

MÉTODO DE GERAÇÃO DE COLUNAS APLICADO AO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE FACILIDADES NÃO-CAPACITADO

Francisco de Assis Corrêa

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
12.201-970 São José dos Campos, SP – Brasil
fcorreia@directnet.com.br

Luiz Antonio Nogueira Lorena

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
12.201-970 São José dos Campos, SP – Brasil
lorena@lac.inpe.br

Edson Luiz França Senne

FEG/UNESP
Escola de Engenharia – Departamento de Matemática
12.500-000 Guaratinguetá, SP – Brasil
elfsenne@feg.unesp.br

RESUMO

A relaxação lagrangeana baseada em *clusters* (LagClus) é uma técnica que pode ser aplicada a problemas combinatoriais representados em grafos de conflitos e considera o particionamento de grafos para se obterem aglomerados de vértices e arestas. Ao se removerem as arestas que ligam os agrupamentos, divide-se o grafo de conflitos em subgrafos, obtendo-se partes com as mesmas características do problema original. Relaxando essas arestas no sentido lagrangeano, os subproblemas são resolvidos e obtém-se uma aproximação da solução do problema completo com melhores limitantes do que a relaxação lagrangeana tradicional. Este trabalho apresenta a abordagem de geração de colunas baseada na idéia da relaxação lagrangeana descrita, dado que os subproblemas geram soluções para cada *cluster* de forma independente. Testada, essa abordagem apresentou bons resultados para o problema de localização de facilidades não-capacitado (UFLP).

PALAVRAS-CHAVE. Grafo de conflitos. Localização de facilidades. Geração de colunas. Otimização Combinatória.

ABSTRACT

The lagrangean relaxation with clusters (LagClus) is a technique that can be applied to the combinatorial problems that can be modeled by conflict graphs and considers the graph partitioning, to get clusters of vertices and edges. When removing the edges that connect the clusters, the conflict graph is divided in subgraphs, getting itself parts with the same characteristics of the original problem. When relaxing these edges in the lagrangean way, subproblems are solved, and an approximated solution of the complete problem is obtained with better limits than the traditional lagrangean relaxation. This work presents the column generation approach based on the idea of the lagrangean relaxation described, given that subproblems generate solutions to each cluster of independent form. The column generation approach was tested and goods results to the Uncapacitated Facility Location Problem (UFLP) were obtained.

KEYWORDS. Conflict graph. Facility location. Column generation. Combinatorial Optimization.

1. Introdução

A idéia central do estudo de problemas de localização reside na escolha de locais adequados para implantar facilidades (centros) para o atendimento de clientes (pontos de demanda), considerando-se que certos critérios de otimização devem ser atendidos. As facilidades são centros que prestam algum tipo de serviço, tais como fábricas, hospitais, bancos e escolas, que têm como clientes, respectivamente, depósitos, pacientes, correntistas e estudantes.

Muitos desses problemas são combinatoriais por natureza. Por isso, existe o inconveniente de nem sempre ser possível encontrar a solução em um tempo computacional viável, mesmo com a utilização de solvers comerciais, devido à sua classificação como NP-hard (Daskin, 1995) e ao porte do problema. Como alternativa buscaram-se métodos heurísticos, metaheurísticas e relaxações. Esta última possui a vantagem de definir limitantes para a solução ótima e pode apresentar uma informação dual de boa qualidade, o que permite avaliar o quão próximo a melhor solução encontrada para o problema está da ótima.

Uma estratégia usada para a solução de um problema de grande porte é a sua divisão em problemas menores, com a mesma característica do problema original, resolvendo-os com a ajuda de solvers comerciais. Essa divisão pode ser conseguida com o particionamento do grafo de conflitos, de forma a se obterem aglomerados (*clusters*) de vértices e arestas. Busca-se com esse particionamento separar o grafo de conflitos em subgrafos. Ao se removerem as arestas que ligam os agrupamentos, obtêm-se partes com as mesmas características do problema original.

O inconveniente dessa abordagem é que não há a garantia de, resolvendo-se os subproblemas, obter-se a solução para o problema completo, pois algumas arestas foram dele retiradas. Uma maneira de considerar essas arestas é relaxá-las no sentido lagrangeano e encontrar um limitante de boa qualidade para o problema original. Essa é a idéia da relaxação lagrangeana baseada em *clusters* (LagClus) (Ribeiro, 2005), que incorpora a obtenção de um grafo de conflitos, o particionamento desse grafo em agrupamentos com a mesma característica do problema original e o uso da relaxação lagrangeana para incorporar à resolução do problema as arestas relaxadas, obtidas na separação dos referidos agrupamentos. A Figura 1 mostra as fases desse processo.

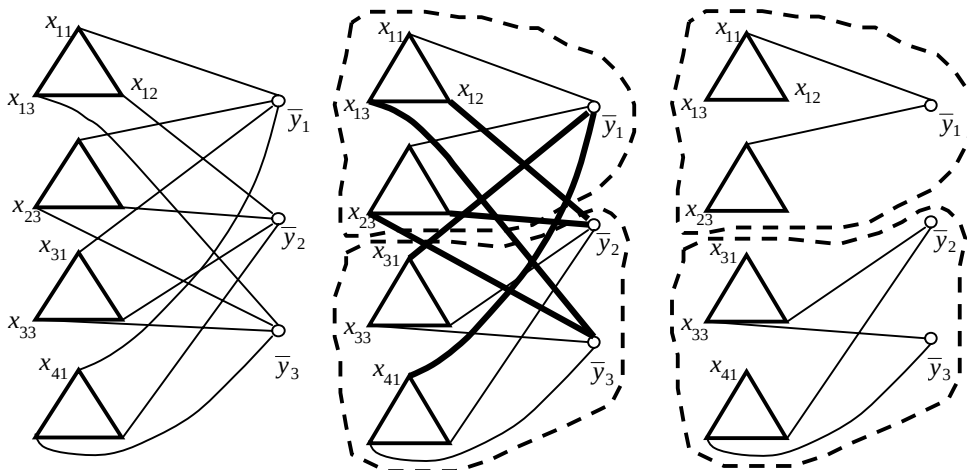


Figura 1 – Aplicação da LagClus. (a) Montagem do grafo de conflitos. (b) Relaxação das arestas de ligação entre *clusters*. (c) Separação e resolução dos subproblemas (*clusters*).

Um tipo de problema de localização bastante estudado na literatura é o denominado Problema de Localização de Facilidades Não-Capacitado, do inglês *Uncapacitated Facility Location Problem* (UFLP), que envolve custos fixos para a localização de facilidades e custos de produção, transporte e distribuição para satisfazer a demanda de determinadas regiões. O objetivo do UFLP é o de decidir onde localizar facilidades e as alocações dos seus clientes, de forma a minimizar o custo total.

Vários métodos para a solução do UFLP têm sido elaborados por pesquisadores nas últimas décadas. Embora existam algoritmos exatos para a solução desse problema (Körkel, 1989),

a busca por algoritmos alternativos (heurísticas, metaheurísticas e relaxações) é a escolha natural para a solução de instâncias de larga escala, devido à natureza NP-Hard do UFLP (Cornuéjols, Nemhauser e Wolsey, 1990). Uma heurística efetiva e bastante usada é o método lagrangeano (Beasley, 1993) que é baseado na relaxação lagrangeana com o algoritmo de otimização por subgradientes (Daskin, 1995). Várias soluções utilizando metaheurísticas foram aplicadas, tais como Simulated Annealing (Alves e Almeida, 1992), Algoritmos Genéticos (Kratka et al., 2001) e Busca Tabu (Ghosh, 2003) (Michel, Van Hentenryck, 2003) (Sun, 2006). Resende & Werneck (2005), adaptaram ao UFLP uma heurística híbrida que havia sido desenvolvida para a solução do problema das p-medianas.

Este trabalho trata de apresentar a abordagem de geração de colunas para o UFLP baseada na idéia da relaxação lagrangeana com *clusters*. O restante deste trabalho é apresentado como se segue. A Seção 2 descreve o UFLP; a LagClus é discutida na Seção 3; a geração de colunas é tratada na Seção 4; a Seção 5 apresenta os resultados computacionais e as conclusões são apresentadas na Seção 6.

2. UFLP

Na modelagem matemática do UFLP (Cornuéjols, Nemhauser e Wolsey, 1990), as alocações são representadas pelas variáveis binárias x_{ij} , tal que $i \in I$ e $j \in J$, em que I é o conjunto dos pontos de demanda a serem alocados e J é o conjunto de localizações candidatas. $[x_{ij}]$ é a matriz de alocações, com $x_{ij} = 1$, se o ponto de demanda i for alocado à facilidade j , $x_{ij} = 0$, caso contrário. As localizações são representadas pelas variáveis binárias y_j , com $y_j = 1$, se o ponto j for selecionado, $y_j = 0$, caso contrário. O parâmetro c_{ij} define o custo de servir o cliente i pela facilidade j e o parâmetro f_j define o custo fixo de se abrir uma facilidade em j .

$$v(\text{UFLP}) = \min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} f_j y_j \quad (1)$$

Sujeito a

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (2)$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (3)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (4)$$

A função objetivo (1) minimiza o custo total do sistema. As restrições (2) impõem a alocação de cada ponto de demanda a somente um centro. As restrições (3) determinam que somente seja possível alocar um ponto de demanda i a um centro j se houver um centro em j . As restrições (4) definem as condições de integralidade.

Para efeito de comparação com a geração de colunas, objeto deste artigo, foi aplicada a relaxação lagrangeana ao UFLP. Essa aproximação do problema original foi conseguida relaxando-se as restrições de alocação (2) no sentido lagrangeano e incorporando-as à função objetivo. Desta forma, o problema $L_u\text{UFLP}$ pode ser escrito:

$$v(L_u\text{UFLP}) = \min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (c_{ij} - u_i) x_{ij} + \sum_{j \in J} f_j y_j + \sum_{i \in I} u_i \quad (5)$$

Sujeito a (3) e (4), em que u_i , $i \in I$, são os correspondentes multiplicadores duais.

3. Relaxação lagrangeana com divisão em *clusters* (LagClus)

A relaxação lagrangeana com divisão em *clusters* surgiu do trabalho de Ribeiro (2005), que adaptou os resultados de Hicks et al. (2004), os quais desenvolveram um algoritmo *Branch-and-Price* para o problema de Máximo Conjunto Independente de Vértices com Pesos (PMCIIVP). O PMCIIVP pertence à classe de problemas que podem ser decompostos em subproblemas do mesmo tipo do original. A abordagem dos autores considera o particionamento do conjunto de vértices do grafo de conflitos para a obtenção de subgrafos induzidos de mais fácil solução. O problema original é então reformulado usando-se a decomposição Dantzig-Wolfe (Bazaraa, 1990) e esses subproblemas passam a gerar colunas para a decomposição, aproximando as soluções do problema original.

Conforme mencionado, a LagClus incorpora a obtenção de um grafo de conflitos, o particionamento desse grafo em agrupamentos com a mesma característica do problema original e o uso da relaxação lagrangeana para incorporar à resolução do problema as arestas relaxadas, obtidas na separação dos referidos agrupamentos. Ribeiro (2005) e Ribeiro e Lorena (2005) apresentaram bons resultados dessa técnica para problemas de Máximo Conjunto Independente de Vértices, Rotulação Cartográfica de Pontos e Carregamento de Paletes. Corrêa, Lorena e Senne (2006) conseguiram bons resultados para UFLP com a LagClus.

3.1 O processo de aplicação da LagClus

O processo de aplicação da LagClus pode ser sintetizado nas seguintes ações:

- Montar o grafo de conflitos de um problema P_1 .
- Aplicar uma heurística de particionamento para dividir os vértices do grafo G em P clusters. O problema P_1 passa a ter suas restrições de adjacências (arestas) divididas em dois conjuntos: um, com restrições intraclusters; e outro, entre clusters ou arestas de ligação.
- Relaxar, no sentido lagrangeano, as restrições de adjacências entre clusters.
- Decompor a relaxação lagrangeana resultante em P subproblemas e resolvê-la.

3.2 Grafo de conflitos

Para montar o grafo de conflitos (Atamtürk, Nemhauser e Savelsbergh, 2000) para os problemas de localização deve-se trabalhar com o complemento das variáveis de localização $\bar{y} = 1 - y$, que aplicado ao UFLP obtém-se $\overline{UFLP}$ (Cornuéjols e Thizy, 1982).

$$v(\overline{UFLP}) = \min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} - \sum_{j \in J} f_j \bar{y}_j + \sum_{j \in J} f_j \quad (6)$$

Sujeito a

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (7)$$

$$x_{ij} + \bar{y}_j \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (8)$$

$$x_{ij}, \bar{y}_j \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (9)$$

No grafo de conflitos, como pode ser observado no exemplo da Figura 1, as restrições (7) definem cliques, onde apenas uma das variáveis de alocação deve ser igual a um na solução. As restrições (8) definem as arestas de ligação entre as variáveis de alocação e de localização.

Particionando o grafo de conflitos $G = (V, E)$ em P partes $V_1, V_2, \dots, V_P$ e $\forall p \in \{1 \dots P\}$ define-se subgrafos $G_p = G[V_p]$ com o conjunto de arestas $E_p = E(G_p)$. As arestas de G que conectam os subgrafos, isto é, que suas extremidades estão em diferentes conjuntos da partição, compreendem o conjunto $\hat{E} = E \setminus \bigcup_{p=1}^P E_p$,

Aplicando-se uma heurística de particionamento de grafo de conflitos de $\overline{UFLP}$ obtém-se a seguinte representação matricial:

$$v(\overline{UFLP}) = \min \sum_{p=1}^P \mathbf{c}^p \mathbf{x}^p - \mathbf{f}^p \bar{\mathbf{y}}^p \quad (10)$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & B_p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{bmatrix}^1 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{bmatrix}^2 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{bmatrix}^p \end{pmatrix} \sim \mathbf{1} \text{ e } \mathbf{x}^p, \bar{\mathbf{y}}^p \in B^{|V_p|} \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \quad (11)$$

Em que A_p é a matriz de dimensões $|\hat{E}| \times |V_p|$ de coeficientes das inequações associadas com as arestas de conflitos pertencentes à $\hat{E}$ (arestas em negrito na Figura 1b); B_p é a matriz de dimensões $|E| - |\hat{E}| \times |V_p|$ de coeficientes das equações e inequações associadas com as arestas de E_p ; e $\sim$ representa os operadores relacionais $=$ ou $\leq$ dependendo de se tratar, respectivamente, de uma equação ou inequação.

O subproblema p , $p \in \{1, \dots, P\}$, para o $\overline{UFLP}$ tem a forma:

$$Z_p^* = \text{Min} \left\{ (\mathbf{c}^p + A_p^T \boldsymbol{\mu}) \mathbf{x}^p - (\mathbf{f}^p - A_p^T \boldsymbol{\mu}) \bar{\mathbf{y}}^p : \mathbf{x}^p, \bar{\mathbf{y}}^p \in Q_p \right\}, \quad (12)$$

em que $\boldsymbol{\mu} \in R_+^K$ são os multiplicadores lagrangeanos associados com as linhas da matriz A_p ; Q_p são as restrições associadas ao subproblema p (*cluster p*).

Aplicando-se a relaxação lagrangeana sobre esse conjunto de restrições, sendo K a quantidade de arestas relaxadas, e resolvendo-se os subproblemas Z_p^* , o valor da LagClus ($\text{LC}_{\mu} \overline{UFLP}$) será dado por:

$$v(\text{LC}_{\mu} \overline{UFLP}) = \sum_{p=1}^P Z_p^* - \sum_{k=1}^K \mu_k + \sum_{j \in J} f_j \quad (13)$$

4. Decomposição Dantzig-Wolfe e geração de colunas para o UFLP

A implementação clássica de geração de colunas utiliza um problema coordenador, ou problema mestre restrito (PMR), e subproblemas geradores de colunas para o PMR. Estes últimos, por meio de suas variáveis duais, direcionam os subproblemas na busca de novas colunas que acrescentam novas informações ao PMR.

Considerando o problema (10)-(11) e se removido o conjunto de restrições definido pelas matrizes A_p em (11), pode-se dividir o problema em P subproblemas distintos. Assim, aplicando a decomposição Dantzig-Wolfe (DW) para a relaxação linear (LP) do problema (10)-(11) tem-se o seguinte PMR:

$$v(\text{PMR})_{LP} = \text{Min} \sum_{p=1}^P \sum_{j \in J_p} \lambda_{jp} (\mathbf{c}^p \mathbf{x}^{jp} - \mathbf{f}^p \bar{\mathbf{y}}^{jp}) \quad (14)$$

Sujeito a

$$\sum_{p=1}^P \sum_{j \in J_p} \lambda_{jp} (A_p \mathbf{w}^{jp}) \leq 1, \text{ onde } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\sum_{j \in J_p} \lambda_{jp} = 1 \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \quad (16)$$

$$\lambda_{jp} \geq 0 \quad \forall p \in \{1, \dots, P\}, \quad j \in J_p \quad (17)$$

J_p – Conjunto de pontos extremos do *cluster p*.

$\mathbf{x}^{jp}$ e $\bar{\mathbf{y}}^{jp}$ – Vetores que definem os pontos extremos $j \in J_p$.

$\mathbf{c}^p$ e $\mathbf{f}^p$ – Vetores de pesos associados com os vértices $v \in V_p$.

λ_{jp} – Variável de decisão que corresponde ao ponto extremo $j \in J_p$.

O subproblema p , $p \in \{1, \dots, P\}$, tem a forma da expressão mostrada em (12), com o vetor de multiplicadores lagrangeanos substituídos pelo vetor de variáveis duais $\boldsymbol{\alpha}$ associado com as restrições (15):

$$Z_p^{GC} = \text{Min} \left\{ (\mathbf{c}^p - A_p^T \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{x}^p - (\mathbf{f}^p + A_p^T \boldsymbol{\alpha}) \bar{\mathbf{y}}^p : \mathbf{x}^p, \bar{\mathbf{y}}^p \in Q_p \right\}, \quad (18)$$

em que Q_p são as restrições associadas ao subproblema p (*Cluster p*). Considerando o PMR da decomposição descrita em (14)-(17), uma nova coluna gerada pelo subproblema p é uma coluna a ser inserida no PMR se o seu custo reduzido for negativo, isto é, $Z_p^{GC} - \beta_p < 0$, em

que β_p é a variável dual associada com a $p^{\text{ésima}}$ restrição de convexidade de (16). Com isso, o PMR coordena as soluções dos problemas por meio de suas variáveis duais, buscando uma solução para o problema original.

Sendo $\alpha \in R_+^K$ e K a quantidade de arestas relaxadas, a decomposição apresentada acima fornece um modo alternativo de se obter a relaxação LagClus para o $\overline{UFLP}$ ($LC_\alpha^{GC} \overline{UFLP}$), dada por:

$$v(LC_\alpha^{GC} \overline{UFLP}) = \sum_{p=1}^P \{v(Z_p^{GC})\} + \sum_{k=1}^K \alpha_k + \sum_{j \in J} f_j \quad (19)$$

O processo de aplicação da geração de colunas pode ser sintetizado na Figura 2.

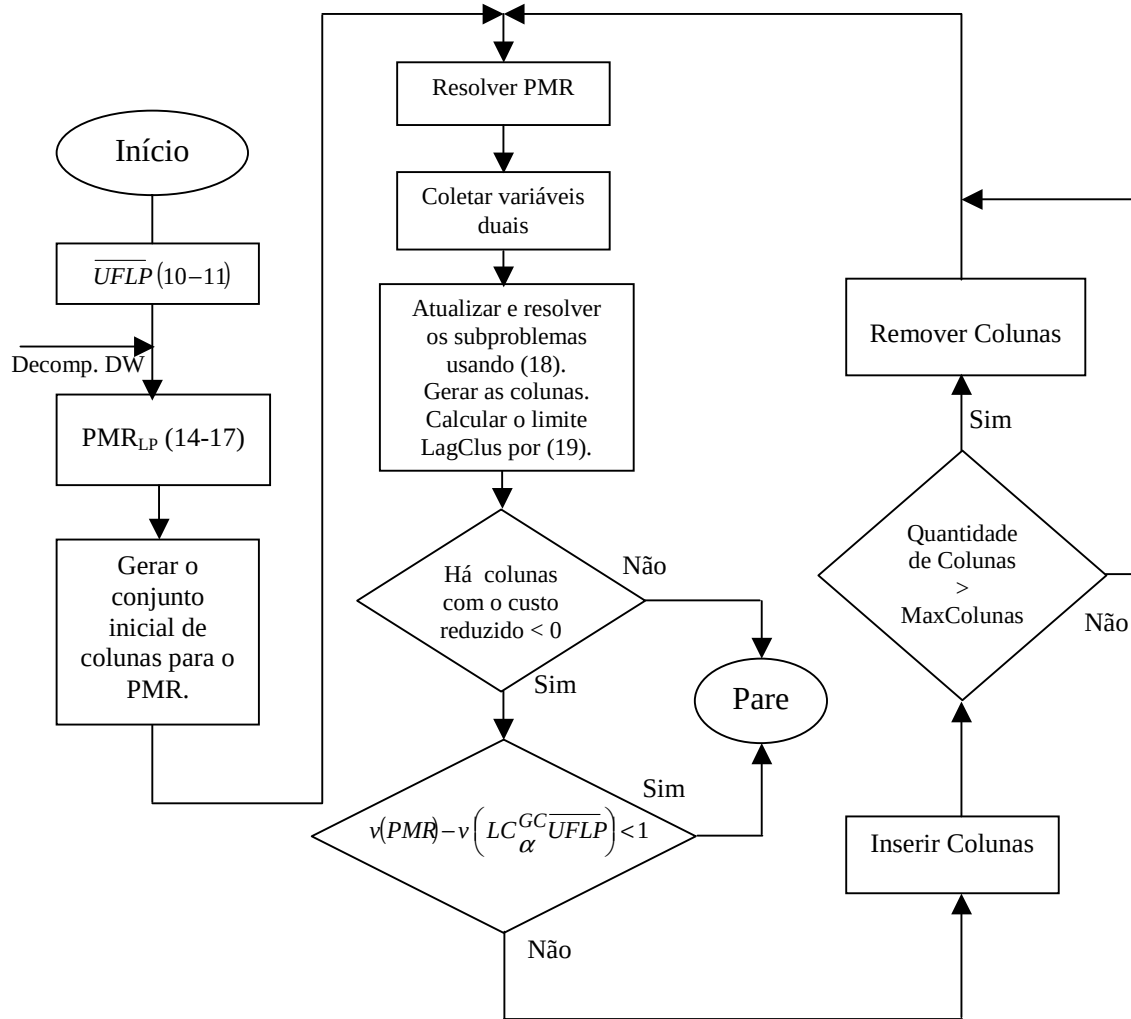


Figura 2 – Diagrama com os passos usados na abordagem de geração de colunas

5. Experiência computacional

Embora existam vários trabalhos que relatam instâncias testes para o UFLP, como, por exemplo, em Kochetov e Ivanenko (2003), Resende e Werneck (2005) e Sun (2006), os conceitos apresentados neste artigo foram testados e apresentam resultados apenas para as mostradas em Kochetov e Ivanenko (2003), por serem instâncias com grande gap de dualidade e por serem de difícil solução para métodos baseados em relaxação linear. Essas instâncias foram obtidas em http://www.math.nsc.ru/AP/benchmarks/UFLP/Engl/ufllp_dg_eng.html.

São apresentadas três classes de instâncias: Gap-A, Gap-B, Gap-C. Todas as instâncias têm os valores $m = n = 100$. O custo fixo de abrir uma facilidade é 3.000. As instâncias do grupo Gap-A são mais fáceis que as do Gap-B e Gap-C. Cada cliente pode ser atribuído a dez potenciais facilidades, escolhidas aleatoriamente, com distribuição uniforme entre todas elas. As instâncias do grupo Gap-B são mais difíceis que as do grupo Gap-A e mais fáceis que as do Gap-C. Cada facilidade pode ser atribuída a dez potenciais clientes, escolhidos aleatoriamente, com distribuição uniforme entre todos eles. As instâncias do grupo Gap-C são as mais difíceis. Cada facilidade tem dez potenciais clientes e cada cliente tem dez potenciais facilidades, escolhidos aleatoriamente, com distribuição uniforme.

A Tabela 1 mostra os valores da solução ótima (coluna Solução ótima), da relaxação de programação linear (coluna PL) e da relaxação lagrangeana tradicional (coluna Lag). A coluna Gap dualidade é calculada por $100 \cdot (\text{valor solução ótima} - \text{PL}) / (\text{valor solução ótima})$ e mostra, em porcentagem, o gap entre esses valores. O Gap Lag é $100 \cdot (\text{valor solução ótima} - L_U\text{UFLP}) / (\text{valor solução ótima})$.

A Tabela 2 mostra os valores ótimos e os obtidos com a geração de colunas. Os valores de Gap GC são calculados por $100 \cdot (\text{valor solução ótima} - LC_{\alpha}^{GC} \overline{UFLP}) / (\text{valor solução ótima})$. Os valores em negrito da Tabela 2 mostram onde a geração de colunas obteve melhores valores de gap que a solução PL. Merecem especial atenção as divisões do problema original em dois *clusters*, por apresentarem reduzida quantidade de arestas entre eles e melhora dos limitantes, com a penalidade nos tempos de processamento.

Os tempos foram obtidos em um computador Pentium IV 3 GHz, com 1Gb de memória RAM. O problema obtido com a relaxação lagrangeana, os subproblemas geradores das colunas e o PMR foram resolvidos com o *solver* comercial CPLEX, versão 7.5 (ILOG, 2001).

Para o desenvolvimento da relaxação lagrangeana do UFLP, foram relaxadas as restrições (2), conforme a Seção 2, com a otimização do dual lagrangeano obtida por meio do algoritmo de subgradientes.

O particionamento dos grafos foi feito com programas da família Metis (Karypis e Kumar, 1998), que é uma heurística bastante conhecida, disponível em <http://www.cs.umn.edu/~metis>.

Os critérios de parada para o processo de geração de colunas foram: todas as novas colunas geradas têm custo reduzido positivo e o erro absoluto entre os valores do limite inferior (subproblemas) e do PMR < 1 . A remoção de colunas acontece quando o seu número ultrapassa certo valor prefixado MaxColunas (igual a 4000, neste trabalho). São removidas, então, as 1000 colunas com o maior custo reduzido.

Tabela 1 – Resultados da aplicação da relaxação de programação linear e relaxação lagrangeana para o UFLP em instâncias com grande *gap* de dualidade.

Problema	Ótimo		Relaxação linear			Relaxação lagrangeana		
	Solução ótima	Tempo Solução ótima (s)	PL	Gap dualidade	Tempo PL (s)	Lag	Gap Lag	Tempo Lag (s)
332GapA	36154	583	26959.45	25,43	0,88	26810.08	25,84	82
432GapA	36155	1072	27223.17	24,71	0,75	27120.22	24,99	89
532GapA	36150	326	26143.15	27,68	0,83	26043.84	27,96	98
331GapB	45123	14856	34226,11	24,15	0,86	34141.59	24,34	79
431GapB	45132	18098	35031.87	22,52	0,81	34892.40	22,69	88
531GapB	45135	2287	36488.07	19,25	0,77	36432.08	19,28	133
333GapC	42147	23179	30207.90	28,33	0,86	30184.73	28,39	75
433GapC	42145	22172	30199.20	28,35	0,86	30172.98	28,42	79
533GapC	39177	3208	30200.00	22,92	0,83	30152.13	23,04	95

Tabela 2 - Resultados da aplicação da geração de colunas para o UFLP em instâncias com grande *gap* de dualidade.

Problema	Solução ótima	# clusters	Limite inferior	PMR	Gap GC	Tempo GC (s)
332GapA	36154	2	27748.41	27749.26	23,25	6743
332GapA	36154	4	26974.35	26975.31	25,39	3743
432GapA	36155	2	28110.16	28110.16	22,25	7180
432GapA	36155	4	27250.55	27250.83	24,63	2982
532GapA	36150	2	27004.58	27004.58	25.31	12342
532GapA	36150	4	26176.45	26176.45	27.59	7102
331GapB	45123	2	34705.41	34706.30	23.09	7245
331GapB	45123	4	34240.39	34241.25	24,12	4542
431GapB	45132	2	35630.30	35630.31	21.05	5791
431GapB	45132	4	35067.49	35068.23	22.30	5334
531GapB	45135	2	36802.65	36803.58	18.46	8258
531GapB	45135	4	36664.14	36664.98	18.77	3590
333GapC	42147	2	30997.30	30997.81	26.45	5247
333GapC	42147	4	30231.52	30231.52	28.27	1540
433GapC	42145	2	31012.96	31013.01	26,41	6051
433GapC	42145	4	30218.60	30218.60	28.30	1852
533GapC	39177	2	30775.69	30775.69	21.44	6677
533GapC	39177	4	30263.21	30263.21	22.75	1852

Considerando que o problema tratado é de minimização e a instância escolhida é de difícil solução para métodos baseados em relaxação linear, os valores do problema mestre restrito e da LagClus tendem a se igualarem em um valor inferior ao do valor ótimo, conforme mostra a Figura 3.

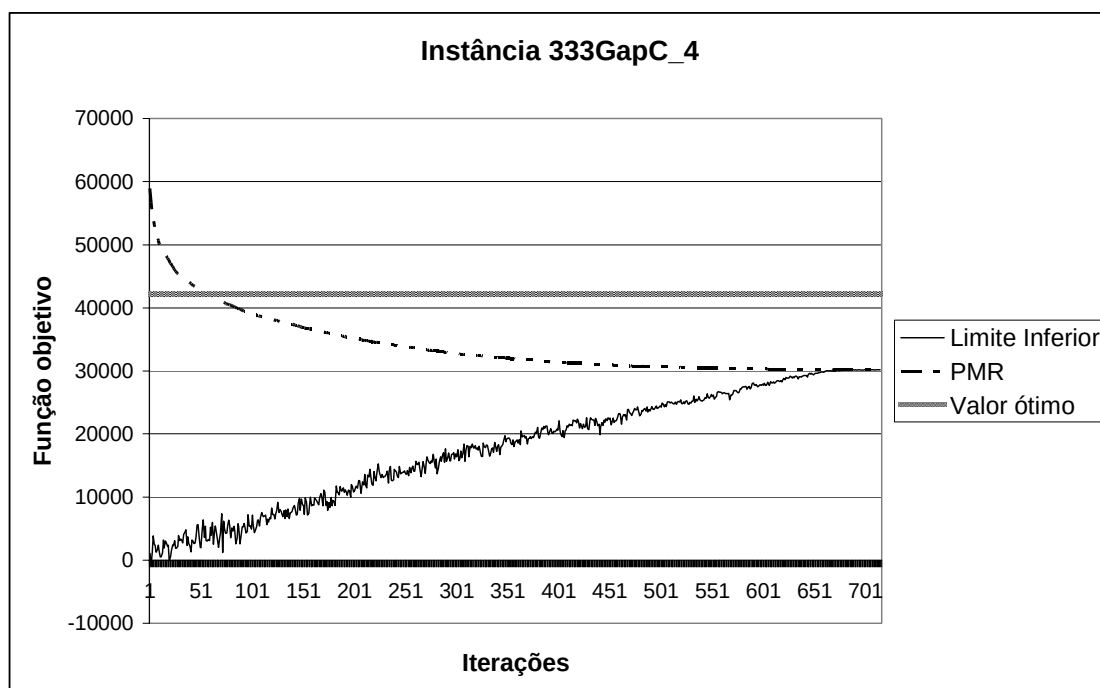


Figura 3 – Convergência da abordagem de geração de colunas em instância do UFLP

6. Conclusões

Este trabalho apresentou um método de geração de colunas para o UFLP. Os resultados sugerem que esse método deve ser mais bem investigado, pois apresenta indícios de ser uma boa alternativa para a solução de problemas de localização. A Tabela 2 mostra que os resultados da abordagem de geração de colunas apresentam limites duais de melhor qualidade que as relaxações tradicionais para instâncias consideradas computacionalmente difíceis para métodos baseados em programação linear.

Resende & Werneck (2005) apresentam uma heurística específica para o UFLP, aplicando-a a várias instâncias preparadas para benchmarks, encontradas na literatura. Esse trabalho é uma boa referência para que, utilizando-se a LagClus, novos testes e comparações possam ser feitos em outras instâncias desse problema.

Espera-se, ainda, desenvolver técnicas que possam diminuir o tempo computacional, como, por exemplo, um tratamento mais eficiente da eliminação de colunas improdutivas.

Referências Bibliográficas

- Alves, M. L. e Almeida, M. T. (1992), Simulated annealing algorithm for the simple plant location problem: A computational study. *Revista Investigação Operacional*, **12**.
- Atamtürk, A., Nemhauser, G. L. e Savelsbergh, M. W. P. (2000), Conflict graphs in solving integer programming problems. *European Journal of Operational Research*, **121**, 40-55.
- Bazaara, M. S., Jarvis, J. J. e Sherali, H. D., *Linear programming and network flows*. John Wiley & Sons, New York, 1990.
- Beasley, J. E. (1993), Lagrangean heuristics for location problems. *European Journal of Operational Research*, **65**, 383-399.
- Corrêa, F. A., Lorena, L.A.N. e Senne, E.L.F. (2006), Lagrangean relaxation with clusters for the uncapacitated facility location problem. XIII CLAIO - *Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa*, Montevideo, Uruguay 2006. Submetido.
- Cornuéjols, G., Nemhauser, G. L. e Wolsey, L. A., The uncapacitated facility location problem. In: Mirchandani, P. B. e Francis R. L. (ed.) *Discrete Location Theory*. Wiley-Interscience, New York, 119-171, 1990.
- Cornuéjols, G. e Thizy, J. M. (1982), Some facets of the simple plant location polytope. *Mathematical Programming*, **23**, 50-74.
- Daskin, M. S., *Network and discrete location: models, algorithms and applications*. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- Ghosh, D. (2003), Neighborhood search heuristics for the uncapacitated facility location problems. *European Journal of Operational Research*, **150**, 150-162.
- Hicks, I. V., Warren, J. S., Warriar, D. e Wilhenlm, W. E. (2004), A Brach-and-Price approach for the maximum weight independent set problem. Texas A & M University: Department of Industrial Engineering.
- ILOG CPLEX 7.5 Reference Manual 7.5v. 610p. (2001) Copyright by ILOG, France.
- Karypis, G. e Kumar, V. (1998), A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **20**, 359-392.
- Kochetov, Y. e Ivanenko, D. (2003), Computationally difficult instances for the uncapacitated facility location problem. In: MIC2003: The Fifth Metaheuristics International Conference, Kyoto, Japan 2003. Anais... p. 41-1 – 41-5.
- Körkel, M. (1989), On the exact solution of large-scale simple plant location problem. *European Journal of Operational Research*, **39**, 157-173.
- Kratika, J., Tosic, D., Filipovic, V. e Ljubic, I. (2001), Solving the simple plant location problem by genetic algorithm. *RAIRO Operations Research*, **39**, 127-142.
- Michel, L. e Van Hentenryck, P. (2003), A simple tabu search for warehouse location. *European Journal of Operational Research*, **157** (3), 576-591.
- Resende, M. G. C. e Werneck, R. F. (2005), A hybrid multistart heuristic for the uncapacitated facility location problem. *European Journal of Operational Research*, In Press, Corrected Proof. Disponível online em 23 mai 2005.

Ribeiro, G. M. (2005), Relaxação lagrangeana com divisão em *clusters* para alguns problemas de otimização modelados em grafos de conflitos. 2005. 99 p. Proposta de Tese (Doutorado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2005.

Ribeiro, G. M. e Lorena, L. A. N. (2005), Lagrangean relaxation with clusters and column generation for the manufacturer's pallet loading problem. *Computers & Operations Research*, In Press, Corrected Proof, Available online 2 December 2005.

Sun, M. (2006). Solving the uncapacitated facility location problem using tabu search. *Computers & Operations Research*, 33(9), 2563-2589.