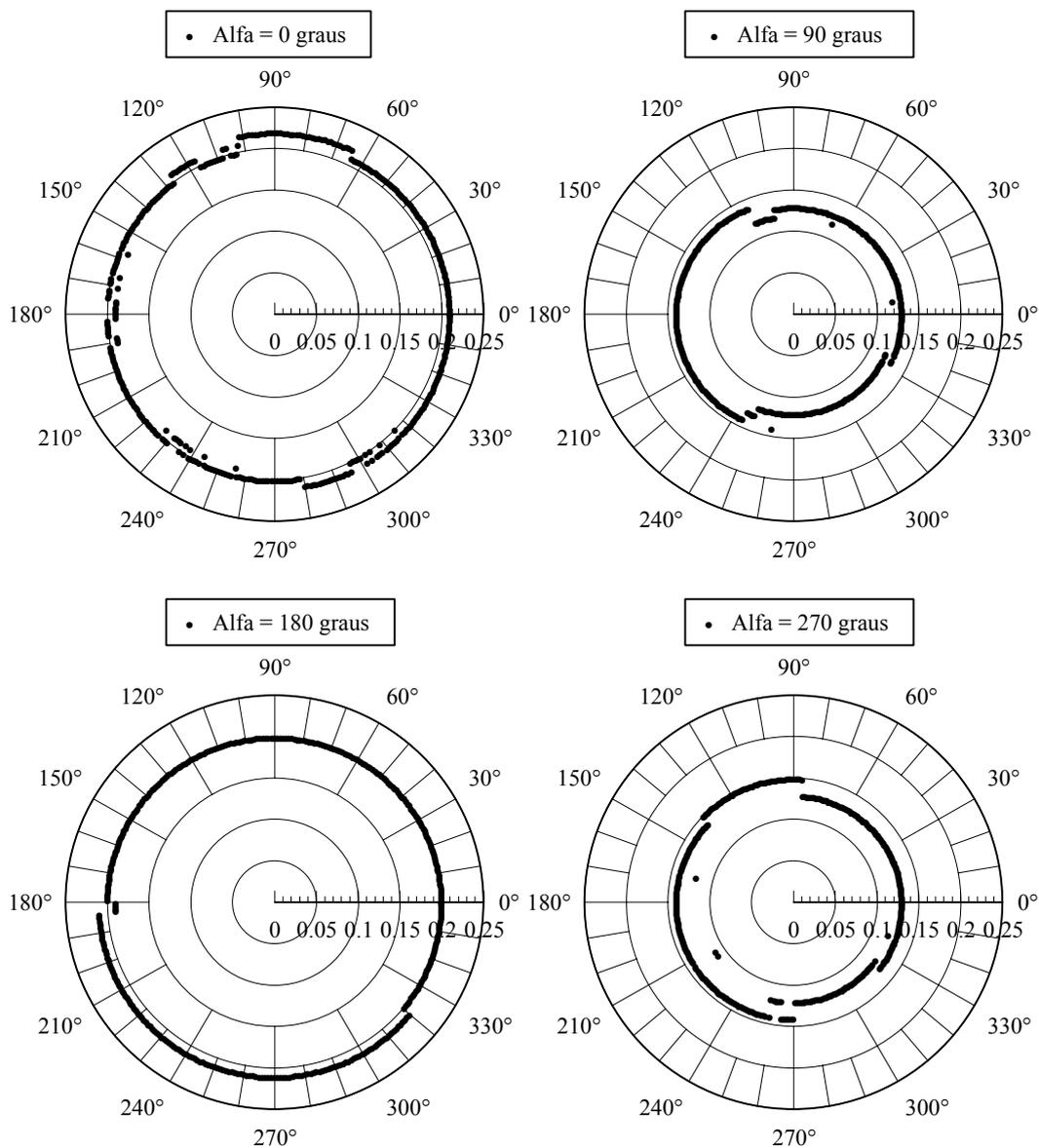


Fig. 8.5 – Comportamento de C3 mínimo vs. γ para α constante.

As Figuras demonstram que as condições em α são mais importantes do que em γ para o valor da excentricidade utilizado. Quando a anomalia verdadeira varia, mantendo constante a posição da periluna α , a energia mínima é quase constante. No caso em que $\alpha = 0^\circ$, ou seja, as condições finais para a periluna estão no lado oposto ao da Terra, os valores de C3 mínimo são os mais baixos. Para $\alpha = 180^\circ$ a energia mínima não alcança níveis de energia tão baixos como as do caso em que $\alpha = 0^\circ$, mas apresenta uma uniformidade e níveis de energia mais baixos do que nos casos em que $\alpha = 90^\circ$ e $\alpha = 270^\circ$.

Em $\alpha = 270^\circ$ existe uma uniformidade maior do que para o caso em que $\alpha = 90^\circ$. Num caso mais realista, já que existem pequenas desvantagem para os casos em que $\gamma \neq 0^\circ$, pode-se pensar em realizar a transferência nos momentos em que $\gamma = 0^\circ$.

A seguir serão estudados alguns sistemas hipotéticos com excentricidades maiores, com o objetivo de verificar melhor os efeitos da excentricidade nesse tipo de problema. Na Figura 8.6 estão apresentados os resultados onde μ é igual a 0.01, e as excentricidades dos primários são de 0, 0.2, 0.4 e 0.8. A anomalia verdadeira assume os valores de 0° , 90° , 180° , 270° para cada valor da excentricidade.

Os resultados numéricos apresentados na Figura 8.6 tem como variável radial a magnitude de C3 em unidades canônicas e a variável angular é o ângulo α . A excentricidade é 0.0 para o primeiro gráfico, 0.2 para o segundo, 0.4 para o terceiro e 0.8 para o quarto. Pode-se verificar em todos os gráficos que os níveis de energia mais baixos aparecem quando o primário de menor massa está na periapse ($\gamma = 0^\circ$) e os piores resultados aparecem quando ele está no apoapse ($\gamma = 180^\circ$). Valores para $\gamma = 90^\circ$ e $\gamma = 270^\circ$ apresentam valores intermediários. Este resultado já era esperado, pois a menor distância entre os primários aumenta o efeito perturbador do terceiro corpo (a causa principal da diminuição da energia de dois corpos). Pode-se concluir também desses gráficos que com o aumento da excentricidade ocorre um aumento nas diferenças entre os níveis de energia das famílias $\gamma = 0^\circ$, 90° , 180° , 270° (estas famílias se tornam mais destacadas umas das outras). Também é possível ver na Figura os efeitos diretos da excentricidade. Observando as regiões dos níveis de energia pode-se concluir que quando a excentricidade cresce, as magnitudes dos níveis de energia também crescem. Olhando para as escalas radiais nota-se que ela vai de 0.2, quando $e = 0$, até 0.8, quando $e = 0.8$. Na Figura 8.6 também é possível verificar que existem diferenças entre os casos em que $e = 0.0$ e $e = 0.2$.

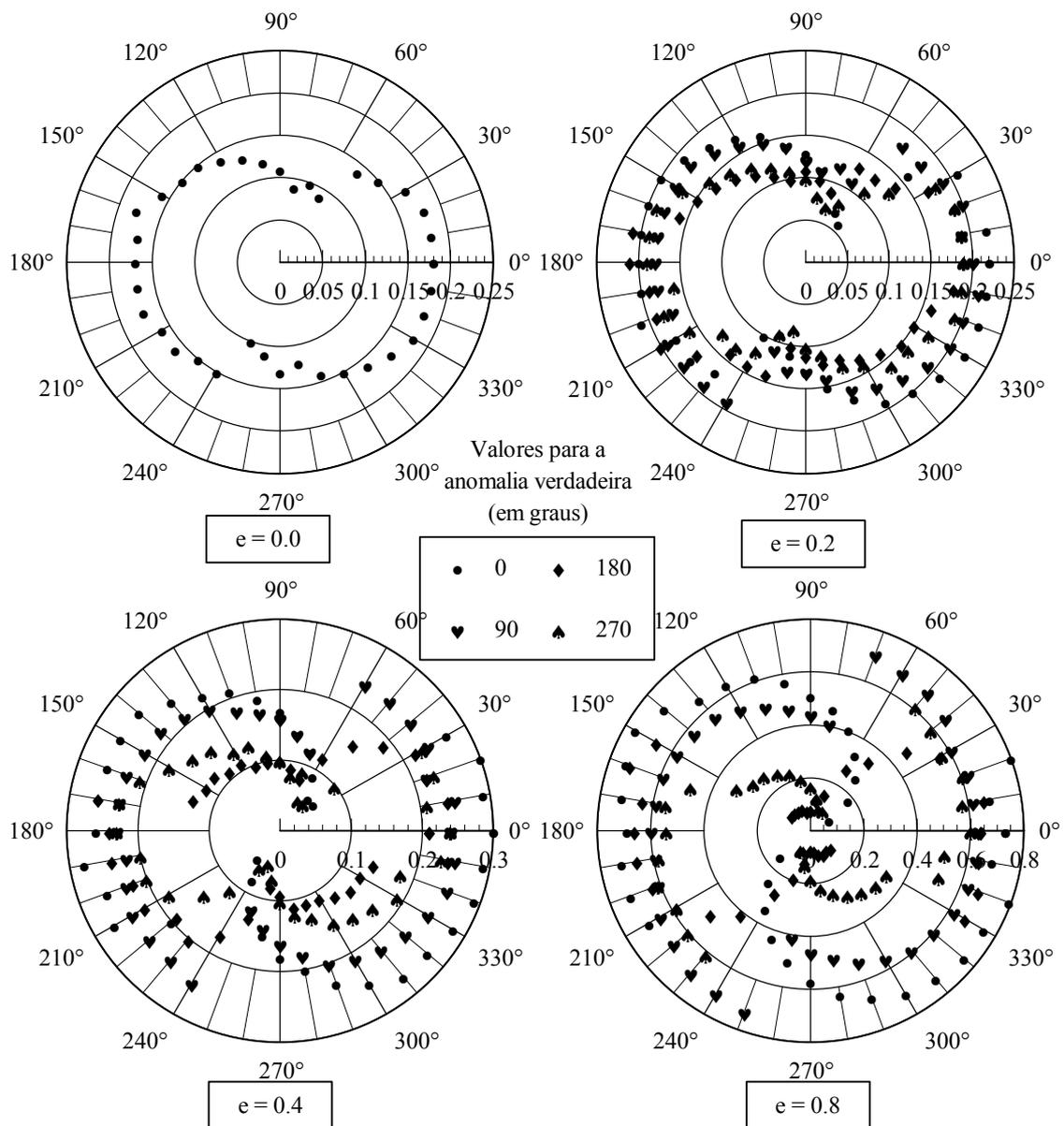


Fig. 8.6 – Comportamento da energia mínima para $\mu = 0.01$ e excentricidades variadas.

Estas Figuras também mostram a importância da escolha do ângulo α . A diferença nas magnitudes de C3 obtidas para diferentes valores deste parâmetro são muito grandes.

8.4. Efeitos da Excentricidade no Tempo Requerido para a Captura

Para a análise do tempo de captura, uma energia de $C3 = -0.14$ foi escolhida e fixada. Dois casos foram estudados: primeiro a excentricidade foi fixada em 0.4 e a anomalia

verdadeira foi variada de 0° a 270° em passos de 90° . Os resultados são mostrados na Figura 8.7. Depois disto, a anomalia verdadeira foi fixada em 0° e a excentricidade foi variada para assumir valores de 0.0, 0.2, 0.4 e 0.8. Os resultados são mostrados na Figura 8.8. Estes sistemas de primários são similares ao do sistema Terra-Lua com excentricidades aumentadas para enfatizar seus efeitos.

A Figura 8.7 mostra os efeitos da anomalia verdadeira no tempo de captura. A variável angular é o ângulo α e a variável radial é o tempo de captura em unidades canônicas. Existem quatro posições para a Lua, $\gamma = 0^\circ$ é a posição mais próxima da Terra e $\gamma = 180^\circ$ é a posição mais distante da Terra. Cada ponto corresponde a uma trajetória.

Os diagramas mostram a existência de duas famílias de trajetórias. Existem grandes variações no tempo requerido para a captura, dependendo do valor inicial do ângulo α . Este fato mostra a importância desse estudo, porque estes valores diferentes de tempo de captura correspondem a um valor fixo de energia, ou seja, não existem perdas na economia para alcançar os menores tempos de captura. O efeito da excentricidade também é muito claro na Figura 8.7. Verificando os gráficos de $\gamma = 0^\circ$ a $\gamma = 90^\circ$, as mudanças nos resultados são pequenas, a maioria das trajetórias apresentam um tempo de captura menor do que duas unidades canônicas de tempo. Verificando a situação onde $\gamma = 180^\circ$, aparecem grandes mudanças no gráfico. Duas novas famílias de trajetórias aparecem e a maioria delas possuem tempos de captura entre duas e quatro unidades canônicas de tempo. A maior distância entre os primários nesta geometria, que reduz a perturbação gravitacional e aumenta o tempo para completar a captura, explica isto. Os resultados para $\gamma = 270^\circ$ mostra o retorno das duas famílias características do problema. Porém, valores maiores para o tempo de captura, quando comparado com $\gamma = 0^\circ$, ainda aparecem e o número de trajetórias que não pertencem a família aumenta.

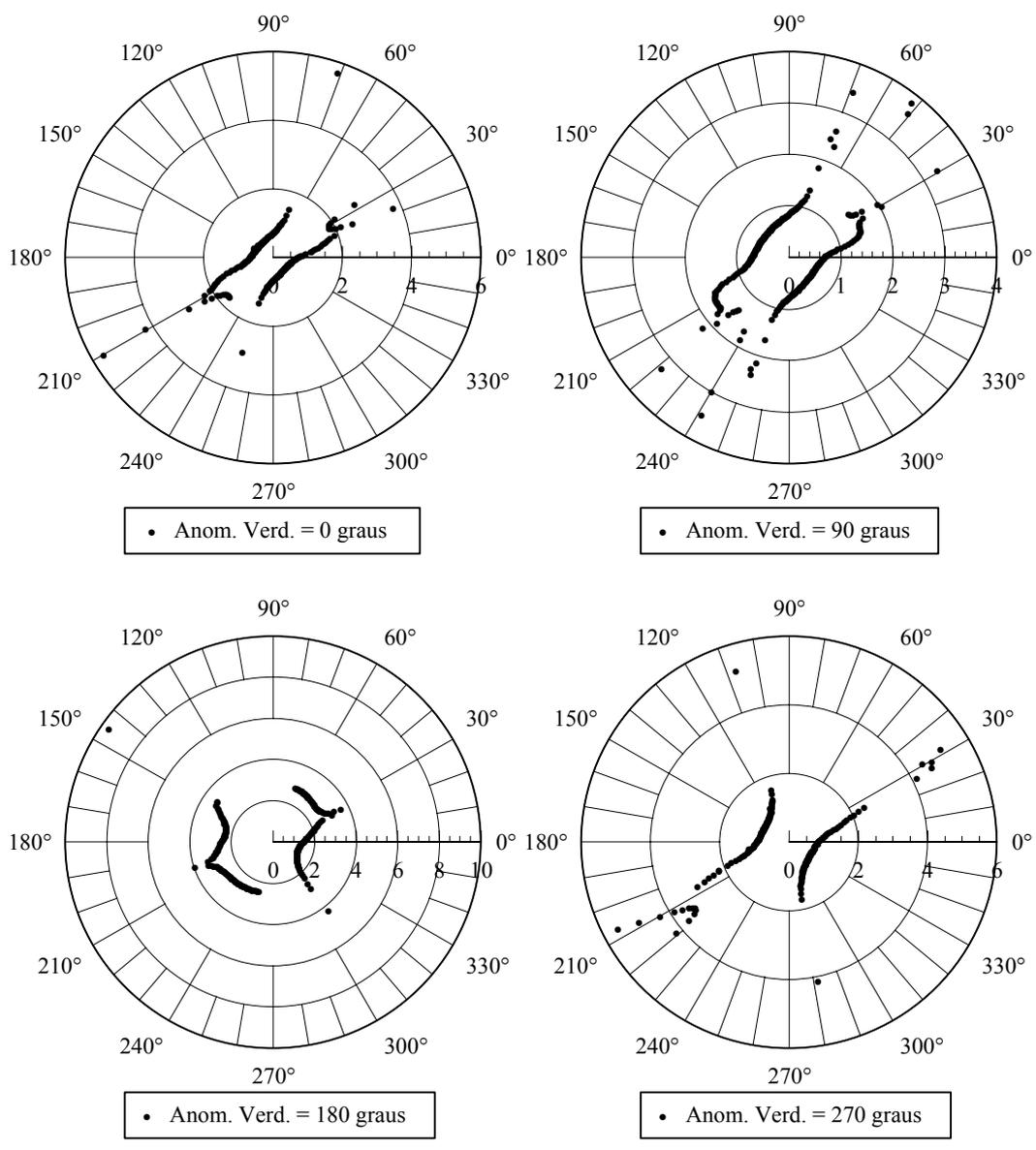


Fig. 8.7 – Tempos de captura para excentricidade de 0.4.

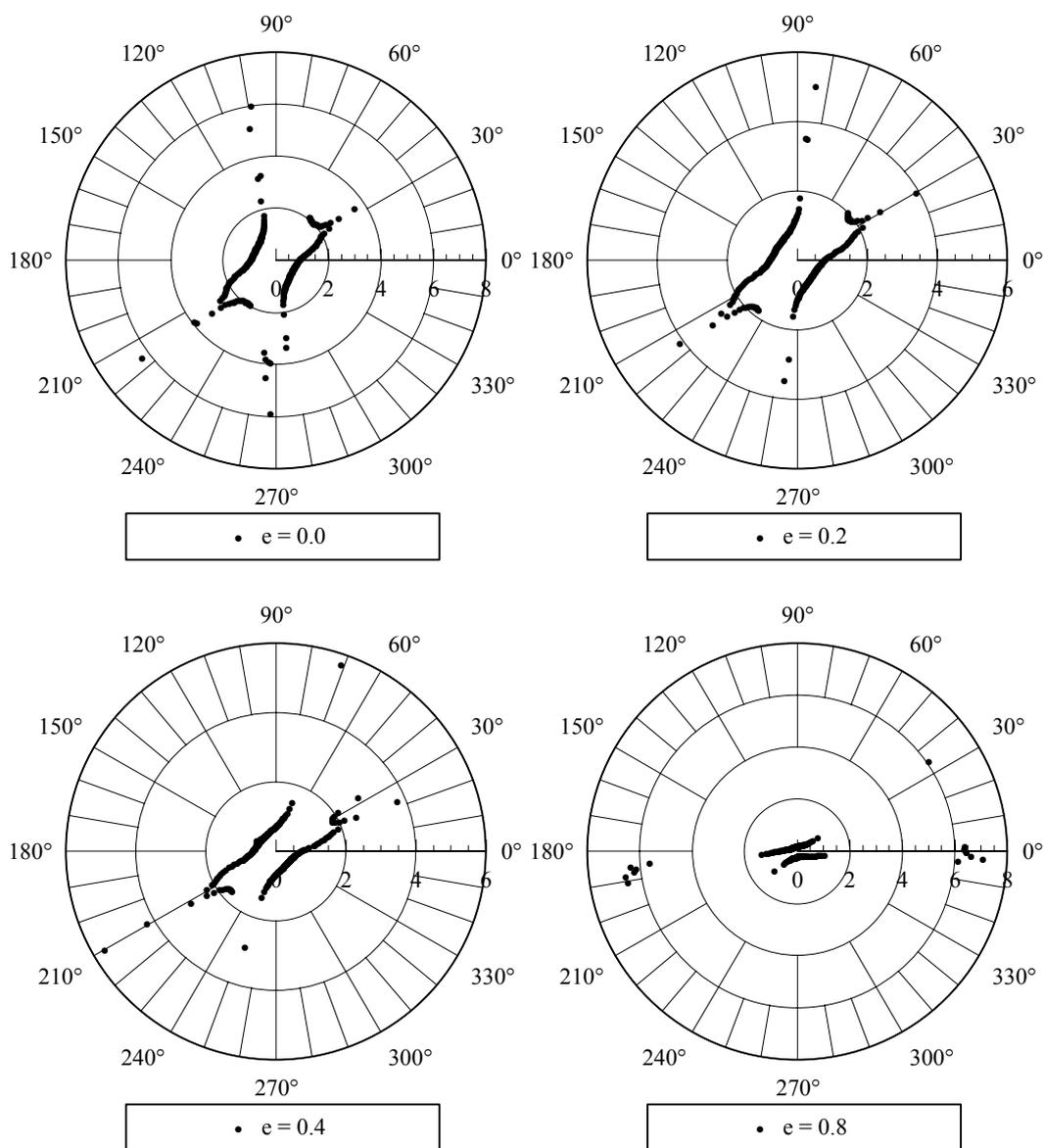


Fig. 8.8 – Tempo de captura para $\gamma = 0^\circ$.

A Figura 8.8 mostra o efeito da excentricidade no tempo de captura quando o valor de $\gamma = 0^\circ$ é fixado e a excentricidade é variada. Novamente a variável angular é o ângulo α e a variável radial é o tempo de captura em unidades canônicas. Nestes gráficos a correspondência de um ponto a uma trajetória ainda continua. A característica do problema de possuir duas famílias de trajetórias ainda é válida, desta vez para todos os gráficos apresentados. Nestes estudos são mostrados que os efeitos do crescimento da excentricidade para um valor fixo da anomalia verdadeira são grandes o bastante para serem mensurá-

veis. Em geral, existe uma tendência de reduzir o tempo de captura com o crescimento da excentricidade. Isto também é explicado pela redução da distância entre os primários, já que a posição estudada é mantida na periapside. Efeitos fortes aparecem para grandes valores da excentricidade (como em $e = 0.8$), onde as duas famílias giram na direção horária ficando quase horizontal. Isto significa que o valor de α que permitem mínimos e máximos tempos de captura mudam significativamente. Estes resultados podem ser usados para resolver problemas práticos de otimização, como explicado na próxima Seção.

8.5. Problemas de Otimização

Muitas famílias de problemas de otimização podem ser resolvidos utilizando os resultados disponíveis nesta pesquisa. Duas destas famílias estão apresentadas nos parágrafos abaixo.

Problema 1: Suponha que seja necessário projetar uma trajetória que termine com uma captura gravitacional em um dado sistema de binários para um determinado valor de r_p . Assumindo que o valor do parâmetro gravitacional seja $\mu = 0.0121506683$ (o valor do sistema Terra-Lua). A exigência deste problema é que está trajetória use a quantidade mínima de tempo possível, mas mantendo um valor fixo de $C3 = -0.14$ e $r_p = 0.004781477$. As Figuras 8.7 e 8.8 podem ser diretamente usadas para resolver este problema. Este problema é solucionado para sistemas com excentricidades $e = 0.0, 0.2, 0.4$ e 0.8 . Os quatro valores para a anomalia verdadeira ($\gamma = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ e 270°) são testados. Os resultados estão mostrados na Tabela 8.1. Ela inclui o ângulo α e o tempo de captura. A economia em ΔV obtida é de 0.031296 unidades canônicas para todos os casos estudados, já que $C3$ é mantido constante.

TABELA 8.1 – SOLUÇÕES DO PROBLEMA 1

e \ γ	0°	90°	180°	270°
0	$\alpha = 338^\circ$ $t = 0.7482$	---	---	---
0.2	$\alpha = 311^\circ$ $t = 0.6033$	335° 0.6576	333° 0.9452	331° 0.7656
0.4	$\alpha = 325^\circ$ $t = 0.4556$	312° 0.5402	354° 1.3657	330° 0.7016
0.8	$\alpha = 292^\circ$ $t = 0.1735$	281° 0.1797	315° 2.6443	330° 0.3882

Os resultados estão em concordância com a regra geral que diz que quanto mais próximo os primários estão, maior é a perturbação e o tempo requerido para a captura é menor. Para um valor fixo da excentricidade, os tempos são menores para $\gamma = 0^\circ$ e maiores para $\gamma = 180^\circ$. Para um valor fixo da anomalia verdadeira, o tempo decresce com o aumento da excentricidade para $\gamma = 0^\circ$ e cresce quando $\gamma = 180^\circ$. Isto significa que as diferenças entre os tempos para diferentes localizações dos primários cresce com a excentricidade. A conclusão geral é que ao levar em conta a excentricidade dos primários é possível planejar a manobra com o menor tempo de captura. A região dos valores de α não muda muito, as soluções estão na faixa de $\alpha = 300^\circ \pm 30^\circ$. A Figura 8.9 mostra a trajetória do veículo espacial para a solução circular, vista no sistema de referências girante.

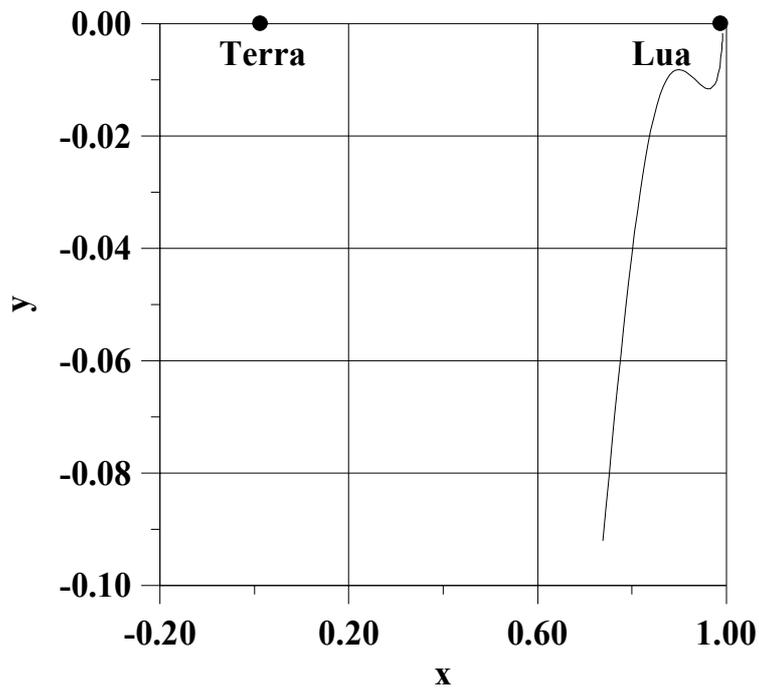


Fig. 8.9 – Trajetória do problema 1.

Este tipo de problema pode ser resolvido para diferentes valores de μ , r_p , $C3$, etc. Problemas similares com mais graus de liberdade (como um valor livre de r_p por exemplo), também pode ser solucionado com a mesma técnica.

Problema 2: Outra variante de problema de otimização que pode ser resolvido com os dados apresentados neste trabalho é o problema de procurar por uma trajetória de captura gravitacional que leve a uma economia máxima sujeita a um vínculo de desigualdade com o tempo (tempo requerido para a captura menor do que um limite especificado). As Figuras 8.7 e 8.8 também podem ser utilizadas para resolver este problema. Suponha que o mesmo sistema de binários (Terra-Lua) e o valor de $r_p = 0.004781477$ seja utilizados e que o limite de tempo seja de 0.8 unidades canônicas de tempo. Uma vez mais, quatro possibilidades para a excentricidade e para a anomalia verdadeira são utilizados. A Tabela 8.2 mostra os resultados para todos os casos estudados. Os resultados obtidos aqui também estão em concordância com a regra geral mencionada no caso anterior. Comparado com a solução circular, fica claro que para um valor fixo da excentricidade $C3$ alcança um mínimo para $\gamma = 0^\circ$ e um máximo para $\gamma = 180^\circ$. Então, a economia má-

xima para um problema com limite superior no tempo é alcançado na posição $\gamma = 0^\circ$. Também pode ser notado que C3 diminuiu com o aumento da excentricidade para $\gamma = 0^\circ$ e ele cresce com $\gamma = 180^\circ$. Então, as diferenças da energia para as diversas condições finais de uma determinada trajetória cresce com o aumento da excentricidade desta trajetória. A conclusão geral é que quando se leva em conta a excentricidade dos primários é possível planejar uma manobra com o máximo de economia de energia para um limite no tempo de captura. A região dos valores de α que resolvem o problema estão por volta de $330^\circ \pm 15^\circ$. A Figura 8.10 mostra a trajetória do veículo espacial para a solução circular, vista do sistema de referências girante. Soluções para outros casos podem ser obtidos resolvendo um problema particular ou interpolando as tabelas disponíveis.

TABELA 8.2 – SOLUÇÕES DO PROBLEMA 2

e \ γ	0°	90°	180°	270°
0	C3 = -0.15 $\alpha = 328^\circ$	---	---	---
0.2	C3 = -0.19 $\alpha = 338^\circ$	-0.17 321°	-0.11 346°	-0.14 331°
0.4	C3 = -0.28 $\alpha = 328^\circ$	-0.24 342°	-0.09 328°	-0.16 330°
0.8	C3 = -0.85 $\alpha = 328^\circ$	-0.71 333°	-0.07 346°	-0.34 330°

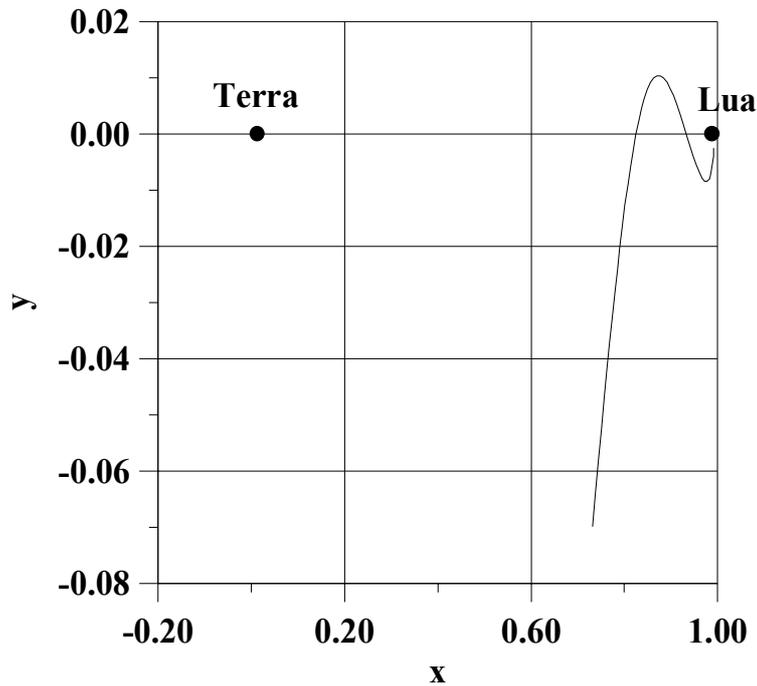


Fig. 8.10 – Trajetória do problema 2.

8.6. Conclusões

É possível concluir dos estudos feitos nesse Capítulo que o modelo restrito elíptico de três corpos proporciona diferenças nos resultados em termos de economia de combustível. Essas diferenças podem ser exploradas com o objetivo de aumentar a economia de combustível e/ou reduzir o tempo requerido para a execução da manobra. A Figura 8.4 mostrou a localização e a magnitude das diferenças entre os diferentes modelos e serve de guia para a escolha dos pontos ótimos para as manobras.

O principal efeito que a excentricidade produz no problema de captura gravitacional elíptico é que com o seu aumento a energia de dois corpos $C3$ diminui. Outro efeito interessante é que se $C3$ for mantido fixo o tempo de captura é reduzido quando se aumenta o valor da excentricidade.

Em relação a anomalia verdadeira o periapside ($\gamma = 0^\circ$) é a melhor condição para ocorrer a captura gravitacional, porque além de poder gerar uma maior economia de combustível por alcançar os menores valores de $C3$, nesta posição também ocorrem os tempos de

captura mais curtos.

Finalmente, os dados disponíveis neste Capítulo também permitem formular e solucionar vários problemas práticos envolvendo otimização de parâmetros. Dois exemplos foram propostos e resolvidos: 1) encontrar uma trajetória que tem o menor tempo de captura para uma energia fixa e 2) encontrar uma trajetória que tenha a menor energia dado um limite de tempo de captura. As soluções são mostradas em detalhes, incluindo as trajetórias seguidas pelo veículo espacial.

CAPÍTULO 9

SENSIBILIDADE DAS TRAJETÓRIAS DE CAPTURA GRAVITACIONAL TEMPORÁRIA

9.1. Introdução

Neste Capítulo serão estabelecidos alguns fatos relativos a sensibilidade das trajetórias de captura gravitacional quando erros são introduzidos na velocidade inicial. Por sensibilidade das trajetórias entende-se o quanto o seu comportamento é alterado quando pequenos erros nas condições iniciais ocorrem. Nos capítulos anteriores foi visto que pequenas mudanças nas condições iniciais, que na realidade são condições finais devido ao passo de integração negativo, significava ter ou não ter captura gravitacional. Neste Capítulo serão avaliadas numericamente as trajetórias que se iniciam num ponto distante da Lua e, agora com passo de tempo de integração positivo, terminam na periluna desejada e com a energia de dois corpos requerida.

Como ainda não existem na literatura critérios para se estabelecer a sensibilidade das trajetórias de captura gravitacional, resolveu-se aplicar o mesmo critério dos capítulos anteriores, ou seja, uma abordagem numérica. Como será explicado posteriormente neste Capítulo, serão adicionados alguns erros na direção e na magnitude da velocidade inicial da trajetória que termina em captura gravitacional e será verificado o comportamento dessa nova trajetória.

9.2. Transferência Completa Terra-Lua

Para entender como são classificadas as trajetórias neste Capítulo, é necessário entender o que será feito com as que terminam em captura gravitacional. O objetivo de todo este trabalho é dar uma base para se conseguir, num futuro, encontrar trajetórias de transferência em sistemas binários como o sistema Terra-Lua, em que se utilize a captura gravitacional temporária de uma forma mais elaborada do que a mera tentativa e erro.

A transferência completa Terra-Lua é mostrada na Figura 9.1 (Krish *et al.*, 1992). Esta

transferência começa em uma órbita estacionária em torno da Terra. A partir dessa órbita se obtém uma trajetória que faz um *swing-by* com a Lua. Esta trajetória de *swing-by* faz com que o veículo espacial ganhe energia suficiente para ser arremessado para um ponto longe do sistema Terra-Lua. Neste ponto, chamado de “fronteira de estabilidade fraca” (Belbruno, 1990), as forças gravitacionais da Terra e da Lua são muito fracas e, devido a isso, o veículo espacial pode, com uma pequena manobra, ser capaz de alterar significativamente a sua trajetória com um consumo muito baixo de combustível. Este fato é utilizado para colocar esse veículo em uma trajetória de captura gravitacional temporária em torno da Lua. Quando o veículo espacial está na periluna desejada para essa trajetória, por ser uma trajetória de captura gravitacional, sua energia de dois corpos é negativa e, conseqüentemente, o impulso requerido para completar a captura possui uma magnitude menor do que o impulso requerido pela manobra sem captura gravitacional. Com isto é possível adquirir uma órbita circular em torno da Lua com certa economia de combustível.

A transferência completa Terra-Lua por conseguinte, é uma transferência que requer um consumo de combustível menor que o requerido pela tradicional transferência de Hohmann (Yamakawa *et al.*, 1993; Belbruno, 1987 e 1990). No entanto, estas manobras fazem com que o tempo de transferência seja substancialmente superior ao da manobra padrão.

9.3. Classificação das Trajetórias de Captura Gravitacional

Como foi visto na Seção anterior, a trajetória de captura gravitacional, na transferência completa entre a Terra e a Lua, começa na fronteira de estabilidade fraca, que fica longe do sistema Terra-Lua. Os estudos apresentados neste trabalho até o momento, não se preocuparam em conhecer que direção a trajetória de captura tomava após a saída da esfera de influência da Lua. Os estudos iniciais tiveram por objetivo aumentar as informações a respeito do fenômeno devido a necessidade de se conhecer melhor como funciona o mecanismo de captura gravitacional.

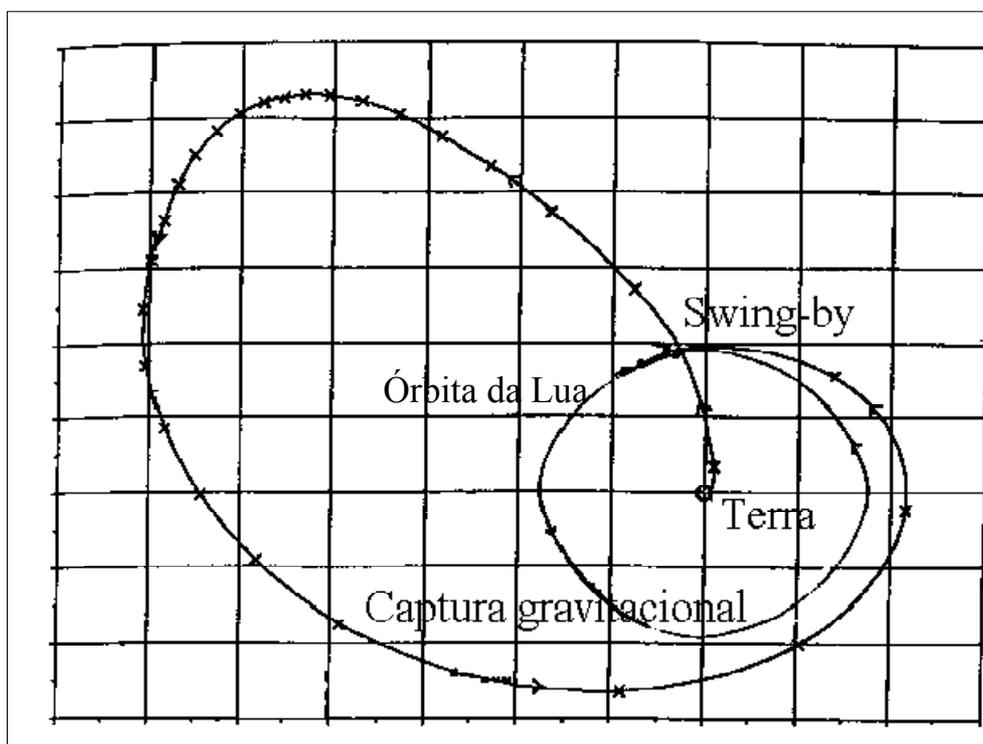


Fig. 9.1 – Transferência completa Terra-Lua.

FONTE: Adaptada de Krish *et al.* (1992, pg. 437).

Agora é interessante diferenciar as trajetórias que levam à fronteira de estabilidade fraca e as que não levam. E para isto, serão apresentados alguns conceitos desenvolvidos por Yamakawa (1992). Seja uma circunferência cujo centro é a Terra e a órbita da Lua o seu perímetro. É possível diferenciar as trajetórias que vão para o lado da Terra das trajetórias que vão para o lado oposto ao da Terra, ou seja, as trajetórias que vão para o interior da circunferência das trajetórias que vão para fora dessa circunferência (Figura 9.2). Estas trajetórias serão denominadas “lado da Terra” e “lado da antiterra” (esta classificação vem da tradução do trabalho de Yamakawa (1992): “Earth side” e “anti-Earth side”). Para classificar estas trajetórias são monitorados o semi-eixo maior da trajetória em relação a Terra e o ângulo da posição de entrada β (Figura 3.1), no momento em que a veículo espacial alcança a esfera de influência da Lua. Se o semi-eixo maior é menor ou igual a 400000 km e se $90^\circ \leq \beta \leq 270^\circ$, a trajetória é do tipo “lado da Terra”. Se o semi-eixo maior é maior que 400000 km e $0^\circ \leq \beta < 90^\circ$ ou $270^\circ < \beta \leq 360^\circ$, a trajetória é

do tipo “lado da antiterra” (Yamakawa, 1992).

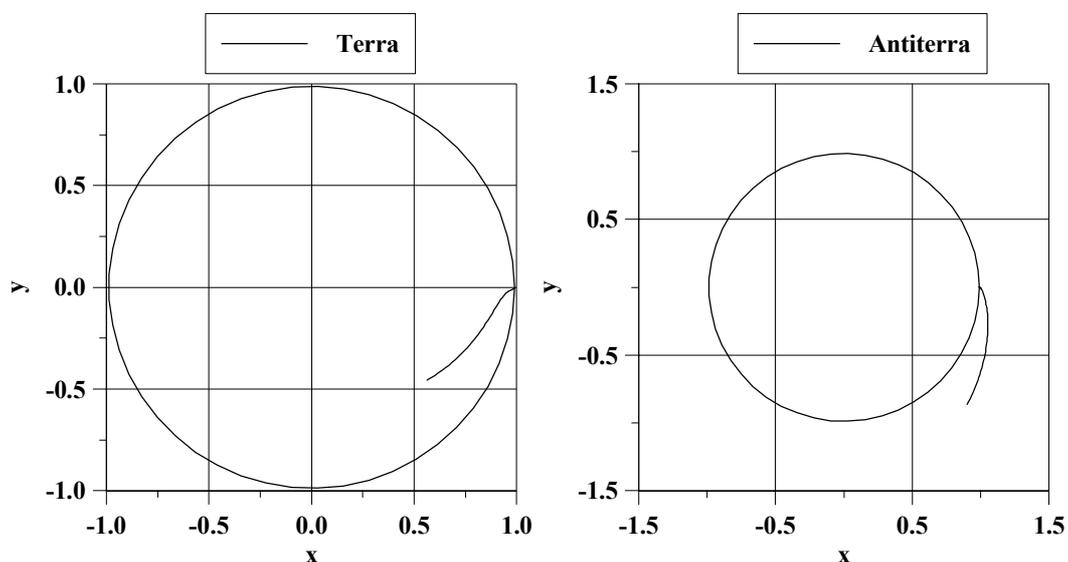


Fig. 9.2 – Trajetória que vai para o “lado da Terra” e a que vai para o lado oposto ao da Terra (sistema de coordenadas fixo).

A Figura 9.3 apresenta um mapa mostrando como as trajetórias são distribuídas em relação as condições iniciais para uma periluna de 100 km da superfície da Lua. Estas condições iniciais são o ângulo da posição da periluna α , representado pelo eixo horizontal, e a magnitude de $C3$, a energia de dois corpos, representado pelo eixo vertical.

Na Figura é possível ver que os dois tipos de trajetórias possuem regiões bem definidas em relação ao ângulo da posição da periluna. Dependendo do tipo de missão é só verificar se a condição para a periluna é satisfeita e escolher a trajetória.

9.4. Estudo da Sensibilidade dessas Trajetórias

Para saber o quanto as trajetórias são sensíveis às condições iniciais foram escolhidas algumas trajetórias que vão para o “lado da antiterra” e adicionados às condições iniciais erros na direção e na magnitude da velocidade, mantendo os valores para as posições x e y sem modificações. A partir desses erros foram verificados em que pontos do eixo x e a que distâncias do ponto de captura tem-se $y = 0$ (este método é baseado na idéia das superfícies de Poincaré (Winter e Murray, 1994)). Além disso, também foi verifica-

do o comportamento da energia de dois corpos quando estas trajetórias perturbadas passam o mais próximo do ponto de captura. O ponto de captura aqui referido é a periluna escolhida.

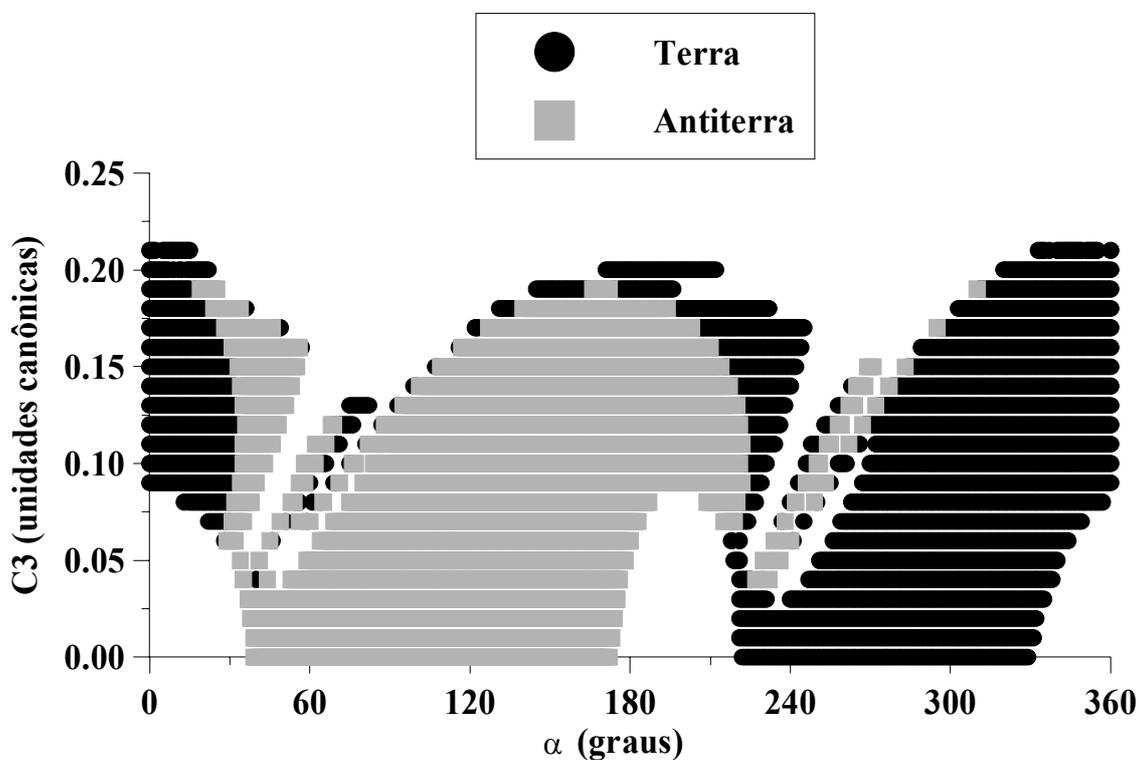


Fig. 9.3 – Mapeamento das trajetórias que vão para o “lado da Terra” e para o lado antiterra.

As condições iniciais foram determinadas escolhendo-se um ponto do mapa da Figura 9.3 dentro da região que possuíam trajetórias do tipo “lado da antiterra”. Este ponto fornece informações da energia de dois corpos e do ângulo da posição da periluna. Com as devidas transformações se obtém a posição e a velocidade do ponto inicial. Esta informação é propagada com um passo de tempo negativo até que o veículo espacial ultrapasse 1000000 km da Lua em um tempo inferior a 100 dias (que equivale a aproximadamente 23 unidades canônicas de tempo), neste ponto as informações de posição, velocidade e tempo são armazenadas. Caso a trajetória não ultrapasse os 1000000 km antes de se esgotar as aproximadamente 23 unidades canônicas de tempo, as informações de posição, velocidade e tempo são armazenadas para a posição mais afastada do siste-

ma Terra-Lua. O sistema de referência é o rotacional adimensional.

9.4.1. Erros na Magnitude da Velocidade

Os erros na magnitude da velocidade foram produzidos a partir do vetor velocidade inicial (obtidos conforme explicado na Seção anterior). Com o valor da magnitude desse vetor foi especificado uma determinada porcentagem que foi adicionada ao vetor inicial. Agora um novo vetor de estado, com a mesma posição do vetor anterior mas com a velocidade acrescida de um erro, é então propagado com um passo de tempo positivo a partir do tempo fornecido pelo método explicado na última Seção até o tempo zero. Neste trabalho são estudados três casos com três trajetórias diferentes.

Caso 1

O comportamento da trajetória depois de adicionado erro na velocidade inicial está mostrado na Figura 9.4. As condições iniciais dessa trajetória levam a uma periluna com $C3 = -0.1$ e $\alpha = 150^\circ$.

Nota-se claramente que em todos os casos as trajetórias estão alteradas em relação a nominal (0%). Erros da ordem de $\pm 5\%$ são suficientes para fazer com que o veículo espacial não se aproxime da Lua.

Com as mesmas condições de periluna da Figura anterior, os gráficos da Figura 9.5 apresentam o primeiro valor positivo de x quando $y = 0$ (ou seja, o primeiro ponto de cruzamento do eixo horizontal) e sua distância em relação ao ponto de captura para cada trajetória alterada com o erro que foi adicionado na magnitude da velocidade. A distância do ponto de captura é definida como:

$$d = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2} \quad (9.1)$$

onde (x, y) é a posição do veículo espacial e (x_p, y_p) é a coordenada da periluna da trajetória nominal (0%). Cada ponto da Figura representa uma trajetória. Foram somados à velocidade inicial valores que correspondem de -10% a 10%, ou seja, as primeiras traje-

tórias têm valores inferiores à velocidade nominal da condição inicial e as últimas trajetórias têm valores superiores à velocidade nominal da condição inicial.

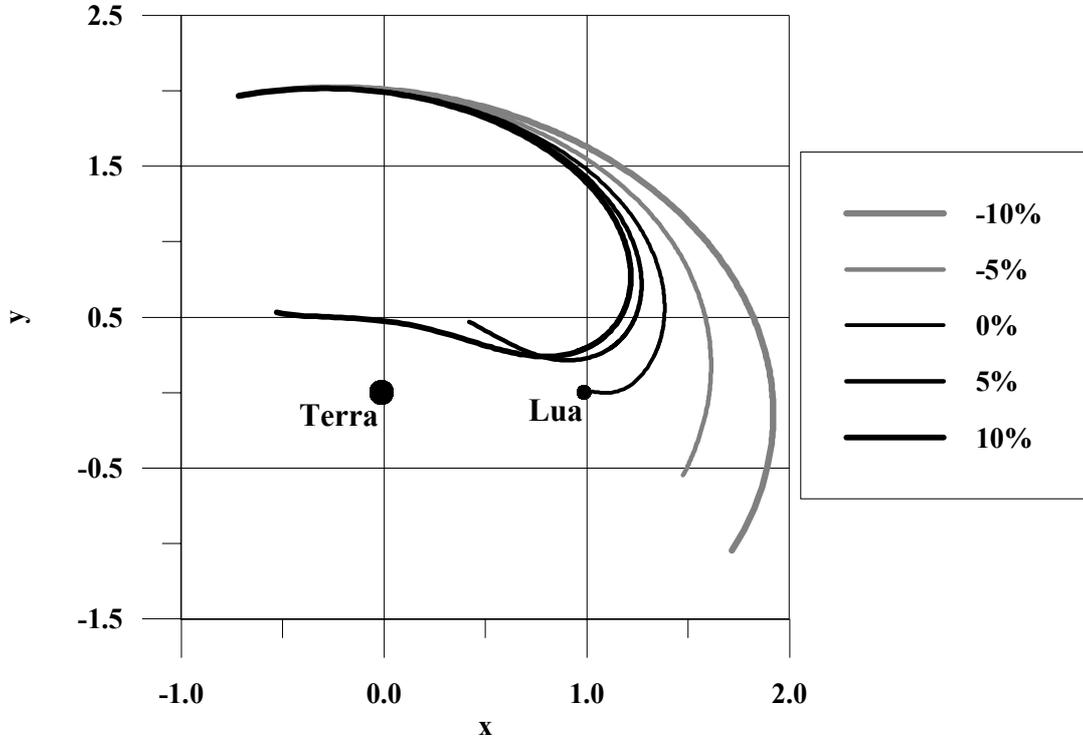


Fig. 9.4 – Trajetórias com erros na magnitude da velocidade.

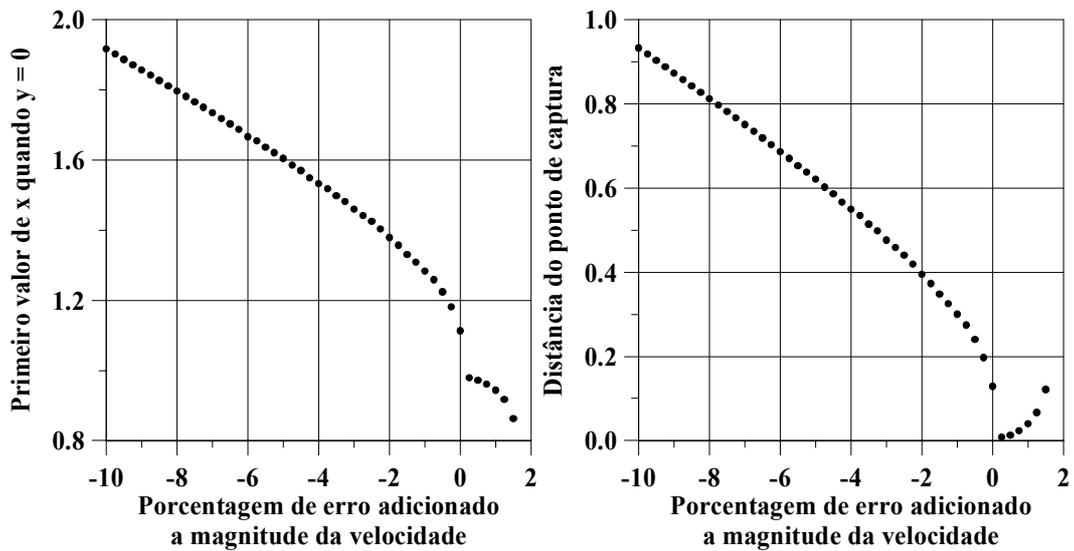


Fig. 9.5 – Resultados para erros de 10% na magnitude da velocidade.

A Figura 9.5 mostra o comportamento das trajetórias desde o momento em que elas são 10% menores do que a velocidade nominal e que termina em captura gravitacional até o momento em que elas superam em 10% a velocidade nominal. Como mostrado na Figura 9.4, a maioria das trajetórias que têm velocidade maior do que a velocidade nominal não cortam o eixo positivo de x e por isso os gráficos da Figura 9.5 terminam antes de 2%. A trajetória nominal corta o eixo x pela primeira vez em 1.112587, a trajetória com -10% da velocidade nominal em 1.916404, e a trajetória com 1.5% da velocidade nominal em 0.8629286. Ou seja, existe uma diferença de 0.803817 unidades canônicas (aproximadamente 308987 km) entre a trajetória com erro negativo e trajetória nominal e de 0.2496584 (aproximadamente 95968 km) unidades canônicas entre a trajetória com erro positivo e a trajetória nominal.

A Figura 9.6 mostra o que acontece com a energia de dois corpos, $C3$, no instante em que o veículo espacial passa pelo ponto mais próximo do ponto de captura em sua nova trajetória. Com um erro de -10% em relação a velocidade nominal o ponto mais próximo do ponto de captura está a 0.9280087 unidades canônicas do ponto de captura com um valor de $C3 = 0.00200271$, enquanto que com um erro de 10% o ponto mais próximo do ponto de captura é de 0.2649354 com $C3 = 0.7982373$. Ou seja, com erro de -10% em relação a velocidade nominal ocorre a maior distância do ponto de captura, enquanto que com erro de 10% ocorre o maior valor de $C3$. Isto ocorre porque quando o veículo espacial tem velocidade inicial menor do que a velocidade nominal ele não consegue se aproximar da Lua. Como o valor de $C3$ é igual a energia cinética menos a energia potencial, nesse caso acontece uma baixa energia cinética, porque a velocidade está sendo subtraída, e uma alta energia potencial, porque o veículo espacial está a uma grande distância da Lua. Por esta razão $C3$ fica próximo de 0, ficando mais negativo quando se aproxima do ponto de captura. No segundo caso o veículo espacial tem velocidade inicial maior do que a nominal fazendo com que ele passe próximo da Lua, mas com uma velocidade alta, provocando um alto valor de $C3$.

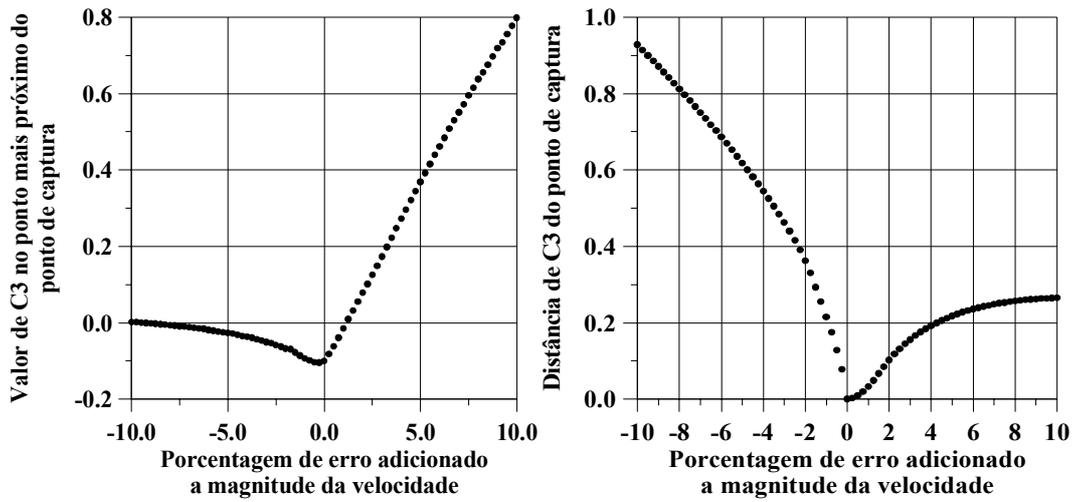


Fig. 9.6 – Resultados para erros de 10% na magnitude da velocidade.

As Figura 9.7 e 9.8 apresentam as mesmas quatro gráficos anteriores com uma escala que vai de -5% a 5%.

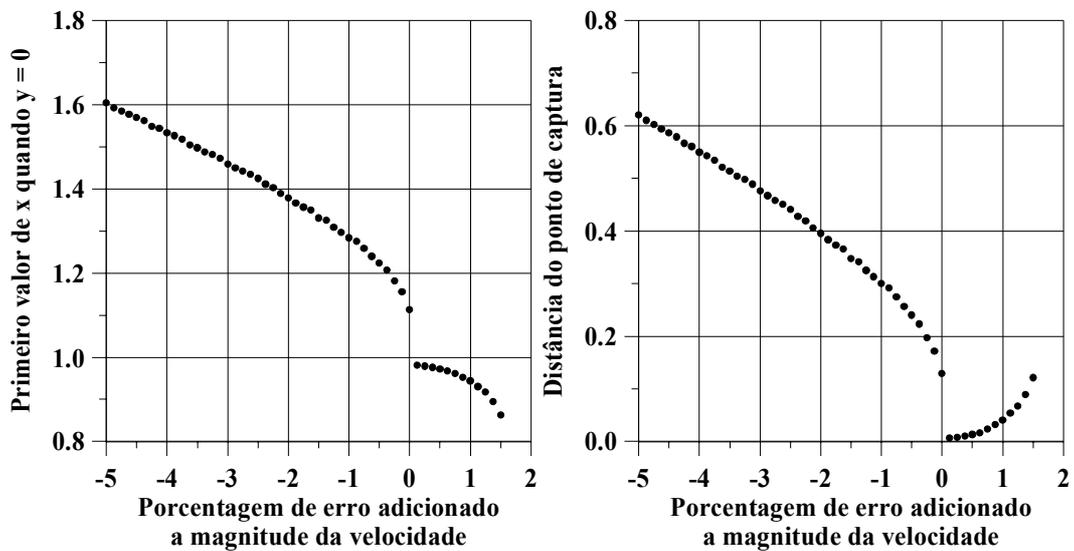


Fig. 9.7 – Resultados para erros de 5% na magnitude da velocidade.

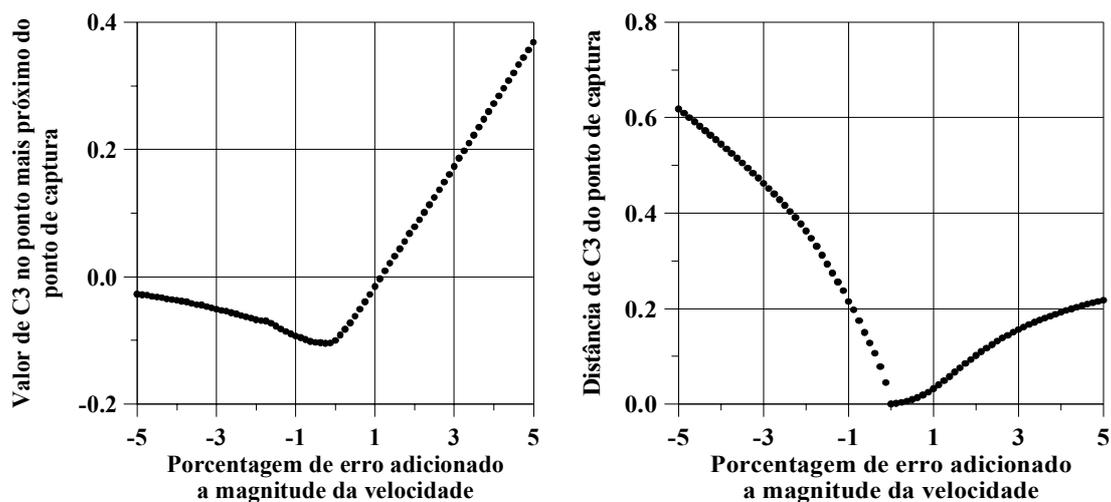


Fig. 9.8 – Resultados para erros de 5% na magnitude da velocidade.

Para um melhor entendimento do fenômeno, optou-se por investigar a região de erro em torno de 1%. As Figura 9.9 e 9.10 apresentam esses resultados.

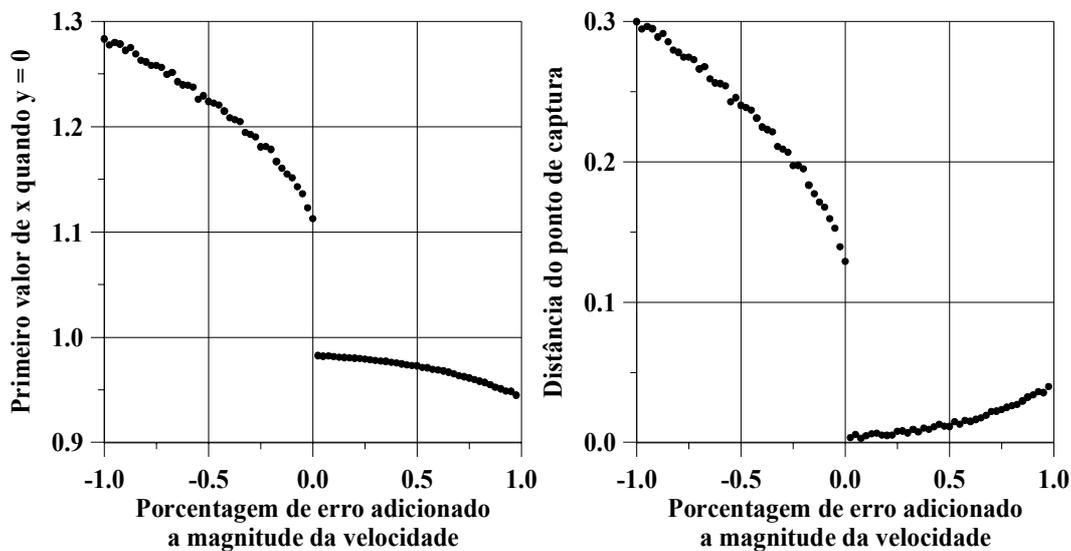


Fig. 9.9 – Resultados para erros de 1% na magnitude da velocidade.

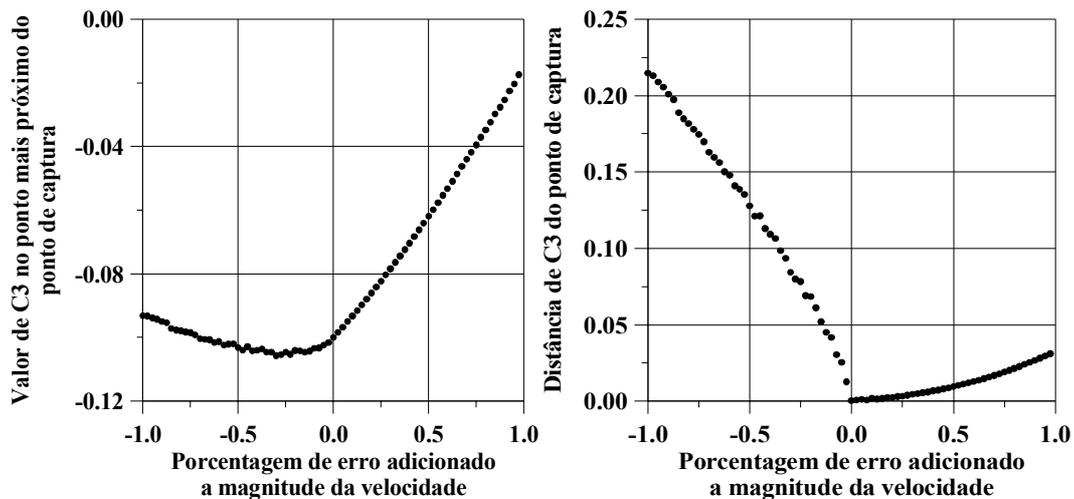


Fig. 9.10 – Resultados para erros de 1% na magnitude da velocidade.

Na Figura 9.9 os primeiros valores de x diminuem para erros negativos e positivos, enquanto que a distância do ponto de captura diminui para os erros negativos e aumenta para os erros positivos. E nos dois casos ocorre uma descontinuidade em 0% (a trajetória nominal). A Figura 9.4 ajuda a explicar esse fenômeno, as trajetórias com erros negativos na velocidade cruzam o eixo x depois da Lua se aproximando dela. Por isso o valor de x diminui e assim como a distância do ponto de captura. Depois, as trajetórias com erros positivos na velocidade cruzam o eixo x antes da Lua e se afastam em direção à origem do sistema. Ou seja, o valor de x continua diminuindo, enquanto que a distância do ponto de captura aumenta.

Na Figura 9.10 está o comportamento de $C3$ quando a trajetória com erro passa o mais próximo do ponto de captura. Em termos da distância do ponto de captura o comportamento é óbvio, primeiro a distância diminui e depois aumenta. Em relação a $C3$ acontece um fato interessante, entre -0.5% e 0% existem valores de $C3$ menores do que o valor para o ponto de captura desejado (-0.1 unidades canônicas). Isto ocorre porque o veículo passa à uma distância onde a energia potencial ainda é menor do que o a do ponto de captura, mas com uma velocidade menor do que a da trajetória nominal, energia cinética baixa, provocando um balanço de $C3$ menor do que o do ponto de captura.

Caso 2

A Figura 9.11 apresenta as trajetórias que deveriam terminar em uma periluna com $\alpha = 77^\circ$ e $C3 = -0.1$. No mapa da Figura 9.3 este ponto fica no fronteira esquerda entre as trajetórias do “lado da antiterra” e as do “lado da Terra”. Esta Figura é interessante porque apresenta um cúspide na trajetória nominal (0%) antes da esfera de influência gravitacional da Lua. E as trajetórias que possuem uma velocidade inicial maior do a nominal, se desviam da trajetória nominal justamente neste cúspide.

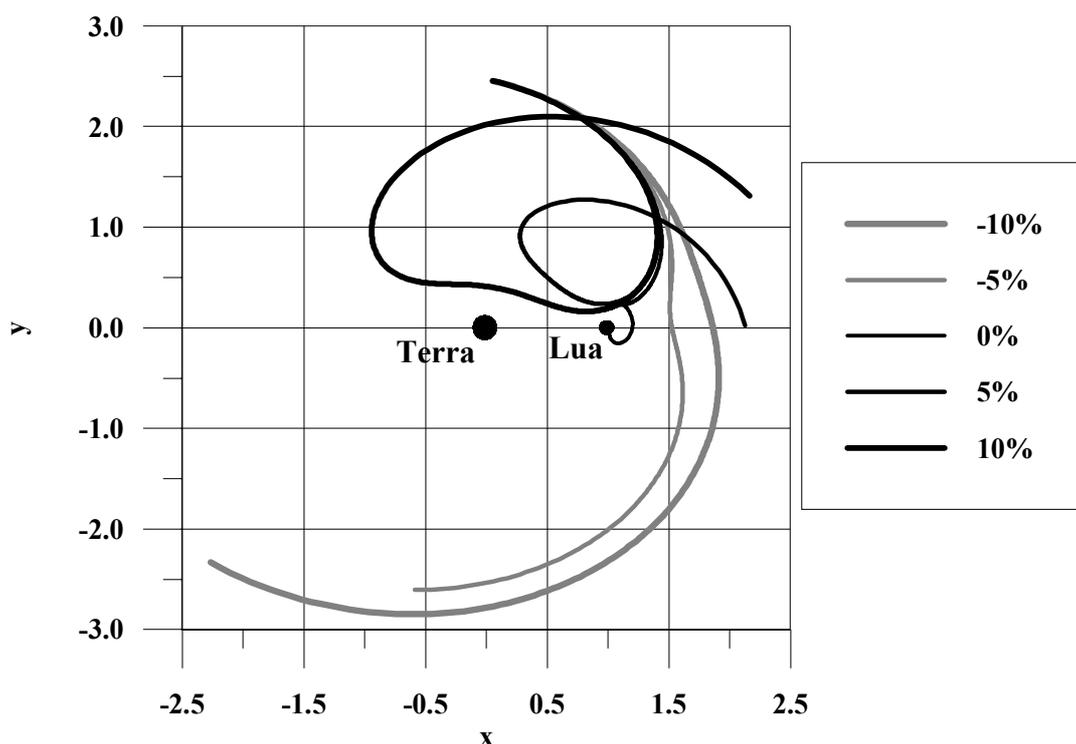


Fig. 9.11 – Trajetórias com erros na magnitude da velocidade.

As Figura 9.12 e 9.13 mostram os mesmos estudos do caso anterior na escala que vai de -1% a 1% .

Na Figura 9.12 nota-se um comportamento diferente na variação do valor de x em relação ao caso anterior. Não existe aquela descontinuidade mencionada anteriormente. A explicação deste fato está na Figura 9.11 que as trajetórias depois do cúspide aumentam sua distância da origem. Isto é bem visível na trajetória com erro de 5% na velocidade nominal. Ou seja, as trajetórias com velocidades menores, que não são tão afetadas pelo

cúspide, se aproximam da Lua à medida em que a velocidade inicial é aumentada, depois da trajetória nominal, que possui o cúspide, as velocidades iniciais têm seu valor aumentado e no lugar do cúspide a trajetória faz uma pequena revolução, quase um “1”, e depois cruzando o eixo x num ponto mais distante do que a trajetória nominal, se afastando da origem.

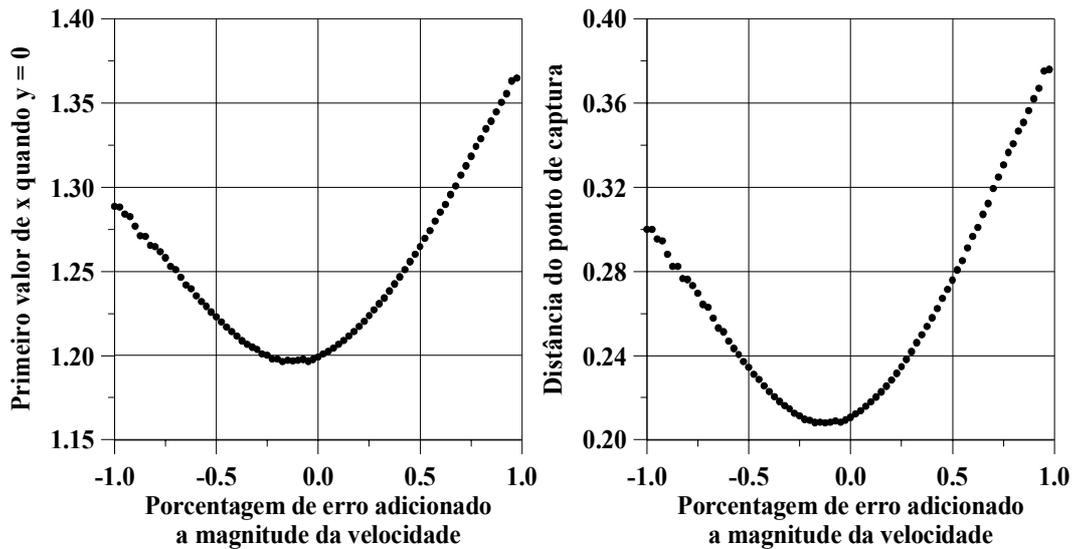


Fig. 9.12 – Resultados para erros de 1% na magnitude da velocidade.

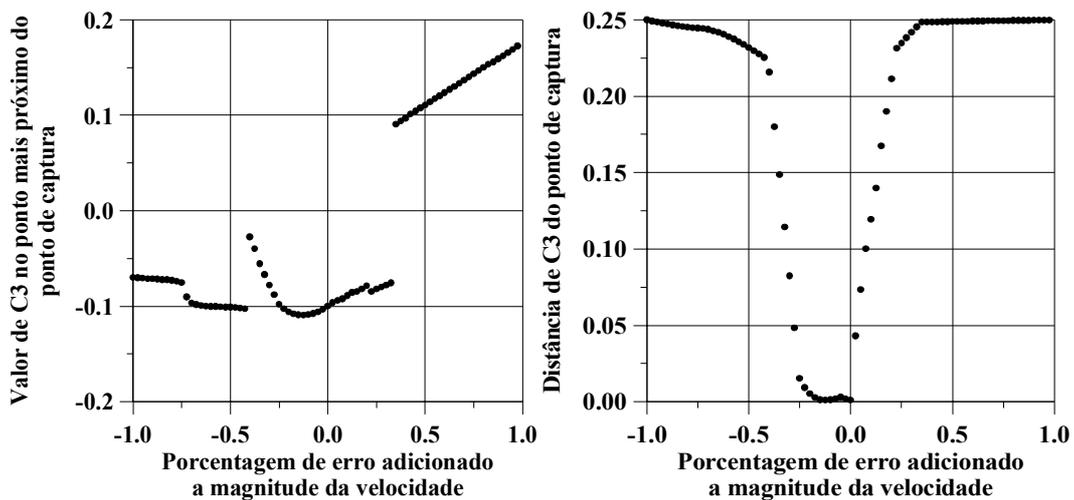


Fig. 9.13 – Resultados para erros de 1% na magnitude da velocidade.

No segundo gráfico da Figura 9.13 apresenta algo diferente. A distância do ponto de

captura inicialmente é grande, diminui rapidamente quando os erros se aproximam de -0.25% , e voltam a aumentar rapidamente depois que passam pelo erro 0% . E como se houvesse um buraco próximo dessa região. O comportamento de $C3$ também apresenta descontinuidades próximas dessas regiões. Este efeito ocorre porque as trajetórias que estão “dentro do buraco” possuem um cúspide quase igual ao da trajetória nominal. Com isto algumas dessas trajetórias passam tão próximo da Lua quanto a trajetória nominal, fazendo com que o valor de $C3$ seja menor do que o nominal.

Caso 3

Numa outra fronteira do mapa da Figura 9.3, a Figura 9.14 tem como condição final para a periluna $\alpha = 172^\circ$ e $C3 = -0.19$. As trajetórias de captura gravitacional estão mais sensíveis neste nível de energia. É possível ver que a trajetória nominal (0%) faz várias revoluções em torno da Lua antes de alcançar a periluna desejada. Um fato diferente neste caso, em relação aos estudados anteriormente, é que as trajetórias com erros se afastam da trajetória nominal bem antes do que nos casos anteriores. As trajetórias com velocidades iniciais menores se afastam do sistema Terra-Lua (a espiral crescente ocorre porque o sistema de referências está girando). Enquanto que as trajetórias com velocidades iniciais maiores ficam presas dentro do sistema.

As Figura 9.15 e 9.16 apresentam o comportamento da sensibilidade das trajetórias em relação à adição de erros na magnitude da velocidade na escala de -1% a 1% .

A Figura 9.15 apresenta um comportamento semelhante ao da Figura 9.9 do primeiro caso.

Desta vez, como mostra a Figura 9.16, o menor valor de $C3$ é o da trajetória nominal (-0.19). O fato das trajetórias com menor velocidade inicial estarem mais afastadas já foi explicado pela Figura 9.14. As trajetórias com velocidades iniciais maiores passam mais próximo do ponto de captura e também revolucionam em torno da Lua como a trajetória nominal. O interessante é que quanto maior a velocidade inicial, menos revoluções em torno da Lua, e essas trajetórias depois escapam na direção da Terra.

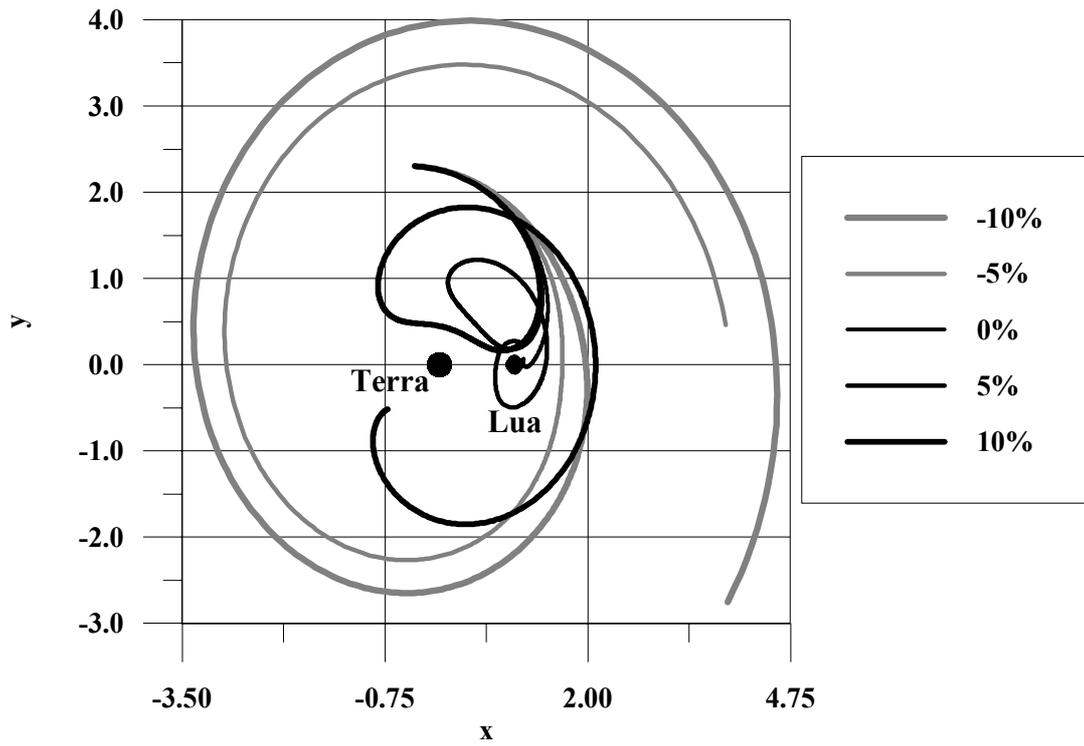


Fig. 9.14 – Trajetórias com erros na magnitude da velocidade.

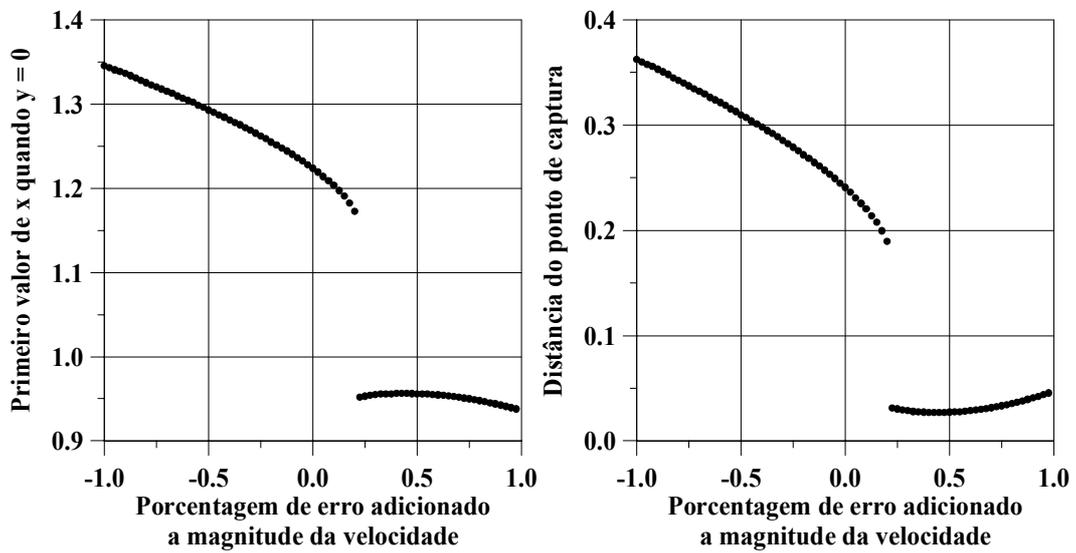


Fig. 9.15 – Resultados para erros de 1% na magnitude da velocidade.

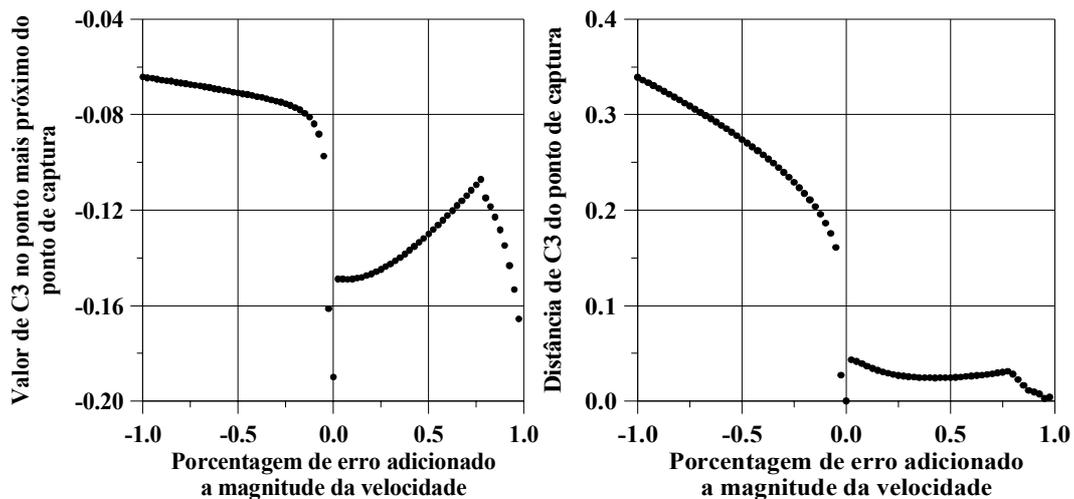


Fig. 9.16 – Resultados para erros de 1% na magnitude da velocidade.

As conclusões do estudo destes três casos é que existe uma grande sensibilidade aos erros. Principalmente a erros maiores que 10%, como ficou demonstrado pelo primeiro caso. Além disto, estes três casos apresentados demonstram que é difícil obter resultados gerais nesse tipo de estudo. Os três casos demonstram comportamentos bem diferentes tanto a respeito da posição em que cortam o eixo x, quanto dos valores de C3 perto do ponto de captura. Como é possível ver no mapa da Figura 9.3, existem vários casos a serem estudados e, possivelmente, vários fenômenos a serem descobertos neste problema.

9.4.2 Erros na Direção da Velocidade

Dando continuidade a esse estudo de sensibilidade, agora serão adicionados erros à direção inicial da velocidade. O objetivo é compreender o comportamento das trajetórias quando elas são perturbadas quanto a direção da velocidade. Aqui também são estudados 3 casos.

Caso 1

A Figura 9.17 apresenta as trajetórias perturbadas na direção. As condições para a perigluna é $\alpha = 150^\circ$ e $C3 = -0.1$.

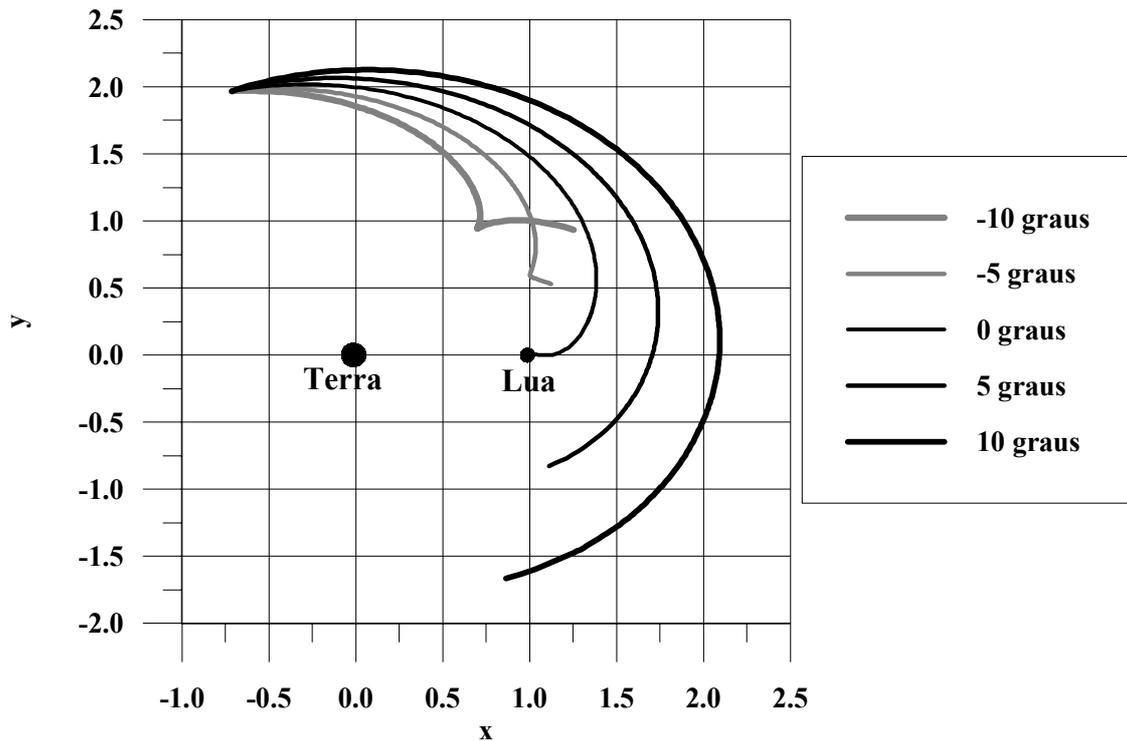


Fig. 9.17 – Trajetórias com erros na direção da velocidade.

Como se pode ver existe uma diferença significativa entre as trajetórias com erro na magnitude e as trajetórias com erro na direção. Estas últimas apresentam uma separação da trajetória nominal bem antes das do caso anterior. A soma de um ângulo positivo na direção da velocidade faz com que a trajetória se desvie para a esquerda, e com a soma de um ângulo negativo, a trajetória se desvia para a direita. As figuras subseqüentes mostrarão outras diferenças.

Seguindo o mesmo processo da Seção anterior, as Figuras 9.18 e 9.19 apresentam erros entre -10 e 10 graus que foram adicionados na direção da velocidade inicial.

A Figura 9.18 tem uma boa correspondência com a Figura 9.5, apesar de serem invertidas uma em relação à outra. Isto ocorre devido a definição da soma do ângulo à velocidade nominal, que faz com que um aumento do ângulo a direção da velocidade nominal gire numa direção anti-horária e vice-versa.

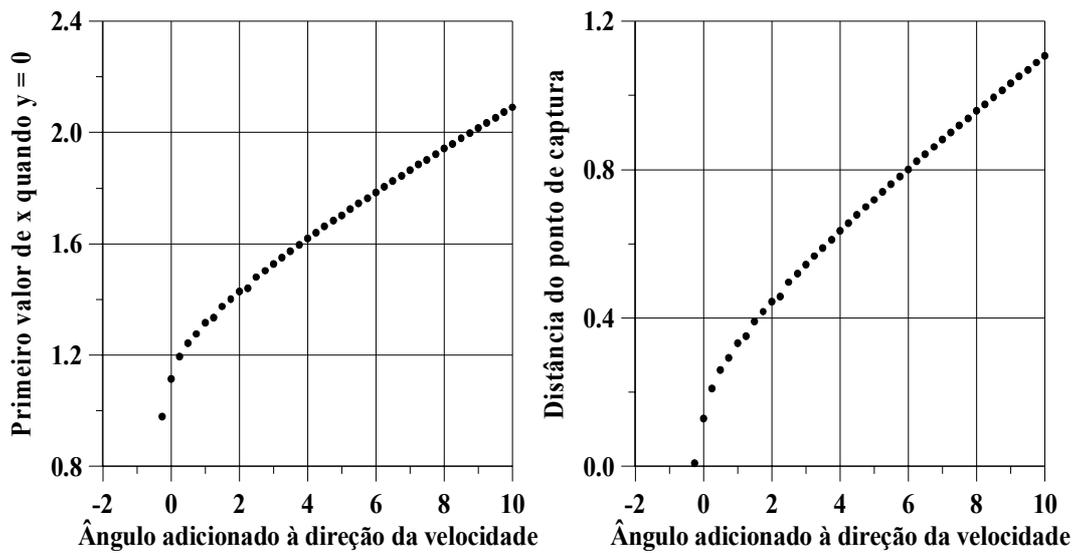


Fig. 9.18 – Resultados para erros de até 10° na direção da velocidade.

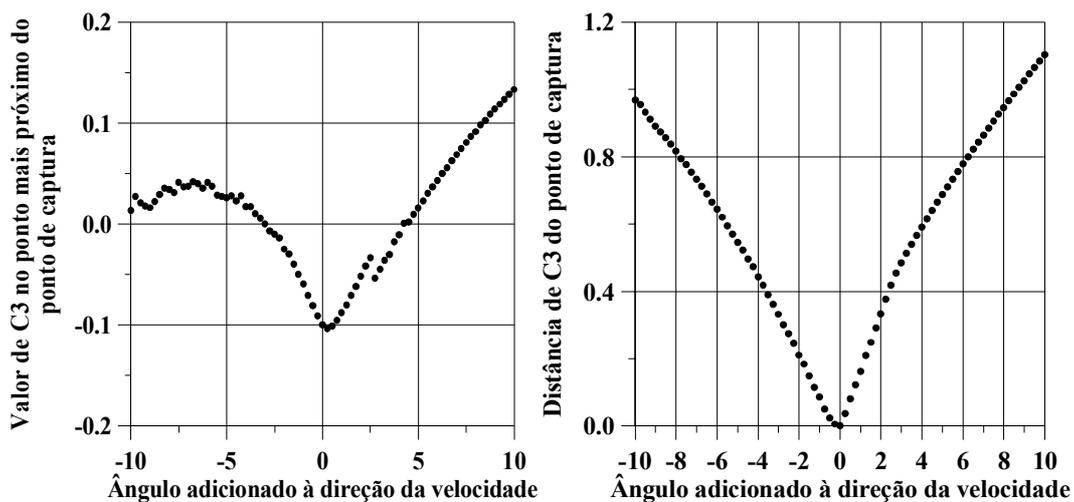


Fig. 9.19 – Resultados para erros de até 10° na direção da velocidade.

O comportamento das trajetórias quando se analisa a energia de dois corpos, Figura 9.19, também tem uma certa semelhança com o caso anterior. Só que agora a variação de C3 é mais abrupta do que no caso anterior. Isto ocorre porque, diferentemente do caso anterior, a magnitude da velocidade não é modificada, só a sua direção. Isto faz com que a energia cinética não aumente ou diminua, como antes, somente a energia potencial tem variações nesse caso.

As Figura 9.20 e 9.21 apresentam o mesmo caso com uma diminuição da escala para o intervalo de -5° a 5° .

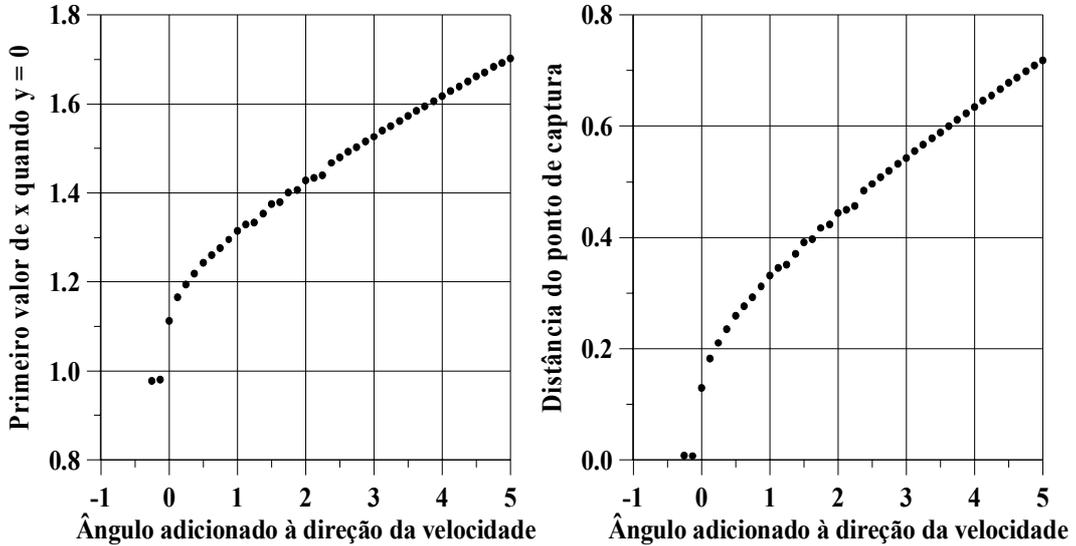


Fig. 9.20 – Resultados para erros de até 5° na direção da velocidade.

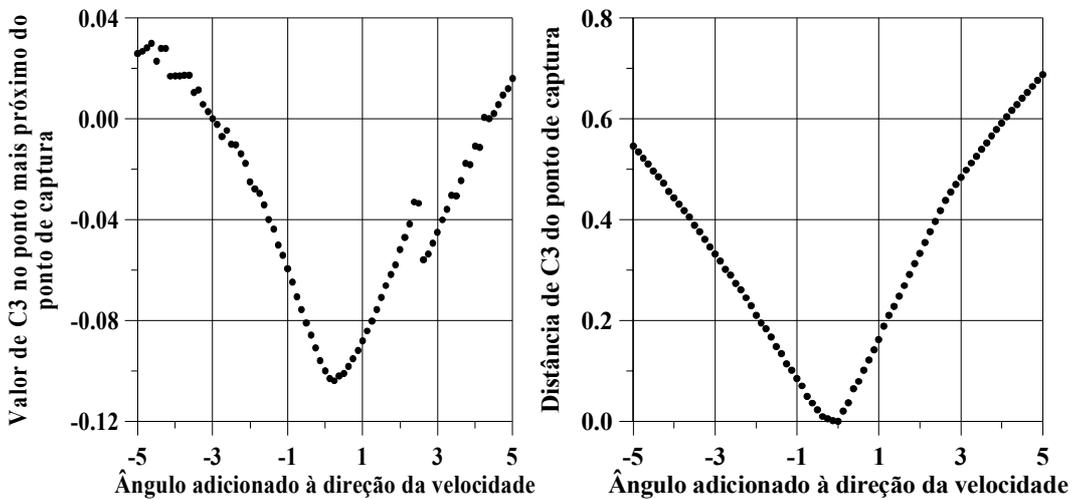


Fig. 9.21 – Resultados para erros de até 5° na direção da velocidade.

Estas duas últimas Figuras apresentam uma magnificação próxima da trajetória nominal.

As Figuras 9.22 e 9.23 apresentam os resultados para o intervalo de -1° a 1° . Nessa

magnitude, apesar das Figuras serem inversas, o comportamento fica muito similar ao do caso dos erros somados à magnitude.

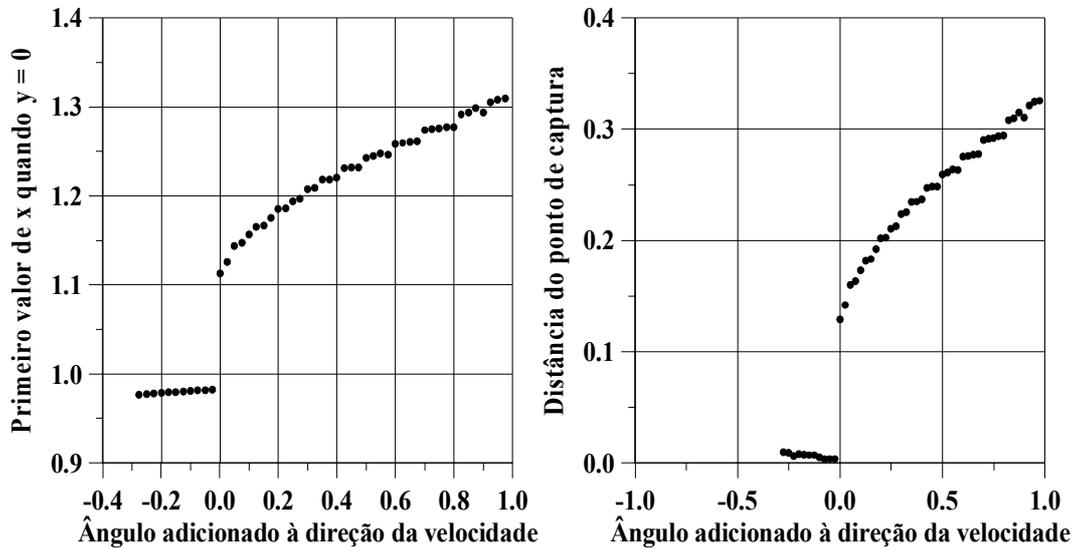


Fig. 9.22 – Resultados para erros de até 1° na direção da velocidade.

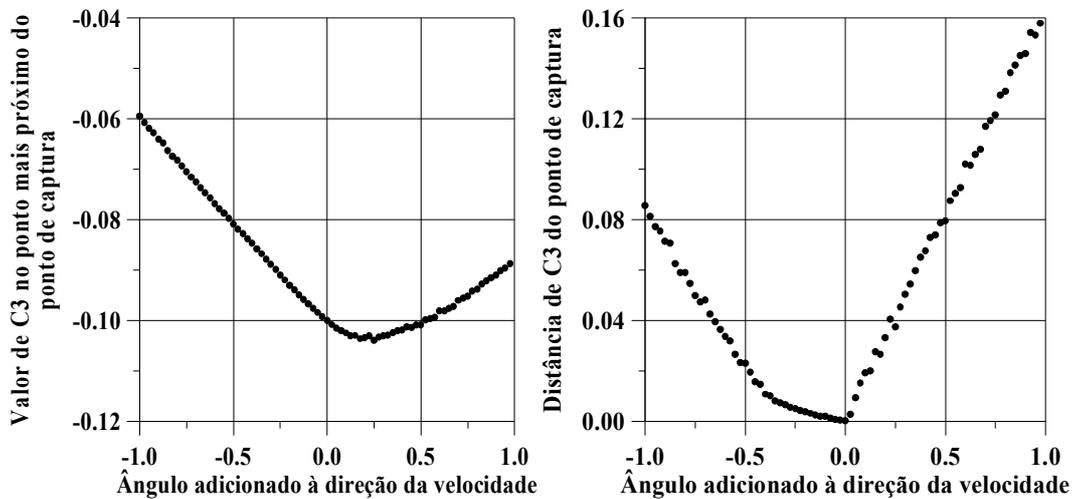


Fig. 9.23 – Resultados para erros de até 1° na direção da velocidade.

Caso 2

A Figura 9.24 mostra a trajetória dos desvios quando há erros na direção da velocidade para o caso em que a periluna final é de $\alpha = 77^\circ$ e $C3 = -0.1$.

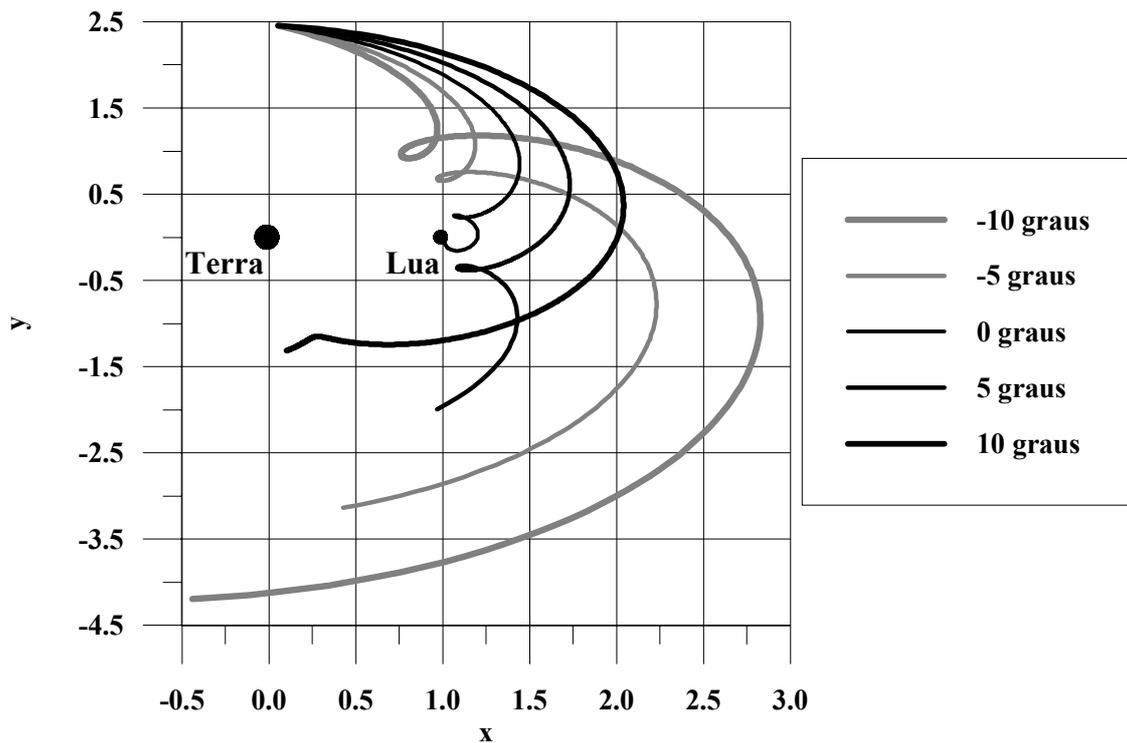


Fig. 9.24 – Trajetórias com erros na direção da velocidade.

A Figura 9.25 mostra o comportamento dos erros quando as trajetórias cruzam o eixo x , e a Figura 9.26 apresenta o comportamento da energia de dois corpos.

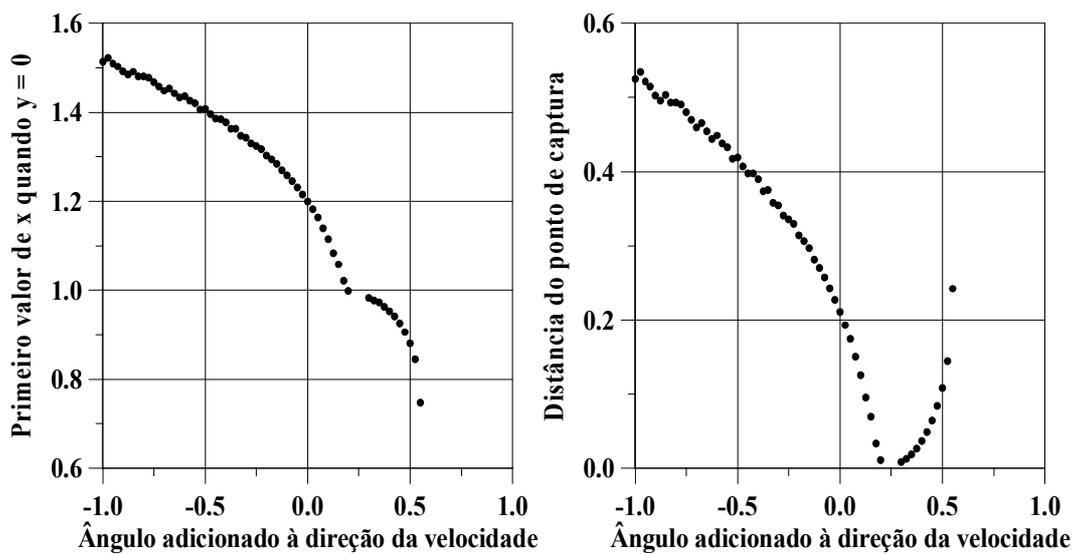


Fig. 9.25 – Resultados para erros de até 1° na direção da velocidade.

Na Figura 9.25 se vê que as trajetórias param de cruzar o eixo x por volta do 0.5° . Na Figura 9.24 parece que todas as trajetórias cruzam o eixo x, mas as trajetórias com adições pequenas na direção da velocidade, ao passar perto de onde ocorre o cuspide da trajetória nominal, desviam suas trajetórias em direção à Terra. Diferentemente do caso em que o erro era adicionado à magnitude da velocidade onde as trajetórias fazem um “1” e depois cruzam o eixo x.

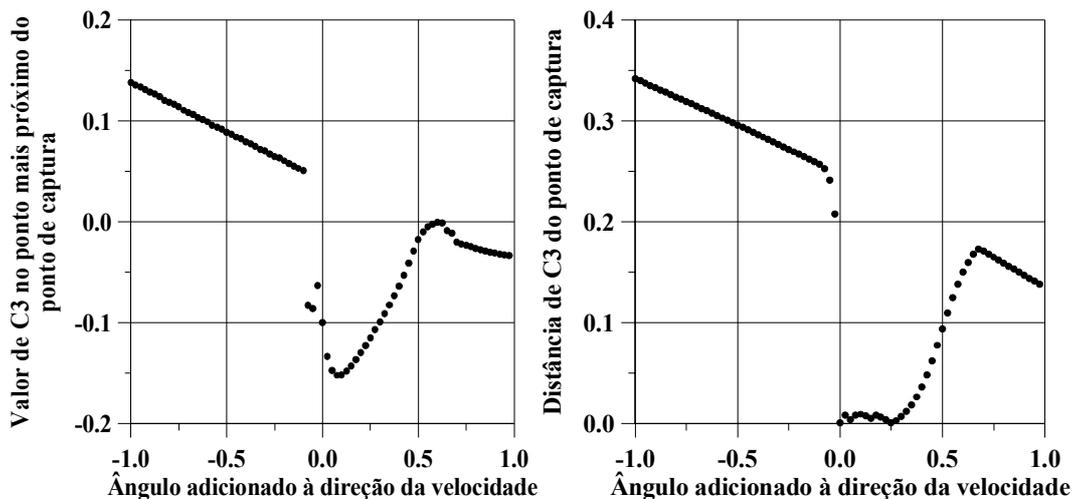


Fig. 9.26 – Resultados para erros de até 1° na direção da velocidade.

Na Figura 9.26, apesar da reta estar inclinada em relação a Figura 9.13, a razão da falha é o cuspide apresentado nas trajetórias da Figura 9.24.

Caso 3

Os trajetórias para o condição de periluna com $\alpha = 172^\circ$ e $C3 = -0.19$ estão apresentados na Figura 9.27.

As Figura 9.28 e 9.29 apresentam os comportamentos destas trajetórias.

O caso apresentado na Figura 9.28 mostra uma descontinuidade diferente das anteriores, onde o ponto de cruzamento do eixo x dá um salto de quase 0.2 unidades canônicas e se estabiliza dentro de uma falha. Isto ocorre porque as trajetórias que sofrem a quantidade de desvio mostrada na escala, ao passarem próximo da Lua, elas ficam presas dando vá-

rias revoluções. Isto acontecia também no caso em que o erro era adicionado na magnitude da velocidade, mas não com a mesma intensidade que neste caso.

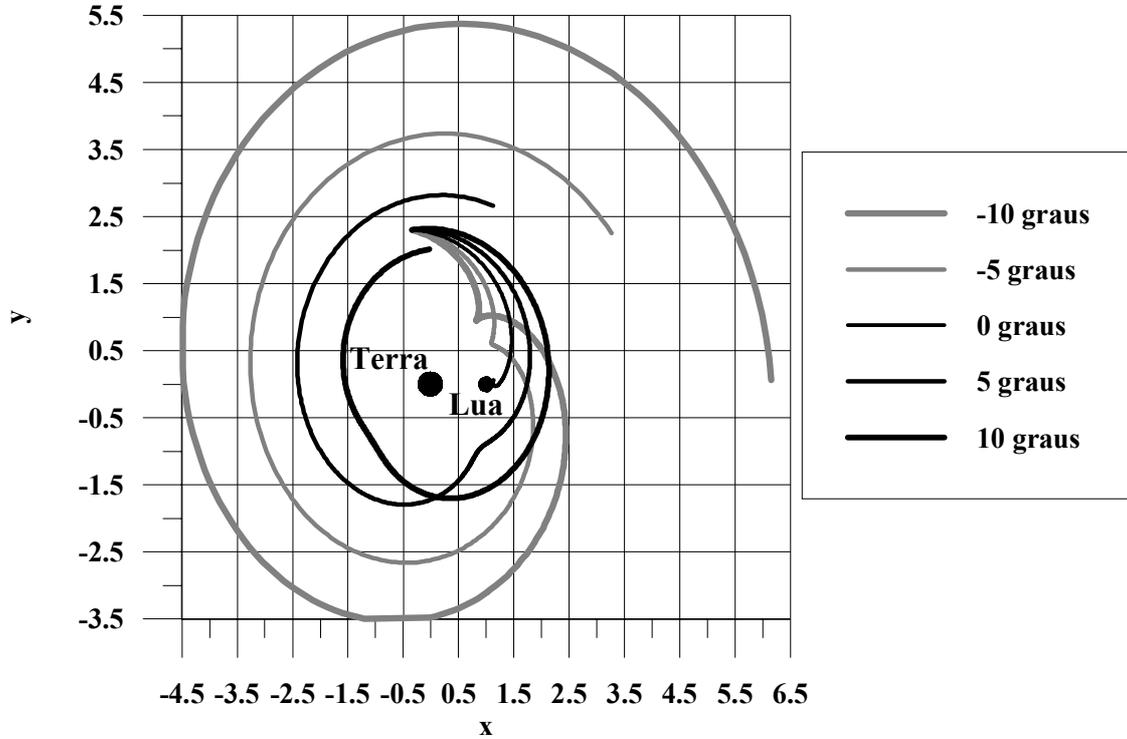


Fig. 9.27 – Trajetórias com erros na direção da velocidade.

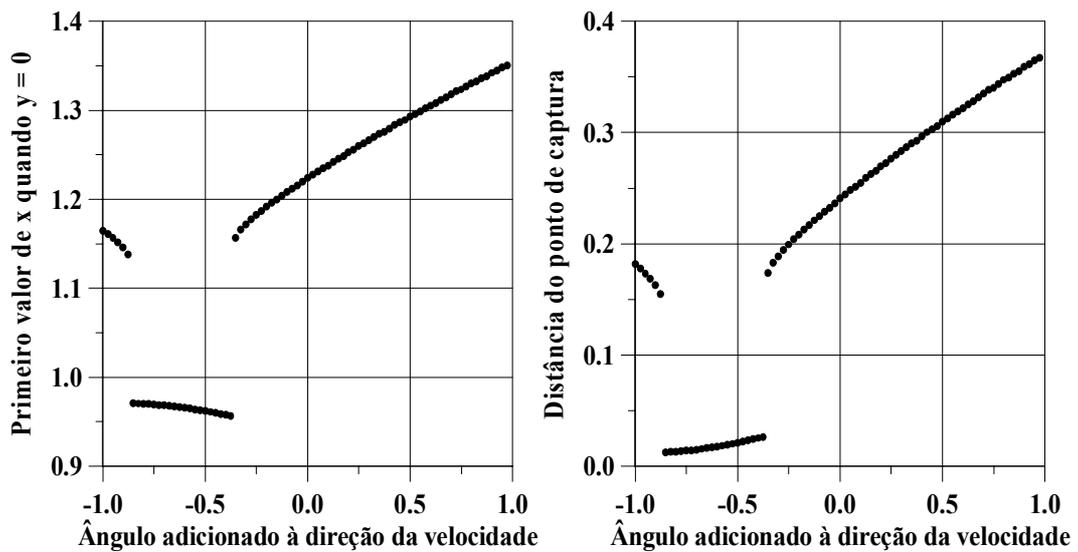


Fig. 9.28 – Resultados para erros de até 1° na direção da velocidade.

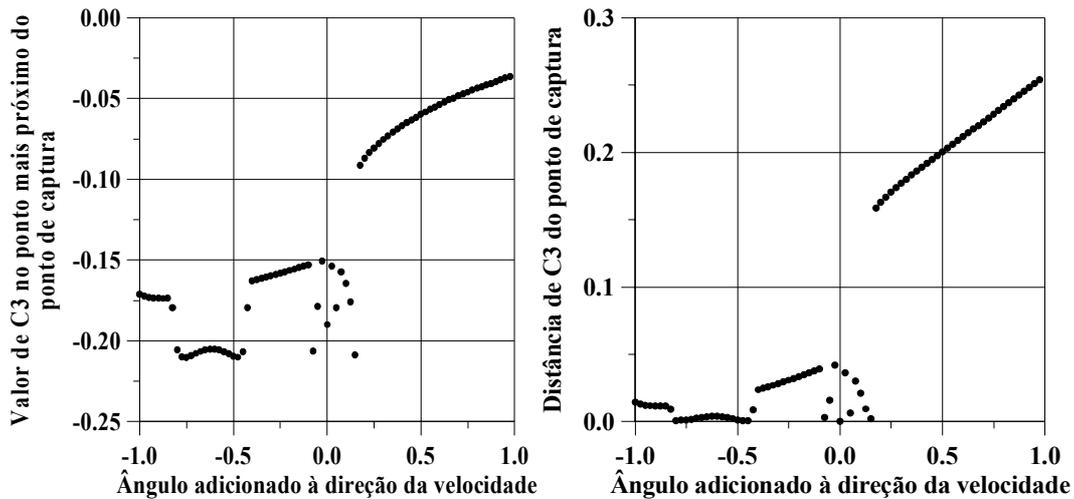


Fig. 9.29 – Resultados para erros de até 1° na direção da velocidade.

As várias revoluções que as trajetórias alteradas fazem melhorar o desempenho em relação a energia de dois corpos C3. A região das trajetórias que dão várias revoluções em torno da Lua apresentam valores de C3 abaixo do valor da trajetória nominal. Além disso elas passam tão perto do ponto de captura como a trajetória nominal.

O resultado deste último caso é bem interessante. A condição para a periluna ($C3 = -0.19$ unidades canônicas) fica numa região de menor probabilidade de existir captura gravitacional. No entanto erros da ordem de -0.5° podem até melhorar a condição para a periluna.

9.5. Conclusões

Estes testes de sensibilidade numéricos demonstram que as trajetórias de captura gravitacional são sensíveis quando expostas a pequenos erros nas condições iniciais. Esta sensibilidade dificulta uma tentativa de otimização global da transferência Terra-Lua.

Erros na magnitude da velocidade são mais problemáticos do que os erros em direção. Mas nos dois casos ocorrem uma faixa de erro em que é possível fazer a correção com um baixo custo de combustível. Os gráficos mostraram que, apesar de estarem à uma certa distância da periluna desejada, a energia de dois corpos C3 apresenta um valor baixo, o que possibilita fazer uma manobra com um baixo consumo de combustível.

CAPÍTULO 10

CONCLUSÃO

10.1. Introdução

Esta tese estudou o problema de captura gravitacional. Foram apresentados as referências bibliográficas, a dinâmica utilizada e os conceitos sobre captura gravitacional no Capítulo 2. As dinâmicas circular e elíptica foram testadas no Capítulo 3. No Capítulo 4 foram testados os conceitos de Yamakawa e a integração numérica. No Capítulo 5 foram estudadas as forças que agem no sistema. O comportamento dos menores valores possíveis de C_3 foram estudados no Capítulo 6. Em seguida apresentou resultados inéditos sobre a análise paramétrica do tempo no Capítulo 7. A utilização da excentricidade como um dos parâmetros do problema foi considerada no Capítulo 8. E, finalmente, mostrou a sensibilidade numérica aos erros aplicados à velocidade das trajetórias de captura gravitacional no Capítulo 9. Agora, neste Capítulo será feita uma rápida conclusão sobre os estudos dos capítulos anteriores e lançadas propostas sobre pesquisas futuras sobre esse assunto, apoiando-se nos conhecimentos adquiridos até o momento.

10.2. Análise dos Capítulos

Será feita uma apresentação sucinta de cada capítulo dando ênfase às contribuições que eles oferecem.

O primeiro Capítulo da tese é uma introdução do problema de captura gravitacional e apresentou a estrutura de cada capítulo.

No segundo Capítulo foram apresentadas as principais referências bibliográficas do problema de captura gravitacional. A dinâmica de três corpos foi desenvolvida para o problema restrito circular, assim como a regularização de Lemaître e a dinâmica do problema restrito elíptico. E finalmente foram apresentados os principais conceitos do problema de captura gravitacional.

A dinâmica do problema restrito circular de três corpos foi aplicada ao problema de

captura gravitacional no terceiro Capítulo. Os resultados obtidos foram utilizados para fazer comparações com a literatura, de forma a garantir os resultados obtidos nos próximos capítulos. Este Capítulo também apresentou trajetórias do problema restrito elíptico de três corpos que foram comparadas com outras trajetórias apresentadas na literatura.

No Capítulo 4 foram testados os valores da esfera de influência e do tempo máximo de integração, definidos por Yamakawa (1992) e apresentado no segundo Capítulo. Também foram feitos testes de comparação entre a dinâmica regularizada e a não regularizada, utilizando dois integradores diferentes. O objetivo de todos estes testes foi garantir que nos estudos numéricos que foram feitos nos capítulos seguintes os erros não fossem propagados, aumentando seus valores e desqualificando os resultados.

No quinto Capítulo as equações de movimento em relação ao primário de menor massa foram conseguidas pelo método newtoniano, já que Yamakawa utilizou o método de Lagrange. Nesse processo foi possível identificar as forças que agem no sistema. Um estudo numérico dessas forças esclareceu melhor o fenômeno da captura gravitacional temporária.

As principais contribuições deste Capítulo foram:

- a) A captura gravitacional ocorre porque, distante da Lua, as forças centrípeta e da gravidade da Terra ajudam o veículo espacial a diminuir sua velocidade ao se aproximar da Lua. Estas forças agem de forma equivalente a aplicação de um empuxo contínuo na direção contrária ao movimento;
- b) Para a energia mínima de captura existem regiões mais privilegiadas do que outras. As principais regiões, em relação ao ângulo da posição da periluna, estão próximas de 0° e de 180° . Isto foi explicado pelo balanço das forças centrípeta e da gravidade da Terra.

No Capítulo 6 há um estudo sobre a energia mínima de captura. Em seguida estes estudos foram generalizados para vários valores de r_p e de μ .

As principais contribuições deste Capítulo foram:

- a) Na captura direta, devido a uma variação maior da variação da quantidade de movimento em relação à captura retrógrada, foram alcançados melhores mínimos do que no caso da captura retrógrada;
- b) Não há grandes variações na energia mínima de captura quando a distância da periluna cresce muito;
- c) A energia mínima de captura alcança melhores mínimos quando a relação entre as massas dos primários, representada pelo parâmetro gravitacional, cresce.

O Capítulo 7 apresentou os resultados numéricos do estudo do tempo de captura. Os estudos apresentados no Capítulo foram inéditos e foram apresentados em um congresso internacional (Vieira Neto e Prado, 1995) e publicados em uma revista internacional (Vieira Neto e Prado, 1998). Este Capítulo apresentou o comportamento do tempo de captura em função de diversos parâmetros do problema de captura na dinâmica restrita circular de três corpos.

As principais conclusões do estudo foram:

- a) Tempo de captura em função da energia de captura: existem duas regiões de mínimo local, próximas a 150° e a 330° , em relação ao ângulo da posição da periluna, e duas regiões de máximo local, próximas a 60° e a 240° ;
- b) Tempo de captura em função do ângulo da posição da periluna: quando o ângulo foi fixado, o tempo de captura aumenta quando a energia de captura diminui;
- c) Tempo de captura em função da altura da periluna: existem dois comportamentos quando se mantém a energia de captura fixada, um na linha em que estão a Terra e a Lua, e outro perpendicular a esta linha. No primeiro caso o tempo de captura inicialmente cresce até uma determinada região, próxima a uma altitude de 30000 km da Lua, e depois volta a diminuir. Isto leva a crer que existe um equilíbrio das forças gravitacionais e de referencial nesta região. No segun-

do caso o tempo de captura inicialmente diminui até próximo dos 15000 km de distância da Lua e depois cresce. Isso mostra que o equilíbrio das forças age de forma diferente nesta região;

- d) Tempo de captura em função do parâmetro gravitacional: fixando o ângulo da posição da periluna e a energia de captura, o tempo de captura cresce quando o parâmetro gravitacional cresce.

Além disto, os conhecimentos gerados no Capítulo foram aplicados a dois problemas de otimização que apresentaram bons resultados (Vieira Neto e Prado, 1998).

No Capítulo 8 a dinâmica do problema restrito elíptico foi utilizada. Neste Capítulo o comportamento da excentricidade e da anomalia verdadeira foram comparados quando foram utilizados as dinâmicas circular e elíptica do sistema Terra-Lua. Para uma anomalia verdadeira de 0° a energia de captura alcança mínimos melhores para a dinâmica elíptica do que para a dinâmica circular. Este Capítulo também foi apresentado em um congresso internacional (Vieira Neto e Prado, 1996).

O Capítulo 9 faz uma análise da sensibilidade do vetor velocidade à variações de magnitude e direção. O objetivo deste Capítulo foi entender como os erros na trajetória podem influenciar a captura gravitacional e medir o grau de dificuldade do problema de otimizar uma manobra completa Terra-Lua.

10.3. Conclusões

O estudo da captura gravitacional temporária feito por Yamakawa já demonstrava a capacidade desse mecanismo diminuir a quantidade de combustível necessária para a circularização uma órbita em torno da Lua. Neste trabalho isso se confirmou e além disso foi apresentada uma explicação para o fenômeno ao estudar as forças que agem no sistema.

O estudo sobre o tempo de captura demonstrou que existem regiões privilegiadas para a captura com uma mesma energia $C3$. Nessas regiões a captura ocorre de forma mais rá-

pida do que noutras regiões.

O estudo sobre a captura elíptica demonstrou que a captura pode alcançar menores valores para a energia C3 quando ela ocorre quando a Lua esta em passagem pelo perigeu.

De forma geral, o mecanismo da captura gravitacional oferece uma boa opção de manobra que economiza combustível.

10.4. Propostas Para Pesquisas Futuras

A seqüência imediata deste trabalho é a aplicação destes resultados numa transferência completa da Terra para a Lua, onde poderá ser otimizado o consumo de combustível, aplicando conhecimentos gerados aqui e no trabalho de Yamakawa (1992), e em seguida otimizar o tempo, aplicando os conhecimentos deste trabalho.

Encontrar as equações da forças para o problema elíptico, a exemplo do que foi feito no Capítulo 5 desse trabalho para o caso circular, também deve dar novas informações sobre o fenômeno.

Relacionar a energia de dois corpos C3 com a constante de Jacobi também pode apresentar resultados interessantes.

Enfim, ainda existem muitos fatores a serem estudados nesse problema. Os resultados numéricos feitos aqui servem como base para um estudo analítico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alekseev, V.M. New examples of capture in the three-body problem. **Soviet Astronomy**, v. 6, n. 4, p. 567-572, 1963.
- Arenstorf, R.F. Existence of periodic solution passing near both masses of the restricted three-body problem. **AIAA Journal**, v. 1, p. 238, 1963.
- Bailey, J.M. Jupiter: its captured satellites. **Science**, v. 173, n. 3999, p. 812-813, 1971a.
- Bailey, J.M. Origin of the outer satellites of Jupiter. **Journal of Geophysical Research**, v. 76, n. 32, p. 7827-7832, 1971b.
- Bailey, J.M. Studies on planetary satellites. Satellite capture in the three-body elliptical problem. **Astronomical Journal**, v. 77, n. 2, p. 177-182, 1972.
- Belbruno, E.A. Lunar capture orbits, a method of constructing Earth-Moon trajectories and the lunar gas mission. **AIAA/DGLR/JSASS International Electric Propulsion Conference**, 19., Colorado Springs, 1987. (AIAA-87-1054) 10 p.
- Belbruno, E.A. **Breakdown of stable motion and the fuzzy boundary in the three dimensional restricted three-body problem with applications**. 1989. Comunicação pessoal.
- Belbruno, E.A. Examples of the nonlinear dynamics of ballistic capture and escape in the Earth-Moon system. **AIAA Astrodynamics Conference**, Portland, 1990. (AIAA-90-2896)
- Belbruno, E.A.; Miller, J.K. **A ballistic lunar capture trajectory for the Japanese spacecraft Hiten**. Pasadena, JPL, 1990a, (JPL IOM-90.4-1731).
- Belbruno, E.A.; Miller, J.K. **A ballistic lunar capture trajectory for the Lunar Observer mission**. 1990b, (JPL IOM-90.4-1752).
- Belbruno, E.A.; Ridenoure, R.W.; Fernandez, J. To the Moon from a B-52: robotic lunar exploration using the Pegasus winged rocket and ballistic lunar capture. In: Annual AIAA/Utah State University Conference on Small Satellites, 5.. **Proceedings**. Logan, Utah State University, 1991
- Benest, D. Elliptic restricted problem for Sun-Jupiter: existence of stable retrograde satellites at large distance. **Astronomical and Astrophysical Journal**, n. 13, p. 157-160, 1970.
- Broucke, R. Stability of periodic orbits in the elliptic, restricted three-body problem. **AIAA Journal**, v. 7, n. 6, p. 1003-1009, June, 1969.

- Byl, J.; Ovenden, M.W. On the satellite capture problem. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 173, n. 3, p. 579-584, 1975.
- Conley, C.C. Low energy transfer orbits in the restricted three-body problem. **SIAM Journal Applied Mathematics**, v. 16, n. 4, p. 732-746, 1968.
- Darwin, G.H. Periodic orbits. **Acta Mathematica**, v. 21, p. 90, 1897.
- Davidson, M.C. Numerical examples of transition orbits in the restricted three-body system. **Astronomical Acta**, v. 10, p. 308-313, 1964.
- Fesenkov, V.G. On the possibility of capture at close passages of attracting bodies. **Astronomicheskii zhurnal**, v. 23, n. 1, p. 45-48, 1946. (Astronomical Journal of the Soviet Union)
- Heppenheimer, T.A. On the presumed capture origin of Jupiter's outer satellites. **Icarus**, v. 24, n. 2, p. 172-180, 1975.
- Heppenheimer T.A.; Kaplan, D. Guidance and trajectory considerations in lunar mass transportation. **AIAA Journal**, v.15, n. 4, p. 518-525, 1977.
- Heppenheimer, T. A. A mass-catcher for large-scale lunar material transport. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 15, n. 4, p. 242-249, 1978a.
- Heppenheimer, T. A. Achromatic trajectories and lunar material transport for space colonization. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 15, n. 3, p. 176-183, 1978b.
- Heppenheimer, T. A. Steps towards space colonization: colony location and transfer trajectories. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 15, n. 5, p. 305-312, 1978c.
- Heppenheimer, T.A.; Porco, C. New contribution to the problem of capture. **Icarus**, v. 30, n.2, p. 385-401, 1977.
- Hohmann, W. **Die erreichbarkeit der himmelskorper**. Munique: s.e., 1925. 1 v.
- Hopf, E. Zwei satze uber den wahrscheinlichen Verlauf der Bewegungen dynamischer Systeme. **Mathematische Annalen**, v. 103, p. 710-719, 1930.
- Horedt, G.P. Capture of planetary satellites. **Astronomical Journal**, v. 81, n. 8, p. 675-678, 1976.
- Khil'mi, G.F. **Qualitative methods in the many-body problem**. New York: Gordon and Breach, 1961.
- Kondapalli, R.R.; Kuga, H.K. **Manual de uso de um conjunto de integradores numéricos para o problema de condições iniciais**. São José dos Campos, INPE, 1986. (INPE-3830-RPI/154).

- Krish; V.; Belbruno, E.A.; Hollister, W.M. An investigation into critical aspects of a new form of low energy lunar transfer, the Belbruno-Miller trajectories. In: AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Hilton Head Island, 1992. **Proceedings**. Washington, AIAA, 1992. P. 439-444
- Malcuit, R.J. Numerical simulation of gravitational capture of a lunar-like body by Earth. In: Lunar and Planetary Science Conference, 19., **Proceedings**. s.n.t. p. 581-591, 1989.
- Merman, G.A. On a criterion for the occurrence of a hyperbolic-elliptic motion in the problem of three bodies. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, v. 85, n. 4, p. 727-730, 1952.
- Merman, G.A. On sufficient conditions of capture in the restricted hyperbolic problem of three bodies with close binary approaches. **Byull. Inst. Teor. Astron.** v. 5, n. 9, p. 325-372, 1953.
- Merman, G.A. The restricted parabolic problem of three bodies. **Byull. Inst. Teor. Astron.** v. 5, n. 9, p. 606-616, 1954.
- Miller, J.K.; Belbruno, E.A. A method for the construction of a lunar transfer trajectory using ballistic capture. In: AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, 1. Houston, 1991. (AAS-91-100). **Proceedings**. San Diego, Univelt, 1991.
- Press, W.H.; Teukolsky, S.A.; Vetterling, W.T.; Flannery, B.P. **Numerical recipes in Fortran: the art of science computing**. Cambridge University Press, 1992.
- Roy, A.E. **Orbital motion**. Bristol: Adam Hilger, 1988.
- Schmidt, Y. The possibility of capture in celestial mechanics. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, v. 58, n. 2, p. 213-216, 1947.
- Sitnikov, K.A. The possibility of capture in the problem of three-bodies. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, v. 87, n. 4, p. 521-522, 1952.
- Sizova, O.A. The possibility of capture in the restricted problem of three bodies. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, v. 86, n. 3, p. 485-488, 1952.
- Sung, Chao-Ho. **The possibility of capture in the restricted and in the general problem of three bodies**. (Ph.D Thesis), Yale University, 1969. 93p.
- Sweetser, T. An estimate of the global minimum dV needed for Earth-Moon transfer. **AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting**, Houston, 1991. (AAS-91-101)
- Symon, K.R. **Mecânica**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1986. 685p.
- Szebehely, V.G. **Theory of orbits**. New York: Academic Press, 1967.

- Szebehely, V.; Evans, R.T. On the capture of the Moon. **Celestial Mechanics**, v. 21, p. 259-264, 1980.
- Tanabe, T.; Itoh, Y.; Ishii, N.; Yokota, H. Visiting libration points in the Earth-Moon system using a lunar swingby. In: International Symposium on Space Technology and Science, Tokyo, 1982. **Proceedings**. s.n.t.
- Tanikawa, K. Impossibility of the capture of retrograde satellites in the restricted three-body problem. **Celestial Mechanics**, v. 29, n.4, p. 367-402, 1983.
- Thuring, B. Zwei Spezielle Mondeinfang-Bahnen in der Raumfahrt um erde und Mond. **Astronautical Acta**, v. 5, p. 241, 1959.
- Vieira Neto, E.; Prado, A.F.B.A. A study of the gravitational capture in the restricted-problem. In: International Symposium on Space Dynamics, Toulouse, 1995. **Proceedings**. CNES, França, 1995, p. 613-622 (INPE-5658-PRE/1833)
- Vieira Neto, E. Prado, A.F.B.A. Study of the gravitational capture in the elliptical restricted three-body problem. In: International Symposium on Space Dynamics, Japan, 1995. **Proceedings**. ISAS, Japan, 1996, p. 202-207 (INPE-6728-PRE/2750)
- Vieira Neto, E. Prado, A.F.B.A. Time-of-flight analyses for the gravitational capture maneuver. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 21, n. 1, Jan.-Feb. 1998, p. 122-126. (INPE-6737-PRE/2759).
- Winter, O.C.; Murray, C.D. **Atlas of the planar, circular, restricted three-body problem**. I. Internal orbits. University of London, 1994. (QMW Math Notes 16).
- Yamakawa, H. **On Earth-Moon transfer trajectory with gravitational capture**. Dr. Dissertation, (University of Tokyo). December, 1992.
- Yamakawa; H.; Kawaguchi; J.; Ishii; N.; Matsuo, H. On Earth-Moon transfer trajectory with gravitational capture. In: AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Vitoria, August 1993. **Proceedings**. Hampton, NASA, 1993.
- Yegorov, V.A. **Certain problems of Moon flight dynamics**. (The Russian Literature of Satellites), Pt. 1, Intern. Phys. Index, New York, p. 115, 1958.
- Yegorov, V.A. **The capture problem in the three-body restricted orbital problem**. Washington, NASA, 1960. (NASA Technical Translation (TT) F-9), 16 p.

APÊNDICE A

FORMULAÇÃO EM COORDENADAS POLARES DO PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Este Apêndice está baseado no Apêndice A de Yamakawa (1992), sendo que as variáveis utilizadas por ele foram adequadas de forma a ficarem coerentes com a deste trabalho. A formulação em coordenadas polares terá como origem do sistema o primário de menor massa.

As equações de movimentos serão derivadas da formulação lagrangiana. Na Figura A.1 as coordenadas η , ξ representam o sistema de coordenadas inerciais com o baricentro dos primários como origem. As coordenadas x , y representam o sistema girante com origem também no baricentro dos primários. As coordenadas r , α representam as coordenadas polares em relação ao primário de menor massa. As massas dos primários estão em forma adimensional, isto é:

$$m_1 + m_2 = m, \mu_1 = \frac{m_1}{m}, \mu_2 = \frac{m_2}{m}, \quad (\text{A.1})$$

de forma que:

$$\mu_1 + \mu_2 = 1. \quad (\text{A.2})$$

Na equação (A.1) acima m_1 e m_2 representam as massas dos primários de maior e menor massa, respectivamente.

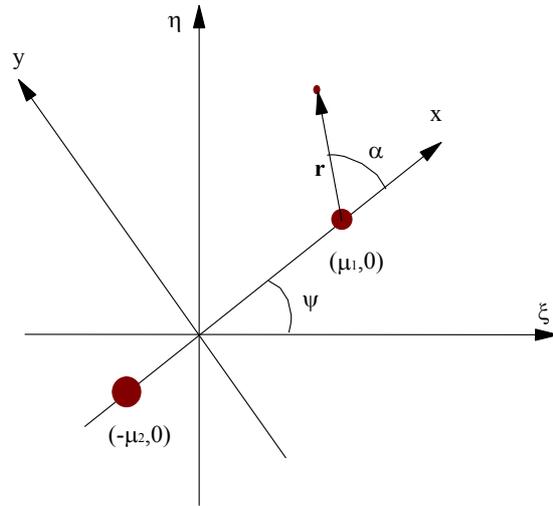


Fig. A.1 – Configuração polar do problema restrito de três corpos.

As transformações entre os sistemas de coordenadas estão apresentadas abaixo:

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos \psi - y \sin \psi \\ \eta &= x \sin \psi + y \cos \psi \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha + \mu_1 \\ y &= r \sin \alpha \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Portanto, as energias cinética (T) e potencial (U) têm as seguintes representações em coordenadas polares:

$$T = \frac{1}{2}(v_r^2 + v_\alpha^2) + rv_\alpha + \mu_1(v_r \sin \alpha + v_\alpha \cos \alpha) + \frac{1}{2}(\mu_1^2 + 2\mu_1 \cos \alpha + r^2), \quad (\text{A.5})$$

$$U = -\frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} = -\frac{\mu_1}{(1+r^2+2r\cos\alpha)^{1/2}} - \frac{\mu_2}{r}, \quad (\text{A.6})$$

sendo que:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\alpha = r \frac{d\alpha}{dt} \quad (\text{A.7})$$

e r_1 , r_2 são as distâncias do corpo em relação aos primários de maior e menor massa,

respectivamente.

Empregando o formalismo de Lagrange ($L = T - U$) se obtêm as seguintes equações de movimento:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{v_\alpha^2}{r} - 2v_\alpha - \mu_1 \cos \alpha - r + \frac{\mu_1 (r + \cos \alpha)}{(1 + r^2 + 2r \cos \alpha)^{3/2}} + \frac{\mu_2}{r^2} = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{2v_r v_\alpha}{r} + r \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2v_r + \mu_1 \sin \alpha - \frac{\mu_1 \sin \alpha}{(1 + r^2 + 2r \cos \alpha)^{3/2}} = 0. \quad (\text{A.9})$$

A energia de dois corpos C3 em relação ao primário de menor massa é definida por:

$$C3 = v^2 - \frac{2\mu_2}{r}, \quad (\text{A.10})$$

onde v é a velocidade total da partícula em relação ao primário de menor massa, isto é:

$$v^2 = v_r^2 + v_\alpha^2 + 2rv_\alpha + r^2, \quad (\text{A.11})$$

logo:

$$C3 = v_r^2 + v_\alpha^2 + 2rv_\alpha + r^2 - \frac{2\mu_2}{r}. \quad (\text{A.12})$$

De acordo com a Definição 1 da Seção 2.3, a condição para que haja captura gravitacional C3 tem que ser menor que zero na periapside e maior que zero fora da esfera de influência do primário de menor massa. Logo para que $C3 \leq 0$,

$$v_\alpha (v_\alpha + 2r) \leq -v_r^2 - \left(r^2 - \frac{2\mu_2}{r} \right). \quad (\text{A.13})$$

Quando r é maior do que $(2\mu_2)^{1/3}$ o segundo termo do lado direito fica negativo de tal forma que a velocidade angular fica restrita por:

$$-2r \leq v_\alpha \leq 0. \quad (\text{A.14})$$

Estas observações levam a seguinte proposição, em que o valor $(2\mu_2)^{1/3}$ é definido como a distância crítica do sistema (Yamakawa, 1992):

- a) Órbitas de movimento direto ($v_\alpha > 0$) não existem sob a condição de C3 não positivo, para o caso em que a distância do menor primário exceda a distância crítica (Yamakawa, 1992).

A distância crítica para o sistema Terra-Lua é de 111342 km.