1.Classificação *INPE-COM 10/PE* *CDU-330.146*	2.Período *Outubro 1976*
3.Palavras Chaves (selecionadas pelo autor) *MODELO DOSSO; TURNPIKE; ACUMULAÇÃO DE CAPITAL; TRAJETÓRIAS ÓTIMAS; RAIO DE VON NEUMANN.*	
4. Critério de Distribuição: interna [ ] externa [X]	
5. Relatório nº *INPE-1015-PE/055*	6.Data *Abril de 1977*
7. Revisado por *Derli C.M. da Silva*	
8. Título e Sub-Título *TEOREMA DE CONVERGÊNCIA DO "TURNPIKE": UMA PROVA RELACIONADA COM O MODELO ORIGINAL DE DOSSO.*	
9. Autorizado por *Parada* *Nelson de Jesus Parada* *Diretor*	
10. Setor *DSE*	Código *450*
11. Nº de cópias *04*	
12. Autoria *Joanilio Rodolpho Teixeira*	
13. Assinatura Responsável *Joanilio R. Teixeira*	
14. Nº de páginas *23*	
15. Preço	

16. Sumário/Notas

Neste trabalho apresentamos alguns resultados do modelo de acumulação de Capital desenvolvido por Dorfman, Samuelson e Solon (1958), aqui chamado DOSSO. Discutimos a taxa de crescimento ótimo, o raio de Von Neumann, problema de estabilidade e o "Turnpike". Há muitas provas da existência do Teorema de Convergência do "Turnpike" na literatura econômica. Contudo, parece que nenhuma delas é suficientemente relacionada com a formulação original do modelo. A nossa prova é suficientemente relacionada ao modelo original e em muitos aspectos lembra Radner (1961). Entretanto, adicionamos novos elementos e fizemos certas modificações para adaptá-las ao modelo DOSSO.

17. Observações

TEOREMA DE CONVERGÊNCIA DO "TURNPIKE": UMA PROVA RELACIONADA COM O MODELO ORIGINAL DE DOSSO

Joanílio Rodolpho Teixeira - PhD
Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq
São José dos Campos - SP - Brasil

RESUMO

Neste trabalho apresentamos alguns resultados do modelo de acumulação de Capital desenvolvido por Dorfman, Samuelson e Solow (1958), aqui chamado DOSSO.

Discutimos a taxa de crescimento ótimo, o raio de Von Neumann, problema de estabilidade e o "Turnpike". Há muitas provas da existência do Teorema de Convergência do "Turnpike" na literatura econômica. Contudo, parece que nenhuma delas é suficientemente relacionada com a formulação original do modelo.

A nossa prova é suficientemente relacionada ao modelo original e em muitos aspectos lembra Radner (1961). Entretanto, adicionamos novos elementos e fizemos certas modificações para adaptá-las ao modelo DOSSO.

TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DO "TURNPIKE": UMA PROVA RELACIONADA COM O MODELO ORIGINAL DE DOSSO*

JOANILIO RODOLPHO TEIXEIRA - PhD
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS — INPE
CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO - CNPq
SÃO JOSÉ DOS CAMPOS - SP - BRASIL

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho mostramos o modelo de acumulação de capital, desenvolvido por Dorfman, Samuelson e Solow (1958), aqui chamado de DOSSO. Eles estão interessados nas propriedades de trajetórias que, partindo de condições especificadas, são eficientes em relação a um intervalo de tempo finito e especificado. Essas trajetórias geraram a celebrada conjetura do "turnpike", primeiro indicada por DOSSO. Afirma-se que, se o horizonte de planejamento é suficientemente longo, a tecnologia constante, a trajetória de consumo e o estoque inicial de capital especificados e se o objetivo é maximizar alguma função do estoque terminal de capital, então a trajetória que leva a este objetivo estará situada perto da trajetória de mais rápido crescimento balanceado na maior parte do horizonte de planejamento.

O autor agradece ao Professor John Craven da Universidade de Kent por críticas e sugestões. Também agradece ao Professor Michio Morishima da "The London School of Economics" por comentários. O texto foi lido pelo Dr. Derli C. Machado da Silva, o qual apresentou úteis sugestões. É claro que apenas o autor é responsável por possíveis falhas existentes.

Discutimos a taxa ótima de crescimento, o raio de von Neumann, a estabilidade e o "turnpike". Existem muitas provas da existência do "turnpike", na literatura, mas parece que nenhuma delas é exatamente relacionada com a formulação original do modelo de DOSSO; assim fornecemos uma prova do teorema do turnpike" bastante relacionada com o modelo original. A prova lembra a de Radner (1961) em muitos aspectos, mas é necessário fazer algumas modificações e adições para adaptá-la ao modelo de DOSSO.

2. O MODELO BÁSICO DE DOSSO

Seja $x(t)$ o vetor n-dimensional do produto doméstico bruto produzido durante o período t. $A(t)$ é a matriz (nxn), semipositiva e indecomponível, onde os coeficientes tecnológicos $a_{ij}(t)$ mostram a quantidade do bem i necessária para produzir uma unidade do bem j no período t. $A(t)$ reflete tecnologia, preços relativos, grau de integração das plantas e composição interna dos setores. Admite-se que existe retorno constante de escala mas não há produção conjunta. Supõe-se que $A(t)$ satisfaça à condição de Hawkins-Simon (1949).

$B(t)$ é uma matriz n-dimensional e semipositiva dos coeficientes de capital. Um elemento típico $b_{ij}(t)$ indica a quantidade do bem i, necessária como capital por unidade de produto do setor j, no período t. O índice t indica que os coeficientes podem mudar no tempo mas, durante o horizonte de planejamento, supõe-se estabilidade dos coeficientes das matrizes $A(t)$ e $B(t)$ sendo portanto negligenciado o indicador do tempo.

$s(t)$ é um vetor n-dimensional que indica os esto ques de capital, sendo $s_i(t)$ o estoque total de capital, do tipo i, disponível no fim do período t para proporcionar o produto bruto do próximo período. y(t) é o vetor n-dimensional que indica a demanda final e incorpora consumo c(t) e investimento $\Delta s(t)$, admitindo que não haja depreciação.

Se é permitida capacidade ociosa de estoque de capital tem-se a formulação de DOSSO das restrições impostas à economia.(1)

$$Bx(t) \leqq s(t-1) \qquad (2.1)$$

É importante notar que o modelo supõe heterogeneidade em relação aos estoques de capital e completa mobilidade dos estoques de capital entre diferentes setores. A última hipótese é obviamente forte já que transferência de capital de um setor para outro é frequentemente impraticável.

Do modelo de insumo-produto sabemos que:

$$x(t) = (I-A)^{-1} y(t) \qquad (2.2)$$

onde por definição:

$$y(t) = c(t) + \Delta s(t) \qquad (2.3)$$

---

(1) Por conveniência definimos s(t) como vetor dos estoques de capital no fim do período t, mas DOSSO não deixa claro o tempo de medição. Na formulação de DOSSO em vez de (2.1) temos $Bx(t) \leqq s(t)$. A diferença é apenas de notação entre fim de um período e início do próximo. Isto não constitui uma defasagem.

Segue das relações acima que:

$$B^*c(t) + B^*\Delta s(t) \leqq s(t-1) \quad (2.4)$$

onde $B(I-A)^{-1} = B^*$ é a matriz de requerimento bruto de capital e (2.4) é chamada aqui de "restrição fundamental". A relação recursiva:

$$s(t) = s(t-1) + \Delta s(t) \quad (2.5)$$

fornece a ligação entre estoques em períodos subsequentes.

Suponha que planejamos para t períodos e que o objetivo é acumular tanto capital quanto possível durante o período de planejamento. Dada a estrutura recursiva do processo de produção, no qual os estoques de bens de capital, no período t, ajudam a determinar os estoques de capital no período (t+1), para qualquer t necessitamos encontrar a condição, que deve ser satisfeita pela trajetória dos estoques e capital no tempo, tal que seja intertemporalmente eficiente.[1]

DOSSO mostrou que, numa estrutura recursiva, se uma trajetória é eficiente, existe um vetor de preços p(t) (com t = 1,2,...,T) tal que o processo de produção satisfaz:[2]

$$p(t-1)s(t-1)-p(t)s(t)=0 \text{ e } p(t)s(t)-p(t+1)s(t+1)=0 \quad (2.6)$$

---

(1) Uma trajetória intertemporalmente eficiente para um horizonte T pode ser definida como uma trajetória s(t) (com t=1,2,...,T) tal que para uma dada estrutura s(0) do estoque de capital e uma trajetória de consumo no tempo c(t), não existe qualquer outra trajetória s'(t) satisfazendo a mesma restrição que exibiria $s'(T) \geqq s(T)$.

(2) Em DOSSO, p.322, temos uma formulação mais elaborada. Para nosso propósito (2.6) é suficiente. Chakravarty (1969) mostra porque essa condição se realiza. Ele usa o teorema de hiperplanos suportantes a todo ponto limite de um conjunto convexo fechado com estrutura recursiva de processo de produção no qual os estoques de capital em qualquer período ajudam a determinar os estoques de capital do período seguinte (p. 175).

O modelo DOSSO de programação linear que busca a acumulação de capital, é apresentado na forma:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Max } Z = ks(T) \\ \text{sujeito a:} & B^*\Delta s(t) \leqq s(t-1) - B^*c(t) \\ & \Delta s(t) \geqq 0 \quad \text{para } t=1,2,\ldots,T \end{array}\right\} \qquad (2.7)$$

onde $s(0)$ e $c(t)$ são dados e $\Delta s_i(t)$ é o produto de bens do setor i usados como investimento, i.é., aumento do estoque de bens de capital do tipo i; k é um vetor (1xn) não negativo, que caracteriza a preferência em relação aos tipos de capital. Este é um programa "bloco-triangular" e não permite descapitalização. As variáveis duais do modelo são interpretadas como "shadow prices" ou preços sombra dos estoques de capital nos diferentes períodos.

3. TAXA ÓTIMA DE CRESCIMENTO, ESTABILIDADE E "TURNPIKE"

Se substituirmos a igualdade por desigualdade na restrição fundamental (2.4) e admitirmos o caso Malthus-von Neumann no qual todo consumo acima da subsistência é zero, i.é., o fluxo de serviços do trabalhador é produzido por um insumo de bens e pode ser tratado como qualquer outro estoque de capital, existe uma e apenas uma configuração do estoque inicial que permitirá crescimento em todos os setores a uma taxa constante, sem capacidade ociosa. Esta taxa positiva de crescimento equilibrado é a maior que o sistema é capaz de atingir e é fornecida a partir do maior autovalor de B* (autovalor predominante). Esse autovalor é chamado "raiz de Frobenius" e o inverso fornece a taxa máxima de crescimento equilibrado (taxa de von Neumann). O autovetor associado à raiz de Frobenius tem todos os elementos positivos e fornece o "raio de von Neumann". (1) Qualquer configuração inicial da estrutura de capital, que seja proporcional ao autovetor mencionado, continuará a crescer na mesma proporção, à taxa de von Neumann, e nenhuma outra configuração inicial poderá ser perpetuada à taxa acima. Isto é mostrado por DOSSO (p. 297, rodapé) e, mesmo antes, por von Neumann (1937). (2) É claro que essa estrutura particular do estoque de inicial de capital é improvável de ocorrer. Contudo o conceito de "turnpike" assegura que mesmo se a configuração inicial não é adequada, dada uma tecnologia constante, trajetória especificada do consumo e o objetivo de maximizar o tamanho do estoque de capital tendo uma estrutura final especificada, então a trajetória de crescimento eficiente estará perto da trajetória de von Neumann durante a maior parte do período de planejamento. Deve ser enfatizado que o teorema do "turnpike" diz respeito a programas de crescimento a longo prazo (mas finitos) e a proporção do tempo gasto na vizinhança do raio de von Neumann aumenta com o tamanho do plano.

---

(1) Se B^* é uma matriz, não negativa e indecomponível, o autovetor x^* associado à raiz de Frobenius, δ^*, é único (exceto por um escalar múltiplo); isto é, se y^* é um autovetor associado a δ^*, então $y^*=\theta x^*$ para algum escalar positivo θ. Para prova, ver Takayama (1974) p. 374.

(2) O artigo original de von Neumann foi publicado em 1937 e sua versão em inglês foi publicada em 1946. A prova está baseada no teorema do ponto fixo de Brower e assim requer tratamento topológico. Provas mais simples foram apresentadas por Gale (1956) e Karlin (1959). As condições originais do modelo foram primeiramente relaxadas por Kemeny, Morgenstern e Tompson (1956).

Para clarificar o conceito de "turnpike" é útil comentar as duas maiores características do resultado:

a) Existe um movimento da trajetória ótima da estrutura inicial dos estoques de capital, em direção a taxa máxima de crescimento equilibrado ou trajetória de von Neumann;

b) Existe uma tendência da trajetória ótima dispender uma crescente proporção do tempo na vizinhança da trajetória de von Neumann, quando o tamanho do horizonte de planejamento aumenta.

DOSSO apresenta três modelos de acumulação de capital formulados em termos de programação linear, equações de diferenças finitas e cálculo variacional. DOSSO ainda indica que os três apresentariam o "turnpike". Contudo, como Morishima (1964) mostra: "Exceto para o modelo de programação linear, os autores linearizaram os sistemas expandindo-os pela série de Taylor em redor do raio de von Neumann, mantendo apenas os termos lineares ... Se os autores tivessem linearizado de forma correta, eles apenas teriam obtido o teorema do "turnpike" em casos especiais ..." (pp. 154-156, tradução nossa).

Morishima também indica que mesmo a abordagem usando programação linear não é livre de excessões. Essas são chamadas de "casos cíclicos". É interessante notar que DOSSO na verdade não produziram uma prova completa do "turnpike". Eles apenas forneceram um esboço da prova e, mesmo assim, o esboço envolvendo programação linear diz respeito apenas ao conceito de que, a longo prazo, todas as trajetórias eficientes se aproximam da trajetória de máximo crescimento equilibrado.

Após a publicação do livro de DOSSO alguns teoremas do "turnpike" foram determinados por autores como Radner (1961), Furuya e Inada (1962), Morishima (1964), Inada (1964), Winter (1967). Koopmans (1964) também forneceu uma engenhosa prova geométrica do teorema de von Neumann e um sumário da literatura do "turnpike". Nenhuma dessas provas está suficientemente ligada à formulação original de DOSSO, o que justifica nosso trabalho de procurar tal prova.

4. ALGUMAS DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Para expor nossa prova do "turnpike" é necessário definir uma medida de distância entre dois vetores. Devido aos retornos constantes de escala, a distância Euclidiana não serve para nosso propósito, uma vez que essa medida não reflete diferenças qualitativas ou composicionais, e pretendemos medir a distância entre um dado vetor e o vetor das proporções de von Neumann. Radner (1961) usou a "distância angular"(1) mas essa medida não apresenta interpretação econômica. Nesse trabalho usaremos uma medida que satisfaz, entre outras coisas, ao requerimento da interpretação econômica (2). Antes de introduzir essa medida, é útil notar que quando $c=0 \Rightarrow$ produto líquido igual a investimento, i.é., $y=\Delta s$. Usando essa notação simplificada podemos expor a medida utilizada.

---

(1) A distância angular entre dois vetores não-nulos é dada pela distância Euclidiana, entre suas projeções radiais sobre a esfera unitária.

(2) Agradeço ao Prof. John Craven pela idéia. Essa abordagem é discutida mais exaustivamente em Teixeira (1975).

Para qualquer vetor do produto y, seja g(y) a máxima taxa possível de crescimento equilibrado, i.é.,:

$$g(y) = \max \left[g / y \geqq g / y \geqq gB^{*}y \right] \qquad (4.1)$$

Chamemos S(g) o conjunto de vetores do produto que podem crescer no mínimo à taxa g, i.é.,:

$$S(g) = \left[y / y \geq 0,\ g(y) \geq g \right] \qquad (4.2)$$

Por conveniência, vamos descrever a trajetória da solução ótima (os valores das variáveis) com um superescrito (o) e, com o superescrito (+), os valores das variáveis sobre a trajetória de von Neumann. Algumas proposições sobre os conjuntos S(g) podem ser expostos:

a) S(g) é convexa para $g \leqq g^{+}$
b) $S(g) \subset S(g')$ para $g > g'$
c) $S(g^{+})$ são vetores nas proporções de von Neumann.

Portanto, quando g aborda g+, os conjuntos S(g) "se fecham" sobre a trajetória de von Neumann. Poderíamos analisar o "turnpike" usando a formulação apresentada em (2.8); contudo parece ser interessante formular um modelo ligeiramente diferente e mostrar que qualquer propriedade geral da trajetória de solução, na nova formulação, se aplicará à trajetória da solução do modelo DOSSO, assim, também, como a outros modelos, cuja função objetivo pertence à classe das funções mais gerais, na forma f[s(T)], assegurado que f é uma função monotonicamente crescente.

O método, que pretendemos usar, como plano geral procura a maior possível das acumulações e leva em conside ração o estoque inicial de capital, s(0), dado historicamente. A meta pode ser colocada da seguinte forma: dado o horizonte de T períodos iguais, a economia necessita acumular estoques de capital ao fim do período terminal s(T), que sejam tantos múltiplos quanto possíveis de um dado vetor u, através de uma sequência de atividades viáveis. O modelo pode ser indicado na forma:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max } \lambda \\ \text{sujeito a: } s(T) \geqq \lambda u \\ \qquad B^{*}\Delta s(t) \leqq s(t-1) \\ \qquad s(0) \text{ é dado e } \Delta s(t) \geqq 0, \quad t=1,2,\ldots, \end{array}\right\} \qquad (4.3)$$

Vamos examinar as propriedades da trajetória, que soluciona o problema da acumulação ótima, em relação com a trajetória de von Neumann e procurar estudar, particularmente, o que ocorre com a solução ótima quando o número de períodos aumenta. O modelo (4.3) pode ser escrito na forma:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max } \lambda \\ s(T) \geqq \lambda u \\ s(t) \geqq B^{*}\Delta s(t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, T-1 \\ s(t) = s(t-1) + \Delta s(t-1), \quad t = 2, 3, \ldots, T \\ \Delta s(t) \geqq 0 \quad \text{e} \quad s(t) \geqq 0 \text{ para todo } t. \end{array}\right\} \qquad (4.4)$$

Provaremos que o modelo (4.4) mostra uma trajetória ótima, que atende às propriedades do "turnpike". Para fazer isso analisamos o desenvolvimento, período por período, da solução ótima. A estratégia para a prova fica facilitada quan do notamos que o valor presente dos estoques é avaliado ao preço p^+ e taxa de desconto r^+, fornecida pela taxa de lucro (ou juros) associada com a taxa de crescimento de von Neumann, g^+ (como Radner, 1961). Uma vez que admitimos que a trajetória de von Neumann é única [(1)] e irredutível, segue-se que $r^+ = g^+$. Esse resultado foi provado por Kemeny, Morgenstern e Thompson (1956), Karlin (1959) e Gale (1960), entre outros. Uma vez estabelecido esse resultado, podemos garantir que, para qualquer trajetória possível:

$$w(t) = p^+ s(t)(1+r^+)^{-t} \qquad (4.5)$$

Essa expressão é o valor descontado dos estoques de capital no tempo t. Assim:

$$w(0) = p^+ s(0) \qquad (4.6)$$

Como precisamos permitir diferenças entre s(T) e λu no período terminal, definimos:

$$w(T) = p^+ s(T)(1+r^+)^{-T} \qquad (4.7)$$

e

$$\bar{w}(T) = \lambda p^+ u \; (1+r^+)^{-T} \qquad (4.8)$$

---

(1) Admitindo que B* é uma matriz positiva o autovalor predominante é único e, por decorrência também o é a trajetória de von Neumann. Como B* é matriz positiva fica claro que é, também, irredutível ou indecomponível, uma vez que o problema da reducibilidade apenas aparece em matrizes não negativas.

onde (4.7) está associada com $s(T)$ e (4.8) com λu.

Sabemos que $p^+u(1+r^+)^{-T}$ é o mesmo para toda trajetória viável; assim, fica claro que o problema de otimização, que precisamos resolver consiste na maximização de $w(t)$, sujeito ao conjunto de restrições (4.4). Vamos considerar a trajetória "straight-down the turnpike", que é viável a partir de um estoque inicial de bens, dados pelo vetor $s(0)$, onde todas as componentes são positivas, i.é., $s(0) > 0$.(1) A partir desse estoque, apenas é deixado ocioso o suficiente para permitir à economia crescer nas proporções de von Neumann. Para caracterizar melhor nosso "straight-down the turnpike" mostramos o diagrama

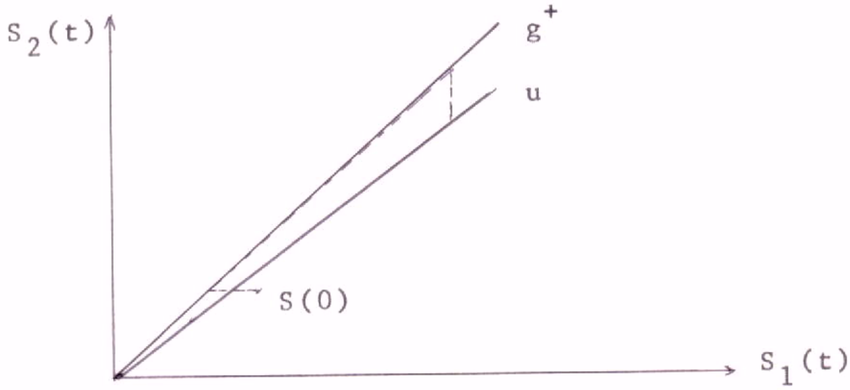

fig. I

Como estamos interessados em crescimento equilibrado podemos desprezar a data de Δs e, então, investigar o seguinte problema de crescimento econômico:

Encontrar um α positivo que é o escalar máximo, sujeito às restrições:

$$g^+\alpha B^*s^+ \leqq s(0) \qquad (4.9)$$

---

(1) Note que embora Radner (1961) não utilize a expressão "straight-down the turnpike" o conceito está explícito em sua prova do teorema (p. 283).

Por conveniência s^+ é "normalizado" de forma que $g^+p^+B*s^+=1$. Como g^+ é a taxa de von Neumann de crescimento equilibrado, fica claro que a economia crescerá àquela taxa, durante T períodos, e o valor final de λ é dado pelo número máximo de cestas em proporção com o que pode ser obtido, a partir do estoque de bens dado pelo vetor s(T), no período terminal. Assim temos:

$$s(T) = g^+(1+g^+)^T \alpha s^+ + (s(0) - \alpha g^+ B*s^+) \qquad (4.10)$$

O termo $(s(0) - \alpha g^+ B*s^+)$ é o excedente de bens deixado ocioso no período inicial.

Se β é o escalar máximo satisfazendo $\beta u \leqq g^+ s^+$, pode ser provado que o valor de λ sobre a trajetória viável será, no mínimo, $\alpha\beta(1+g^+)^T$. Assim, o estoque final será, no mínimo, $\alpha\beta(1+g^+)^T u$ e portanto:

$$\overline{w}(T) \geqq \alpha\beta p^+ u \qquad (4.11)$$

Como $\alpha g^+ s^+ \leq s(0)$, $\beta u \leq g^+ s^+$ e $p^+ > 0$, temos:

$$\alpha\beta p^+ u < p^+ s(0) \qquad (4.12)$$

$$\overline{w}(T) - w(0) < 0 \qquad (4.13)$$

5. PROVA DO TEOREMA DO "TURNPIKE"

A trajetória ótima, de qualquer modelo, é ótima no sentido de que ela tem um desempenho no mínimo tão bom quanto qualquer trajetória viável. Dado um horizonte de planejamento de T períodos parece óbvio que dividamos uma trajetória viável em duas partes, no tipo de modelo que estamos tratando:

a) existe capacidade ociosa,

b) não existe capacidade ociosa.

Dado um período do tipo (a), a mudança do valor presente dos estoques é dado por:

$$p^{+}(1+r^{+})^{-(t-1)}[(1+r^{+})s^{o}(t)-s^{o}(t+1)] \qquad (5.1)$$

Por definição $s(t+1) = s(t) + \Delta s(t+1)$, assim

$$s^{o}(t+1) = s^{o}(t) + \Delta s^{o}(t+1) \qquad (5.2)$$

Substituindo (5.2) em (5.1) e cancelando as componentes apropriadas temos:

$$p^{+}(1+r^{+})^{-(t+1)}[r^{+}s^{o}(t)-\Delta s^{o}(t+1)] \qquad (5.3)$$

como:

$$B^{*}\Delta s^{o}(t+1) \leqq s^{o}(t) \qquad (5.4)$$

Portanto a mudança no valor dos estoques é no mínimo:

$$p^{+}(1+r)^{-(t+1)}(r^{+}B^{*}-I)\Delta s^{o}(t+1) \qquad (5.5)$$

Como sabemos, nenhuma atividade tem lucro supernormal aos preços p^{+} e taxa de lucro r^{+}, assim $p^{+}(r^{+}B^{*}-I)\Delta s^{o}(t+1) \geqq 0$. Portanto concluímos que, num período onde existe capacidade ociosa, $w^{o}(t)-w^{o}(t+1)>0$, i.é., há uma queda do valor presente dos estoques no período.

Consideremos, agora, um período no qual não há capacidade ociosa. Se isto ocorre em vez de (5.4) temos:

$$B^*\Delta s^o(t) = s^o(t) \qquad (5.6)$$

Nesse caso aos preços p^+ e lucro r^+ temos $p^+(r^+B^*-I)\Delta s^o(t) = 0$, o que significa que o valor presente dos estoques permanece constante.

Consideremos, agora, os períodos onde existe capacidade ociosa, que estão "distantes" do raio de von Neumann. Podemos fixar um significado matemático rigoroso a esse conceito, que fornecerá uma base precisa à nossa prova, i.é.,

$$g[\Delta s^o(t)] \leqq g^+ - \varepsilon \text{ para algum } \varepsilon > 0$$

Para todos os períodos desse tipo podemos definir a expressão:

$$\frac{w^o(t) - w^o(t+1)}{w^o(t)} \geqq \delta > 0 \qquad (5.7)$$

Isto é verdade porque tanto o numerador quanto o denominador são estritamente positivos; assim existe um limite inferior para o valor de (5.7). Portanto, em cada desses períodos onde exista capacidade ociosa temos:

$$w^o(t+1)/w^o(t) \leqq 1 - \delta \qquad (5.8)$$

Suponhamos, agora, que existiam $T'<T$ períodos desse tipo. Como [1]

$$w^o(T)/w^o(0) \leqq (1-\delta)^{T'} \qquad (5.9)$$

---

(1) A expressão (5.9), será uma desigualdade estrita somente em dois casos:

a) se também há perda de valor em qualquer outro período,

b) se para alguns períodos a redução do valor presente de (5.7) é maior que δ.

segue-se que:

$$\frac{\bar{w}^o(T)}{w^o(0)} < \frac{w^o(T)}{w^o(0)} \tag{5.10}$$

Como vimos, no argumento apresentado na seção anterior, para "straight-down the turnpike", o limitante inferior para a razão $w(T)/w(0)$ é dado por:

$$\frac{\bar{w}(T)}{w(0)} = \frac{\alpha\beta p^+ u}{p^+ s(0)} \tag{5.11}$$

De (5.9) e (5.10) temos:

$$(1-\delta)^{T'} \geqq \frac{w^o(T)}{w^o(0)} > \frac{\bar{w}^o(T)}{w^o(0)} \geqq \frac{\alpha\beta p^+ u}{p^+ s(0)} = \Theta \tag{5.12}$$

Aplicando logaritmos temos:

$$T'\log(1-\delta) > \log\,\Theta \tag{5.13}$$

De (5.7) temos $0<\delta<1$ e portanto $0<(1-\delta) < 1$, assim $\log(1-\delta)<0$ e segue-se que:

$$T' < \frac{\log\,\Theta}{\log\,(1-\delta)} \tag{5.14}$$

Assim, fica provado que o número de períodos, que apresentam capacidade ociosa e são "distantes" da trajetória de von Neumann, tem um limitante superior, que é independente de T. Como sabemos que os parâmetros α, β, δ, u, $s(0)$ e p^+ não variam com T, segue-se que quanto maior for o número de períodos T, uma proporção maior v dos períodos estarão "perto" da trajetó ria de von Neumann e $v = 1- \frac{T'}{T}$.

Agora discutimos a segunda possibilidade, i.é. , o comportamento da trajetória ótima, nos períodos onde não existe capacidade ociosa. Nesse caso podemos, ter diferentes tipos de comportamento.

Caso (a): O modelo é relativamente instável, i.é., a solução tenderá a se afastar da trajetória de von Neumann nos períodos onde não exista capacidade ociosa, mas, para preservar a viabilidade, deve então existir um período no qual não haja capacidade ociosa. Assim, podemos garantir que existem, no máximo T' períodos sucessivos em que a trajetória sem capacidade ociosa pode deslocar-se para o exterior de $S(g^{+}-\varepsilon)$. Existe, também, um limitante superior para o número de períodos T'', tal que a trajetória pode permanecer no exterior de $S(g^{+}-\varepsilon)$ e ainda assim reter a viabilidade. Seguem-se que a trajetória ótima completa de acumulação de capital permanecerá " fora " de $S(g^{+}-\varepsilon)$ para, no máximo, $T'(T''+1)$ períodos e, além disso, $T'(T''+1)$ é independente de T.

Caso (b): O modelo é relativamente instável. Se olharmos o plano ao longo da trajetória ótima, no sentido contrário (da frente para trás), o argumento do caso (a) poderá ser também aplicado neste caso.

Caso (c): Este constitui a chamada "exceção cíclica", já mencionada na seção 3. Nesse caso, o modelo, sem capacidade ociosa, oscilará ao redor da trajetória de von Neumann e as oscilações podem continuar indefinidamente sem violar as restrições de não negatividade. Não existe portanto limite para o número de períodos gastos no exterior de $S(g^{+}-\varepsilon)$. Contudo, as possíveis exceções cíclicas não parecem ser plausíveis no mundo real. No modelo de DOSSO essa exceção apenas ocorrerá se a "raiz de von Neumann", $(1+\frac{1}{\delta^*})$, for o maior autovalor da matriz $[I+(B^*)^{-1}]$ e existir um outro autovalor igual em módulo; o fenômeno também ocorrerá se a "raiz de von Neumann", $(1 + \frac{1}{\delta^*})$, for o menor autovalor de $[I+(B^*)^{-1}]$ e existir algum outro autovalor igual em módulo.

Tendo em vista a discussão apresentada podemos agora enunciar o teorema do "turnpike":

A trajetória ótima para (4.3) ou, na forma mais geral (4.4), se comportará de tal modo que, exceto para um número de períodos independente de T, mas dependente de $\varepsilon > 0$, $g[\Delta s^o(t)] \geq g^+ - \varepsilon$ e $\Delta s^o(t)$ estará na vizinhança das proporções dadas pelo raio de von Neumann Δs^+, com exceção do caso cíclico.

Para completar esta seção indicamos, novamente, que podemos ter funções objetivas mais gerais, na forma $f[s(T)]$. Uma condição para usar o argumento, apresentado na prova do teorema do "turnpike", é que essas funções objetivas necessitam ser monotonicamente crescentes em relação a alguma componente de s(T). Como ks(T) satisfaz essa condição, fica claro que o modelo de DOSSO apresenta o "turnpike" e que a estratégia usada para prová-lo é adequada.

6. CONCLUSÕES

O propósito deste trabalho foi mostrar uma prova alternativa do teorema de convergência do "turnpike" como conjeturado por DOSSO.

Nossa prova é suficientemente relacionada com o trabalho original, o que a torna interessante, e também é completa, no sentido de que consideramos qualquer configuração inicial da estrutura de capital (tanto o caso em que o vetor é proporcional ao raio de von Neumann, como o caso em que tal não ocorre). Consideramos a trajetória viável de acumulação de capital, nos casos em que existe e em que não existe capacidade ociosa, e mostramos não só que a trajetória ótima estará na vizinhança do raio de von Neumann (exceto no caso cíclico) como, também, que existe uma tendência da trajetória ótima para permanecer uma proporção crescente do tempo de planejamento na vizinhança da trajetória de von Neumann, quando expandimos o horizonte de planejamento. É claro que existem outras provas da convergência mas, nenhuma delas, pelo que pesquisamos, é tão relacionada com a formulação original de DOSSO. Além disso, a prova é elegante, do ponto de vista formal, e, também válida para funções objetivo mais gerais, desde que sejam monotonicamente crescentes.

Acreditamos que a procura do "turnpike" tem relevância uma vez que, se a trajetória ótima da acumulação de capital for do tipo "turnpike", podemos estar razoavelmente seguros da existência de uma estratégia de crescimento equilibrado, satisfatória numa variedade de situações. Uma tarefa interessante consiste em testar empiricamente o modelo de DOSSO e extensões. Isso foi parcialmente feito em Teixeira (1970) e (1975). Contudo, essa é uma pesquisa, de certa forma, diferente e não necessariamente relacionada com os aspectos teóricos que foram discutidos nesse trabalho.

BIBLIOFRAPHY

Chakravarty, S., "Capital and Development Planning", M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1969.

Dorfman, R., Samuelson, P.A., and Solow, R.M., "Linear Programming and Economic Analysis, McGraw-Hill, 1958.

Furuya, H., and Inada, K., "Balanced Growth in Intertemporal Efficiency in Capital Accumulation", International Economic Review, 1962.

Gale, D., "The Closed Linear Model of Production" in "Linear Inequalities and Related Systems", ed. by Kuhn, H.W. and Tucker, A.W., Princeton University Press, 1956.

Hawkins, D., and Simon, H.A., "Note: Some Conditions of Macro-Economic Stability", Econometrica, 1949.

Inada, K., "Some Structural Characteristics of Turnpike Theorems", Review of Economic Studies, 1964.

Karlin, S., "Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics", Addison-Wesley, 1959.

Kemeny, J. G., Morgenstern, O., and Thompson, J.L., "A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy", Econometrica, 1956.

Koopmans, T.C. "Economic Growth at a Maximal Rate", Quartely Journal of Economics, 1964.

McKensie, L.W., "The Dorfman - Samuelson and Solow Turnpike Theorem", International Economics Review, 1963.

Morishima, M., "Equilibrium, Stability and Growth", Oxford University Press, 1964.

Von Neumann, J., "A Model of General Economics Equilibrium", Review of Economics Studies, 1945-6. (Translated from German 1937).

Radner, R., "Paths of Economic Growth that are Optimal with Regard only to Final States", Review of Economic Studies, 1961.

Teixeira, J.R., "Uma aplicação de Programação Linear à Determinação de Trajetórias de Acumulação de Capital: Aplicação ao caso Brasileiro." Tese de Mestrado, ITA; Julho - 1970.

Teixeira, J.R., "Optimization Problem of Capital Accumulation: An Extended DOSSO Model and its Application to Brasil". Tese de Doutoramento, University of Kent, Inglaterra; Setembro - 1975.

Takayama, A., "Mathematical Economics", The Dryden Press, 1974.

Winter, S.E. Jr. "Some Properties of the Closed Technology and the Straight-Down-The Turnpike Theorem", Review of Economic Studies, 1967.