

07-D.1.7

MODELO ANALÍTICO PARA O EQUILÍBRIO MHD, USANDO O MODELO DE SOLOVIEV, NUM TOKAMAK DE BAIXA RAZÃO DE ASPECTO. Marisa Roberto (Departamento de Física e Química, Universidade Estadual Paulista, Campus de Guaratinguetá) e Ricardo M.O. Galvão (Laboratório Associado de Plasma, Instituto de Pesquisas Espaciais).

Este trabalho tem como objetivo estabelecer sob quais condições ocorre o equilíbrio e a estabilidade de do plasma num tokamak de baixa razão de aspecto, usando a solução de Soloviev¹ na equação de Grad-Shafranov. Será mostrado que inserindo-se os perfis de pressão e corrente dados por Soloviev, na equação de Equilíbrio, obtêm-se os perfis de campo magnético e expressões para o fator de segurança $q(\psi)$ e para a grandeza $\langle \beta_{\text{toroidal}} \rangle$, relacionadas às condições de equilíbrio e estabilidade. Foi desenvolvido um programa numérico para o cálculo dessas grandezas mostrando sob quais condições ocorre o equilíbrio estável $[q(\psi) > 1]$, com $\langle \beta_t \rangle \approx 4,8\%$.

MODELO TEÓRICO

Na teoria MHD ideal, o plasma é descrito como um fluido condutor ideal (resistividade nula). A equação de Grad-Shafranov é uma equação diferencial parcial de 2ª ordem que engloba todas as equações de equilíbrio MHD estático em configurações axissimétricas², podendo ser obtida das equações de Maxwell, supondo o plasma em equilíbrio e em repouso ($\vec{v}=0$), com condutividade infinita³, escritas em coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) , considerando simetria axial, e definindo uma função escalar $I(R, z) = RB_\phi(R, z)$, onde B_ϕ é o campo toroidal. Pode ser mostrado⁴, que se introduzirmos uma função fluxo escalar ψ , o campo magnético total pode ser escrito como

$$\vec{B} = \frac{\vec{\phi} \times \vec{\nabla} \psi}{R} + B_\phi \vec{\phi} \quad (1)$$

O modelo de Soloviev¹ supõe que os perfis de pressão e corrente são dados por $\bar{p} = 1 - 4p_1 \bar{\psi}/\alpha^2 B_0$, $\bar{I}^2 = 1 + 4I_1 \bar{\psi}/\alpha^2$, onde I_1 , p_1 , α e B_0 são constantes. Aqui as variáveis foram normalizadas: fazem do $\bar{R} = R/R_0$, $\bar{z} = z/z_0$, $\bar{p} = p/p_0$, $\bar{\psi} = \psi/\psi_{\text{pol}}$ e $\bar{I} = I/R_0 B_0$, onde R_0 é a posição do eixo geométrico, p_0 e B_0 são a pressão e o campo magnético no respectivo eixo, e ψ_{pol} é o fluxo poloidal total entre o eixo magnético e a fronteira do plasma/ 2π . O parâmetro α é dado por $\alpha = R_0^2 B_0 / \psi_{\text{pol}}$; assim, tem-se $\bar{\psi} = \alpha \psi / R_0^2 B_0$ e o parâmetro $\beta_0 = 2\mu_0 p_0 / B_0^2$ é o valor de β no eixo geométrico. Inserindo esses perfis na equação de Grad-Shafranov

$$\bar{R} \frac{\partial}{\partial \bar{R}} \left[\frac{1}{\bar{R}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{R}} \right] + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{z}^2} = - \frac{\alpha^2}{2} \left[\beta_0 \bar{R}^2 \frac{d\bar{p}}{d\bar{\psi}} + \frac{d\bar{I}^2}{d\bar{\psi}} \right], \quad (2)$$

obtêm-se como solução a função

$$\bar{\psi}(\bar{R}, \bar{z}) = \bar{z}^2 (\bar{R}^2 - I_1) + \frac{p_1 - 1}{4} (\bar{R}^2 - C^2)^2, \quad (3)$$

onde C , p_1 e I_1 são constantes.

A determinação das constantes se faz através da aplicação das condições de contorno, a saber $\psi(R_1, 0) = \psi(R_2, 0) = \psi(R_3, z_3) = \psi_{\text{borda}}$, $\partial\psi/\partial R = \partial\psi/\partial z = 0$, onde $R_1 = 1-d$, $R_2 = 1+d$, $R_3 = 1-d\delta$ e $z_3 = \pi kd$. Dessa forma fica determinada a constante C (que é a posição do eixo magnético), p_1 e I_1 , dadas por

$$C^2 = 1 + d^2 \quad (4)$$

$$p_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 \beta_0}{d^2}} \right] \quad (5)$$

e

$$I_1 = \frac{p_1 - 1}{4d^2 \kappa^2} (R_3^2 - C^2) + R_3^2 - \frac{\alpha^2 \beta_0}{4p_1 d^2 \kappa^2}. \quad (6)$$

A barra sobre as quantidades normalizadas foi omitida com o intuito de simplificar a notação. Aqui d é a meia largura da seção transversal do plasma, $\kappa = b/d$ é a elongação (b é a meia altura), e o parâmetro δ está relacionado com a triangularidade, isto é, $\delta = (1 - R_3)/d$. Como d está normalizado em relação a R_0 , o inverso da razão de aspecto $(1/\epsilon = d/R_0)$ fica simplesmente igual a d . A fim de que o ponto $(C, 0)$ seja o eixo magnético, isto é, $\Delta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial R \partial z} \right)^2 > 0$, devemos ter

$$(C^2 - I_1) > 0, \quad (7)$$

e a fim de evitar que a separatriz fique dentro do plasma devemos ter

$$|I_1 - C^2| > 2d. \quad (8)$$

Combinando (7) e (8), tem-se

$$I_1 < (d-1)^2. \quad (9)$$

As grandezas que definem as condições de equilíbrio, a saber $\langle \beta_t \rangle$ (valor médio de β toroidal), a condição de estabilidade q_m (fator de segurança no eixo magnético, que deve ser ≥ 1), podem agora

ser determinadas, sendo dadas por⁵

$$\langle \beta_t \rangle = \beta_0 \frac{\int_{R_1}^{R_2} dR \int_0^{z_b(R)} \left[1 - \frac{4p_1}{\alpha^2 \beta_0} \psi(R, z) \right] dz}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} \int_0^{z_b(R)} \left[1 + \frac{4I_1}{\alpha^2} \psi(R, z) \right] dz} \quad (10)$$

$$q_m = \frac{\alpha}{2C^2 \sqrt{(p_1-1)(C^2-I_1)}} \quad (11)$$

Aqui $z_b(R)$ é encontrado fazendo $\psi_b(R, z) = \psi_{\text{borda}}$ (onde pressão = 0). Assim

$$z_b(R) = \frac{\alpha}{4d} \sqrt{\frac{\beta_0}{p_1} \times \frac{4d^2 - (R^2 - C^2)^2}{R^2 - I_1}} \quad (12)$$

Os campos magnéticos toroidal e poloidal são agora escritos na seguinte forma

$$B_\phi = I(\psi)/R \quad (13)$$

$$B_{\text{pol}} = \frac{1}{R\alpha} \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial R} \right] \quad (14)$$

Assim, tem-se cinco parâmetros de entrada para obter as quantidades de interesse envolvidas na solução de equilíbrio, que são d , β_0 , α , δ e b .

RESULTADOS E CONCLUSÕES

A figura 1 mostra o perfil de pressão, densidade de corrente, fator de segurança e campo magnético para $d=0.6$, $\beta_0=0.67$, $\alpha=5.4$, $\delta=0$ e $b=1.12$. É conveniente mencionar que β_0 , δ e α estão vinculados à condição (9) e, portanto, não podem ser variados arbitrariamente. Lembrando que $\alpha = R_0^2 \beta_0 / \psi_{\text{pol}}$, o valor numérico para esse parâmetro manteve-se entre 3.0 e 5.5. O que se observa é que aumentando β_0 com os demais parâmetros fixos, destrói-se a estabilidade ($q_m < 1$). Com $\delta=0$, obtém-se o maior valor possível de $\langle \beta_t \rangle$, que ficou por volta de 4.8%. Portanto, pode-se concluir que altos valores de $\langle \beta_t \rangle$ (≈5%) podem ser conseguidos em tokamaks de baixa razão de aspecto (neste caso $c=1.7$), o que é importante do ponto de vista de custo do projeto de construção de um tokamak⁶.

REFERÊNCIAS

- (1) SOLOVIEV, L.S. Soviet Physics JETP, 26, 2 (1968), 400.
- (2) GALVÃO, R.M.O. Equilíbrio MHD em Física do Plasma. Editado por Chian, A.L. e Reusch, M. Universidade Federal Fluminense, 1979.
- (3) BITTENCOURT, J.A. Fundamentals of plasma physics. Oxford, Pergamon Press, 1986, Capítulos 2 e 3.
- (4) BATEMANN, G. MHD Instabilities. The MIT Press, 1980.
- (5) FREIDBERG, J.P. Ideal Magnetohydrodynamics. Plenum Press, 1987. Capítulos 3, 5 e 6.
- (6) PENG, Y.K.M.; STRICKLER, D.J. Nuclear Fusion 26, 769 (1986).

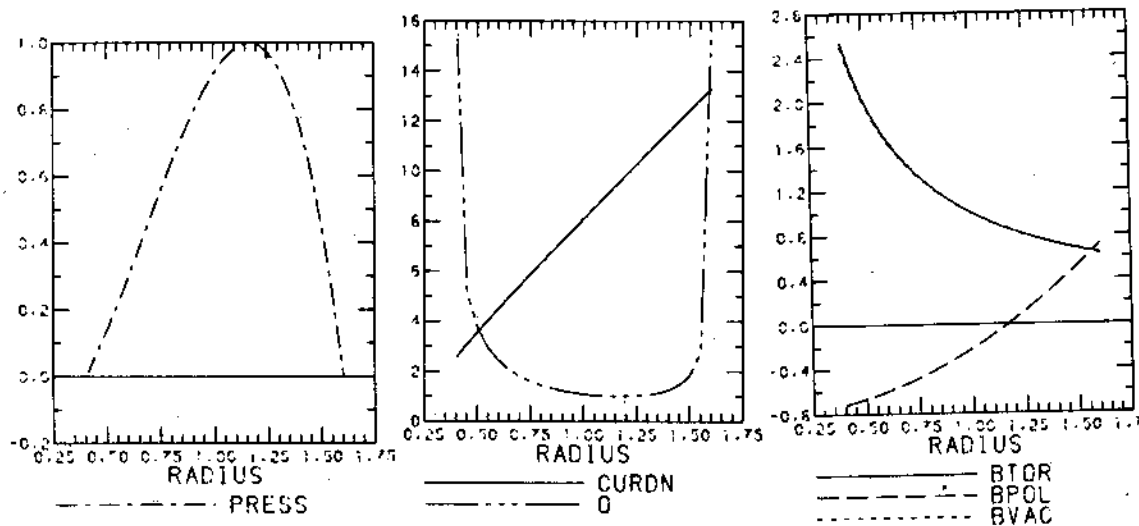


Figura 1 - Perfis de pressão, densidade de corrente, fator de segurança $q(\psi)$ e campo magnético toroidal, poloidal e no vácuo, para $d=0.6$, $\beta_0=0.67$, $\alpha=5.4$, $\delta=0$ e $b=1.12$.