REFINAMENTO DE UM ALGORITMO ENUMERATIVO PARA DETERMINAÇÃO DE PADRÕES TABULEIROS EXATOS E RESTRITOS

Horacio Hideki Yanasse[#]

Daniel Massaru Katsurayama[*]

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada
Avenida dos Astronautas, 1758 – Jardim da Granja – C.E.P.: 12227-010
São José dos Campos – S.P.
E-mail: {[#]horacio, [*]massaru}@lac.inpe.br

Resumo

Sugerimos um refinamento no algoritmo enumerativo para o problema de geração de padrões tabuleiros exatos e restritos descrito em Katsurayama e Yanasse (2005). Este algoritmo se baseia no método da enumeração implícita de Gilmore e Gomory (1963) para resolução do problema da mochila unidimensional irrestrito. O impacto no tempo de execução do algoritmo devido ao refinamento introduzido é avaliado.

Palavras-chave: padrão tabuleiro, algoritmo enumerativo, algoritmo de enumeração implícita.

Abstract

We propose a refinement in the enumerative algorithm to solve the exact constrained checkerboard pattern described in Katsurayama and Yanasse (2005). This algorithm is based on the Gilmore and Gomory's (1963) implicit enumeration scheme for solving the one-dimensional unconstrained knapsack problem. The impact in the algorithm´s execution time due to the refinement introduced is evaluated.

Keywords: checkerboard pattern, enumerative algorithm, implicit enumeration algorithm.

1 – Introdução

Padrões tabuleiros, também conhecidos como padrões 1-grupo (Gilmore e Gomory, 1965) pertencem a uma classe especial de padrões 2-estágios guilhotinados. Eles são de interesse prático pois são facilmente cortados uma vez que todas as faixas obtidas no primeiro estágio podem ser simultaneamente cortadas no segundo estágio, produzindo os itens solicitados.

Em edições anteriores deste simpósio apresentamos trabalhos sobre padrões tabuleiros Katsurayama & Yanasse (2004a, 2005). Nestes trabalhos foi feita uma revisão da literatura sobre o assunto, desta forma, para evitar duplicações, convidamos o leitor a consultar estes trabalhos e os trabalhos recentes de Katsurayama & Yanasse (2004b), Yanasse & Katsurayama (2004, 2005) e Yanasse & Morabito (2005). No trabalho de Yanasse e Morabito (2005), com uma linearização de um modelo não linear para o problema de geração de padrões tabuleiros exatos restritos, conseguiu-se o melhor desempenho computacional em termos de tempos de execução, do qual estes autores tem conhecimento, na resolução de problemas de geração de padrões tabuleiros exatos restritos. Instâncias com até 100 tipos de itens foram resolvidos em um tempo de execução razoável, utilizando-se pacotes comerciais para resolução de problemas de programação linear inteira.

Não se tem conhecimento da publicação de outros artigos recentes além dos citados em revisões anteriores destes autores que tratam da geração de padrões tabuleiros, embora observa-se a existência de alguns trabalhos que tratam de padrões especiais simples de serem cortados (vide, por exemplo, Figueiredo & Rangel, 2005; Cui, 2005; Cui et al., 2006)

Neste trabalho sugere-se um refinamento no algoritmo enumerativo descrito em Yanasse e Katsurayama (2005) para resolução do problema de geração de padrões tabuleiros exatos e restritos. Este algoritmo utiliza uma enumeração implícita dos itens introduzidos no padrão, em moldes similares ao algoritmo descrito em Gilmore e Gomory (1963) para resolução do problema da mochila unidimensional irrestrito. O algoritmo com o novo refinamento foi implementado e testes computacionais foram realizados e comparados com os resultados obtidos em Yanasse e Morabito (2005).

2 – O Novo Algoritmo

Considere o problema de geração de padrões tabuleiros exatos restritos com os seguintes parâmetros:

W largura do objeto retangular;
L comprimento do objeto retangular;
M quantidade de tipos de itens diferentes;
w_i largura do item retangular i, $i = 1, 2, \ldots, M$;
l_i comprimento do item retangular i, $i = 1, 2, \ldots, M$;
π_i lucro (valor de utilidade) do item retangular i, $i = 1, 2, \ldots, M$;
d_i número máximo permitido do item retangular i, $i = 1, 2, \ldots, M$, no padrão.

O algoritmo anterior sugerido em Katsurayama e Yanasse (2005) é reproduzido a seguir pois ele tem o esqueleto básico para os demais refinamentos introduzidos. Neste algoritmo faz-se uma enumeração dos tipos de itens a serem inseridos no padrão em moldes similares ao sugerido em Gilmore e Gomory (1963) para resolução do problema da mochila unidimensional irrestrito.

Algoritmo de enumeração implícita (reproduzido de Katsurayama e Yanasse, 2005):

<u>Passo 1</u>: ordenação dos itens.

Para cada tipo de item i, defina $v_i = \dfrac{\pi_i}{w_i l_i}$ $(i = 1,\ldots,M)$ e reordene os itens, tal que $v_1 \geq v_2 \geq \ldots \geq v_M$.

<u>Passo 2</u>: determinação da solução inicial.

Determine $a = (a_1, a_2, \ldots, a_M)$, tal que $a_i = \min\left\{\left\lfloor \dfrac{X}{w_i l_i} \right\rfloor, d_i, u_i\right\}, i = 1,\ldots,M$, onde:

X =espaço restante da mochila (inicialmente, $X = WL$);
u_i =número de itens do tipo i que podem ser colocados no padrão e, ainda assim, um padrão tabuleiro pode ser gerado.

<u>Passo 3</u>: avaliação da solução corrente e armazenamento da solução mais valiosa.

Determine $g(a) = \sum_{i=1}^{M} \pi_i a_i$;

Se $\underline{G} < g(a)$ (inicialmente, $\underline{G} = 0$), então faça $\underline{G} = g(a)$ e guarde $\underline{a} = a$.

<u>Passo 4</u>: teste de otimalidade e cálculo do limitante superior.

Determine o maior índice k, tal que $a_k > 0$;
Se $k = 0$ então PARE, $\underline{a}$ é a solução ótima;
Senão, faça:
Início

$$\overline{WL} = WL - w_1 l_1 a_1 - \ldots - w_k l_k (a_k - 1);$$

Determine j, tal que: $\begin{cases} \sum_{i=k+1}^{j-1} w_i l_i d_i \le \overline{WL} \\ \sum_{i=k+1}^{j} w_i l_i d_i > \overline{WL} \end{cases}$;

Se j for indeterminado, então faça:

Se ($w_{k+1} l_{k+1} d_{k+1} > \overline{WL}$) então faça $\overline{G} = \pi_1 a_1 + \ldots + \pi_k (a_k - 1) + \pi_{k+1} \left(\frac{\overline{WL}}{w_{k+1} l_{k+1}} \right)$;

Senão faça $\overline{G} = \pi_1 a_1 + \ldots + \pi_k (a_k - 1) + \pi_{k+1} d_{k+1} + \ldots + \pi_M d_M$;

Senão faça:
Início

$$a_i = d_i,\ i = k+1, \ldots, j-1;$$

$$a_j = \left\lfloor \frac{\overline{WL} - \sum_{i=k+1}^{j-1} w_i l_i a_i}{w_j l_j} \right\rfloor;$$

$$\overline{G} = \pi_1 a_1 + \ldots + \pi_k (a_k - 1) + \pi_{k+1} a_{k+1} + \ldots + \pi_j a_j;$$

Fim;
Fim.

Passo 5: backtracking.
Se $\overline{G} \le \underline{G}$, então faça:
Início

$$a_k = 0;$$

$$a_{i+1} = \min\left(\left\lfloor \frac{X}{w_{i+1} l_{i+1}} \right\rfloor, d_{i+1}, u_{i+1} \right),\ i = k, \ldots, M-1, \text{ onde:}$$

X=espaço restante da mochila (inicialmente, $X = WL - w_1 l_1 a_1 - \ldots - w_{k-1} l_{k-1} a_{k-1}$);

u_{i+1}=número de itens do tipo i+1 ($i = k, \ldots, M-1$) que podem ser colocados no padrão e, ainda assim, um padrão tabuleiro pode ser gerado;

Volte para o Passo 4;

Fim;
Senão, faça:
Início:

$$a_k = a_k - 1;$$

Se ($a_k < 0$) faça $a_k = 0$ e volte para o Passo 4;

$$a_{i+1} = \min\left(\left\lfloor \frac{X}{w_{i+1} l_{i+1}} \right\rfloor, d_{i+1}, u_{i+1} \right),\ i = k, \ldots, M-1, \text{ onde:}$$

X=espaço restante da mochila (inicialmente, $X = WL - w_1 l_1 a_1 - \ldots - w_k l_k a_k$);

u_{i+1}=número de itens do tipo i+1 ($i = k,...,M-1$) que podem ser colocados no padrão e, ainda assim, um padrão tabuleiro pode ser gerado;

Fim Enquanto ($a_{k+1} = 0,...,a_M = 0$)

e volte para o Passo 3.

No passo 2 do algoritmo, u_i é determinado por uma busca por bisecção. Deseja-se encontrar um valor inteiro f que gere um padrão tabuleiro exato tal que

$$f = \max j,\ j = 0, 1, 2, \ldots, \min\{\lfloor X/(w_i l_i)\rfloor, d_i\}.$$

Seja $\theta = \min\{\lfloor X/(w_i l_i)\rfloor, d_i\}$. A busca por bisecção verifica inicialmente se um padrão tabuleiro exato pode ser gerado considerando a inserção de θ itens tipo i no espaço restante X do padrão determinado anteriormente. Se a geração do padrão não for possível, então verifica-se se a geração é possível inserindo-se $\theta/2$ itens tipo i em X. Se sim, verifica-se se a geração é possível inserindo-se uma quantidade de itens equivalente à metade entre $\theta/2$ e θ itens. Em caso negativo, a verificação é feita no valor intermediário no intervalo entre 0 e $\theta/2$. A busca por bisecção prossegue dividindo os intervalos na metade e repetindo a verificação até que o intervalo se reduz a um único valor, o valor f obtido é o valor de u_i.

Em Yanasse e Katsurayama (2005) sugeriu-se um primeiro refinamento neste algoritmo. O cálculo do limitante superior $\overline{G}$ (passo 4) foi modificado significativamente passando a considerar as dimensões dos itens já definidos no padrão. Com isso, os espaços vazios que podem ser utilizados para a inclusão de itens adicionais, acima e à direita do subpadrão (denominado de retângulo cerne, vide figura 1), já estão completamente definidos pelos itens já inclusos no padrão. Estes locais vazios só podem ser preenchidos com itens de dimensões compatíveis (mesma largura ou mesmo comprimento). Na figura 1, observa-se que nos retângulos B1, B2 e B3 só é possível inserir itens que tenham o mesmo comprimento dos retângulos B1, B2 e B3, respectivamente. Nos retângulos B5 e B6 só se pode inserir itens que tenham a mesma largura dos retângulos B5 e B6, respectivamente. Apenas em B4 temos uma maior liberdade de escolha nas dimensões dos itens que ali podem ser inseridos. Em cada um dos retângulos B1, B2, B3, B5 e B6, toma-se somente os itens ainda não considerados e com dimensões compatíveis com esses retângulos, e obtem-se um limitante superior dado pelo melhor preenchimento possível destes itens nestes retângulos. Para evitar cálculos excessivos, este melhor preenchimento é obtido pela solução trivial do problema da mochila definido por esses itens após relaxar as restrições de integralidade.

O novo refinamento proposto neste trabalho leva em conta os casos em que alguns itens já definidos para comporem o padrão ainda não estão sendo cortados no retângulo cerne. Isto acontece quando esses itens podem ser cortados tanto através de uma nova tira horizontal ou uma nova tira vertical, como mostra a figura 2, não havendo uma certeza ainda de qual das duas tiras é a mais apropriada para estes itens serem cortados. O melhor corte, possivelmente, depende de outros itens adicionais a serem introduzidos no padrão.

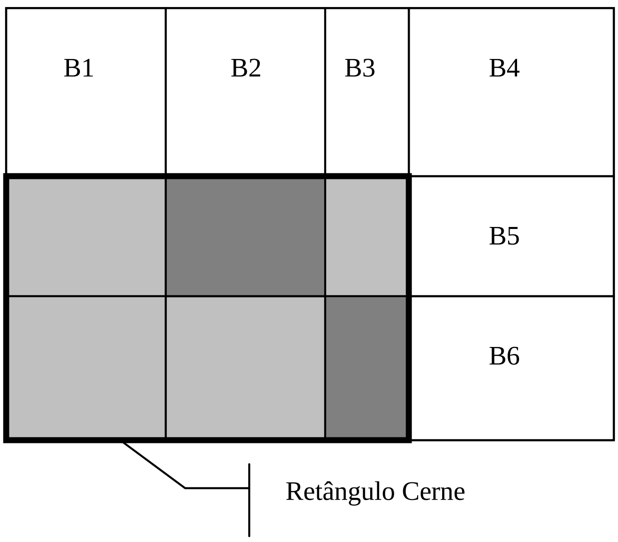

Figura 1 – Ilustração do retângulo cerne e espaços livres existentes

Nestes casos, sugere-se avaliar o limitante superior utilizado em Yanasse e Katsurayama (2005), descrito anteriormente, para as duas possibilidades, ou seja, com estes itens cortados através de uma nova tira horizontal ou através de uma nova tira vertical. Como não sabemos neste estágio da enumeração qual das duas possibilidades é a melhor, utilizamos o maior dos dois limitantes obtidos. Com isso, temos certeza que este valor considerado é de fato um limitante superior para o valor dos itens adicionais que podem ser inseridos ainda nos espaços livres. Para os casos os casos em que alguns itens já definidos para comporem o padrão ainda não estão sendo cortados no retângulo cerne, este novo limitante superior é potencialmente melhor que o obtido em Yanasse e Katsurayama (2005) pois, existe menor flexibilidade no preenchimento dos espaços vazios que sobram e que precisam ser considerados (veja figura 2).

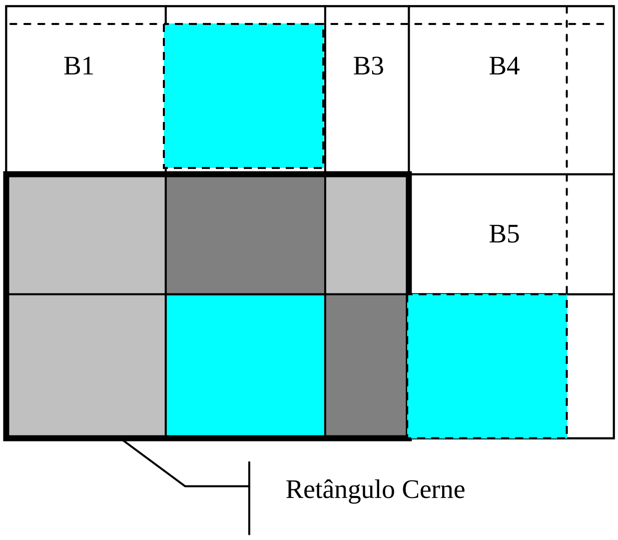

Figura 2 – Item adicional no padrão pode ser cortado através de uma nova tira horizontal ou uma nova tira vertical

O algoritmo com todos estes refinamentos foi implementado e testes computacionais foram realizados para avaliar o seu desempenho. Estes resultados são apresentados na próxima seção.

3 – Testes Computacionais

O novo algoritmo foi implementado em linguagem C++. Foram realizados testes computacionais para avaliar o tempo de execução desta implementação. As instâncias utilizadas nos testes computacionais foram extraídas de Yanasse e Morabito (2005). As instâncias de Yanasse e Morabito (2005) consistem de problemas restritos, gerados aleatoriamente por estes autores para 5, 10, 20, 50 e 100 diferentes tipos de itens. Estas instâncias foram utilizadas por Yanasse e Morabito (2005) para avaliação dos modelos matemáticos desenvolvidos por eles para padrões tabuleiros exatos e não exatos restritos.

Nos testes realizados, os tempos computacionais estão expressos em segundos. O algoritmo foi executado num PC Pentium 4, 2.2GHz, com 256MB RAM, rodando o sistema operacional Linux. Os resultados obtidos por Yanasse & Morabito (2005) foram executados num PC Pentium 4, 2.8GHz, com 512MB RAM.

Na Tabela 1 apresenta-se a média dos tempos computacionais obtidos de um conjunto de 6 classes de problemas, com 5, 10, 20, 50 e 100 tipos de itens diferentes. Em cada classe, 10 instâncias foram resolvidas. Na coluna YM2005 reproduz-se os tempos computacionais relatados em Yanasse e Morabito (2005).

Tabela 1 – Tempos médios de execução

Conj. De Instâncias	***M***	**Versão Refinada**	**YM2005***
Conj. 1	5	0.004	<0.1
Conj. 2	5	0.01	<0.1
Conj. 3	10	0.05	0.23
Conj. 4	20	0.2	1.06
Conj. 5	50	3.96	12.33
Conj. 6	100	29.70	157.28

* Reproduzido de Yanasse e Morabito (2005)

Pela Tabela 1, apesar da configuração da máquina utilizada ser inferior a aquela utilizada por Yanasse & Morabito (2005), observa-se uma redução no tempo médio de execução obtido com o uso da versão refinada em comparação com os tempos obtidos em Yanasse & Morabito (2005).

4 – Considerações Finais

Neste trabalho apresentou-se um novo algoritmo obtido com um refinamento do algoritmo proposto por Yanasse & Katsuryama (2005) para a determinação de padrões tabuleiros exatos e restritos.

Testes computacionais realizados com instâncias extraídas da literatura mostraram que o novo algoritmo tem desempenho, em termos de tempos de execução, em média, melhores do que os indicados em Yanasse & Morabito (2005), os quais estes autores acreditam ser os melhores publicados na literatura. Cabe observar que em Yanasse e Katsurayama (2005), apenas a proposta de cálculo de um novo limitante superior (passo 4) foi apresentada. Nenhum teste computacional foi reportado pois o algoritmo não havia sido implementado naquela ocasião. Este trabalho, portanto, serve também para comprovar o desempenho computacional do algoritmo proposto em Yanasse & Katsurayama (2005).

O novo algoritmo, juntamente com os algoritmos desenvolvidos anteriormente para a determinação de padrões tabuleiros irrestritos (vide, por exemplo: Morabito e Arenales, 2000; Katsurayama e Yanasse 1999, 2000) podem ser combinados para se resolver qualquer instância do problema de geração de padrões tabuleiros exatos. Especificamente, utiliza-se inicialmente o algoritmo para padrões irrestritos (que é muito rápido computacionalmente) e, caso o padrão gerado seja viável, termina-se a execução do algoritmo pois esta solução obtida é ótima. Caso o padrão gerado não seja viável, aplica-se então o novo algoritmo

5 – Reconhecimento

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq (Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e pela FAPESP (Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo).

6 – Referências Bibliográficas

Cui, Y. An exact algorithm for generating homogeneous T-shape cutting patterns. **Computers and Operations Research**, v. 32, p.153-162, 2005.

Cui, Y.; He, D.; Song, X. Generating optimal two-section cutting patterns for rectangular blanks. **Computers and Operations Research**, v. 33, n.6, p.1505-1520, 2006.

Figueiredo, A.G.; Rangel, S. Uma heurística para aplicação de padrões tabuleiros compostos no corte da matéria prima na indústria de móveis. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 37., Gramado (RS), 2005.

Gilmore, P.; Gomory, R. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. **Operations Research**, v.13, n.1, p.94-120, 1965.

Katsurayama, D.M.; Yanasse, H.H. Um algoritmo enumerativo para determinação de padrões tabuleiros. [CDROM]. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 31., Juiz de Fora (MG), 1999. Anais. Tec Art Editora, 1999. Seção de Corte e Empacotamento.

Katsurayama, D.M.; Yanasse, H.H. Um algoritmo enumerativo para determinação de padrões tabuleiros: aspectos computacionais de implementação. [CDROM]. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 32., Viçosa (MG), 2000. Anais. Tec Art Editora, 2000. Seção de Corte e Empacotamento.

Katsurayama, D.M.; Yanasse, H.H. Um algoritmo para geração de padrões tabuleiros exatos a partir de uma combinação dada de itens. [CDROM]. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 36., São João Del-Rei (MG), 2004a. Anais.

Katsurayama, D.M.; Yanasse, H.H. Um algoritmo enumerativo para determinação de padrões tabuleiros exatos e restritos. IV Workshop do Curso de Computação Aplicada. INPE. São José dos Campos (SP), 2004b;

Katsurayama, D.M.; Yanasse, H.H. Algoritmos para determinação de padrões tabuleiros exatos e restritos: testes computacionais comparativos. Apresentado no XXXVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, realizado em Gramado, RS, de 27 a 30 de setembro de 2005. Livro de Resumos, p.21. Anais do XXXVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, em CD-ROM, p. 1567-1578.

Morabito, R.; Arenales, M.N. Optimizing the cutting of stock plates in a furniture company. **International Journal of Production Research**, v.38, n.12, p.2725-2742, 2000.

Yanasse, H.H.; Katsurayama, D.M. Um algoritmo de enumeração implícita para geração de padrões tabuleiros exatos e restritos. SPOLM 2004 – VII Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha. Rio de Janeiro (RJ), 2004.

Yanasse, H.H.; Katsurayama, D.M. A new algorithm to generate constrained exact checkerboard patterns. XXV Encontro Nacional de Engenharia de Produção / X International Conference on Industrial Engineering and Operations Management, realizado em Porto Alegre, RS, de 29 de outubro a 01 de novembro de 2005, Anais de Resumos, p. 189, Proceedings of the X. International Conference on Industrial Engineering and Operations Management, intitulado "New research directions in industrial engineering: integrating theory and practice", editado por Leão, A.G.; Fogliatto, F.S.; Cortimiglia, M.C.; Carvalho, M.M.; Selig, P.M.; p.137-144, ISBN 85-88478-17-X. Arquivo ICEOM0601-0326, p.2925-2932, do CD do ENEGEP 2005, ISBN 85-88478-15-3.

Yanasse, H.H., Morabito, R. Linear models for one-group two-dimensional guillotine cutting problems. **International Journal of Production Research**, no prelo.