

CÁLCULO NUMÉRICO DE RAMOS DE SOLUÇÕES E DE PONTOS DE BIFURCAÇÃO EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Mário César Ricci

mcr@dem.inpe.br

Divisão de Mecânica Espacial e Controle, INPE

Av. dos Astronautas, 1758, 12227-010, São José dos Campos - SP – Brazil

***Abstract.** Esse trabalho aborda o tema da determinação numérica de ramos de soluções e de pontos de bifurcação para sistemas de equações diferenciais ordinárias não-lineares. Ramos de soluções e pontos de bifurcação são usualmente mostrados em gráficos denominados diagramas de bifurcação que trazem algum aspecto da solução em regime permanente, tal como a componente y_1 (ou a norma da componente) do vetor de soluções em função de um parâmetro do sistema $\alpha \in \mathbf{R}$, por exemplo. Pode-se mostrar que um ramo de soluções estacionárias é uma curva suave $y_1(\alpha)$. Um ponto de bifurcação caracteriza uma alteração na qualidade das soluções e advém 1) da intersecção de dois ou mais ramos ou 2) do retorno do ramo no diagrama, onde obrigatoriamente a tangente a curva $y_1(\alpha)$, no ponto de retorno, é perpendicular ao eixo α . Se o sistema admite solução trivial $y_1(\alpha) = 0, \forall \alpha \in \mathbf{R}$, então o eixo α é o ramo de soluções triviais. Qualquer outro ramo de soluções estacionárias é um ramo de soluções não triviais. Pontos de bifurcação sobre o eixo α são chamados de pontos de bifurcação primários. Pontos de bifurcação fora do eixo α são chamados de pontos de bifurcação secundários. Têm-se ainda pontos de bifurcação simples (múltiplos) resultado da intersecção de dois (mais de dois) ramos. Um ponto de bifurcação complexo (ou de Hopf, 1942) é um ponto de bifurcação onde órbitas periódicas dependentes do tempo emergem de soluções estacionárias. Serão descritos os métodos desenvolvidos por Seydel (1979) e (1981) para cálculo de pontos de bifurcação e de ramos de soluções estacionárias e periódicas em equações diferenciais ordinárias. Para serem implementados os métodos necessitam de um algoritmo para solução de problemas do valor de contorno em dois pontos. Um poderoso algoritmo desenvolvido por Bulirsch e Stoer (1966), denominado método dos múltiplos tiros, foi utilizado na solução de problemas do valor de contorno em dois pontos, para alguns exemplos descritos na literatura especializada.*

Keywords: Pontos de bifurcação, Ramos de soluções, Cálculo numérico, EDO's

1. INTRODUÇÃO

Na matemática aplicada, muitos problemas são descritos por equações diferenciais ordinárias não lineares que dependem de parâmetros reais. A estrutura das soluções pode se alterar, de uma forma dramática, em certos pontos críticos do parâmetro chamados *pontos de bifurcação*. A área que trata desses fenômenos não lineares é a *teoria das bifurcações* que vem se desenvolvendo desde Poincaré (1885). Uma revisão da teoria é encontrada em Keller & Antmann (1969), Pimbley (1969) e Stakgold (1971).

Para determinar um ponto de bifurcação numericamente pode-se utilizar: a) *métodos indiretos* onde um ramo de soluções estacionárias é obtido selecionando os valores do parâmetro através de um processo de continuação. A cada passo os sinais das partes reais dos autovalores do sistema linearizado são monitorados (uma função especial é utilizada). A troca de sinais significa alteração na estabilidade e, portanto, indica a bifurcação. Técnicas de interpolação ou extrapolação fornecem uma aproximação do ponto de bifurcação; ou b) *métodos diretos* onde um sistema adequado é formulado e resolvido de uma só vez. Uma revisão e classificação excelentes dos métodos numéricos para problemas de bifurcação, suas aplicações, técnicas analíticas, técnicas de transformação, métodos de discretização, determinação numérica de pontos de bifurcação, etc. são encontrados em Mittelman & Weber (1980).

Esse trabalho descreve um método numérico desenvolvido por Seydel (1979), para o cálculo de pontos de bifurcação em problemas não lineares do valor de contorno em dois pontos, descritos por equações diferenciais ordinárias. É um *método direto* que foi escolhido pelo autor devido principalmente às facilidades de implementação e automatização.

Primeiramente é dada a definição de um ponto de bifurcação. Em seguida a essência do método é focalizada onde o problema do valor de contorno dado é transformado num outro problema do valor de contorno com o dobro das equações do problema original, envolvendo derivadas parciais de primeira ordem. Cada solução do sistema estendido é um ponto de bifurcação e, portanto, tudo que o método necessita é de um procedimento numérico para solução de problemas do valor de contorno em dois pontos.

Logo após, dedica-se um espaço para a obtenção de valores iniciais, para o sistema estendido, visando à viabilidade da convergência do método. Uma função de teste é, logo após, inserida a qual fornece informações valiosas quanto à proximidade de pontos de bifurcação num processo de continuação.

Em seguida, é descrita a vantagem de se utilizar o método dos múltiplos tiros, um algoritmo desenvolvido por Bulirsch & Stoer (1966), no cômputo dos valores iniciais para o sistema estendido e das funções de teste.

Continuando com o trabalho, é abordada a questão do cálculo numérico de órbitas periódicas que bifurcam a partir soluções estacionárias.

Finalmente, na última seção, são apresentados resultados numéricos. São calculados pontos de bifurcação para quatro exemplos práticos em diferentes áreas de aplicação. Um deles mostra a conexão com a teoria das catástrofes. Nos três primeiros são obtidos pontos de bifurcação para soluções estacionárias. O último trata de pontos de bifurcação complexos, onde órbitas periódicas emanam de soluções estacionárias.

2. DEFINIÇÃO DE PONTO DE BIFURCAÇÃO

Considere um operador não linear, $\Psi : \mathbf{Y} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{X}$ onde \mathbf{Y}, \mathbf{X} são espaços de Banach¹ e \mathbf{K} pode ser o campo dos números reais ou complexos. Considere a equação

$$\Psi(y, \alpha) = 0. \quad (1)$$

Supondo que $\Psi(y_0, \alpha_0) = 0$ para algum $y_0 \in \mathbf{Y}$ e $\alpha_0 \in \mathbf{K}$, o interesse é resolver a Eq. (1) para alguma vizinhança de $(y, \alpha) = (y_0, \alpha_0)$. De acordo com o *teorema das funções implícitas*, demonstrado por Hildebrandt e Graves (1927), se a derivada de Fréchet (ver apêndice B.1 de Ruelle (1989)), $\Psi_y(y_0, \alpha_0)$, é um homomorfismo² de \mathbf{Y} em \mathbf{X} (o que equivale a dizer que $\Psi_y(y_0, \alpha_0)$ tem inversa limitada), então existe um único *ramo* suave de soluções $(y(\alpha), \alpha)$ da Eq. (1) tal que $\Psi(y(\alpha), \alpha) = 0$ com $y(\alpha_0) = y_0$, definido para $|\alpha - \alpha_0|$ menor que algum $\varepsilon_0 > 0$. Tais soluções são ditas *não singulares* ou *regulares* e são mostradas como curvas (ramos) em gráficos que geralmente trazem algum aspecto da solução y em regime permanente no eixo das ordenadas e o parâmetro α no eixo das abscissas. Por exemplo, o diagrama de bifurcações pode mostrar alguma *norma* envolvendo um ou mais componentes do vetor y ou o valor de um componente do vetor de soluções num determinado instante do intervalo de integração (que, por tratar-se de soluções estacionárias, representa o valor fixo resultante da componente em todo o intervalo de integração).

A teoria das bifurcações estuda o caso onde $\Psi_y(y_0, \alpha_0)$ não tem inversa limitada. Nesta situação singular há uma variedade de possíveis conjuntos de soluções da Eq. (1). Neste caso (y_0, α_0) pode ser um *ponto de reversão* (“turning point”) de uma curva de soluções da Eq. (1) ou um *ponto de bifurcação simples* onde dois diferentes ramos de soluções se interceptam sem tangência. Outra possibilidade é a ocorrência de um *ponto de bifurcação múltiplo*, onde mais de dois ramos se interceptam.

A Fig. 1 mostra um diagrama de bifurcações hipotético trazendo a primeira componente do vetor de soluções em função do parâmetro real α . O diagrama é constituído de 5 ramos de soluções estacionárias a), b), c), d) e e). O ramo de soluções a) é o ramo de soluções triviais. Os ramos restantes são denominados de ramos de soluções não triviais. O ponto de bifurcação f) é um ponto de bifurcação primário. Os pontos g), h) e i) são pontos de bifurcação secundários. O ponto g) é um ponto de bifurcação simples. O ponto h) é um ponto de reversão e o ponto i) é um ponto de bifurcação múltiplo.

No caso da Eq. (1) possuir a *solução trivial* $y = 0$ para todo $\alpha \in \mathbf{R}$, a bifurcação a partir do ramo trivial é chamada de *bifurcação primária* (o nome *bifurcação* às vezes é usado indiscriminadamente, ver Langford, (1977) e Vainberg, (1964)). A maioria dos trabalhos e métodos sobre a teoria das bifurcações trata da bifurcação a partir da solução básica trivial. A ramificação a partir de uma solução mais geral não trivial (*bifurcação secundária*) pode ser reduzida ao caso de uma bifurcação primária, por meio de uma transformação apropriada do problema, caso se conheça explicitamente a *solução básica* $y(\alpha)$. Em métodos numéricos, a solução básica é desconhecida e a bifurcação secundária não pode ser reduzida. Logo, os métodos de investigação de bifurcações primárias não podem ser aplicados à maioria dos problemas envolvendo fenômenos não lineares.

¹ Definições e resultados relativos a espaços de Banach podem ser encontrados nos apêndices A.4 e A.5 de Ruelle (1989). O primeiro exemplo que se tem em mente é $\mathbf{X} = \mathbf{R}^m$ equipado com a norma euclidiana

$$\|x\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}.$$

² Uma função biunívoca que é contínua e tem inversa contínua é chamada um *homomorfismo*.

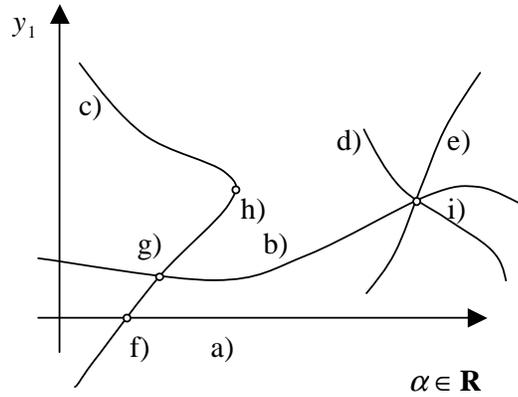


Figura 1 - Diagrama de bifurcações hipotético mostrando a primeira componente do vetor de soluções em função do parâmetro α . a) ramo de soluções triviais. b) a e) ramos de soluções não-triviais. f) ponto de bifurcação primário. g) ponto de bifurcação secundário simples. h) ponto de reversão. i) ponto de bifurcação secundário múltiplo.

Apenas a título de informação, para dar um exemplo simples e concreto envolvendo bifurcação, considere o seguinte problema retirado de Stakgold, (1971):

$$F(u, \lambda) = u(cu^2 + L - \lambda) = 0,$$

onde $\mathbf{Y} = \mathbf{X} = \mathbf{K} = \mathbf{R}$, $L, c, \lambda \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$.

O interesse é obter o diagrama de bifurcação em função do parâmetro λ . O problema tem solução $u = 0$ para todo λ . Se $c > 0$ tem-se duas soluções não-triviais para $\lambda > L$, dadas por $u = \pm\sqrt{(\lambda - L)/c}$, conforme a Fig. 2.

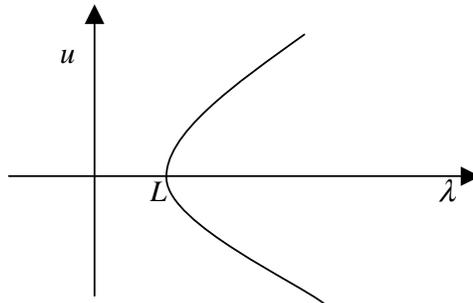


Figura 2 - Diagrama de bifurcações para $F(u, \lambda)$.

2.1 Critério Suficiente para Bifurcações

A questão de $\Psi_y(y_0, \alpha_0)$ não ser inversível num ponto de bifurcação é crucial na determinação numérica desses pontos. (y_0, α_0) é um ponto de bifurcação da Eq. (1) se, para Ψ, Ψ_y contínuas, $\varphi: \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{R}$ um funcional com $\varphi(0) = 0$ e $C \neq 0$ um número arbitrário na imagem de φ , há um $h \in \mathbf{Y}$ tal que

$$(i) \Psi(y_0, \alpha_0) = 0, \quad (2a)$$

$$(ii) \Psi_y(y_0, \alpha_0)h = 0 \text{ e} \quad (2b)$$

$$(iii) \varphi(h) = C. \quad (2c)$$

Pela Eq. (2c) $\varphi(h) = C \neq 0 \Rightarrow h \neq 0$. Nesse caso, a Eq. (2b) tem uma solução não trivial e Ψ_y não tem inversa. Portanto, (y_0, α_0) é um ponto de bifurcação.

3. CÁLCULO NUMÉRICO DE PONTOS DE BIFURCAÇÃO EM EDO'S

Considere o problema do valor de contorno em dois pontos

$$y' = f(\alpha, x, y) \quad (3a)$$

$$r(y(a), y(b)) = 0, \quad (3b)$$

onde x é a variável independente, $a \leq x \leq b$, ' denota derivada com relação a x , $y: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $f: [a, b] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$, $r: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Suponha que f é contínua e tenha as derivadas parciais de primeira ordem com relação a y_i , $i = 1, \dots, n$, contínuas.

Linearizando a Eq. (3) em torno de uma solução conhecida y tem-se

$$(y+h)' = f(\alpha, x, y) + f_y(\alpha, x, y)h \quad (3c)$$

$$\frac{\partial r(y(a), y(b))}{\partial y(a)} h(a) + \frac{\partial r(y(a), y(b))}{\partial y(b)} h(b) = 0, \quad (3d)$$

onde f_y é a matriz de derivadas parciais de f com relação a y e $h: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ é uma pequena perturbação em torno da solução conhecida.

Tomando a Eq. (3b) e o lado direito da Eq. (3a) como o operador não linear da Eq. (1), a equação linearizada correspondente a Eq. (2b) é dada por

$$h' = f_y(\alpha, x, y)h \quad (4a)$$

$$Ah(a) + Bh(b) = 0, \quad (4b)$$

onde $A \equiv \frac{\partial r(y(a), y(b))}{\partial y(a)}$ e $B \equiv \frac{\partial r(y(a), y(b))}{\partial y(b)}$.

Para aplicar o critério do item 2.1 há a necessidade de um funcional $\varphi(h)$. Um funcional muito simples que pode ser utilizado é

$$\varphi(h) \equiv h_k(a), \quad 1 \leq k \leq n, \quad (5)$$

desde que o índice k seja escolhido de tal forma que não haja condição inicial imposta sobre $y_k(a)$, ou seja,

$$k \notin \Theta \equiv \{1 \leq j \leq n \mid \exists i, 1 \leq i \leq n, \exists \eta \in \mathbf{R} \text{ tal que } r_i(y(a), y(b)) = y_j(a) - \eta\}. \quad (6)$$

Essa escolha parece contraditória mas não é pois, dado que se escolhesse $j \in \Theta$ para o índice, isso levaria a $h_j(a) = 0$ devido a Eq. (4b).

Agora podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1. Suponha que o vetor $(2n+1)$ -dimensional

$$Y_0(x) \equiv \begin{pmatrix} y_0(x) \\ \alpha_0 \\ h_0(x) \end{pmatrix}$$

resolva o problema do valor de contorno

$$Y' = F(x, Y) \equiv \begin{pmatrix} f(\alpha, x, y) \\ 0 \\ f_y(\alpha, x, y)h \end{pmatrix},$$

$$R(Y(a), Y(b)) \equiv \begin{pmatrix} r(y(a), y(b)) \\ Ah(a) + Bh(b) \\ h_k(a) - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Então (y_0, α_0) é um ponto de bifurcação da Eq. (3).

Prova. O teorema é provado da seguinte maneira:

$$Y' = F(x, Y) \Rightarrow \begin{cases} y' = f(\alpha, x, y) \\ \alpha \text{ constante} \\ h' = f_y(\alpha, x, y)h, \end{cases}$$

$$R(Y(a), Y(b)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r(y(a), y(b)) = 0 \\ Ah(a) + Bh(b) = 0 \\ h_k(a) = 1. \end{cases}$$

Por conseguinte, y_0, α_0 e h_0 resolvem as Eqs. (2), (3) e (4). $\varphi(0) = 0$, $C = 1 \in \text{Im}(\varphi)$ e a prova está completa.

Para calcular pontos de bifurcação para o problema descrito pela Eq. (3) o TPBVP do TEOREMA 1 deve ser resolvido. O índice k não é unicamente determinado pela Eq. (6). Seydel mostrou um exemplo em que o índice se alterava com a ramificação. No entanto, para os propósitos desse trabalho, a escolha

$$k = \min_{1 \leq j \leq n} \{j \notin \Theta\} \quad (7)$$

mostrou-se eficaz.

3.1 Caso Especial de Bifurcações Primárias

Para calcular pontos de bifurcação a partir da solução trivial $y = 0$ o seguinte problema do valor de contorno $(n+1)$ -dimensional (uma simplificação do problema do TEOREMA 1) deve ser resolvido

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ h \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 \\ f_y(\alpha, x, y)h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Ah(a) + Bh(b) \\ h_k(a) - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (8)$$

Resolvendo a Eq. (8) obtém-se o valor α_0 do ponto de bifurcação $(0, \alpha_0)$.

3.2 Adição de Variáveis Auxiliares

A resolução dos problemas até agora vistos simplesmente obtém o ponto de bifurcação sem, contudo, fornecer informações a respeito da natureza do mesmo. É necessário saber, por exemplo, as posições angulares assim como a quantidade de ramos que emergem do ponto. Para obter tais informações é necessário calcular soluções regulares próximas aos pontos de bifurcação. Nesse caso, é conveniente introduzir variáveis auxiliares na Eq. (3). Além da variável do parâmetro $y_{n+1} \equiv \alpha$, outra variável auxiliar deve ser utilizada, definida por

$$y_{n+2}(x) \equiv \int_a^x y_j^2(\tau) d\tau, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (9)$$

Fazendo $j = 1$, p. e., esta variável satisfaz

$$\|y_1\|^2 = y_{n+2}(b),$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma do \mathbf{R}^2 . As condições de contorno do problema de valor de contorno de dimensão $n_1 := n+2$ a ser resolvido deve prescrever o valor η_1 de α ou o valor η_2 de $\|y_1\|^2$:

$$\begin{pmatrix} r(y(a), y(b)) \\ y_{n_1}(a) \\ \alpha(a) - \eta_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (10a)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \\ y_{n_1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f(\alpha, x, y) \\ 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r(y(a), y(b)) \\ y_{n_1}(a) \\ y_{n_1}(b) - \eta_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (10b)$$

Utiliza-se a Eq. (10) para determinar ramos de soluções estacionárias através de métodos de continuação ou homotopia e para determinar soluções próximas a um ponto de bifurcação. Em vários casos, como por exemplo, no cálculo de soluções não triviais próximo a uma bifurcação primária deve-se preferir a Eq. (10b). Nesse caso, resolve-se a Eq. (8) e subseqüentemente a Eq. (10b) com um pequeno valor $\eta_2 > 0$. Verifica-se, portanto, que utilizando as variáveis auxiliares facilmente obtém-se dados que propiciam a construção de diagramas de bifurcações.

Se a variável auxiliar y_{n_1} é acrescentada ao problema do TEOREMA 1 tem-se a seguinte forma final para o sistema

$$Y(x) := \begin{pmatrix} y(x) \\ \alpha \\ y_{n_1}(x) \\ h(x) \end{pmatrix}, \quad Y' = F(x, Y) := \begin{pmatrix} f(\alpha, x, y) \\ 0 \\ y_1^2 \\ f_y(\alpha, x, y)h \end{pmatrix},$$

$$R(Y(a), Y(b)) := \begin{pmatrix} r(y(a), y(b)) \\ y_{n_1}(a) \\ Ah(a) + Bh(b) \\ h_k(a) - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (11)$$

O sistema dado pela Eq. (11), de dimensão $n_2 := n_1 + n = 2(n+1)$, foi codificado, juntamente com as Eqs. (8) e (10), para alguns problemas da literatura na busca de ramos e pontos de bifurcação estacionários. Dado que a condição inicial para o vetor h , tema que será abordado na seção 4, determina a convergência do método da Eq. (11) e, portanto, a obtenção dos pontos de bifurcação, adotou-se a metodologia de se aproximar do ponto de bifurcação utilizando a Eq. (10) e daí, calculando uma boa aproximação \bar{h} para h_0 , resolve-se a Eq. (11).

4. CONDIÇÕES INICIAIS PARA O CÁLCULO DE BIFURCAÇÕES

Nesta seção é desenvolvido um método para o cálculo dos valores iniciais do problema dado pela Eq. (11), sem os quais a resolução pode ser extremamente difícil. No processo de homotopia utiliza-se a Eq. (10) para obtenção de soluções regulares. Supõe-se, então, que a solução $(\bar{y}, \bar{\alpha})$ do problema do valor de contorno dado pela Eq. (3) foi obtida e está próxima do ponto de bifurcação (y_0, α_0) .

O problema linear do valor de contorno

$$h' = f_y(\bar{\alpha}, x, \bar{y})h, \quad \begin{pmatrix} Ah(a) + Bh(b) \\ h_k(a) - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (12)$$

não tem solução para $(\bar{y}, \bar{\alpha}) \neq (y_0, \alpha_0)$. Removendo a l -ésima condição, dentre as $(n+1)$ condições de contorno, obtém-se um sistema solúvel

$$h' = f_y(\bar{\alpha}, x, \bar{y})h, \quad \begin{pmatrix} (I - P_l)(Ah(a) + Bh(b)) \\ h_k(a) - 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (13)$$

onde I denota a matriz identidade e P_l é definida por

$$P_l := e_l e_l^T, \quad (14)$$

com $e_l := l$ -ésimo versor do \mathbf{R}^n , $1 \leq l \leq n$.

A solução \bar{h} da Eq. (13) depende de $(\bar{y}, \bar{\alpha})$ e espera-se que esteja próxima de h_0 para $(\bar{y}, \bar{\alpha})$ próximo de (y_0, α_0) .

Para resolver a Eq. (13) é necessário armazenar $f_y(\bar{\alpha}, x, \bar{y})$. Isto também tem que ser codificado na Eq. (11) para a obtenção do ponto de bifurcação. Então, é conveniente uma modificação nas condições de contorno da Eq. (11) para permitir o cálculo de \bar{h} que será utilizado como dado inicial para a Eq. (11). Tal sistema modificado também é linear e, portanto, a solução numérica não é difícil de ser obtida

$$Y' = F(x, Y),$$

$$\bar{R}(Y(a), Y(b)) := \begin{pmatrix} y(a) - \bar{y}(a) \\ \alpha - \bar{\alpha} \\ y_{n_1}(a) \\ (I - P_l)(Ah(a) + Bh(b)) \\ h_k(a) - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (15)$$

5. MAPEAMENTO τ

Se $(\bar{y}, \bar{\alpha}) \neq (y_0, \alpha_0)$ então a solução $Y(x)$ da Eq. (15) difere da solução $Y_0(x)$ da Eq. (11). Esta diferença pode ser medida pelo valor $\tau \in \mathbf{R}$ da condição de contorno que foi retirada da Eq. (12)

$$\tau := e_l^T (Ah(a) + Bh(b)). \quad (16)$$

Então, $Y(x)$ é, ao mesmo tempo, solução do seguinte problema do valor de contorno

$$Y' = F(x, Y),$$

$$R_\tau(Y(a), Y(b)) := \begin{pmatrix} r(y(a), y(b)) \\ y_{n_1}(a) \\ Ah(a) + Bh(b) - \tau e_l \\ h_k(a) - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (17)$$

Para $\tau \in \mathbf{R}$ a Eq. (17) representa uma família de problemas do valor de contorno que contém o problema da Eq. (11) para $\tau = 0$. τ pode ser considerada como um *mapeamento* T do problema de valor de contorno dado pela Eq. (3) nos números reais

$$\tau = T(y, \alpha). \quad (18)$$

Este mapeamento (ou transformação) fornece informações à respeito das ramificações (é uma indicação de bifurcação para $\tau = 0$). Portanto, durante o processo de continuação, é aconselhável o monitoramento de τ e a observação de quando a mesma muda de sinal.

Várias funções τ_{lk} são possíveis, dependendo da escolha dos índices k (ver Eq. (6)) e l (ver Eqs. (14) ou (27)). As funções τ_{lk} podem ser determinadas numericamente resolvendo o sistema dado pela Eq. (15) e, subseqüentemente, utilizando (16) para cada par $(\bar{y}, \bar{\alpha})$ obtido durante o processo de continuação. Entretanto, é muito mais conveniente e econômico usar o método descrito no próximo item para o cálculo das funções e das condições iniciais, que é baseado no método dos múltiplos tiros.

6. CÁLCULO DE τ_{lk} E CI'S PELO MÉTODO DOS MÚLTIPLOS TIROS

Ao invés de resolver problemas do valor de contorno para calcular as funções τ_{lk} da Eq. (16) e os dados iniciais dados nas Eqs. (13) ou (15), pode-se usar o método dos múltiplos tiros (Bulirsh & Stoer, 1966), que requer apenas operações algébricas.

Considere os problemas do valor inicial

$$h' = f_y(\alpha, x, y)h, \quad h(a) = s \in \mathbf{R}^n, \quad (18a)$$

e

$$G' = f_y(\alpha, x, y)G, \quad G(a) = I, \quad (18b)$$

onde $G(t)$ é uma matriz de ordem n .

Se o intervalo $[a, b]$ é dividido em m pontos (nós) de modo que $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$, com G_k dada pela Eq. (18b) e considerando a Eq. (18a), podem-se escrever as seguintes equações matriciais:

$$\begin{aligned} h(x_2) &= G_1 s \\ h(x_k) &= G_{k-1} h(x_{k-1}), \quad k = 3, \dots, m \end{aligned} \quad (19)$$

e, portanto,

$$h(b) = h(x_m) = G_{m-1} G_{m-2} \dots G_1 h(a). \quad (20)$$

A condição de contorno $h_k(a) = 1$ pode ser escrita na forma matricial

$$P_{lk} h(a) = e_l, \quad 1 \leq l \leq n, \quad e_l \text{ dado pela Eq. (14)}, \quad (21)$$

onde os elementos p_{ij} da matriz P_{lk} ($n \times n$) são dados por

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } (i, j) \neq (l, k) \\ 1, & \text{se } (i, j) = (l, k). \end{cases}$$

Substituindo a Eq. (21) nas condições de contorno dadas na Eq. (13) obtém-se

$$[(I - P_l)A + P_{lk}]h(a) + (I - P_l)Bh(b) = e_l. \quad (22)$$

Substituindo (20) em (22) tem-se

$$[(I - P_l)(A + BG_{m-1}G_{m-2}\dots G_1) + P_{lk}]h(a) = e_l. \quad (23)$$

Pode-se colocar a Eq. (23) numa forma mais compacta utilizando as seguintes definições

$$E := A + BG_{m-1}G_{m-2}\dots G_1 \quad (24)$$

e

$$E_{lk} := (I - P_l)E + P_{lk}, \quad (25)$$

resultando numa equação algébrica linear para $h(a)$

$$E_{lk}h(a) = e_l. \quad (26)$$

A escolha do índice l deve ser tal que E_{lk} não seja singular. Dado que E_{lk} é igual a E com a l -ésima linha substituída pelo k -ésimo versor do \mathbf{R}^n , k dado pela Eq. (6). Para simplificar, o índice l deve ser escolhido de forma que a l -ésima linha de E não seja um vetor unitário, ou melhor,

$$l \in \{1 \leq i \leq n | \exists j, 1 \leq j \leq n, \exists \eta \in \mathbf{R} \text{ t.q. } r_i(y(a), y(b)) = y_j(b) - \eta\} \quad (27)$$

significando que a l -ésima condição de contorno prescreve $y_j(b)$.

Na resolução do problema do valor de contorno dado, Eqs. (3) ou (10), as matrizes A , B , G_k e E são geradas numericamente pelo método dos múltiplos tiros e $h(a)$ é facilmente determinado pela Eq. (26). O cálculo da função τ_{lk} é dado pelo produto escalar de $h(a)$ pela l -ésima linha de E

$$\tau_{lk} = e_l^T E h(a). \quad (28)$$

Os dados iniciais $h(x_k)$, $2 \leq k \leq m$, para o sistema da Eq. (11), são dados pela Eq. (19).

7. OSCILAÇÕES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Oscilações estão presentes em diversos fenômenos naturais (em células de convecção, “flutter” em asas de aviões, reações químicas,...). Para certos valores de um parâmetro físico (técnico, biológico,...) as oscilações podem ser periódicas e para outros valores o movimento periódico pode desaparecer ou tornar-se turbulento. Problemas contendo oscilações podem ser modelados por equações diferenciais ordinárias (por exemplo, *equações de Duffing*, *equações de Van der Pol* ou *equações de Lorenz*) e os valores críticos dos parâmetros que separam soluções qualitativamente diferentes são pontos de bifurcação.

Considere um sistema modelado pelo conjunto de equações diferenciais dadas pela Eq. (3a)

$$y' = f(\alpha, x, y). \quad (3a)$$

Uma solução da Eq. (3a) é chamada *estacionária* se ela resolve a equação estática

$$0 = f(\alpha, x, y). \quad (29)$$

As soluções estacionárias são os estados de equilíbrio da Eq. (3a). As propriedades de estabilidade de uma solução estacionária podem se alterar para algum valor de α_0 do parâmetro α e podem ocorrer dois tipos de bifurcação: a) um outro ramo de soluções estacionárias pode emanar do primeiro (ou interceptá-lo) - assunto abordado até o momento; ou b) o “novo” ramo consiste de soluções oscilatórias que dependem do tempo. O restante do trabalho irá tratar do cálculo de órbitas periódicas (ciclos limite) que bifurcam de soluções estacionárias. Esse tipo de bifurcação é denominado na bibliografia especializada de “bifurcação de Hopf” (ver Hopf (1942) ou Marsden & McCracken (1976)) ou “bifurcação complexa”.

O cálculo numérico de soluções periódicas será executado em duas etapas: a) primeiro, calcula-se o ponto de bifurcação; b) após, calculam-se os ciclos limite que emanam das soluções estacionárias. Na próxima seção o método direto desenvolvido para cálculo de pontos de bifurcação estacionários, será modificado adequadamente no intuito de se calcular pontos de bifurcação de Hopf. Na seção seguinte será descrito um método para o cálculo de órbitas periódicas (Seydel, 1981).

8. CÁLCULO DE PONTOS DE BIFURCAÇÃO DE HOPF

Pontos de bifurcação podem ser encontrados numericamente de uma forma indireta ou de uma forma direta como foi explicado no início do trabalho.

Métodos diretos que partem da Eq. (29) foram propostos por Kubíček (1980), Kubíček & Holodnick (1984). As condições para bifurcações de Hopf são formuladas como um sistema de equações algébricas.

Devido, principalmente, às facilidades de implementação e automatização utilizar-se-á aqui o método de Seydel (1981) que parte do método de Seydel (1979), minuciosamente detalhado nesse trabalho. Agora, o período T é uma incógnita e uma normalização tem que ser introduzida a qual fixa o período.

O método anexa o sistema linearizado

$$h' = f_y(\alpha, x, y)h. \quad (4a)$$

Sem perda da generalidade, a seguinte condição normalizante será imposta a primeira componente da Eq. (4a)

$$0 = h_1'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1(\alpha, x, y(0))}{\partial y_i} h_i(0). \quad (30)$$

Por simplicidade, o intervalo de integração será normalizado para o intervalo unitário, $0 \leq \bar{x} \leq 1$. Com estas normalizações o sistema linearizado da Eq. (4) fica

$$h' = Tf_y(\alpha, \bar{x}, y)h, \quad (31a)$$

$$h(0) = h(1), \quad (31b)$$

$$h_1'(0) = 0,$$

onde ', na Eq. (31), denota derivada com relação a \bar{x} .

Então, o sistema da Eq. (11), para o caso de bifurcação de Hopf, é o seguinte problema do valor de contorno em dois pontos de dimensão $2n + 2$:

$$Y(\bar{x}) := \begin{pmatrix} y(\bar{x}) \\ \alpha \\ T \\ h(\bar{x}) \end{pmatrix}, \quad Y' = F(\bar{x}, Y) := \begin{pmatrix} f(\alpha, \bar{x}, y) \\ 0 \\ 0 \\ Tf_y(\alpha, \bar{x}, y)h \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y(0) - y(1) \\ h(0) - h(1) \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(\alpha, \bar{x}, y(0))}{\partial y_i} h_i(0) \\ h_1(0) - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (32)$$

O sistema da Eq. (32) é um método conveniente para calcular pontos de bifurcação de Hopf e não se limita somente a estes casos. A bifurcação de ramos de soluções estacionárias pode também ser obtida pela Eq. (32).

9. CÁLCULO DE ÓRBITAS PERIÓDICAS

No cálculo de órbitas periódicas pode-se utilizar um método numérico desenvolvido por Langford (1977) que é capaz de calcular órbitas periódicas que bifurcam da solução trivial. Entretanto, o método de Langford é complicado exigindo expansões e derivadas de altas ordens do termo do lado direito da Eq. (3a). O cálculo de órbitas fechadas pode ser muito mais simples. Uma técnica de se obter ciclos limite estáveis consiste em integrar diretamente o problema do valor inicial dado pela Eq. (3a) por um longo intervalo da variável independente.

Uma outra abordagem para o problema consiste em reformular o sistema de edo's dado e obter um "TPBVP", problema do valor de contorno em dois pontos, relativamente simples, pois não se pode perder de vista que o mesmo deve ser facilmente automatizável.

Sem perda da generalidade, a seguinte condição normalizante será imposta a primeira componente de y , condição esta que fixa o período incógnito T da solução periódica da Eq. (3a)

$$0 = y_1'(0) = f_1(\alpha, \bar{x}, y(0)). \quad (33)$$

Calcular órbitas periódicas da Eq. (3a) corresponde a resolver o seguinte problema do valor do contorno de dimensão $n + 2$:

$$Y(\bar{x}) := \begin{pmatrix} y(\bar{x}) \\ \alpha \\ T \end{pmatrix}, \quad Y' = F(\bar{x}, Y) := \begin{pmatrix} Tf(\alpha, \bar{x}, y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y(0) - y(1) \\ f_1(\alpha, \bar{x}, y(0)) \\ g(y, \alpha, T) \end{pmatrix} = 0, \text{ com } g(y, \alpha, T) = \begin{cases} \alpha(0) - \alpha^* \\ T(0) - T^* \\ y_k(0) - \eta. \end{cases} \quad (34)$$

A condição de contorno $g(y, \alpha, T)$ controla a seleção de uma solução periódica. Se um valor $\alpha = \alpha^*$ é prescrito como condição inicial para o parâmetro, então $g(y, \alpha, T) = \alpha(0) - \alpha^*$; se um valor $T = T^*$ é prescrito como condição inicial para o período, então $g(y, \alpha, T) = T(0) - T^*$; e se, finalmente, um valor η é prescrito como condição inicial da componente k (por exemplo, $k = 1$), então $g(y, \alpha, T) = y_1(0) - \eta$. Fazendo $g = 0$, um ramo de soluções periódicas pode ser parametrizado em pelo menos uma das três possibilidades.

Deve-se destacar que soluções estacionárias também são soluções da Eq. (34) e sob parametrização de um ramo de soluções, na vizinhança de um ponto de bifurcação, a convergência é no sentido de se obter soluções estacionárias e não periódicas. Se a parametrização de um ramo de soluções periódicas está longe do ponto de bifurcação, o processo iterativo continua obtendo soluções periódicas. Logo, a Eq. (34) é bem adequada para calcular ramos de soluções periódicas longe do ponto de bifurcação.

Para cálculo de ciclos limite nas imediações de um ponto de bifurcação, uma outra parametrização deve ser utilizada. Uma característica marcante que distingue as soluções estacionárias das soluções periódicas é a *amplitude*. A amplitude é zero para soluções constantes e diferente de zero para soluções periódicas. Então, uma parametrização que considere a amplitude não será dúbia. Um cálculo numérico preciso da amplitude é mostrado em Becker & Seydel (1981). Há, contudo, uma maneira mais simples de parametrizar um ramo periódico. Para isso, define-se a amplitude como um incremento genérico

$$A := y_1(0) - y_1(\bar{x}_1), \quad (35)$$

onde $0 < \bar{x}_1 < 1$, com \bar{x}_1 arbitrário mas fixo. Levando em conta a normalização da Eq. (33), realmente, deve existir um \bar{x}_1 onde $y_1'(\bar{x}_1) = 0$ tal que A é a amplitude real da primeira componente de y .

Considerando a Eq. (35) as seguintes asserções são válidas:

- (i) Se y é uma solução não estacionária da Eq. (3a) então há uma componente de y (sem perda da generalidade, y_1) e existem $A \neq 0$ e \bar{x}_1 tal que $y_1(0) - y_1(\bar{x}_1) - A = 0$.
- (ii) Se soluções não estacionárias (y, α) convergem para um ponto de bifurcação (y_0, α_0) com $f(\alpha_0, x, y_0) = 0$, então $A \rightarrow 0$.
- (iii) Se (y, α, T) é solução da Eq. (34) com $g(y, \alpha, T) := y_1(0) - y_1(\bar{x}_1) - A$, $A \neq 0$, então y é uma órbita periódica da Eq. (3a).

O incremento A é prescrito por uma condição de contorno. Com isso é possível a parametrização de um ramo de soluções periódicas numa vizinhança de um ponto de bifurcação. A escolha prática para \bar{x}_1 é arbitrária. Pode-se escolher, por exemplo, $\bar{x}_1 = 0,3$. O sinal de A também é arbitrário (não é necessário conhecer o sentido da bifurcação).

Para resolver o problema do valor de contorno, correspondente àquele da Eq. (34), que inclua a condição de contorno que prescreve a amplitude, é necessário adicionar uma nova variável

$$\zeta(\bar{x}) := \begin{cases} y_1(\bar{x}), & \text{para } 0 \leq \bar{x} < \bar{x}_1, \\ y_1(\bar{x}_1), & \text{para } \bar{x}_1 \leq \bar{x} \leq 1, \end{cases}$$

com a equação diferencial

$$\zeta' = \begin{cases} y_1', & \text{para } 0 \leq \bar{x} < \bar{x}_1, \\ 0, & \text{para } \bar{x}_1 \leq \bar{x} \leq 1, \end{cases}$$

com $\zeta(0) = y_1(0)$. O ponto \bar{x}_1 representa um nó na integração de $\zeta(\bar{x})$. Se o método dos múltiplos tiros (Bulirsch & Stoer, 1966), for utilizado, com \bar{x}_1 sendo um nó, a integração não apresentará dificuldades.

O problema do valor de contorno a ser resolvido, de dimensão $n + 3$, para se calcular órbitas periódicas que bifurcam de soluções estacionárias é o seguinte:

$$Y(\bar{x}) := \begin{pmatrix} y(\bar{x}) \\ \alpha \\ T \\ \zeta(\bar{x}) \end{pmatrix},$$

$$Y' = F(\bar{x}, Y) := \begin{cases} \begin{pmatrix} Tf(\alpha, \bar{x}, y) \\ 0 \\ 0 \\ Tf_1(\alpha, \bar{x}, y) \end{pmatrix} & \text{para } \bar{x} < \bar{x}_1, \\ \begin{pmatrix} Tf(\alpha, \bar{x}, y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{para } \bar{x} \geq \bar{x}_1, \end{cases}$$

com as condições de contorno

$$\begin{pmatrix} y(0) - y(1) \\ f_1(\alpha, \bar{x}, y(0)) \\ y_1(0) - \zeta(0) \\ y_1(0) - \zeta(1) - A \end{pmatrix} = 0. \quad (36)$$

Cada solução da Eq. (36) para $A \neq 0$ é uma solução não estacionária e periódica da Eq. (3a). Um inconveniente da Eq. (36) está no fato do nó \bar{x}_1 ser mantido constante o que torna o método *local* (isto é, não global). O resultado prático é que não se consegue parametrizar um ramo de forma global. Ao invés de se tomar medidas paliativas, como alterar \bar{x}_1 ou o índice do vetor y nas Eqs. (33) e (35), é mais lógico mudar a parametrização e utilizar a Eq. (34). Desta forma, o procedimento da Eq. (36) deve ser pensado como uma forma de transição de soluções estacionárias para soluções periódicas.

9.1 Dados Iniciais

Será abordada a questão dos valores iniciais para o TPBVP da Eq. (36). No caso da linearização h_0 ser obtida por meio da Eq. (32) uma estimativa inicial adequada deve considerar o vetor

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \\ T \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 + \delta h_0 \\ \alpha_0 \\ T_0 \\ h_0 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

onde $(y_0, \alpha_0, T_0, h_0)^t$ é solução de (32). Obviamente, δ deve ser função de A , e, por meio da Eq. (35), tem-se

$$A = y_1(0) - y_1(\bar{x}_1) = y_{01}(0) + \delta h_{01}(0) - y_{01}(\bar{x}_1) - \delta h_{01}(\bar{x}_1). \quad (38)$$

Como $y_{01}(0) = y_{01}(\bar{x}_1)$ (primeira componente estacionária), então

$$A = \delta(h_{01}(0) - h_{01}(\bar{x}_1)) \Rightarrow \delta = \frac{A}{h_{01}(0) - h_{01}(\bar{x}_1)}. \quad (39)$$

Logo, uma estimativa inicial razoável será:

$$\begin{pmatrix} y(\bar{x}) \\ \alpha(\bar{x}) \\ T(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 + \frac{A}{h_{01}(0) - h_{01}(\bar{x}_1)} h_0 \\ \alpha_0 \\ T_0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

10. EXEMPLOS

Este trabalho finaliza com a apresentação de resultados numéricos para quatro exemplos. Os três primeiros envolvem pontos de bifurcação para soluções estacionárias e o último trata de órbitas periódicas que emanam de soluções estacionárias. Para a obtenção das soluções numéricas os exemplos foram transformados em problemas do valor de contorno nas formas dadas pelas Eqs. (10) ou (34). Várias soluções foram calculadas, num procedimento de continuação, variando, por exemplo, α ou $\|y\|^2$. Com o intuito de obter informações a respeito do comportamento das bifurcações, funções de teste foram determinadas através da Eq. (28) após cada passo da continuação. Os pontos de bifurcação foram calculados resolvendo os sistemas das Eqs. (11) ou (32) com as condições iniciais dadas pela Eq. (19).

Todos os problemas de valor de contorno foram resolvidos pelo algoritmo dos múltiplos tiros (Bulirsch & Stoer, 1966 ou Stoer & Bulirsch, 1980) utilizando um integrador runge-kutta. Os exemplos apresentam diferentes graus de dificuldade na determinação da solução numérica. Os três primeiros estão numa escala crescente de dificuldade. O último tem o mesmo grau de dificuldade do primeiro. Para detalhes quanto o significado físico das variáveis e parâmetros sugere-se a consulta a literatura original.

10.1 Modelo de uma Reação Catalítica

O modelo de uma reação química com uma partícula catalítica porosa na forma de placa é descrito pelo problema de valor de contorno (Hlavacek et al., 1968 e Kubíček & Hlavacek, 1975):

$$y'' = \delta y \exp[\gamma\beta(1-y)/(1+\beta(1-y))],$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

As soluções dependem de três parâmetros reais: β , γ e δ . Com o intuito de calcular pontos de bifurcação em relação ao parâmetro δ , o seguinte sistema foi resolvido:

$$y_1' = y_2,$$

$$y_2' = y_1 y_3 \exp\left(\frac{\gamma\beta(1-y_1)}{1+\beta(1-y_1)}\right),$$

$$y_3' = 0, \quad (y_3 := \delta),$$

$$y_4' = y_1^2,$$

$$y_5' = y_6,$$

$$y_6' = y_3 y_5 \exp\left(\frac{\gamma\beta(1-y_1)}{1+\beta(1-y_1)}\right) \left(1 - \frac{\gamma\beta y_1}{[1+\beta(1-y_1)]^2}\right),$$

$$y_1(1) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_4(0) = 0,$$

$$y_5(1) = 0, \quad y_6(0) = 0, \quad \text{e} \quad y_5(0) = 1 \quad (k = 1).$$

Este problema do valor de contorno é de fácil solução. Dois pontos de bifurcação foram calculados para os valores de $\gamma = 20.0$ e $\beta = 0.4$:

Tabela 1. Pontos de bifurcação para o Exemplo 10.1

δ	$\ y_1\ $
0,0779303111	0,568898584
0,1375574408	0,869483841

O diagrama de bifurcação associado é mostrado na Fig. 3a e a função de teste τ_{11} , mostrada na Fig. 3b, indica os pontos de bifurcação. Evidentemente, a solução nos pontos de bifurcação pode dar um salto para uma ligeira variação no parâmetro δ . Além disso, a Fig. 3a mostra os diagramas para vários valores diferentes de γ . Para um valor de parâmetro $\gamma = 14$ não há pontos de bifurcação. O diagrama de bifurcação com relação a γ e δ é mostrado na Fig. 4. Os limites da região hachurada consistem nos pontos de bifurcação com relação a γ e δ . Para valores de γ e δ dentro da região hachurada o problema de valor de contorno possui três soluções estacionárias (duas externas assintoticamente estáveis e uma interna instável); para valores exteriores a região o problema possui uma única solução. Em Postom & Stewart (1996) este tipo de bifurcação é chamado de *cusp catastrophe*. Resultados similares são encontrados se o parâmetro β também é variado.

10.2 Flexão de Tubos Elípticos

A flexão de um tubo cilíndrico de parede fina com seção elíptica é descrita pelas equações diferenciais (Weinitschke, 1970):

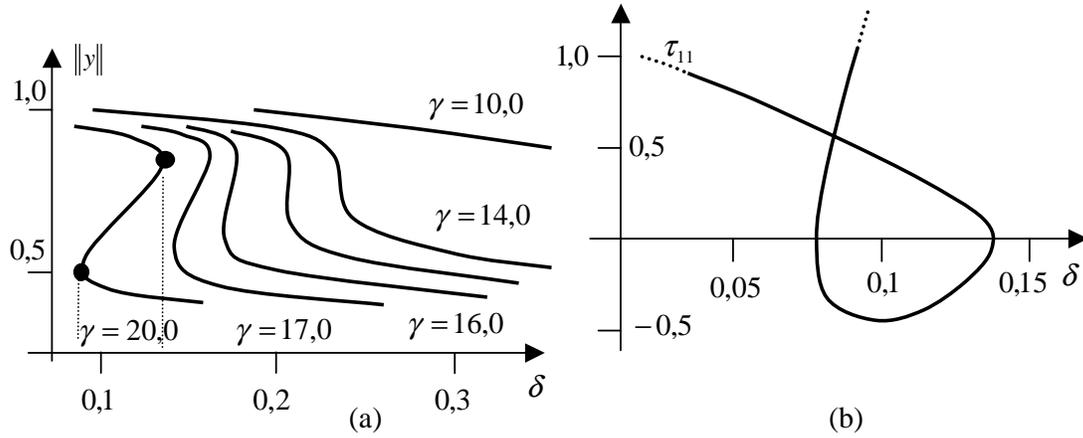


Figura 3 - Exemplo 10.1 ($\beta = 0,4$): a) Diagrama de bifurcação; b) Função de teste τ_{11} ($\gamma = 20,0$).

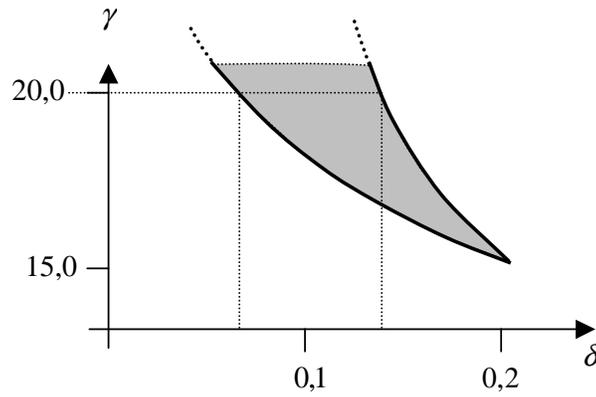


Figura 4 - *Cusp catastrophe* para o Exemplo 10.1 ($\beta = 0,4$).

$$\begin{aligned}
 y_1' &= y_2, \\
 y_2' &= c_4(t)(c_1(t)\cos y_3 + c_2(t)\sen y_3) - c_3(t)y_2, \\
 y_3' &= y_4, \\
 y_4' &= y_1 y_6 c_4(t)(c_1(t)\sen y_3 - c_2(t)\cos y_3) - c_3(t)y_4, \\
 y_5' &= y_1((c_5 \cos y_3 + c_6 \sen y_3) \cos t \\
 &\quad - (c_5 \sen y_3 - c_6 \cos y_3) \sen t),
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 c_1(t) &:= \cos t + \gamma \sen t, \\
 c_2(t) &:= \gamma \cos t - \sen t, \\
 c_3(t) &:= \frac{(1 - e^2) \sen t \cos t}{\cos^2 t + e^2 \sen^2 t}, \\
 c_4(t) &:= (\cos^2 t + e^2 \sen^2 t)^{1/2}, \\
 c_5 &:= 1 + \cos(2 \arctan \gamma), \\
 c_6 &:= \sen(2 \arctan \gamma), \\
 y_6 &:= \alpha^2.
 \end{aligned}$$

Condições de contorno:

$$\begin{aligned} y_1(\pi/2) = y_2(0) = y_5(0) = 0, \\ y_3(0) = y_3(\pi/2) = \arctan\gamma. \end{aligned}$$

α , e e γ são parâmetros reais, α descreve certas propriedades físicas do tubo. Um momento m_x pode ser expresso em termos de $y_5(\pi/2)$:

$$m_x = -(2\alpha/\pi)y_5(\pi/2).$$

A dependência de m_x com α é de interesse. Para o cálculo dos pontos de bifurcação são adicionados as equações diferenciais das variáveis auxiliares e o sistema variacional:

$$\begin{aligned} y'_6 &= 0, \\ y'_7 &= y_1^2, \\ y'_8 &= y_9, \\ y'_9 &= y_{10}c_4(t)(-c_1(t)\text{sen}y_3 + c_2(t)\text{cos}y_3) - c_3(t)y_9, \\ y'_{10} &= y_{11}, \\ y'_{11} &= y_6y_8c_4(t)(c_1(t)\text{sen}y_3 - c_2(t)\text{cos}y_3) \\ &\quad + y_1y_6y_{10}c_4(t)(c_1(t)\text{cos}y_3 + c_2(t)\text{sen}y_3) - c_3(t)y_{11}, \end{aligned}$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} y_7(0) = y_8(\pi/2) = y_9(0) = y_{10}(0) = y_{10}(\pi/2) = 0, \\ y_8(0) = 1, \quad (k=1). \end{aligned}$$

Este problema do valor de contorno foi resolvido e dois pontos de bifurcação foram calculados para os valores de $\gamma = 0,25$ e $e = 0,7$:

Tabela 2. Pontos de bifurcação para o Exemplo 10.2

α	m_x
4,51918878	2,77255230
8,31769839	5,36080852

O diagrama de bifurcação da Fig. 6 mostra a dependência de m_x com α .

10.3 Supercondutividade no interior de uma Chapa

O modelo de uma chapa supercondutora de espessura d imersa num campo magnético paralelo é abordado em Odeh (1967). As equações de Ginzburg-Landau são equivalentes ao sistema:

$$\begin{aligned}
x'' &= \mathbf{K}^2 x(x^2 - 1 + \lambda z^2), \\
z'' &= x^2 z, \\
x'(-d/2) &= x'(d/2) = 0, \\
z'(-d/2) &= z'(d/2) = 1,
\end{aligned}$$

onde λ é o quadrado do campo externo.

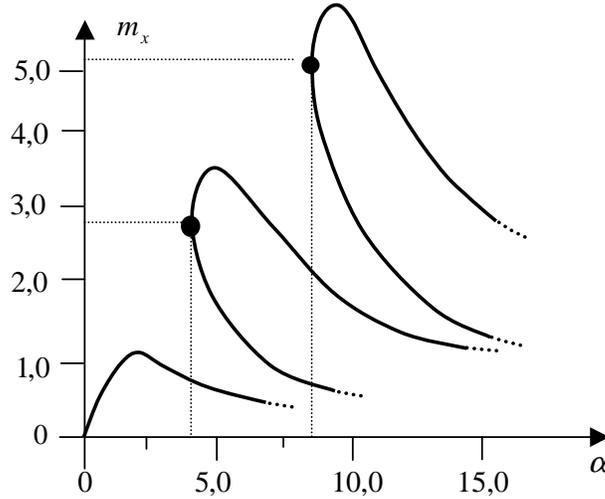


Figura 5 - Diagrama de bifurcação para o Exemplo 10.2 ($\gamma = 0,25$ e $e = 0,7$).

As bifurcações para este problema do valor de contorno foram estudadas para valores especiais do parâmetro de Ginzburg-Landau $\mathbf{K} = 1$ e para a espessura $d = 5$. O problema do valor de contorno é o seguinte:

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2, & (y_1 &:= x), \\
y_2' &= y_1(y_1^2 - 1 + y_5 y_3^2), \\
y_3' &= y_4, & (y_3 &:= z), \\
y_4' &= y_1^2 y_3, \\
y_5' &= 0, & (y_5 &:= \lambda), \\
y_6' &= y_1^2, \\
y_7' &= y_8, \\
y_8' &= y_7(3y_1^2 - 1 + y_5 y_3^2) + 2y_1 y_3 y_5 y_9, \\
y_9' &= y_{10}, \\
y_{10}' &= 2y_1 y_3 y_7 + y_1^2 y_9, \\
y_2(0) &= y_2(5) = 0, & y_4(0) &= y_4(5) = 1, & y_6(0) &= 0, \\
y_8(0) &= y_8(5) = 0, & y_{10}(0) &= y_{10}(5) = 0, \\
y_7(0) &= 1 & (k = 1).
\end{aligned}$$

Este problema do valor de contorno foi resolvido e quatro pontos de bifurcação secundários foram calculados:

Tabela 3. Pontos de bifurcação para o Exemplo 10.3

$\sqrt{\lambda}$	$\ y_1\ $	Nº de ramos
0,814211758	1,50982475	2
0,920702676	1,08570337	2
0,954964373	1,75521841	3
0,959531656	1,66841418	2

O diagrama de bifurcação é mostrado na Fig. 6a e a função de teste τ_{21} , mostrada na Fig. 6b, indica os pontos de bifurcação. Os pontos de bifurcação separam soluções que descrevem estados físicos qualitativamente diferentes. Para valores do campo magnético no intervalo $0,9207 < \sqrt{\lambda} < 0,9549$, cinco tipos de soluções não-triviais co-existem para o mesmo valor do parâmetro.

10.4 Mancal Radial de Deslizamento

O modelo de um mancal radial de deslizamento, consistindo de um rotor que gira dentro de um cilindro oco de raio interno ligeiramente maior que o raio do rotor e com o espaço entre eles sendo preenchido por um fluido lubrificante, foi abordado em Ricci (1997) e Ricci & Souza (1997). O TPBVP para cálculo de bifurcações é o seguinte:

$$\begin{aligned}
 y_1' &= f_1 = \frac{2\pi}{y_6} y_2, \\
 y_2' &= f_2 = \frac{2\pi}{y_6} \left[y_1 y_4^2 + 12S \left(\frac{16 - \pi^2 (2 + y_1^2)}{y_5 (1 - y_1^2)^{3/2} (2 + y_1^2)} y_2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2\pi y_1^2}{(2 + y_1^2)(1 - y_1^2)} \left(1 - \frac{2y_4}{y_5} \right) \right) + 2\cos y_3 \right], \\
 y_3' &= f_3 = \frac{2\pi}{y_6} y_4, \\
 y_4' &= f_4 = \frac{2\pi}{y_6} \left[\frac{12\pi^2 S}{(1 - y_1^2)^{1/2} (2 + y_1^2)} \left(1 - \frac{2y_4}{y_5} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{48\pi S y_2}{y_5 (2 + y_1^2)(1 - y_1^2)} - \frac{2}{y_1} (y_2 y_4 + \sin y_3) \right], \\
 y_5' &= f_5 = 0 \quad (y_5 \equiv \omega_r), \\
 y_6' &= f_6 = 0 \quad (y_6 \equiv \omega), \\
 y_7' &= f_7 = \frac{\partial f_1}{\partial y_2} y_8, \\
 y_8' &= f_8 = \frac{\partial f_2}{\partial y_1} y_7 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} y_8 + \frac{\partial f_2}{\partial y_3} y_9 + \frac{\partial f_2}{\partial y_4} y_{10}, \\
 y_9' &= f_9 = \frac{\partial f_3}{\partial y_4} y_{10}, \\
 y_{10}' &= f_{10} = \frac{\partial f_4}{\partial y_1} y_7 + \frac{\partial f_4}{\partial y_2} y_8 + \frac{\partial f_4}{\partial y_3} y_9 + \frac{\partial f_4}{\partial y_4} y_{10},
 \end{aligned}$$

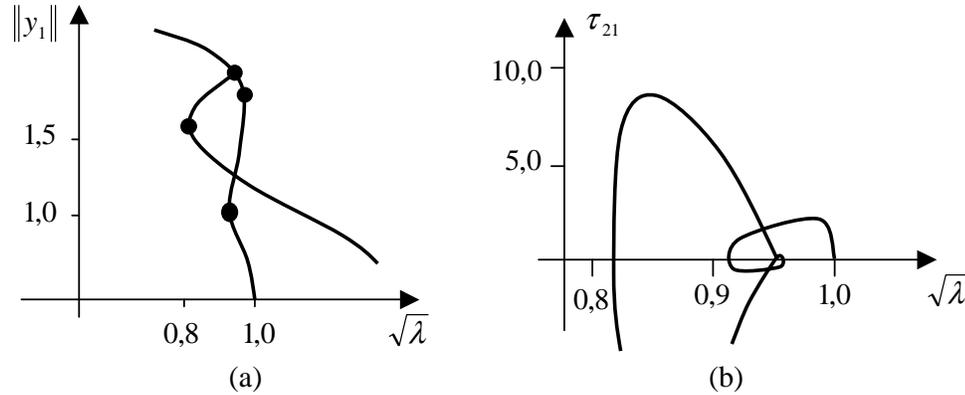


Figura 6 - Exemplo 10.3: a) Diagrama de bifurcação; b) Função de teste τ_{21} .

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= y_1(0) - y_1(1) = 0, & r_6 &= y_8(0) - y_8(1) = 0, \\
 r_2 &= y_2(0) - y_2(1) = 0, & r_7 &= y_9(0) - y_9(1) = 0, \\
 r_3 &= y_3(0) - y_3(1) = 0, & r_8 &= y_{10}(0) - y_{10}(1) = 0, \\
 r_4 &= y_4(0) - y_4(1) = 0, & r_9 &= y_8(0) = 0, \\
 r_5 &= y_7(0) - y_7(1) = 0, & r_{10} &= y_7(0) - 1 = 0,
 \end{aligned}$$

onde S , ω_r e ω , são o número de Sommerfeld (que relaciona geometria, viscosidade e carga), a velocidade angular adimensional do rotor em relação ao mancal e a frequência orbital adimensional das soluções periódicas, respectivamente.

Para determinar ramos de soluções (estacionárias e periódicas) em função do parâmetro ω_r , foram resolvidos TPBVP's nas formas dadas pelas Eqs. (34) e (36).

Três pontos de bifurcação foram calculados:

Tabela 4. Pontos de bifurcação para o Exemplo 10.4

ω_r	$y_1(0)$	S	ω
1,346261494	0,1	0,33703	1,534677223
1,704494039	0,5	0,06177	1,635961000
0,954964373	0,75	0,03094	1,812451270

A Fig. 7a mostra a amplitude da variável $y_1(0)$ (excentricidade adimensional do rotor em relação ao centro do mancal), no instante de máxima amplitude, em função da velocidade angular adimensional do rotor, para um valor fixo do parâmetro $S = 0,33703$. Para valores de ω_r no intervalo $\sim 1,2 < \omega_r < 1,346261494$, verifica-se que, em regime permanente, coexistem três soluções: uma estacionária estável e duas periódicas (uma instável (tracejada) e outra estável).

A Fig. 7b mostra a frequência angular adimensional das soluções periódicas ao longo do processo de continuação. Verifica-se que, parametrizando o ramo periódico na sua parte instável, em direção ao ponto de bifurcação de Hopf, a frequência toma valores crescentes (enquanto a amplitude decresce) e, no ponto de bifurcação, assume o valor $\omega = 1,534677223$.

Continuando a parametrização, para $\omega_r > 1,3462\dots$, o problema fornece a solução estacionária instável mantendo constante o valor da frequência. A parametrização do ramo periódico na sua parte estável também é mostrada.

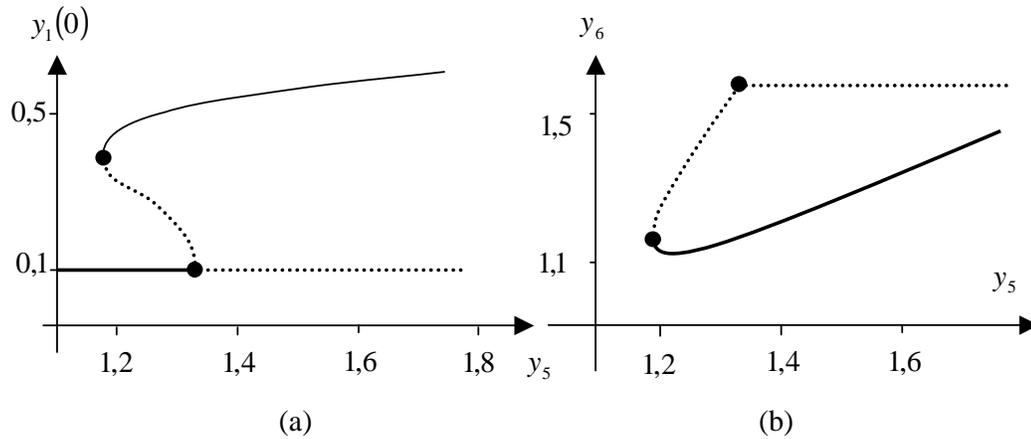


Figura 7 - Exemplo 10.4 ($S = 0,33703$): a) Diagrama de bifurcação; b) Frequência angular de órbitas periódicas. Linha cheia (tracejada) representa soluções estáveis (instáveis).

A Fig. 8a mostra a amplitude da variável $y_1(0)$ em função de y_5 , para um valor fixo de $S = 0,06177$. Para valores de $\omega_r > 1,704494039$, verifica-se que, em regime permanente, coexistem duas soluções: uma estacionária instável e uma periódica estável.

A Fig. 8b mostra a frequência y_6 ao longo da parametrização do ramo periódico estável, em direção ao ponto de bifurcação complexo, a frequência toma valores decrescentes estabilizando-se, no ponto de bifurcação, no valor $\omega = 1,635961$. Continuando a parametrização, para $\omega_r < 1,704\dots$, o problema fornece a solução estacionária estável mantendo constante o valor da frequência.

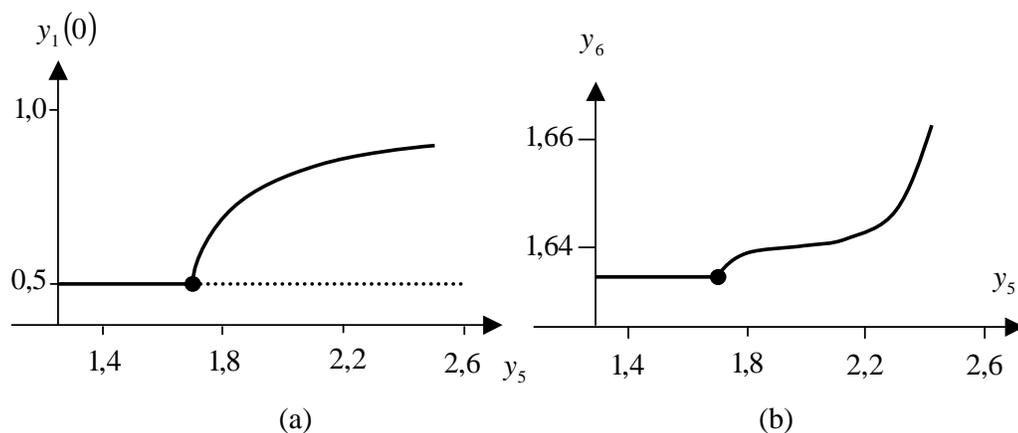


Figura 8 - Exemplo 10.4 ($S = 0,06177$): a) Diagrama de bifurcação; b) Frequência angular de órbitas periódicas. Linha cheia (tracejada) representa soluções estáveis (instáveis).

REFERENCES

- Becker, K. H., & Seydel, R., 1981. A duffing equation with more than 20 branch points. In Allgower, E. L. *et al.*, eds, *Numerical solution of nonlinear equations, lectures notes*, vol 878, p.p. 98-107, Springer.
- Bulirsh, R., & Stoer, J., 1966. Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods, *Numer. math.*, vol 8, p.p. 1-13.
- Hildebrandt, T. H., & Graves, K. M., 1927. Implicit functions and their differentials in general analysis. *A.M.S. Trans.*, vol 29, p.p. 127-153.
- Hlavacek, V., Marek, M. & Kubíček, M., 1968. Modelling of chemical reactors - X. Multiple solutions of enthalpy and mass balances for a catalytic reaction within a porous catalyst particle. *Chem. Engng. Sci.*, vol 23, p.p. 1083-1097.
- Hopf, E., 1942. Abzweigung einer periodischen lösung von einer stationären lösung eines differential-systems. *Bericht der mathematisch-physischen klasse der sächsischen akademie der wissenschaften zu Leipzig*, vol 94, p.p. 1-22.
- Keller, J. B., & Antmann, S., 1969. *Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems*. Benjamin.
- Kubíček, M., 1980. Algorithm for evaluation of complex bifurcation points in ordinary differential equations. *SIAM J. Appl. Math.*, vol 38, p.103.
- Kubíček, M., & Hlavacek, V., 1975. Solution of nonlinear boundary value problems - IX. Evaluation of branching points based on the differentiation with respect to boundary conditions. *Chem. Engng. Sci.*, vol 30, p.p. 1439-1440.
- Kubíček, M., & Holodnick, M., 1984. Numerical determination of bifurcation points in steady state and periodic solutions - numerical algorithms and examples. In Küpper, T., Mittelman, H. D. & Weber, H., eds, *Numerical methods for bifurcation problems*, p.p. 247-270, Birkhäuser Verlag.
- Langford, W. F., 1977. Numerical solution of bifurcation problems for ordinary differential equations. *Numer. math.*, vol 28, p.p.171-190.
- Marsden, J. E., & McCracken, M., 1976. *The hopf bifurcation and its applications*. Springer-Verlag.
- Mittelman, H. D., & Weber, H., 1980. Numerical methods for bifurcation problems - a survey and classification. In Mittelman, H.D. & Weber, H., eds, *Bifurcation problems and their numerical solution*, pp.1-45, Birkhäuser Verlag.
- Odeh, F., 1967. Existence and bifurcation theorems for the Ginzburg-Landau Equations. *J. Math. Phys.*, vol. 8, p.p. 2351-2356.
- Pimbley, G. H., 1969. Eigenfunction branches of nonlinear operators, and their bifurcations. *Lecture notes in Maths.*, vol. 104, Springer.

- Poincaré, H., 1885. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta mathematica*, vol. 7, p.p. 259-380.
- Postom, T., & Stewart, I., 1996. *Catastrophe Theory and its applications*. Dover.
- Ricci, M. C., 1997. *Aplicação de Métodos Numéricos de Continuação e de Bifurcações ao Problema do Mancal Hidrodinâmico Liso, Longo, Com e Sem a Presença de Cavitação*, Tese de Doutorado em Ciência Espacial/Mecânica Espacial e Controle, INPE, São José dos Campos.
- Ricci, M. C., & Souza, P. N., 1997. Mancal radial de deslizamento: determinação de ramos de soluções periódicas e pontos de bifurcação complexos. In Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF), 10., Bariloche, Argentina, 10-14 nov. *Mecanica Computacional*, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, v. XVIII, p. 133-142. (INPE-9851-PRE/5433).
- Ruelle, D., 1989. *Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory*. Academic Press.
- Seydel, R., 1979. Numerical computation of branch points in ordinary differential equations. *Numer. math.*, vol. 32, p.p. 51-68.
- Seydel, R., 1981. Numerical computation of periodic orbits that bifurcate from stationary solutions of ordinary differential equations. *Applied mathematics and computation*, vol. 9, p.p. 257-271.
- Stakgold, I., 1971. Branching of solutions of nonlinear equations. *SIAM Review*, vol. 13, p.p. 289-332.
- Stoer, J. & Bulirsch, R., 1980. *Introduction to numerical analysis*. Springer Verlag.
- Weinitschke, H. J., 1970. Die Stabilität elliptischer Zylinderschalen bei reiner Biegung. *ZAMM*, vol. 50, p.p. 411-422.
- Vainberg, M. M., 1964. *Variational methods for the study of nonlinear operators*. Holden-Day.