ATRIBUIÇÃO DE ANTENAS A COMUTADORES EM REDES DE TELEFONIA CELULAR

Edson Luiz França Senne
Universidade Estadual Paulista – UNESP
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá – FEG
12516-410 Guaratinguetá, SP
elfsenne@feg.unesp.br

Luiz Antonio Nogueira Lorena
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE/LAC
12.201-970 São José dos Campos, SP
lorena@lac.inpe.br

RESUMO

Este trabalho descreve um algoritmo de Geração de Colunas para o problema de atribuição de antenas a comutadores em redes de telefonia celular. O Problema de Atribuição de Antenas a Comutadores (PAAC) consiste em determinar qual a maneira ótima de atribuir m comutadores a n antenas com posições fixas em uma dada região, de forma a minimizar todos os custos envolvidos, que compreendem custos de cabeamento entre antenas e comutadores e custos de transferência de chamadas entre comutadores. O problema é conhecido ser NP-difícil. O processo tradicional de geração de colunas é comparado com o algoritmo proposto, que combina o método de geração de colunas e a relaxação lagrangeana/*surrogate*. Testes computacionais demonstram a efetividade do algoritmo proposto.
Palavras-Chave: Problema de Atribuição, Atribuição de Antenas a Comutadores, Redes de Comunicação Móvel, Geração de Colunas, Relaxação Lagrangeana/*Surrogate*, Otimização Combinatória.

ABSTRACT

This work describes a column generation algorithm for the problem of assigning cells to switches in cellular mobile networks. The problem consists of determining a cell assignment pattern which minimizes a certain cost function while respecting certain constraints, especially those related to limited switch's capacity. The costs involved correspond to the cabling costs between a cell and a switch and transfer costs between cells assigned to different switches. The problem is known as an NP-hard problem. The traditional column generation process is compared with the proposed algorithm that combines the column generation and Lagrangean/surrogate relaxation. Computational experiments are conducted and confirm the effectiveness of the proposed algorithm.
Keywords*:* Assignment Problem, Assigning Cells to Switches, Cellular Mobile Networks, Column Generation, Lagrangean/Surrogate Relaxation, Combinatorial Optimization.

1. INTRODUÇÃO

Uma área geográfica atendida por serviços de telefonia celular, em geral, é dividida em unidades geográficas menores denominadas células. Cada célula possui uma antena de transmissão e recepção, também conhecida como estação rádio base. As antenas são responsáveis pela comunicação entre o equipamento celular móvel e um comutador, que tem a função de encaminhar o tráfego de chamadas entre antenas. Para efeito de estudo, as células de uma rede de telefonia celular são representadas por hexágonos, como mostra a Figura 1.

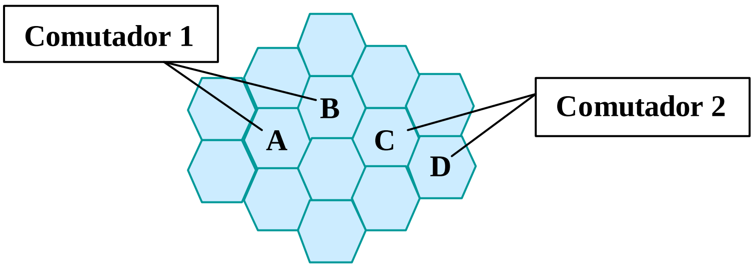

Figura 1 – Representação de Células em uma Rede de Comunicação

Durante uma chamada, conforme aumenta a distância entre a unidade móvel (celular) e a estação rádio base, o sinal se torna fraco e aumentam os ruídos provenientes de interferências da vizinhança. Para evitar isto, é preciso fazer uma transferência da chamada de uma antena para outra adjacente que esteja mais próxima do usuário. Esta transferência deve ser realizada para que o assinante não perca a qualidade do sinal enquanto estiver realizando uma chamada. Quando o assinante se move entre antenas atendidas por um mesmo comutador como, por exemplo, quando sai da célula A e entra na célula B da Figura 1, a transferência é simples e não acarreta custos consideráveis. No entanto, quando o assinante se move entre antenas atendidas por comutadores diferentes como, por exemplo, quando sai da célula B e entra na célula C da Figura 1, tem-se o denominado *rooming* e a transferência acarreta um custo, denominado custo de *handoff*, que precisa ser considerado.

O Problema de Atribuição de Antenas a Comutadores (PAAC) consiste em determinar qual a maneira ótima de atribuir m comutadores a n antenas (ou células) com posições fixas em uma dada região, de forma a minimizar os custos de cabeamento entre antenas e comutadores e os custos de *handoff*. O problema é conhecido como sendo NP-difícil (Garey e Johnson, 1979). Sejam:

- $M = \{ 1, ..., m \}$, o conjunto de índices de comutadores;
- $N = \{ 1, ..., n \}$, o conjunto de índices de antenas;
- c_{ij}, o custo de cabeamento entre o comutador i e a antena j ($i \in M, j \in N$);
- h_{jk}, o custo de *handoff* por unidade de tempo entre as células j e k ($j, k \in N$);
- λ_j, o volume de chamadas da célula j ($j \in N$);
- M_i, a capacidade de atendimento de chamadas do comutador i ($i \in M$);
- x_{ij}, uma variável de decisão binária, tal que $x_{ij} = 1$ se o comutador i está atribuído à antena j e $x_{ij} = 0$, caso contrário ($i \in M, j \in N$);

Com isto, o PAAC pode ser formulado como o seguinte problema de programação inteira:

$$\min \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} h_{jk} - \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} h_{jk} x_{ij} x_{ik} \qquad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = 1 \quad \forall\, j \in N \qquad (2)$$

$$\sum_{j \in N} \lambda_j x_{ij} \le M_i \quad \forall\, i \in M \qquad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall\, i \in M,\, j \in N \qquad (4)$$

A função-objetivo (1) busca minimizar os custos de cabeamento e de *handoff*. Observe que os custos de handoff só devem ser considerados para antenas atribuídas a comutadores diferentes. As restrições de atribuição (2) evitam que uma antena seja atribuída a mais de um comutador, as restrições de capacidade (3) impossibilitam que as capacidades de atendimento dos comutadores sejam violadas, e as restrições (4) correspondem às condições de integralidade das variáveis de decisão.

Diversas abordagens vêm sendo propostas para o PAAC. Merchant e Sengupta (1995) resolvem o problema por meio de heurísticas gulosas de atribuição de células a comutadores. A mesma abordagem é proposta por Saha et al. (2000). Abordagens que utilizam metaheurísticas como Busca Tabu (Pierre e Houéto, 2002), *Simulated Annealing* e Algoritmos Genéticos (Quintero e Pierre, 2002) e abordagens que combinam técnicas, como *Simulated Annealing* e Geração de Colunas (Menon e Gupta, 2004), já foram propostas para o PAAC. Um estudo comparativo de algumas técnicas propostas para o PAAC pode ser visto em (Quintero e Pierre, 2003).

Neste trabalho apresenta-se um método de solução para o PAAC, que combina a técnica de Geração de Colunas (Lorena e Senne, 2004; Senne et al., 2004) com a relaxação lagrangeana/*surrogate* (Narciso e Lorena, 1999). O artigo está organizado da maneira descrita a seguir. Na Seção 2, apresenta-se uma nova formulação do PAAC como um problema de cobertura de conjuntos e descreve-se o método proposto. Na Seção 3 são descritos os experimentos computacionais realizados e os resultados obtidos são apresentados e comparados com os de outras técnicas conhecidas. Finalmente, na Seção 4 são apresentadas as conclusões deste trabalho.

2. O MÉTODO PROPOSTO

O método de Geração de Colunas proposto neste trabalho considera a aplicação da decomposição de Dantzig-Wolfe (Dantzig e Wolfe, 1960) de forma a reformular o PAAC como um problema de cobertura de conjuntos. Para isto, considere que S é o conjunto de padrões de atribuição que satisfazem (3)-(4), onde cada padrão $s \in S$ é da forma: $(a_{1s}, \cdots, a_{ns}, b_{1s}, \cdots, b_{ms})^t$, tal que $a_{js} \in \{0,1\}$ $(j \in N)$ e $\exists\, k \in M$ tal que $b_{ks} = 1$ e $b_{is} = 0, \forall i \in M, i \neq k$, ou seja, $\{a_{1s}, \cdots, a_{ns}\}$ é um conjunto de índices de antenas atribuídas a um comutador k. Com isto, o PAAC pode ser reformulado como:

$$\text{Min} \sum_{s \in S} c_s x_s \qquad (5)$$

sujeito a:

$$\sum_{s \in S} a_{js} x_s = 1 \quad \forall\, j \in N \qquad (6)$$

$$\sum_{s \in S} b_{is} x_s \leq 1 \quad \forall\, i \in M \qquad (7)$$

$$x_s \in \{0,1\} \quad \forall\, s \in S \qquad (8)$$

onde c_s é o custo do padrão de atribuição (ou coluna) s, dado por:

$$c_s = \sum_{i=1}^{n} (c_{ki} + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}) a_{is} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} a_{is} a_{js} \qquad (9)$$

Para o método de Geração de Colunas, a formulação (5)-(8) estabelece o problema-mestre a ser considerado.

Após relaxar a restrição (2) no sentido lagrangeano/*surrogate* (ver Lorena et al., 2003) tem-se os seguintes m subproblemas:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^{n}[(c_{ki}+\sum_{j=1}^{n}h_{ij})-t\,\pi_i]x_{ki}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_{ij}x_{ki}x_{kj} \qquad (10)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{kj} \le M_k \qquad (11)$$

$$x_{kj}\in\{0,1\} \quad \forall\ j\in N \qquad (12)$$

onde: $k \in M$, π_i são as variáveis duais associadas às restrições (6) da relaxação de Programação Linear do problema-mestre restrito (5)-(7) e $t \geq 0$ é o valor do multiplicador lagrangeano/*surrogate*.

Assim, o método de Geração de Colunas proposto para o PAAC pode ser estabelecido com o seguinte algoritmo:

1) Determine um conjunto inicial de colunas para o problema (5)-(8);
2) Resolva a relaxação de Programação Linear do problema (5)-(7) considerando o conjunto atual de colunas, obtendo as variáveis duais π_j ($j \in N$), referentes às restrições (6) e μ_i ($i \in M$), referentes às restrições (7);
3) Estipule um valor apropriado para o multiplicador lagrangeano/*surrogate* t (ver Senne e Lorena, 2000);
4) Utilize as variáveis duais π_j ($j \in N$) e o valor do multiplicador t e resolva os subproblemas (10)-(12) para cada $k \in M$. Seja S' o conjunto de colunas referentes às soluções destes subproblemas;
5) Para cada coluna $s \in S'$, determine o custo reduzido da coluna por: $cr_s = c_s - \sum_{i=1}^{n}\pi_i a_{is} - \mu_k$, onde c_s é o custo da coluna s, conforme estabelecido em (9), e acrescente ao problema-mestre restrito (5)-(7) as colunas s tais que $cr_s < 0$;
6) Se, no passo anterior, nenhuma nova coluna foi acrescentada ao problema-mestre restrito, então pare. Caso contrário, volte para o passo 2.

3. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

O algoritmo proposto para o PAAC foi implementado na linguagem C e executado em um microcomputador Pentium III com 1.1 GHz e 512 MB de RAM. Foi utilizada a versão 7.5 do software CPLEX para a solução dos problemas de Programação Linear.

Para gerar as colunas iniciais do problema-mestre restrito resolve-se o problema sem considerar os custos de *handoff*, ou seja, determina-se a solução do seguinte problema generalizado de atribuição:

$$\min \sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{i\in M} x_{ij} = 1 \quad \forall\, j \in N$$
$$\sum_{j\in N} \lambda_j x_{ij} \le M_i \quad \forall\, i \in M$$
$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall\, i \in M,\ j \in N$$

Por razões práticas, considera-se apenas a primeira solução inteira obtida pelo CPLEX. Esta solução, denominada de *solução de referência*, é uma atribuição viável para o problema original (5)-(8).

Outras colunas são geradas aleatoriamente até que um número pré-determinado INICOLS de colunas sejam incluídas no problema-mestre inicial. Para isto utiliza-se o seguinte algoritmo:

```
Enquanto (ncols < INICOLS):
    Para i = 1 até m, faça:
        Para j = 1 até n, faça:
            Atribuir a antena j ao comutador i;
            L = { j };
            cap = M_i − λ_j ;
            Gerar aleatoriamente um índice de antena k (k ∉ L);
            Enquanto ( λ_k ≤ cap):
                Atribuir a antena k ao comutador i;
                L = L ∪ { k };
                cap = cap − λ_k ;
                Gerar aleatoriamente um novo índice de antena k, (k ∉ L);
            Fim_Enquanto
        Fim_Para (j)
    Fim_Para (i)
Fim_Enquanto
```

Cada coluna corresponde a um padrão de atribuição de antenas a um comutador, como estabelecido anteriormente. A dificuldade no caso do PAAC está no fato dos subproblemas geradores de colunas serem problemas da mochila com função-objetivo não linear. No entanto, para um determinado k, denominando $z_{ijk} = x_{ki}x_{kj}$, pode-se levar em conta as equações de linearização consideradas por Merchant e Sengupta (1995) e reescrever cada um dos m subproblemas (10)-(12) como:

$$\min \sum_{i=1}^{n}[(c_{ki} + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}) - t\pi_i]x_{ki} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij} z_{ijk} \tag{13}$$

sujeito a:

$$z_{ijk} - x_{ki} \le 0 \tag{14}$$
$$z_{ijk} - x_{kj} \le 0 \tag{15}$$
$$z_{ijk} - x_{ki} - x_{kj} \ge -1 \tag{16}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{ki} \le M_k \tag{17}$$
$$x_{ki} \in \{0,1\} \quad \forall\, i \in N \tag{18}$$

As seguintes heurísticas foram consideradas para a solução destes subproblemas a cada iteração do algoritmo de Geração de Colunas proposto:

- Heurística **Sub**: que consiste no procedimento que resolve separadamente os m subproblemas dados por (13)-(18) usando o *software* CPLEX. Deve-se observar que, como os subproblemas são resolvidos separadamente, ao final pode haver células atribuídas a mais de um comutador e mesmo células não atribuídas a comutador algum.

- Heurística **LSH**: uma adaptação do procedimento *Local Search Heuristic* proposto por Menon e Gupta (2004), que consiste em resolver, separadamente, cada subproblema k por meio do seguinte algoritmo:

    1) Ordenar as células em ordem crescente dos valores $(c_{ki} - t\,\pi_i)$, onde t é o multiplicador lagrangeano/*surrogate*;
    2) Alocar as células ao comutador k, segundo a ordenação, enquanto isso for possível, considerando a capacidade b_k do comutador;
    3) Para as células não atribuídas, tentar a atribuição de menor custo ainda possível, respeitando as restrições de capacidade dos comutadores.

- Heurística **GSH**: uma adaptação do procedimento *Global Search Heuristic* proposto por Menon e Gupta (2004), que consiste em resolver todos os m subproblemas por meio do seguinte algoritmo:

    1) Ordenar as células em ordem crescente segundo os valores de $(c_{ki} - t\,\pi_i)$, onde t é o multiplicador lagrangeano/*surrogate*;
    2) Seja $\{o_1, ..., o_{n*m}\}$ a ordenação dos pares (i, k) de índices das n células atribuídas aos m comutadores;
    3) Para j = 1, ..., n*m, faça:
        a. Seja o_j = (i, k);
        b. Alocar a célula i ao comutador k, caso a célula i ainda não esteja atribuída à comutador algum e a capacidade do comutador k não seja violada;
    4) Para as células não atribuídas, tentar a atribuição de menor custo ainda possível, respeitando as restrições de capacidade dos comutadores.

- Heurística **Ref**: usada para encontrar soluções viáveis melhores para o problema original, com base nas atribuições obtidas pela heurística Sub e pela solução de referência. A heurística Ref consiste nos seguintes passos:

    1) Selecionar dentre as atribuições obtidas através da heurística Sub, aquelas em que uma célula está atribuída a um único comutador;
    2) Para cada célula i ainda não atribuída, atribuí-la ao comutador k ao qual esta célula está atribuída na solução de referência, caso isto seja possível, ou seja, se a restrição de capacidade do comutador k não for violada. Caso contrário, procurar atribuir a célula i a um comutador com capacidade para recebê-la ao menor custo possível;
    3) Realizar trocas entre as n células e os m comutadores considerando o melhor ganho para a função-objetivo do problema original.
    4) Substituir a solução de referência pela solução obtida, caso esta solução seja viável e melhor do que a solução de referência atual.

Após resolver os subproblemas, as colunas candidatas a entrar no problema-mestre restrito são obtidas calculando-se o custo reduzido de cada coluna s da solução dos m subproblemas. No caso da heurística Ref, se as colunas obtidas proporcionarem uma melhora na solução de referência, então todas as colunas são adicionadas ao problema-mestre restrito, independentemente de seus custos reduzidos.

O método de Geração de Colunas proposto para o PAAC foi implementado utilizando três estratégias de resolução para os subproblemas:

- Estratégia **LG**: a cada iteração, os m subproblemas são resolvidos utilizando-se a heurística LSH. Caso o valor da solução obtida pelo CPLEX para o problema-mestre restrito não se altere, utiliza-se também a heurística GSH;
- Estratégia **GSR**: a cada iteração, os m subproblemas são resolvidos utilizando-se as heurísticas GSH, Sub e Ref;
- Estratégia **GLR**: a cada iteração, os m subproblemas são resolvidos utilizando-se as heurísticas GSH, LSH e Ref.

Em cada uma destas estratégias, todas as colunas obtidas pelas heurísticas são aproveitadas, segundo o critério de custo reduzido negativo. Os algoritmos de GC resultantes destas estratégias adotam os seguintes critérios de parada:

- A solução do problema-mestre restrito é menor ou igual à solução ótima do problema obtida pelo CPLEX para uma formulação que considera as equações de linearização de Merchant e Sengupta (1995);
- A solução do problema-mestre restrito não se altera por um número determinado de iterações (MAXREPEAT). Nos testes computacionais realizados considerou-se MAXREPEAT = 10;
- Nenhuma nova coluna é acrescentada ao problema-mestre restrito.

Para o experimento computacional foram consideradas as mesmas instâncias testadas por Menon e Gupta (2004). Para estas instâncias, o número de comutadores varia de 2 a 5 e os problemas estão classificados segundo o número de células nas seguintes em:

- Pequenos: o número de células varia de 15 a 60;
- Médios: o número de células varia de 75 a 150; e
- Grandes: o número de células varia de 175 a 250.

Nos testes realizados não se buscou o melhor multiplicador lagrangeano/*surrogate*. O valor do parâmetro t foi estabelecido inicialmente em 0.50 e, a cada iteração, este valor foi incrementado de 0.01 até atingir o valor 1.00, quando então é mantido inalterado. A média dos resultados obtidos para cada classe de problemas e para cada uma das estratégias LG, GSR e GLR, estão disponíveis nas Tabelas 1 a 3. Nestas tabelas:

- **TCplex** é o tempo gasto pelo CPLEX para determinar valor da solução ótima do problema (SO);
- **Iter** é o número de iterações do algoritmo de Geração de Colunas;
- **FCols** é o número final de colunas do problema-mestre restrito;
- **GapC** é o desvio percentual do limite de relaxação linear obtido (LCplex) em relação à solução ótima do problema, ou seja, GapC = 100*(SO – LCplex)/SO;
- **GapV** é o desvio percentual da melhor solução viável encontrada (MSV) em relação à solução ótima do problema, ou seja, GapV = 100*(SO – MSV)/SO;
- **Cpu** é o tempo gasto pelo algoritmo, em segundos.

Nestas tabelas, para cada uma das estratégias de resolução dos subproblemas geradores de colunas, são mostrados os resultados obtidos com o algoritmo proposto (que utiliza a relaxação lagrangeana/*surrogate*) e, entre colchetes, os resultados obtidos fixando-se t = 1, que corresponde ao método tradicional de Geração de Colunas utilizando a relaxação lagrangeana.

Tabela 1 – Resultados Obtidos pela Estratégia LG

Classe de Problemas	TCplex	Iter	FCols	GapC	GapV	Cpu
Pequenos	26,79	8 [8]	40 [44]	-0,336 [-0,349]	-0,336 [-0,349]	0,01 [0,01]
Médios	203,09	11 [10]	56 [54]	-0,211 [-0,210]	-0,211 [-0,210]	0,06 [0,05]
Grandes	327,61	12 [12]	65 [65]	-0,146 [-0,140]	-0,146 [-0,141]	0,18 [0,18]

Tabela 2 – Resultados Obtidos pela Estratégia GSR

Classe de Problemas	TCplex	Iter	FCols	GapC	GapV	Cpu
Pequenos	26,79	7 [7]	48 [48]	-0,048 [-0,060]	-0,210 [-0,247]	0,89 [1,67]
Médios	203,09	8 [9]	69 [71]	-0,167 [-0,169	-0,167 [-0,169]	10,33 [10,50]
Grandes	327,61	10 [11]	72 [77]	-0,122 [-0,122]	-0,122 [-0,122]	56,73 [63,12]

Tabela 3 – Resultados Obtidos pela Estratégia GLR

Classe de Problemas	TCplex	Iter	FCols	GapC	GapV	Cpu
Pequenos	26,79	9 [8]	58 [61]	-0,125 [-0,237]	-0,216 [-3,255]	0,31 [0,27]
Médios	203,09	12 [9]	100 [77]	-0,141 [-0,171]	-0,141 [-1,216]	10,01 [6,88]
Grandes	327,61	11 [12]	77 [90]	-0,122 [-0,125]	-0,122 [-3,019]	50,56 [56,41]

4. CONCLUSÃO

Consideradas as três estratégias de resolução dos subproblemas e os valores médios apresentados nas Tabelas 1 a 3, pode-se constatar que os algoritmos de Geração de Colunas propostos para o PAAC são bem mais rápidos do que o CPLEX e que a versão do algoritmo que utiliza a relaxação lagrangeana/*surrogate*, no que se refere aos indicadores: número de iterações, número final de colunas do problema-mestre restrito, desvio percentual da solução de relaxação linear em relação à solução ótima do problema e tempo computacional, apresenta resultados semelhantes aos obtidos pela versão do algoritmo que utiliza a relaxação lagrangeana tradicional, ainda que, em geral, ligeiramente melhores, como mostra a Tabela 4. No entanto, pode-se perceber que a qualidade (medida pelo indicador GapV) da melhor solução viável encontrada pelo algoritmo que utiliza a relaxação lagrangeana/*surrogate* é bem superior do que a encontrada pela outra versão do algoritmo.

Tabela 4 – Valores Médios Gerais de Indicadores

Tempo	Iter	FCols	GapC	GapV	Cpu
185,83	9,78 [9,56]	65,00 [65,22]	-0,16 [-0,18]	-0,19 [-0,97]	14,34 [15,45]

Na comparação entre as três estratégias de resolução dos subproblemas, a estratégia LG é muito superior às outras duas em relação ao tempo computacional, embora a qualidade das soluções relaxada (medida pelo GapC) e viável (medida pelo GapV) seja melhor para a estratégia GSR, como mostra a Tabela 5.

Tabela 5 – Comparação de Estratégias de Resolução de Subproblemas

Estratégia	Iter	FCols	GapC	GapV	Cpu
LG	10,33 [10,00]	53,67 [54,33]	-0,23 [-0,23]	-0,23 [-0,23]	0,08 [0,08]
GSR	8,33 [9,00]	63,00 [65,33]	-0,11 [-0,12]	-0,17 [-0,18]	22,65 [25,10]
GLR	10,67 [9,67]	78,33 [76,00]	-0,13 [-0,18]	-0,16 [-2,50]	20,29 [21,19]

A Tabela 6 apresenta valores médios considerados todos os problemas e compara os resultados obtidos pelos métodos propostos neste trabalho com os resultados apresentados por Menon e Gupta (2004). Na Tabela 6:

- **Método** corresponde ao método utilizado, onde GC/LG, GC/GSR e GC/GLR são os métodos de Geração de Colunas propostos, usando as estratégias LG, GSR e GLR, respectivamente, e MG é o método de Menon e Gupta (2004);

- **Gap** corresponde aos desvios percentuais, que no caso dos métodos propostos é calculado como: $\text{Gap} = 100 * \left| \frac{\text{LCplex} - \text{MSV}}{\text{MSV}} \right|$, onde LCplex e MSV são conforme estabelecidos para as Tabelas 1 a 3, e no caso do método MG é calculado como: $\text{Gap} = 100 * \left| \frac{\text{UB} - \text{LB}}{\text{LB}} \right|$, onde UB é o valor da melhor solução viável obtida e LB é o valor obtido pela relaxação linear do problema;

- **Cpu** é o tempo computacional, em segundos.

Tabela 6 – Comparação de Resultados para o PAAC

Método	Gap	Cpu
GC/LG	0,23	0,08
GC/GSR	0,17	22,65
GC/GLR	0,16	20,29
MG	0,89	0,26

Embora esta comparação não possa ser considerada perfeita, pois os valores de Gap são calculados de forma diferente e os valores de Cpu foram obtidos em ambientes computacionais distintos (microcomputador Pentium III com 1.1 GHz e 512 MB de RAM e software CPLEX versão 7.5, para os métodos propostos, e microcomputador Pentium 4 2.4 GHz e software LINDO, para o método MG), os valores da Tabela 6 apresentam alguma evidência sobre o desempenho dos métodos propostos, demostrando que a utilização da relaxação lagrangeana/*surrogate* é vantajosa em métodos de Geração de Colunas para o PAAC.

Agradecimentos: Os autores agradecem ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelos apoios financeiros recebidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Dantzig, G.B.; Wolfe, P. Decomposition princliple for linear programs. **Operations Research**, 8: 101-111, 1960.

[2] Garey, M.R.; Johnson, D.S. **Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness**. San Francisco: W.H. freeman and Co., 1979. 340p.

[3] Lorena, L.A.N., Pereira, M.A.; Salomão, S.N.A. A relaxação lagrangeana/surrogate e o método de geração de colunas: novos limitantes e novas colunas. **Revista Pesquisa Operacional**, 23(1): 29-47, 2003.

[4] Lorena. L.A.N.; Senne, E.L.F. A column generation approach to capacitated p-median problems. **Computers and Operations Research**, 31(6): 863-876, 2004.

[5] Menon, S.; Gupta, R. Assigning cells to switches in cellular networks by incorporating a pricing mechanism into simulated annealing. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B**, 34(1): 558-565, 2004.

[6] Merchant, A.; Sengupta, B. Assignment of cells to switches in PCS networks. **IEEE/ACM Transactions on Networks**, 3(5): 521-526, 1995.

[7] Narciso, M.G.; Lorena, L.A.N. Lagrangean/surrogate relaxation for generalized assignment problem. **European Journal of Operational Research**, 114: 165-177, 1999.

[8] Pierre, S.; Houéto, F. Assigning cells to switches in cellular mobile networks using taboo search. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, Part B, 32(3): 209-224, 2002.

[9] Quintero, A.; Pierre S. A memetic algorithm for assigning cells to switches in cellular mobile networks. **IEEE Communication Letters**, 6(11): 484-486, 2002.

[10] Quintero, A.; Pierre S. Assigning cells to switches in cellular mobile networks: a comparative study. **Computer Communications**, 26(9): 950-960, 2003.

[11] Saha, D.; Mukherjee, A.; Bhattacharya, P. A simple heuristic for assignment of cells to switches in a PCS network. **Wirelles Personal Communications**, 12(3): 209-223, 2000.

[12] Senne, E.L.F.; Lorena, L.A.N. **Lagrangean/surrogate heuristics for p-median problems.** In: Computing tools for modeling, optimization and simulation: interfaces in computer science and operations research. M. Laguna and J.L. Gonzalez-Velarde (eds.). Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 115-130.

[13] Senne, E.L.F.; Lorena, L.A.N.; Salomão, S.N.A. **Uma abordagem de geração de colunas para o problema generalizado de atribuição**. Anais do XXIV Encontro Nacional de Engenharia de Produção (ENEGEP), 2004.