

FORMAÇÃO, DISTRIBUIÇÃO, EVAPORAÇÃO E  
COMBUSTÃO DE GOTAS FORMADAS POR JATOS  
COLIDENTES

DEMÉTRIO BASTOS NETTO E HERALDO DA SILVA COUTO

INPE/LCP, Cachoeira Paulista, SP

TRABALHO APRESENTADO NO 10. ENCONTRO TÉCNICO DE MATERIAIS  
E QUÍMICA

IPqM, RJ  
8-10 Nov. 1994



**FORMAÇÃO, DISTRIBUIÇÃO, EVAPORAÇÃO E COMBUSTÃO DE GOTAS  
FORMADAS POR JATOS COLIDENTES**

Trabalho Apresentado no 10. Encontro Técnico de Materiais e  
Química (10.ETMQ), IPqM, RJ, 8-10 Nov. 1994

**Demétrio Bastos Netto e Heraldo da Silva Couto**

INPE/LCP- Rod. Presidente Dutra km40,  
Cachoeira Paulista, 12630-000, SP  
Tel. - (0125) 611377; FAX: (0125) 611992; e-mail: lcp@dem.inpe.br

**RESUMO**

Este trabalho apresenta os resultados da investigação dos autores sobre nuvens de gotas geradas por injetores do tipo de jatos líquidos colidentes. Em quatro partes, ele discute primeiramente a dinâmica da formação, orientação e tamanho das gotas formadas em função das propriedades dos jatos e suas configurações. A seguir trata da determinação de uma função de distribuição para os tamanhos iniciais daquelas gotas, permitindo assim inferir-se os diversos diâmetros médios das nuvens formadas. Em particular deteta-se aí a ocorrência de um mínimo para o diâmetro médio de Sauter, ferramenta importante no projeto daqueles injetores. A terceira parte discute o problema da localização e velocidade das gotas em sua formação, estabelecendo assim as condições iniciais para a nuvem. Finalmente, estabelecidas aquelas condições, analisa-se a nuvem polidispersa formada por tais atomizadores, considerando-a como consistindo na superposição de famílias de nuvens monodispersas determinadas por aquelas condições iniciais. Considerando então a taxa de evaporação de uma gota como sendo aquela de uma gota queimando numa atmosfera infinita e quiescente, e usando como modelos para o coeficiente de arrasto a Lei de Stokes e resultados experimentais, resolve-se numericamente as equações resultantes para ambos os casos, mostrando-se também que, ao empregar-se a lei de Stokes, é possível a obtenção de soluções analíticas até a 1a. ordem, através o uso de técnicas de pequenas perturbações.

## INTRODUÇÃO

A modelagem de folhas finas de líquido formadas por jatos colidentes e os aspectos inerentes à sua estabilidade foi estudada por Squire, Taylor e Hasson entre outros [1-4].

É sabido que quando dois jatos cilíndricos coplanares colidem dão origem à formação de uma lâmina líquida cuja espessura é função do raio do jato, da distância radial na folha, do ângulo de colisão e da posição angular com referência a um polo que se situa ao longo da linha de corrente de separação.

Entretanto, as leis físicas que governam a ruptura de folhas líquidas viscosas são as mesmas para diversos tipos de injetores existentes, i.e., uma pequena instabilidade existente é amplificada até atingir um comprimento de onda crítico, quando então a lâmina fragmenta-se em ligamentos que finalmente rompem-se dando origem a gotas de vários tamanhos.

Dessa forma, a formulação matemática desenvolvida por Drombrowski e Johns para injetores tipo "fan-spray" pode ser aplicada a folhas líquidas formadas por dois jatos colidentes. Assim, os resultados obtidos por Dombrowski[3] e Hasson[4] podem ser mesclados para permitir uma formulação própria para o cálculo do tamanho e da distribuição das gotas formadas pela colisão de dois jatos líquidos. Isto é feito na primeira parte deste trabalho.

A seguir apresenta-se um método para o cálculo da função de distribuição do tamanho inicial das gotas e seus momentos (i.e., os diâmetros médios para comprimento, superfície, volume, Sauter, etc.). Em particular mostra-se que o Diâmetro Médio de Sauter, parâmetro de grande aplicação em combustão, possui, para diversos líquidos, um mínimo num certo valor do ângulo de colisão dos jatos.

A terceira parte mostra que é possível estimar-se a localização e a velocidade das gotas sendo criadas, estabelecendo-se assim as condições iniciais das gotas na nuvem, em função de seus tamanhos.

Isto permite que a nuvem de gotas seja representada como uma superposição de nuvens monodispersas, i.e., sua função de distribuição no espaço de fase é substituída por diversas funções-delta, uma para cada classe de gota, de acordo com seu tamanho, posição e velocidade iniciais de modo que as equações de conservação para cada uma dessas classes podem ser formuladas. A última parte deste trabalho mostra assim os resultados da solução numérica e por perturbações daquelas equações para a evolução das características da nuvem. Esses resultados podem ser empregados na estimativa do desempenho de combustores com tais atomizadores.

Para atomizadores de outros tipos o leitor deve por exemplo consultar os trabalhos de Levich[5] e Marshall[6], entre outros. Em particular, atomizadores do tipo "splash plate" suportam um tratamento semelhante àquele aqui apresentado[7].

## PARTE I

### DETERMINAÇÃO DO TAMANHO E DISTRIBUIÇÃO DAS GOTAS FORMADAS NA COLISÃO DE DOIS JATOS LÍQUIDOS

Quando dois líquidos em forma de jatos cilíndricos de raios iguais  $R$  e mesma velocidade  $V_0$ , colidem obliquamente em um meio gasoso quiescente sob um ângulo  $2\theta$ , uma lâmina líquida assimétrica é formada, onde o fluxo de líquido é maior na direção predominante do escoamento e menor na direção contrária ao mesmo.

A variação da espessura da folha  $h$ , com a distância radial  $r$  (medida a partir do ponto de estagnação na folha) e a posição angular  $\phi$ , como esquematizado na Figura 1, foi calculada por Hasson e Peck[4], que usaram o fato de que a secção de corte do jato em um plano paralelo à folha é uma elipse, igualando o fluxo de massa entrando em um elemento angular da elipse com sua saída em um elemento angular correspondente na folha. Assim,

$$\frac{hr}{R^2} = \frac{\sin^3 \theta}{(1 - \cos \phi \cos \theta)^2} \quad (1)$$

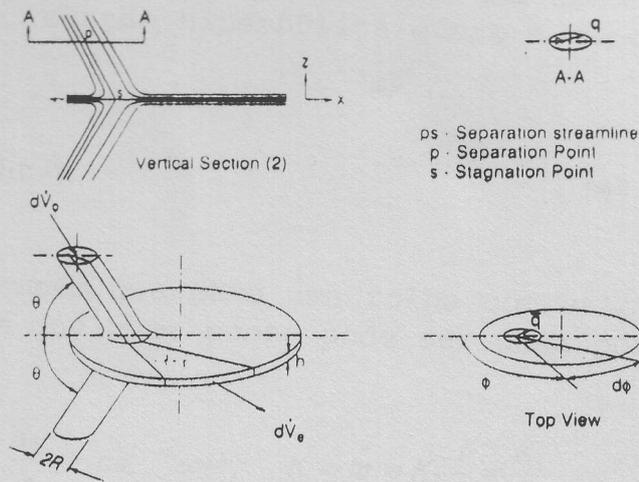


Fig.1 Folha Formada por Jatos Colidentes (Ref. [4])

A folha formada cresce e adelgaça-se sob a influência das forças viscosas, de inércia, de tensão superficial e de pressão e ao atingir uma situação crítica, desintegra-se em fragmentos que se contraem por tensão superficial, formando ligamentos instáveis que finalmente rompem-se em gotas. Este mecanismo foi extensivamente discutido por Dombrowski e Johns[2], que encontraram para  $d_l$ , o diâmetro daqueles ligamentos, a seguinte expressão:

$$d_l = 2 \left( \frac{4}{3f} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{K\sigma^2}{\rho\rho_l U^2} \right)^{\frac{1}{6}} \left[ 1 + 2.6\mu^3 \sqrt{\frac{K\rho^4 U^8}{6f\rho_l^2 \sigma^5}} \right]^{\frac{1}{5}} \quad (2)$$

onde  $f$  é o comprimento de onda total, dado por:

$$f = \int_0^t \frac{\rho U^2}{\sqrt{2h\rho_l \sigma}} dt \quad (3)$$

onde  $\sigma$  (dyn-cm<sup>-1</sup>),  $\mu$  (cp),  $\rho$  (g-cm<sup>-3</sup>),  $\rho_l$  (g-cm<sup>-3</sup>),  $U$  (cm-s<sup>-1</sup>) são a tensão superficial, a viscosidade do líquido, a densidade do meio (gasoso e quiescente), a densidade do líquido, e a velocidade na película (a ser discutida a posteriori), respectivamente e  $K$  é uma constante obtida ao se admitir uma relação hiperbólica entre a espessura  $h$  e o tempo  $t$ , i.e.:

$$ht = K \quad (4)$$

Mostraram também que para uma folha com velocidade uniforme a espessura em qualquer ponto pode ser dada por:

$$h = \frac{K_1}{r} \quad \text{ou} \quad \text{seja,} \quad K = ht = K_1 \frac{t}{r} = \frac{K_1}{U} \quad (5), (6)$$

Assim a Equação (1) pode ser reescrita como

$$h = \frac{R^2 \sin^3 \theta}{r(1 - \cos \phi \cos \theta)^2} \quad (7)$$

Comparando (6) e (7) pode-se ver facilmente que no caso de uma folha formada por jatos colidentes tem-se:

$$K_1 = \frac{R^2 \sin^3 \theta}{(1 - \cos \phi \cos \theta)^2} \quad (8)$$

Isto é, para uma dada configuração de jatos colidentes (i.e., para um dado par  $R$  e  $\theta$ ),  $K_1$  é agora uma função do ângulo azimutal  $\phi$ .

Admitindo-se que a equação (2) permaneça válida para ligamentos aproximadamente cilíndricos formados pela quebra da folha e fazendo-se  $f = 12$  naquela equação (este valor é independente das condições de operação, como mostrado por

Dombrowski e Hooper[7]) e usando a equação (6), então a equação (2) pode ser reescrita como:

$$d\ell = 0.9614 \left[ \frac{K_1^2 \sigma^2}{\rho \rho_\ell U^4} \right]^{\frac{1}{6}} \left[ 1 + 2.60 \mu^3 \sqrt{\frac{K_1 \rho^4 U^7}{72 \rho_\ell \sigma^5}} \right]^{\frac{1}{5}} \quad (9)$$

onde  $K_1$  é dado pela equação (8).

Então o diâmetro da gota  $d_d$  pode ser estimado usando a relação desenvolvida por Dombrowski e Johns[3]:

$$d_d = \left( \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{1}{3}} d_\ell \left[ 1 + \frac{3\mu}{(\rho_\ell \sigma d_\ell)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{6}} \quad (10)$$

Como anteriormente mencionado,  $U$ , a velocidade do líquido na folha, foi definida por Dombrowski[3] como a velocidade média quadrática da onda em relação ao ar, i.e.:

$$U = \frac{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}}{2} \quad (11)$$

onde  $U_1$  e  $U_2$  são as velocidades relativas da superfície superior e inferior da folha respectivamente. Se além da quiescência do meio gasoso admitirmos que a distância  $r$  na folha é grande o suficiente de tal forma que a componente da velocidade para o interior da folha seja desprezível, segue então por considerações de balanço de energia que  $U$  é aproximadamente igual à velocidade do jato  $V_0$  [4].

## PARTE II

### CÁLCULO DA FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DO TAMANHO INICIAL DAS GOTAS E SEUS MOMENTOS

O número de gotas geradas em um dado volume esférico  $V_d$  por segundo,  $d\dot{n}$ , entre  $\phi$  e  $\phi + d\phi$  (i.e., no elemento diferencial angular tomado em relação à linha de fluxo de separação) pode ser escrito como:

$$d\dot{n} = \frac{d\dot{V}_E}{V_d} \quad (12)$$

onde  $d\dot{V}_E$  é o fluxo de massa saindo através do setor  $d\phi$  como mostrado na Figura 1. Admitindo as hipóteses de Hasson e Peck[2], a taxa de escoamento de massa é conservada dentro do elemento diferencial angular mencionado acima. Daí,

$$d\dot{V}_E = 2d\dot{V}_e \quad \text{onde} \quad d\dot{V}_e = V_0 \sin\theta \frac{dp}{2} q \quad (13), (14)$$

os subscritos "E" e "e" correspondem às secções de corte da folha e do jato respectivamente e "q" é o raio polar da elipse formada pela intersecção do jato por um plano paralelo à folha referenciada ao ponto de separação como um polo, e  $dp$  é o elemento diferencial do perímetro, escrito como:

$$dp = \frac{R}{\sin\theta} (\sqrt{1 - \cos^2\theta \sin^2\phi}) d\phi \quad (15)$$

e

$$q = \frac{R \sin\theta}{1 - \cos\theta \sin\theta} \quad (16)$$

Assim substituindo as eqs. (19), (15) e (16) na equação (13) obtemos:

$$d\dot{V}_c = \frac{V_0 R^2 \sin\theta}{1 - \cos\theta \cos\phi} \left( \sqrt{1 - \cos^2\theta \sin^2\phi} \right) d\phi \quad (17)$$

e a equação (12) torna-se:

$$d\dot{n} = \frac{6 V_0 R^2 \sin\theta}{\pi d_d^3 (1 - \cos\theta \cos\phi)} \left( \sqrt{1 - \cos^2\theta \sin^2\phi} \right) d\phi \quad (18)$$

Usando as expressões (9) e (10) para  $d_d$  e  $d_l$  e a Equação (8) para  $K_1$  vem, tomando  $U$  como aproximadamente igual à velocidade do jato:

$$f(\phi) = \frac{6 V_0 R^2 \sin\theta}{\pi d_d^3 (1 - \cos\theta \cos\phi)} \left( \sqrt{1 - \cos^2\theta \sin^2\phi} \right) \quad (19)$$

Os momentos da função distribuição acima podem ser calculados usando a equação (19) com as equações (8) a (10). Em particular a Figura 2, tomada da Referência[8] mostra a distribuição azimutal dos diâmetros das gotas para uma dada configuração e diversos líquidos, construída usando as Equações (8), (9) e (10). Essas Equações, mais a Equação (19) permitem descrever o comportamento dos diversos diâmetros médios definidos na Tabela 1 vs o semi-ângulo de colisão, como mostrado nas curvas da Figura 3 para o etanol[9]. Observa-se naquela Figura que o Diâmetro Médio de Sauter para o etanol mostra um valor mínimo para um dado valor de  $\theta$ . Isto pode ser visto mais precisamente na Figura 4, onde o Diâmetro de Sauter exibe um valor mínimo para o etanol, o etileno glicol e o mercúrio em cerca de  $\theta = 35^\circ$  enquanto que, para o

óleo novo de motor um ponto de inflexão ocorre para aproximadamente o mesmo valor do ângulo de impingência. Isto sugere um dado útil no projeto de injetores: o melhor ângulo total de impingência para sprays gerados por jatos colidentes é  $\hat{\Delta}^{\text{N.W.}}$  entôrnio de  $2\theta \cong 70^\circ$ . Isto porque ao obter-se um valor mínimo para  $\bar{X}_{vs}$  garante-se uma taxa máxima de evaporação de combustível [9].

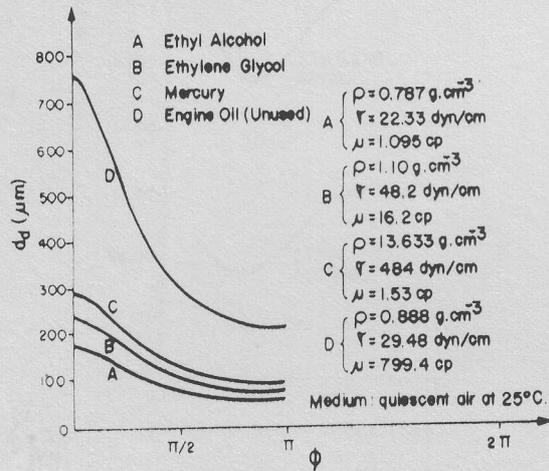


Fig.2 Distribuição Azimutal de Diâmetro de Gotas para uma dada Configuração:  $\theta = 45^\circ, U = 3000 \text{ cm} - \text{s}^{-1}, R = 0.05 \text{ cm}$  (ref. [8])

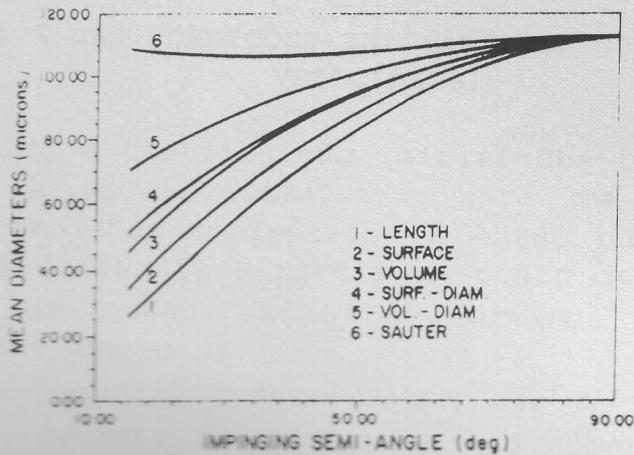


Fig.3 Diâmetros Médios ( $\mu\text{m}$ ) vs Semi-Ângulos de Impingência,  $\theta$  (graus), para Etanol (Ref. [8])

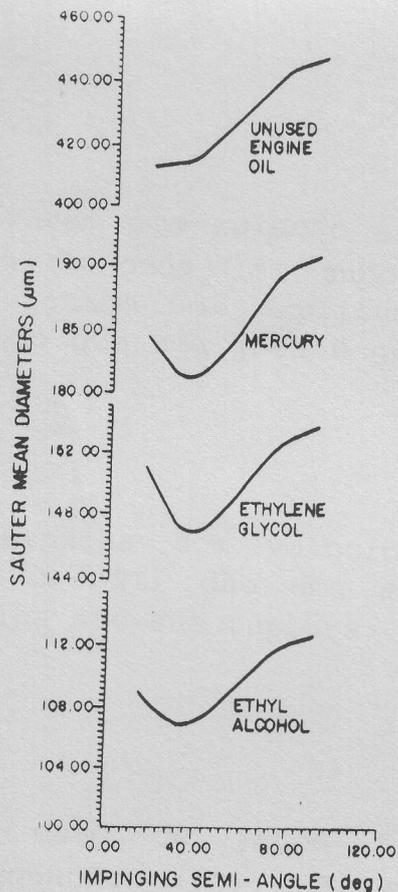


Fig.4-Diâmetro Médio de Sauter para vários Líquidos vs Semi-Ângulo de impingência, para dada configuração: (R=0.05 cm, U=3000 cm/s). Ref.[8]

### PARTE III

#### ESTIMATIVA DAS CONDIÇÕES INICIAIS DAS GOTAS (POSIÇÃO E VELOCIDADE)

Uma vez obtida a distribuição inicial dos tamanhos das gotas como função do ângulo azimutal,  $\phi$ , para uma dada configuração do jato e condições ambientais, é então possível estimar-se  $x_0$ , i.e., a distância a partir do ponto de estagnação até o local onde as gotas estão se formando e, a seguir, a velocidade das mesmas,  $u_0$ .

Dombrowski e Johns[3] mostraram que, se  $h_b$  fosse a espessura da folha no instante da ruptura e  $\bar{n}$  o número de onda, então  $d_l$ , o diâmetro dos ligamentos, podia ser escrito como:

$$d_l = \sqrt{\frac{4h_b}{\bar{n}}} \quad (20)$$

Eles também obtiveram uma relação entre  $d_d$ , o diâmetro das gotas e o número de onda,  $\bar{n}$ , supondo que todas as ondas cresçam até que tenham uma amplitude igual aos raios dos ligamentos, de modo que uma gota é gerada por comprimento de onda:

$$d_d = \frac{2\pi d_\ell^2}{\bar{n}} \quad (21)$$

Se a folha se espalha com velocidade uniforme então as Equações (5), (20) e (21) dão uma estimativa para  $x_B$ , o comprimento da folha até sua ruptura:

$$x_B = \frac{2d_d^3 K_1}{\pi d_\ell^4} \quad (22)$$

onde para nosso caso de jatos colidentes,  $d_d, d_\ell$  e  $K_1$  são dados pelas Equações (10), (9) e (8) respectivamente., i.e.,  $x_B = x_B(\phi)$ , para uma dada configuração do jato e condições ambientais. Supondo-se além disso que os ligamentos uma vez formados se contraem imediatamente em gotas, então  $x_0 \cong x_B$  e,

$$x_0 \cong 3\sqrt{2}d_\ell^{-1} \left[ 1 + \frac{3\mu_\ell}{(\sigma_\ell \rho_\ell d_\ell)^2} \right]^{\frac{1}{2}} K_1 \quad (23)$$

onde  $d_\ell$  e  $K_1$  são dados pelas Equações (9) e (8) respectivamente.

A velocidade da gota,  $u_0$  pode também ser estimada supondo-se que a vazão mássica é conservada ao longo do elemento diferencial angular entre  $\phi$  e  $\phi + d\phi$ , tomado relativamente à linha de corrente de separação, (Fig.1). Como a vazão volumétrica  $d\dot{V}$ , escoando através o setor  $d\phi$  foi dada pela Equação (17), então, como  $d\dot{V}$  se escoar através a seção reta  $h(xd\phi)$ ,  $u_0$  pode ser estimado como:

$$u_0 \cong \frac{d\dot{V}}{xhd\phi} \quad (24)$$

supondo desprezíveis as perdas de energia no processo de geração das gotas. Usando-se então as Equações (5) e (6) em (24), temos:

$$u_0 = \left[ V_0 \left( \frac{1 - \cos \theta \cos \phi}{\sin^2 \phi} \right) \right] \sqrt{1 - \cos^2 \theta \sin^2 \phi} \quad (25)$$

Assim, estimadas as condições iniciais das gotas (i.e., para uma dada configuração,  $x_0 = x_0(\phi)$  e  $u_0 = u_0(\phi)$  e  $x_0(\phi)$ , Equações (25) e (23), acima), o próximo passo naturalmente é a análise da nuvem de gotas propriamente dita.

#### PARTE IV

#### PROCESSOS DE EVAPORAÇÃO E COMBUSTÃO EM NUVEM DE GOTAS GERADAS POR JATOS LÍQUIDOS COLIDENTES

É sabido ([13], [14]) que uma descrição estatística de um "spray" é feita definindo-se uma função de distribuição,  $f$ , no espaço de fase  $(\bar{x}, \bar{v}, r)$  tal que  $f(\bar{x}, \bar{v}, r) d\bar{x} d\bar{v} dr$  é o número de gotas localizadas entre  $\bar{x}$  e  $\bar{x} + d\bar{x}$  com velocidades entre  $\bar{v}$  e  $\bar{v} + d\bar{v}$ , tamanho entre  $r$  e  $r + dr$ , num tempo  $t$ . Com isto pode-se escrever uma equação tipo Boltzmann olhando-se para a evolução de  $f$  nesse espaço de fase. E mais, se o "spray" puder ser separado em classes diferentes de partículas de modo que se possa usar uma função de distribuição  $f$  diferente para cada classe  $k$  de partículas definidas por suas condições iniciais, então poder-se-ia interpretar a equação do "spray" com uma função  $f$  para cada  $k$ .

Considere-se então uma nuvem diluída de gotas formadas nas condições descritas na parte I deste trabalho, escolhendo-se um sistema de coordenadas cilíndricas  $(x, \phi, z)$  com a origem na interseção das "linhas de corrente de separação", como

sugerido na Fig.1. Suponha que as gotas uma vez formadas, corram ao longo das linhas  $\phi = \text{const.}$  sobre o plano  $z=0$  (i.e., despreze a ação da gravidade). Esta nuvem, embora poli-dispersa pode ser bem representada pela superposição de nuvens mono-dispersas cujas condições iniciais sejam conhecidas [13]. Considere-se então famílias de gotas (pois o ângulo azimutal aqui define a classe da gota, pois para diferentes valores de  $\phi$  tem-se condições iniciais diferentes) cujas funções de distribuição sejam dadas por:

$$f = G\delta(\bar{v} - u_p), \quad G = n\delta(r - r_p) \quad e \quad \bar{u}_p = ue_x \quad (26), (27), (28)$$

onde  $u(x)$ ,  $n(x)$  e  $r_p(x)$  são respectivamente a velocidade, o número de densidade e o raio da classe de gotas sendo estudada e  $\delta$  é a função delta de Dirac. Note que para cada valor do ângulo azimutal  $\phi$ ,  $r_p(x_0)$  e  $u(x_0)$  são dados pelas Equações (10) (pois  $r_p = d_d/2$ ) e (25), respectivamente, e onde  $x = x_0$ , dado pela Equação (23) é considerado o ponto de partida para o processo de evaporação começar, i.e., supõe-se que não ocorre evaporação antes de a gota se formar. Assim a equação do "spray" para essa classe de partículas pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial r}(\bar{R}f) + \nabla_x \cdot \bar{v}f + \nabla_v \cdot \bar{F}f = 0 \quad (29)$$

onde  $\bar{R} = \frac{dr_p}{dt}$  e  $\bar{F}$  são respectivamente a taxa de evaporação para as gotas da classe sendo examinada e a força de arrasto sobre a gota por unidade de massa da gota. A Equação (29) pode ser integrada nos espaços de velocidade e de tamanho de gotas, fornecendo:

$$\left(\frac{1}{x}\right) \frac{d}{dx}[xnu] = 0 \quad \text{ou} \quad xnu = x_0 n_0 u_0 \quad (30), (31)$$

Considerou-se o gás quiescente na região  $0 < x < x_0$ , para qualquer valor do ângulo azimutal. Como o "spray" foi considerado diluído, pode-se supor que as variações no meio ocorrem apenas ao longo dos raios polares enquanto as gotas se afastam entre si ao longo de trajetórias  $\phi = \text{const.}$ ,  $z = 0$ . Isto é, como as famílias consistem de pequenas gotas que diminuem

de tamanho enquanto  $x$  aumenta, supõe-se que o gás seja perturbado apenas ao longo dessas trajetórias  $x(\phi)$ , de modo que o gás na vizinhança de uma certa família sente apenas a presença daquela família. Com isto, a velocidade do gás lá é  $\bar{v} = \bar{v}_x$ . Maiores discussões sobre os perfís de concentração de vapor na esteira de gotas são dadas na Referência [15]. Como as gotas de uma dada classe se evaporam adicionando ao gás uma massa de  $\iint 4\pi r^2 \bar{R} f dr d\bar{v}$  gramas por unidade de volume por segundo, então a equação da continuidade para o gás pode ser escrita como:

$$\nabla_x \cdot (\rho_f \bar{v}) = -\iint 4\pi r^2 \bar{R} f dr d\bar{v} \quad (32)$$

onde  $\rho_f$  é a massa de gás por unidade de volume do espaço físico devida à contribuição da vaporização das gotas da classe sendo considerada. Daí a Equação (32) pode ser escrita:

$$\left(\frac{1}{x}\right) \frac{d}{dx} (x \rho_f \bar{v}) = -\iint \rho_\ell 4\pi r^2 \bar{R} f dr d\bar{v} \quad (33)$$

Vale lembrar também que num "spray" diluído,  $\frac{\rho_f}{\rho_g} \cong O(1)$

(Referência [14]).

Se  $\rho_s$  é a densidade da fase condensada de uma dada família, então

$$\rho_s = \iint \left(\frac{4}{3}\right) \pi r^3 G dr = \rho_\ell \left(\frac{4}{3}\right) \pi r_p^3 n \quad (34)$$

Assim, usando-se o esquema de Williams [14], pode-se multiplicar a Equação (29) por  $\rho_\ell \left(\frac{4}{3}\right) \pi r^3$  e integrá-la nos espaços de velocidade e de tamanhos de gotas. O resultado obtido, somado à Equação (33) e integrado fornecerá a relação

$$x[\rho_f \bar{v} + \rho_s u] = x_0 \rho_{s0} u_0 \quad \text{onde} \quad \rho_{s0} = \rho_\ell \left(\frac{4}{3}\right) \pi r_{p0}^3 n_0 \quad (35), (36)$$

Considere-se a seguir as equações da trajetória das gotas de uma determinada classe. Elas podem ser obtidas rastreando-as enquanto elas se movem (i.e., tomando-se derivadas temporais Lagrangeanas) ou lembrando que essas equações são características para a equação do "spray" [13] (o que é precisamente o caso pois  $f$  é uma função delta de Dirac!). Assim:

$$dx/dt=u, \quad du/dt=F \quad \text{e} \quad dr_p/dt=\bar{R} \quad (37), (38), (39)$$

$$\text{de modo que} \quad u(du/dx)=F \quad \text{e} \quad u(dr_p/dx)=\bar{R} \quad (40), (41)$$

Supondo-se que o mecanismo de evaporação para uma gota de uma dada família seja aquele de uma gota individual queimando numa atmosfera oxidante, infinita e quiescente, tem-se que:

$$\bar{R} = - \left( \frac{\lambda_g}{c_p \rho_l r_p} \right) \ln \left[ 1 - \frac{T_g - T_l}{L / c_p} + (Q / L) Y_{ox} \right] \quad (42)$$

onde  $\lambda_g$ ,  $c_p$ ,  $T_g$ ,  $T_l$ , e  $Y_{ox}$  são a condutividade térmica, o calor específico a pressão constante, as temperaturas absolutas do gás e do líquido e a fração mássica de oxidante no gás,  $L$  é o calor de vaporização e  $Q$  é o calor de reação (para o combustível na fase gasosa) por unidade de massa de oxidante consumido. Supondo-se que a pressão, a temperatura e a composição do gás permanecem constantes, tem-se então que:

$$\bar{R} = \left( \frac{\bar{R}_0 r_{p0}}{r_p} \right) \quad (43)$$

Em geral o arrasto de uma gota, por unidade de massa, pode ser escrito como:

$$\bar{F} = \left( \frac{3}{8} \right) \left( \frac{\rho_g}{\rho_l} \right) \left( \frac{1}{r_p} \right) (\bar{v} - \bar{u}) |\bar{v} - \bar{u}| C_D \quad (44)$$

onde  $C_D$  é uma função forte do número de Reynolds,  $Re$ :

$$Re = \rho_g |\bar{v} - \bar{u}| d_d / \mu_g \quad (45)$$

As Equações (35), (40) e (41) juntamente com as Equações (43) e (44) podem ser adimensionalizadas usando-se os seguintes parâmetros:

$$\sigma = \frac{r_p}{r_{p0}}, \quad \Phi = \frac{u}{u_0}, \quad \Psi = \frac{v}{u_0} \quad e \quad X = \frac{x}{x_0} \quad (45), (46), (47), (48)$$

Assim usando-se a mesma técnica da Referência [14] obtém-se as seguintes relações:

**a:** Para o caso em que a lei de Stokes ( $CD=24/Re$ ) é aceitável:

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} = -\frac{\beta}{\sigma} \left[ \frac{\varepsilon}{X} (1 - \sigma^3) - \Phi \right], \quad \frac{dX}{d\sigma} = -\alpha \sigma \Phi \quad e \quad \Psi = \frac{\varepsilon(1 - \sigma^3)}{X} \quad (49a, b, c)$$

onde

$$\alpha = -\frac{r_{p0} u_0}{R_0 x_0}, \quad \beta = \frac{9\mu_g}{2\rho_l r_{p0} R_0} \quad e \quad \varepsilon = \frac{\rho_s s_0}{\rho_f} \quad (50a, b, c)$$

**b:** Para maiores números de Reynolds, entretanto, poder-se-ia usar, um resultado experimental como, por exemplo, a relação de Ingebo para o coeficiente de arrasto,  $C_D = \frac{27}{Re^{0.84}}$ , que dá resultados satisfatórios para  $Re < 500$  (embora esta relação não seja para "sprays" com combustão). Com isto as Equações (49a) e (49b) são substituídas por:

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} = -\frac{\beta_1}{\sigma^{0.84}} \left[ \frac{\varepsilon}{X} (1 - \sigma^3) - \Phi \right] \left[ \left| \frac{\varepsilon}{X} (1 - \sigma^3) - \Phi \right| \right]^{0.16} \quad (51a)$$

$$\frac{dX}{d\sigma} = -\alpha \sigma \Phi \quad e \quad \Psi = \frac{\varepsilon(1 - \sigma^3)}{X} \quad (51b, c)$$

$$\text{onde } \beta_1 = -\left( \frac{81\rho_g}{8\rho_f} \right) \left( \frac{u_0}{R_0} \right) (Re_0)^{-0.84} \quad e \quad Re_0 = \frac{\rho_g u_0 d_{d0}}{\mu_g} \quad (52b, c)$$

As condições de contorno para o conjunto de equações (49) ou (51) são:

$$\Phi(1) = 1 \quad e \quad X(1) = 1 \quad e \quad \text{onde } 0 < \sigma < 1 \quad (53), (54)$$

As Equações (49) com as condições de contorno (53) e (54) podem ser resolvidas usando a técnica de pequenas perturbações se  $\varepsilon$ , definido na Equação (50c) for pequeno. Neste caso ter-se-á soluções da forma

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \varepsilon^n \quad e \quad \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \varepsilon^n \quad (55a, b)$$

onde  $X=1$  e  $\Phi=1$  quando  $\sigma \rightarrow 1$ .

Então as Equações(49) ficam, na enésima ordem:

$$\sigma X_n \frac{d\Phi_0}{d\sigma} + \sigma X_0 \frac{d\Phi_n}{d\sigma} - \beta (X_0 \Phi_n - X_n \Phi_0) = -\sigma \sum_{j=1}^{n-1} X_j \frac{d\Phi_{n-j}}{d\sigma} + \beta \sum_{j=1}^{n-1} X_j \Phi_{n-j} \quad (56)$$

com  $X_n(1) = \Phi_n(1) = 0$ ,  $n \neq 0$ , e  $X_0(1) = \Phi_0(1) = 1$ .

É interessante notar que, se o parâmetro de arrasto  $\beta$ , definido na Equação (50b), for igual a 1 ou 2, soluções podem ser obtidas analiticamente até a primeira ordem[12]. As soluções obtidas comparam favoravelmente com as soluções numéricas das Equações(49) obtidas usando um algoritmo de Runge-Kutta de 4a./5a. ordem como pode ser visto na Figura 5, para  $\varepsilon=0.1$ .

Se o Arrasto for zero então  $\beta=0$  e as velocidades das gotas permanecem constantes e iguais a seus valores iniciais, como esperado. Como as condições da Tabela 2 (mais  $\theta = \pi/4$ ) dão para  $\beta$  um valor de 2.1875, os perfís resultantes da velocidade, posição e tamanho das gotas são praticamente aquelas mostradas nas Figuras 5, 6 e 7 para  $\beta=2$ . Um aumento deste parâmetro reduz o alcance das gotas e causa uma variação nas suas taxas de velocidades (uma deceleração inicial é seguida por uma aceleração final) como resultado da interação com a velocidade do gás. As Figuras 8,9 e 10 mostram esses efeitos para aumentos de dez vezes e cem vezes no parâmetro de arrasto.

Como a evolução do número de Reynolds para o combustível e as condições do ambiente da Tabela 2, sugerem o emprêgo da formulação de Ingebo para o coeficiente de arrasto, deve-se então resolver as Equações (51) com as condições de contorno (53) e (54). Isto foi feito numericamente usando o algoritmo de Runge-Kutta já mencionado, mas desta vez para valores de  $\varepsilon$  variando de 0.001 a 10. Os resultados apresentados nas Figuras 11, 12 e 13, mostram que, para valores de  $\varepsilon < 0.1$ , os perfís de velocidade se reduzem praticamente a uma única

curva, monotonicamente decrescente. Para  $\varepsilon=1$ , essas curvas, embora ainda monotonicamente decrescentes, já exibem um espalhamento que depende de seus ângulos azimutais. Para  $\varepsilon=10$ , entretanto, as gotas da classe  $\phi=0$ , mostram um perfil de velocidade onde a deceleração inicial é seguida por um período de aceleração e por uma deceleração final, suave, enquanto seus tamanhos vão para zero. As curvas da Figura 14 sugerem que este comportamento é uma consequência da interação entre as velocidades do gás e das gotas. Embora devesse ser esperado que, para maiores valores de  $\varepsilon$  o período de deceleração inicial devesse decrescer sendo então seguido por um período de aceleração mais longo, não é possível inferir tal comportamento, pois o modelo escolhido foi para um "spray" diluído, apenas.

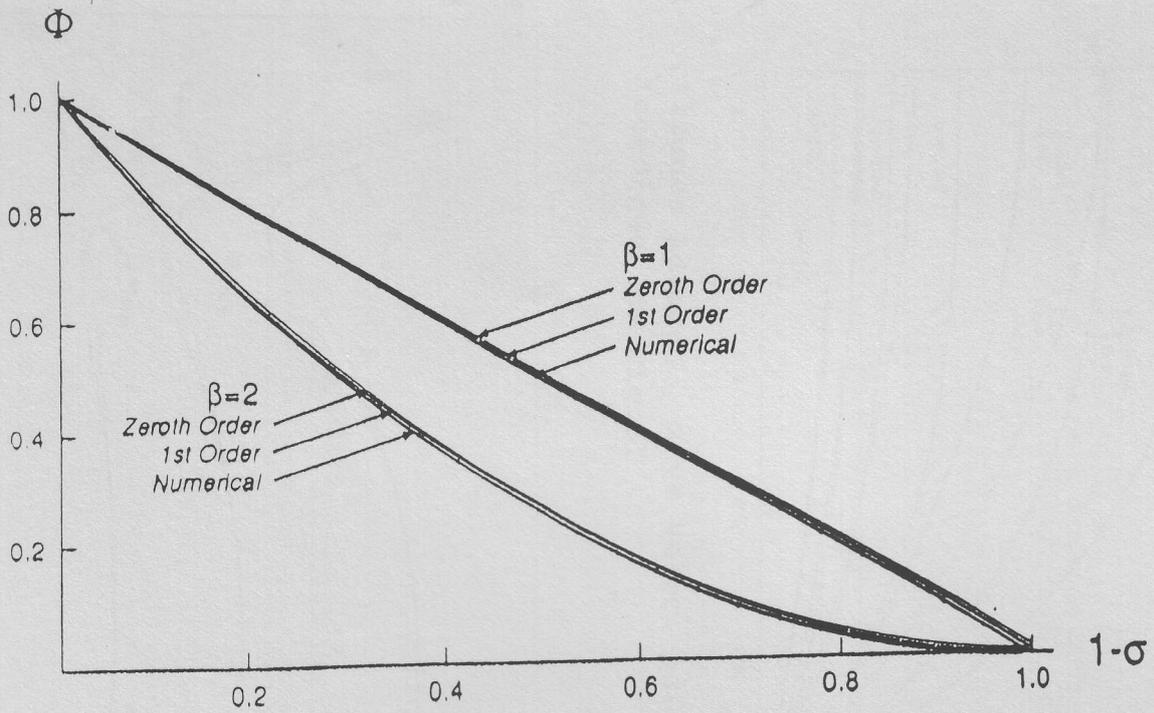


Fig.5- Veloc. Adimens,  $\Phi$ , vs  $1-\sigma$ ,  $\beta=1$  e  $2$ ,  $\varepsilon \leq 0.1$   
 Comparação entre Soluções por Pequenas Perturbações  
 (ordem zero e 1a. ordem) e Numérica (Runge-Kutta)  
 (Condições da Tabela 2,  $CD=24/Re$ ,  $0 < \phi < \pi$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ )

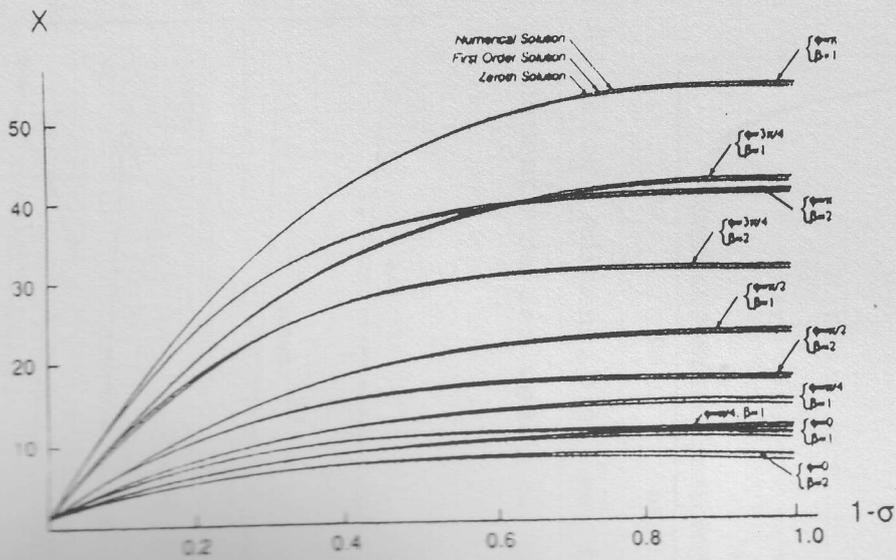


Fig.6- Alcance Adimensional,  $X$  vs  $1-\sigma$  (condições da Fig.5)

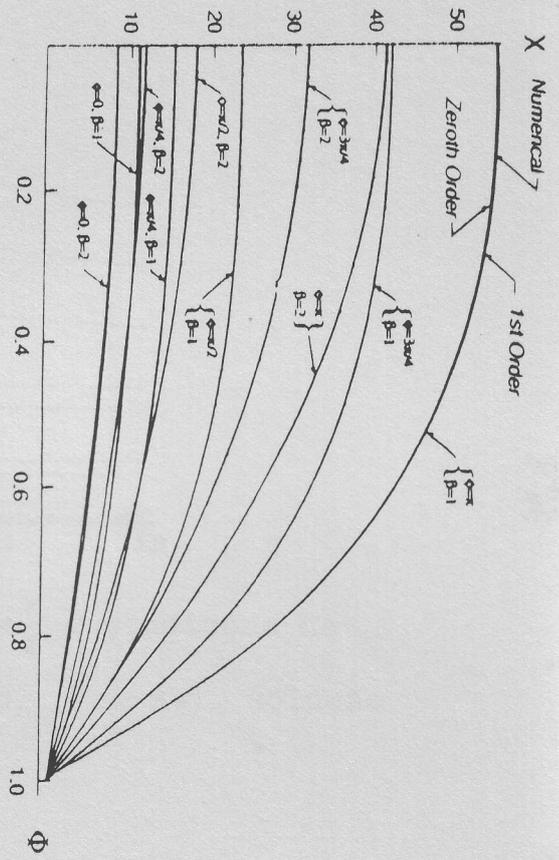


Fig. 7 - Alcance Adimens. , X vs Veloc. Adimens. da Gota,  $\Phi$ , (condições da Fig. 5)

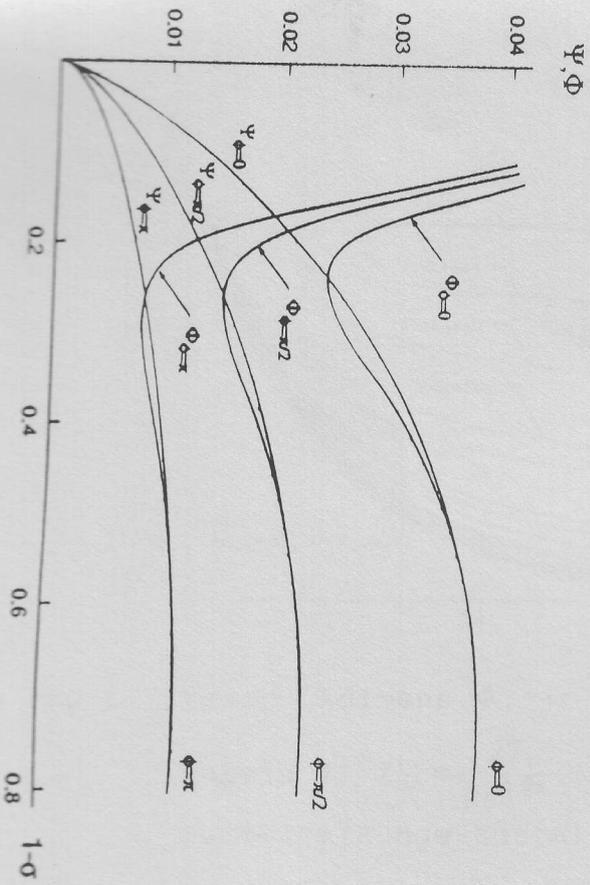


Fig. 9 - Veloc. Adimens. do GãB,  $\Psi$ , e Veloc. Adimens. da Gota,  $\Phi$ , vs  $1-\sigma$ , (cond. da Fig. 8,  $\phi=0$ )

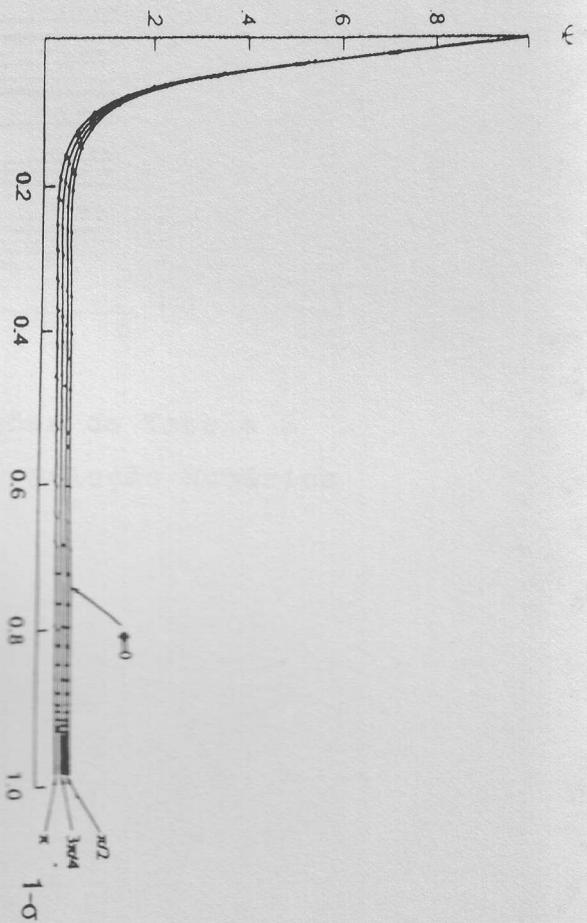


Fig. 8 - Veloc. Adimens. ,  $\Phi$ , vs  $1-\sigma$ ,  $\epsilon \leq 0.1$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $C_D R$ , aumento de dez vezes no parâmetro de Arrasto,  $\beta$

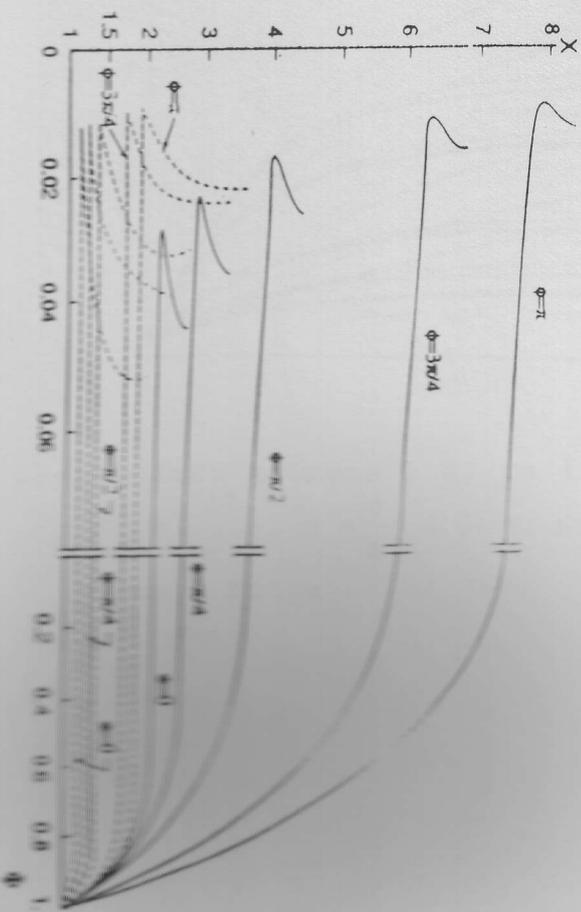


Fig. 10 - Alcance Adimens. , X, vs Veloc. Adimens. ,  $\Phi$ ,  $\epsilon \leq 0.1$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$ , aumento de dez vezes em  $\beta$

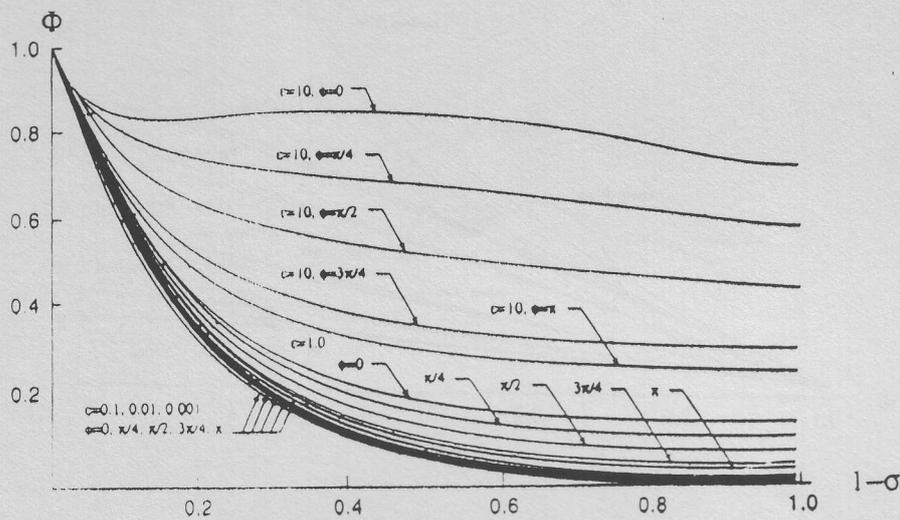


Fig.11- Veloc. Adimens.  $\Phi$ , vs  $1-\sigma$ , ( $\theta = \frac{\pi}{4}$  e condições da Tabela 2).  $C_D = \frac{27}{Re^{0.84}}$ ,  $0.001 \leq \epsilon \leq 10$ , ( $0 \leq \phi \leq \pi$ ). Solução Numérica (Runge-Kutta)

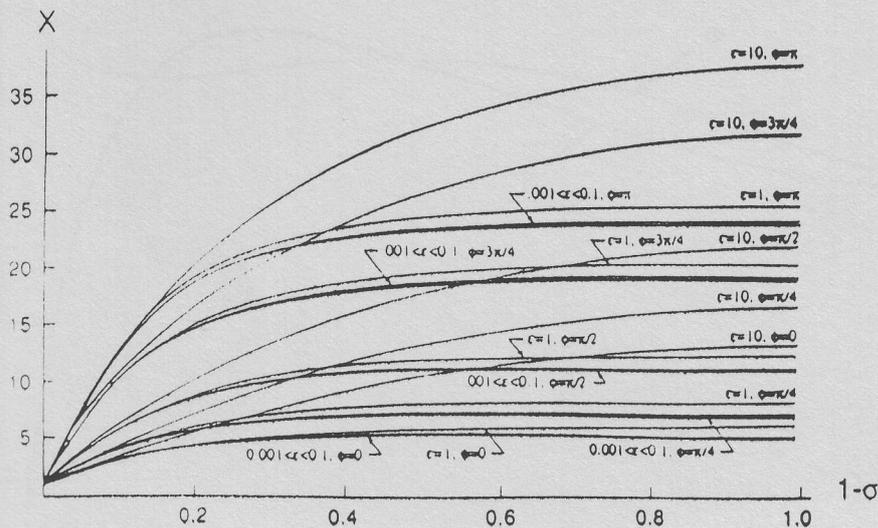


Fig.12- Alcance Adimens.,  $X$ , vs  $1-\sigma$ , (condições da Tabela 2  $C_D = \frac{27}{Re^{0.84}}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $0.01 \leq \epsilon \leq 10$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$ . Solução Numérica (Runge-Kutta).

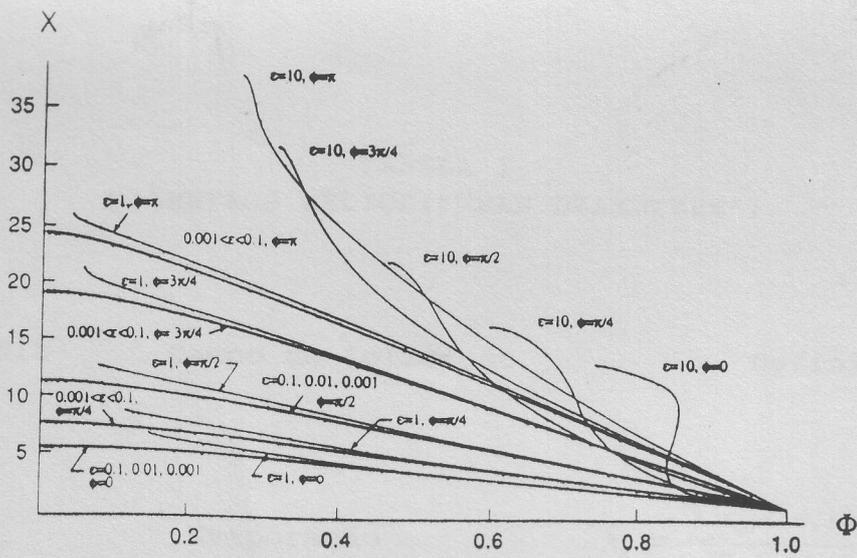


Fig.13- Alcance Adimens.,  $X$ , vs Veloc. Adimens.,  $\Phi$ , (condições da Tabela 2),  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $C_D = \frac{27}{Re^{0.84}}$ ,  $0.001 \leq \epsilon \leq 10$ , ( $0 \leq \phi \leq \pi$ ), Solução Numérica (Runge-Kutta).

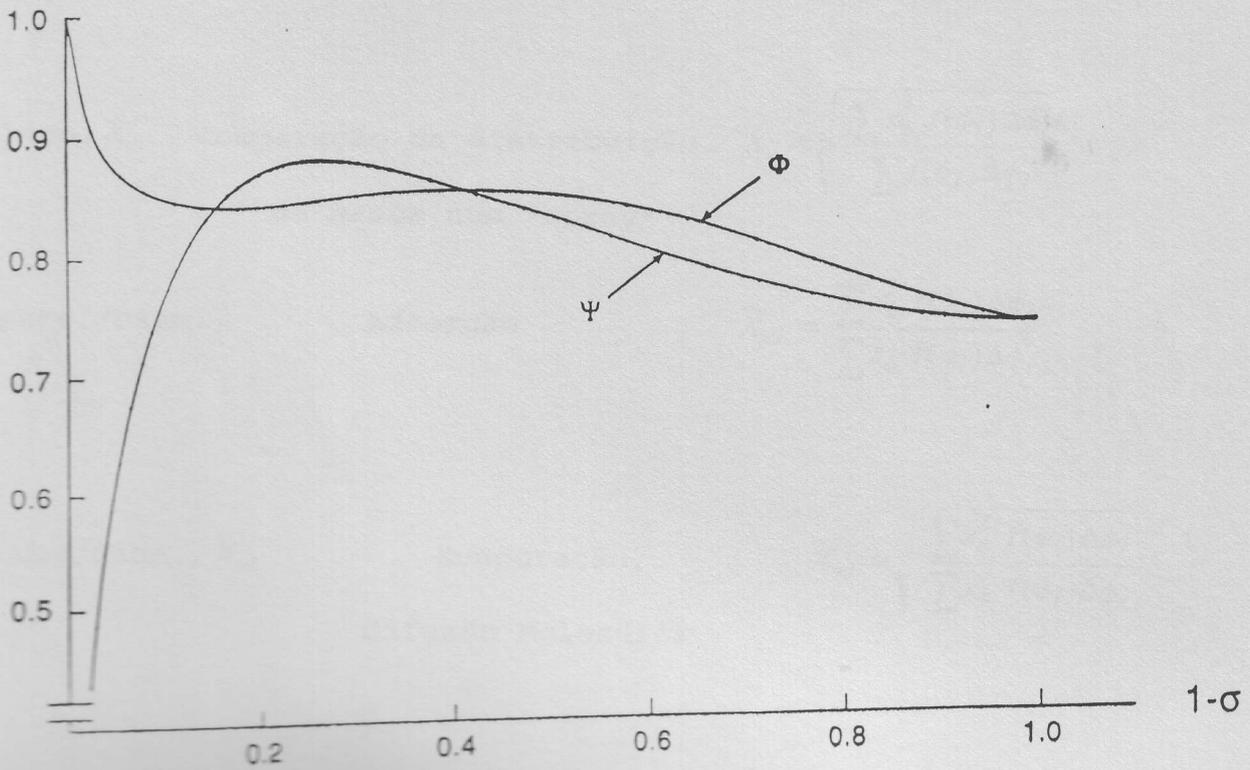


Fig.14- Velocs. Adimens. do Gás e da Gota,  $\Psi$  e  $\Phi$ , vs  $1-\sigma$  ( $\epsilon=10, \phi=0, C_D = \frac{27}{Re^{0.84}}$  e condições da Fig.11)

TABELA 1  
DIÂMETROS MÉDIOS ("MEAN DIAMETERS")

Diam. Médio	Campo de Aplicação	Definição
Linear, $\bar{X}_a$	Evaporação	$\bar{X}_a = \frac{\sum x_{\phi_i} f(\phi_i) \Delta\phi_i}{\sum f(\phi_i) \Delta\phi_i}$
Superfície, $\bar{X}_s$	Absorção, processos onde a área superficial é parâmetro de controle	$\bar{X}_s = \sqrt{\frac{\sum x_{\phi_i}^2 f(\phi_i) \Delta\phi_i}{\sum f(\phi_i) \Delta\phi_i}}$
Volume, $\bar{X}_v$	Comparaçao da distribuição de massa num "spray"	$\bar{X}_v = \sqrt[3]{\frac{\sum x_{\phi_i}^3 f(\phi_i) \Delta\phi_i}{\sum f(\phi_i) \Delta\phi_i}}$
Superf./Diam., $\bar{X}_{sd}$	Adsorção	$\bar{X}_{sd} = \frac{\sum x_{\phi_i}^2 f(\phi_i) \Delta\phi_i}{\sum x_{\phi_i} f(\phi_i) \Delta\phi_i}$
Volume/Diam., $\bar{X}_{vd}$	Evaporação, Difusão Molecular	$\bar{X}_{vd} = \sqrt{\frac{\sum x_{\phi_i}^3 f(\phi_i) \Delta\phi_i}{\sum x_{\phi_i} f(\phi_i) \Delta\phi_i}}$
Vol/Sup. ou Diam. de Sauter, $\bar{X}_s$	Transf. de Massa, Reações Químicas (Combustão)	$\bar{X}_{vs} = \frac{\sum x_{\phi_i}^3 f(\phi_i) \Delta\phi_i}{\sum x_{\phi_i}^2 f(\phi_i) \Delta\phi_i}$

TABELA 2

Parâmetros Utilizados nos Cálculos

Combustível: Etanol

Oxidante: Ar, 1atm

Razão A/C: 8.95

R: 0.05 cm

$V_0$ : 3000 cm/s

$\rho_l$ : 0.787 g/cm<sup>3</sup>

$\rho_g$ : 0.001225 g/cm<sup>3</sup>

$T_l$ : 298 K

$T_g$ : 700 K

$\mu_g$ : 0.000325 g/cm-s

$\mu_l$ : 0.000325 g/cm-s

cp: 0.2626 cal/g-K

$\lambda_g$ : 135.0 cal/cm-s-K

$\sigma_l$ : 22.33 dyn/cm

L : 210.36 cal/g

Q : 3503.7 cal/g

$Y_{ox}$  : 0.2331

## REFERÊNCIAS:

1. Squire, H.B., "*Investigation of the Instability of a Moving Liquid Film*", British Journal of Applied Physics, Vol.4, June 1953, pp.167-169.
2. Taylor, G.I., "*Formation of Thin Flat Sheets of Water*", Proceedings of Royal Society, London, England, UK, Vol.259A, Nov. 1960, pp.1-17.
3. Dombrowski, N. and Johns, W.R., "*The Aerodynamic Instability and Disintegration of Viscous Liquid Sheets*", Chemical Engineering Science, Vol.18, 1963, pp.203-214.
4. Hasson, D. and Peck, R.E., "*Thickness Distribution in a Sheet Formed by Impinging Jets*", AIChE Journal, Sept.1964, pp.752-754.
5. Levich, V.G., Physicochemical Hydrodynamics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962, Chapt.11.
6. Marshall, W.R., Jr., Atomization and Spray Drying, 2nd ed., American Institute of Chemical Engineers, Science Press, Lancaster, PA, 1954, pp.1-122.
7. Dombrowski, N. and Hooper, P., Chemical Engineering Science, Vol.17, 1962, p-291.
8. Couto, H.S. and Bastos-Netto, D., "*Theory and Design of a Splash Plate Atomizer*", IV ENCIT, 01-04 Dez. 1992, Rio de Janeiro, RJ, Proceedings, pp.57-58.
9. Couto, H.S. and Bastos-Netto, D., "*Modeling Droplet Size Distribution from Impinging Jets*", Journal of Propulsion and Power, Vol.7, No.4, June-Aug.1991, pp.654-656.
10. Couto, H.S., Bastos-Netto, D. and Migueis, C.E., "*Modeling of the Initial Droplet Size Distribution Function in a Spray Generated by Impinging Jets*", Journal of Propulsion and Power, Vol.8, No.3, May-June 1992, pp.725-728.

11. Bastos-Netto, D., Couto, H.S. and Sinay, L., "Modeling of the Initial Properties of Droplets Generated in a Spray Formed by Impinging Jets", II Latin American Symposium on Fluid Mechanics and Applications, CIMAT, Guanajuato, Gto., Mexico, Nov. 16-19, 1992, Abstracts, p.8
12. Bastos-Netto, D., "Modeling of Evaporation and Combustion Processes in a Spray Generated by Impinging Jets", AIAA/SAE/ASME/ASME 29th Joint Propulsion Conference, Monterey, CA., June 28-30, 1993, Paper AIAA 93-2192.
13. Sirignano, W.R., "The Formation of Spray Combustion Models: Resolution Compared to Spacing", Trans. of the ASME, J. of Heat and Mass Transfer, Vol.108, Aug.1986, pp.633-639.
14. Williams, F.A., Combustion Theory, 2nd Ed., 1988, Addison Wesley Publishing Co., NY, pp.446-484.
15. Kernstein, A.R., "Prediction of the Concentration PDF for Evaporating Sprays", J. Heat and Mass Transfer, Vol.27, No.8, 1984, pp.1291-1309.