

## UM ALGORITMO PARA A REDUÇÃO DE CICLOS DA SERRA E DE OBJETOS NO PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE BIDIMENSIONAL DE UMA INDÚSTRIA MOVELEIRA

ALYNE TOSCANO MARTINS, SOCORRO RANGEL

Departamento de Ciências da Computação e Estatística  
R. Cristóvão Colombo, 2265 - Jd. Nazareth - São José do Rio Preto - SP - CEP: 15054000  
alynetoscano@hotmail.com, socorro@ibilce.unesp.br

HORACIO HIDEKI YANASSE

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada  
Av. dos Astronautas 1758 - Jardim da Granja - São José dos Campos - SP - CEP: 12227010  
horacio@lac.inpe.br

### RESUMO

Este trabalho trata de um problema de corte de estoque bidimensional originado em uma fábrica de móveis. O problema envolve a otimização simultânea de dois objetivos conflitantes: minimizar o número total de objetos cortados e minimizar o número total de ciclos da serra. Propõe-se um algoritmo para resolver o problema que consiste em adicionar, de forma dinâmica, restrições que impõem uma frequência mínima para os padrões de corte a serem utilizados. A cada iteração uma solução é gerada e no final do algoritmo existe um conjunto de soluções das quais são selecionadas as não dominadas. Um estudo computacional foi realizado utilizando dados reais de uma fábrica de pequeno porte. Os resultados mostraram que com o algoritmo proposto é possível encontrar soluções próximas, e na maioria das vezes melhores, que a prática da fábrica.

**Palavras-chave:** Corte de Estoque Bidimensional. Ciclos da Serra. Indústria Moveleira. Otimização Combinatória.

### ABSTRACT

This paper addresses a two-dimensional cutting stock problem arising in a furniture plant. The problem involves the simultaneous optimization of two conflicting objectives: minimizing the total number of objects and the total number of saw cycles. An algorithm to solve this problem is proposed that adds to the problem, in a dynamic way, constraints that impose a minimum frequency to any chosen pattern. At each iteration a solution is generated and at the end there is a set of selected non-dominated solutions. A computational study was conducted using real data from a small scale furniture plant. The results show that with the proposed algorithm it is possible to find solutions that are as good as or better than the ones used in the industry practice.

**Keywords:** Two-dimensional Cutting Stock. Saw Cycles. Furniture Industry. Combinatorial Optimization.

## 1. Introdução

Um fator importante para o planejamento da produção em algumas indústrias de móveis é determinar como cortar a matéria-prima principal (painéis retangulares de madeira) para atender a demanda por peças retangulares menores, minimizando a perda de material. Este problema, conhecido na literatura como Problema de Corte de Estoque Bidimensional, é um caso particular dos Problemas de Corte e Empacotamento (*Cutting and Packing Problems*). A importância econômica, o grande número de aplicações e o grau de dificuldade dos Problemas de Corte e Empacotamento têm motivado a comunidade científica nacional e internacional na busca de métodos de solução eficientes (e.g. Arenales *et al.* (2004), Wang e Waescher (2002)).

Um critério de otimização usualmente encontrado em Problemas de Corte de Estoque (PCE) é a minimização da perda de material, que é equivalente a minimizar o número de painéis (objetos) cortados quando há apenas um tipo de objeto em estoque e a demanda das peças (itens) deve ser atendida exatamente. Em visitas realizadas a uma fábrica de móveis característica do polo moveleiro de Votuporanga-SP (o qual denotaremos de Fábrica V) foi observado que um critério de otimização também importante é maximizar a produtividade do equipamento de corte (seccionadora) (Rangel e Figueiredo, 2008). Toda a linha de produção depende do setor de corte (“nascimento do móvel”) e em momentos de alta demanda, este setor pode se tornar um gargalo da produção. Além disso, o melhor aproveitamento da capacidade da máquina de corte implica na redução do tempo de uso da máquina, e consequentemente na economia de energia elétrica e redução dos custos operacionais.

A maneira como um objeto é cortado para produzir os itens, ou seja, a maneira como os itens estão dispostos sem sobreposição sobre o objeto para serem cortados é chamada de padrão de corte. Se a diversidade de padrões de corte utilizada no processo de corte é reduzida, a quantidade de vezes que os padrões escolhidos (ou alguns deles) são usados para serem cortados aumenta, o que pode favorecer a taxa de utilização da seccionadora. O conjunto de todas as operações necessárias para cortar um, ou mais objetos juntos, de acordo com um determinado padrão de corte, até que todos os itens nele (ou neles) contidos sejam produzidos é definido como ciclo da serra (Yanasse *et al.*, 1993). Se a capacidade total da máquina é aproveitada em cada ciclo da serra temos um ciclo completo, caso contrário o ciclo é dito incompleto (Rank Jr., 2008). Assim, minimizar o número de ciclos da serra é um aspecto importante para se tentar aumentar a produtividade do processo de corte. A redução do número de padrões de corte também pode contribuir para reduzir o número total de ciclos. Porém, nem sempre a redução do número de padrões de corte implica na redução de ciclos da serra (e.g. Martins, 2010).

O problema de redução do número de padrões de corte tem sido tratado por diversos autores com foco no problema unidimensional (e.g. Haessler (1975), Foerster e Wascher (2000), Vanderbeck (2000), Vasko *et al.* (2000), Umetani *et al.* (2006), Yanasse e Limeira (2006), Diegel *et al.* (2006), Moretti e Salles Neto (2008), Alves e Carvalho (2008)). Em comparação, o problema de redução do número de ciclos da serra tem recebido menos atenção. Yanasse *et al.* (1993) propõem uma heurística para redução de ciclos da serra no problema de corte de estoque bidimensional. Padrões de corte são gerados para um problema auxiliar (problema PCE com as demandas ajustadas por um fator  $F_0$ ). Se este padrão for “bom”, isto é, satisfaz alguns parâmetros, ele é aceito e usado  $F_0$  vezes. As demandas são atualizadas e um novo problema auxiliar é definido. O processo é repetido até que as demandas de todos os itens sejam satisfeitas exatamente. Mosquera e Rangel (2007) propõem a inclusão de uma restrição de multiplicidade para garantir que se um padrão de corte for usado, sua frequência seja um múltiplo da capacidade da máquina de corte ( $Cap$ ). Yanasse (2008) mostra que resolver o PCE considerando a redução dos ciclos da serra em um ambiente de demanda alta é equivalente a resolver o PCE com as demandas escalonadas por  $Cap$ . Além disso apresenta um modelo para minimização do número de objetos e ciclos simultaneamente e algumas

heurísticas simples para resolução deste. Rank Jr. (2008) propõe um modelo para minimização de ciclos e objetos permitindo a utilização de ciclos incompletos. Apresenta ainda duas heurísticas para resolução do problema no caso unidimensional. Chu e Antonio (1999) tratam do problema unidimensional no contexto de uma empresa de corte de tubos de metais, em que um conjunto de objetos que é cortado ao mesmo tempo (um ciclo da serra) é chamado de “pacote”. Os autores desenvolveram dois algoritmos de programação dinâmica para o planejamento da produção de um dia dessa indústria utilizando uma função que faz a soma ponderada dos objetivos pretendidos.

O objetivo deste trabalho é encontrar boas soluções para o PCE bidimensional levando em consideração a minimização simultânea de dois objetivos conflitantes: a minimização do número de objetos cortados e do número de ciclos da serra. A principal ideia do algoritmo proposto para resolver o problema consiste em impor, de forma dinâmica, restrições que garantam uma frequência mínima para a utilização dos padrões de corte selecionados. A cada iteração, uma solução é gerada e no final do algoritmo existe um conjunto de soluções do qual são selecionadas as não dominadas.

Na próxima seção discutimos o Problema de Corte de Estoque Bidimensional no contexto da indústria de móveis. Na Seção 3 apresentamos o método de solução proposto. Um estudo computacional comparando o método proposto com a prática da Fábrica V é apresentado na Seção 4. Na Seção 5 são feitas as considerações finais.

## 2. O Problema de Corte de Estoque Bidimensional e os Ciclos da Serra

Suponhamos que exista em estoque uma quantidade suficiente de objetos retangulares de comprimento  $L$  e largura  $W$  para produzir um conjunto de  $m$  itens retangulares menores de comprimento  $l_i$ , largura  $w_i$  e demanda  $b_i$ . Seja  $n$  o número total de padrões de corte viáveis (conhecidos *a priori*), e  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , um vetor  $m$ -dimensional tal que cada elemento  $a_{ij}$  representa o número de itens do tipo  $i$  no padrão de corte  $j$ . Considerando o critério de minimização do número de objetos cortados, o Problema de Corte de Estoque Bidimensional pode ser formulado da seguinte maneira (Gilmore e Gomory, 1961):

$$\min Z_{PCE} = \sum_{j=1}^n x_j, \quad (1)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

em que  $x_j$  representa o número de objetos cortados de acordo com o padrão de corte  $j$ . A função objetivo (1) minimiza o número de objetos a serem cortados, as restrições (2) garantem o atendimento à demanda permitindo excesso na produção e as restrições (3) definem o domínio das variáveis.

Diversos fatores devem ser considerados na elaboração dos padrões de corte (Arenales *et al.* (2004)). Por limitação operacional da maioria dos equipamentos de corte encontrados nas indústrias de móveis, apenas padrões guilhotinados podem ser cortados. Um corte feito de uma extremidade a outra de um objeto é dito guilhotinado. No caso de um objeto retangular, se o corte guilhotinado dividi-lo em dois retângulos menores é denominado corte guilhotinado ortogonal. Outro fator importante a ser considerado na geração de um padrão de corte é o número de vezes que o objeto deve ser rotacionado de  $90^\circ$  para que os cortes guilhotinados sejam efetuados (número de estágios). De maneira geral, o número de estágios  $k$  é dado por  $k = r + 1$ , sendo  $r$  o número de rotações necessárias.

A Fábrica V têm preferência por padrões guilhotinados ortogonais em dois estágios, uma vez que a cada rotação do objeto o tempo de produção é penalizado. Porém, em alguns casos, como por exemplo para obter um melhor aproveitamento do objeto, a fábrica também aceita padrões de

corte em três estágios. Na Figura 1 é apresentado um padrão de corte bidimensional guilhotinado 3-estágios.

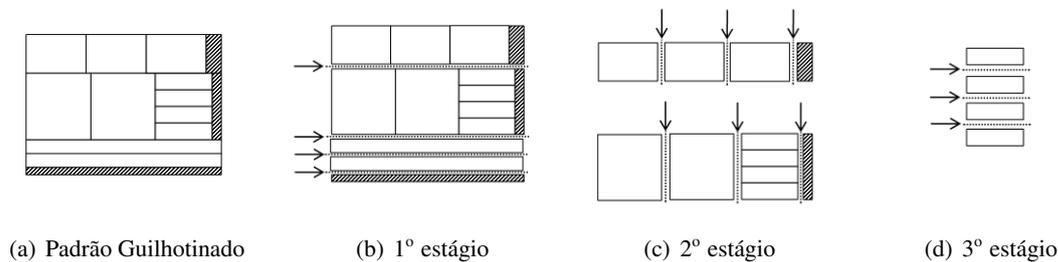


Figura 1: Exemplo de um padrão de corte guilhotinado 3-estágios.

Padrões de corte  $n$ -grupos são formados por  $n$  partes em que cada uma das partes é um padrão 1-grupo. Padrão 1-grupo, são padrões 2-estágios em que as faixas resultantes do primeiro estágio podem ser cortadas simultaneamente no segundo estágio (Gilmore e Gomory, 1965). A Figura 2 apresenta quatro tipos de padrões  $n$ -grupos: 1-grupo, 2-grupos, 3i-grupos e 3t-grupos. As notações 3i-grupos e 3t-grupos são usadas para diferenciar como as 3 partes 1-grupo do padrão 3-grupos foram obtidas. No caso 3i-grupos as 3 partes foram obtidas por 2 cortes guilhotinados paralelos (no formato da letra maiúscula “I”); no caso 3t-grupos as 3 partes foram obtidas por 2 cortes guilhotinados perpendiculares (no formato da letra maiúscula “T”). Faccio e Rangel (2009) fizeram um estudo dos modelos apresentados por Yanasse e Morabito (2008) para geração de padrões  $n$ -grupos com dados de uma indústria moveleira. Os resultados obtidos mostraram que os padrões gerados apresentam perdas dentro dos requisitos exigidos pela fábrica, sendo que a menor perda foi encontrada com padrões do tipo 3t-grupos.

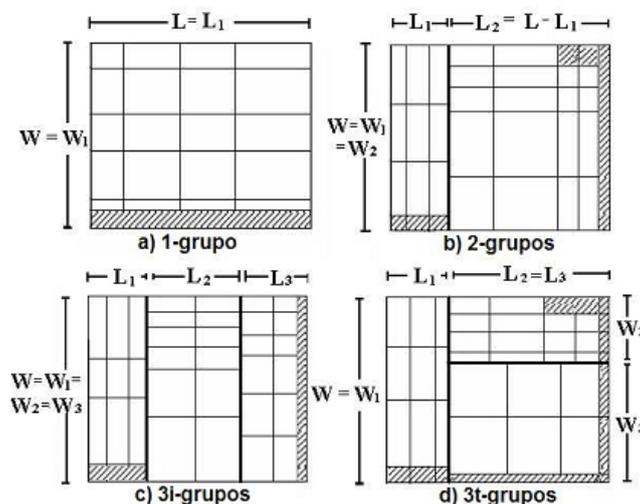


Figura 2: Padrões de corte  $n$ -grupos, Faccio e Rangel (2009).

Na Fábrica V a máquina de corte tem capacidade de cortar simultaneamente vários objetos. O número máximo de objetos que a máquina pode cortar ao mesmo tempo, de acordo com um padrão de corte, é chamado de capacidade da máquina de corte ( $Cap$ ) e pode ser calculado considerando a altura da serra,  $CpT$ , e a espessura do objeto a ser cortado,  $esp$ :

$$Cap = \left\lfloor \frac{CpT}{esp} \right\rfloor. \tag{4}$$

O número de ciclos da serra,  $y_j$ , necessários para cortar  $x_j$  objetos, de acordo com um padrão de corte  $j$ , pode ser calculado como:

$$y_j = \left\lceil \frac{x_j}{Cap} \right\rceil. \quad (5)$$

Para reduzir o número total de ciclos da serra podemos, além de considerar o corte simultâneo de objetos, tentar aproveitar a capacidade total da máquina em cada ciclo da serra, isto é, executar ciclos completos. Supondo que o tempo necessário para executar um ciclo da serra não varie com a quantidade de objetos sendo cortados simultaneamente ou com o tipo de padrão que está sendo utilizado, cortar objetos simultaneamente diminui o tempo de utilização da máquina. O tempo que seria gasto para cortar um único objeto é utilizado para cortar  $Cap$  objetos.

### 3. Algoritmo de Frequência Mínima do Padrão (AFM-P)

O objetivo de minimizar o número total de ciclos da serra pode ser conflitante com o objetivo de minimizar o número total de objetos utilizados no atendimento à demanda. Na otimização de dois, ou mais objetivos conflitantes, é possível que exista um conjunto de soluções eficientes (Deb, 2004) em que não é possível determinar se uma solução é melhor que a outra. Estas soluções são chamadas de soluções não dominadas. Com base nessa observação é proposto neste trabalho um algoritmo com o objetivo de fazer um balanceamento entre o número de objetos e de ciclos da serra de forma a encontrar a maior variedade possível de soluções eficientes mantendo um compromisso entre estes dois objetivos.

O procedimento proposto é baseado principalmente nos trabalhos de Diegel *et al.* (2006), Vasko *et al.* (2000) e Yanasse (2008). A ideia principal do algoritmo proposto (**Algoritmo de Frequência Mínima do Padrão (AFM-P)**) é a adição, de forma dinâmica, de restrições que imponham uma frequência mínima, baseada em  $Cap$ , para a utilização de um padrão de corte. Impondo que um determinado padrão seja utilizado mais vezes, espera-se um melhor aproveitamento da capacidade da máquina de corte e, conseqüentemente, uma redução no número de ciclos da serra. A cada iteração uma solução é gerada e no final do algoritmo existe um conjunto de soluções. Sendo a minimização do número de objetos um objetivo conflitante com a redução de ciclos da serra, as soluções geradas são analisadas e as não dominadas são selecionadas.

O algoritmo AFM-P é iniciado com a resolução do Problema de Corte de Estoque Bidimensional relaxado por geração de colunas. A solução do Problema de Corte de Estoque relaxado é arredondada tomando, para cada variável  $x_j$ , o menor inteiro maior ou igual a  $x_j$ , ou seja,  $\bar{x}_j = \lceil x_j \rceil$ . O número de ciclos da serra é calculado de acordo com (5).

Seja  $\beta$  um parâmetro pré-definido que representa a porcentagem requerida de utilização da capacidade da máquina de corte. Assim, a frequência mínima exigida de utilização de um padrão de corte é dada por:

$$Freq\_Min = \beta * Cap, \quad (6)$$

ou seja, o padrão a ser utilizado deve ser cortado pelo menos  $Freq\_Min$  vezes.

A solução  $\bar{x}_j$  é analisada, e se existem padrões com frequência abaixo do valor  $Freq\_Min$ , isto é  $\exists j \in N_3 = \{j : \bar{x}_j < Freq\_Min\}$ , são adicionadas ao problema as seguintes restrições:

$$Freq\_Min * \lambda_j \leq x_j \leq M * \lambda_j, \quad j \in N_3, \quad (7)$$

em que  $M$  é um valor grande, e  $\lambda_j$  é variável binária:

$$\lambda_j = \begin{cases} 1, & \text{se o padrão } j \text{ é usado,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (8)$$

Com a adição das restrições de frequência mínima, pode ocorrer um “uso” excessivo de objetos. Para contornar essa situação define-se também um parâmetro de tolerância,  $TOL$ , para o número máximo de objetos que podem ser utilizados na solução do novo problema (PCE-R). A restrição

$$\sum_{j \in N_1 \cup N_2} x_j \leq TOL, \quad (9)$$

é também adicionada ao problema. Na restrição (9),  $N_1$  é o conjunto de padrões de corte gerados durante a resolução do PCE e  $N_2$  é o conjunto de padrões gerados para o PCE-R. Inicialmente  $N_2 = \emptyset$ .

Após a adição das restrições (7) e (9), obtém-se o Problema de Corte de Estoque Reformulado (PCE-R):

$$\min \sum_{j \in N_1 \cup N_2} x_j \quad (10)$$

$$s.a. \sum_{j \in N_1 \cup N_2} A_j x_j \geq b \quad (11)$$

$$Freq\_Min * \lambda_j \leq x_j \leq M * \lambda_j, j \in N_3 \quad (12)$$

$$\sum_{j \in N_1 \cup N_2} x_j \leq TOL \quad (13)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, j \in N_1 \cup N_2 \quad (14)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, j \in N_3. \quad (15)$$

A técnica de geração de colunas é aplicada na resolução do PCE-R de maneira similar à proposta por Gilmore e Gomory (1961, 1965). A restrição (14) é relaxada para  $x_j \in \mathbb{R}_+$ ,  $j \in N_1 \cup N_2$ , obtendo-se um problema inteiro misto. Após a solução do PCE-R relaxado, a variável  $\lambda_j$  é fixada no valor ótimo para permitir a recuperação das variáveis duais associadas as restrições (11), (12) e (13). As restrições (12) podem ser subdivididas em duas outras restrições:

$$x_j \leq M * \lambda_j, j \in N_3 \quad (12 - 1)$$

e,

$$x_j \geq Freq\_Min * \lambda_j, j \in N_3. \quad (12 - 2)$$

Sejam  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  e  $\pi_4$  as variáveis duais associadas às restrições (11), (12-1), (12-2) e (13), respectivamente. O subproblema para gerar colunas (padrões de corte) é resolvido utilizando apenas os valores duais referentes às restrições (11),  $\pi_1$ .

Suponhamos que  $k$  padrões de corte tenham sido gerados até o momento. Durante o processo de geração de colunas, a nova coluna  $A_{k+1}$  que determina o padrão de corte  $k+1$  associado à variável  $x_{k+1}$ , entra na base se  $(1 - [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4] A_{k+1}) < 0$ . Mas para esta nova variável  $x_{k+1}$  não existem as restrições (12). Assim, se a condição:

$$z_{subp} > 1 - \pi_4, \quad (16)$$

( $z_{subp}$  é o valor ótimo do subproblema usado para gerar colunas) é satisfeita então a coluna  $A_{k+1}$  é aceita, a variável  $x_{k+1}$  é incluída no problema PCE-R e o processo de geração de colunas continua. As colunas geradas na resolução do PCE-R são adicionadas ao conjunto  $N_2$ .

Ao final da resolução do PCE-R por geração de colunas, a solução é arredondada pelo método BRURED (Wascher e Gau, 1996). O objetivo deste método é diminuir o excesso de produção causado pelo arredondamento da solução pelo maior inteiro. O método BRURED checa quais variáveis  $x_j$  podem ser reduzidas de uma unidade, sem deixar de atender a demanda. Assim, para cada  $k \in N_1 \cup N_2$ , se a solução  $\bar{x}_k$ , satisfaz a desigualdade

$$a_{ik}(\bar{x}_k - 1) + \sum_{j=1; j \neq k}^n a_{ij} \bar{x}_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (17)$$

então é possível fazer  $\bar{x}_k = \bar{x}_k - 1$ .

O número de ciclos da serra é então calculado de acordo com (5), e a solução  $(x^{it\_FM}, y^{it\_FM})$ , em que  $it\_FM$  indica a iteração atual, é armazenada. Em seguida, o algoritmo verifica na nova solução  $x^{it\_FM}$  os padrões de corte que estão abaixo de  $Freq\_Min$ . O processo se repete até que não existam mais padrões abaixo de  $Freq\_Min$  ou que o número máximo de iterações,  $it\_tot$ , seja atingido. Ao final tem-se um conjunto de soluções que foram armazenadas a cada iteração. Um procedimento simples para determinar soluções não dominadas é aplicado neste conjunto (Deb, 2004). Por fim, o conjunto das soluções obtido para todos os valores de  $\beta$  é analisado para selecionar as não dominadas.

#### 4. Avaliação Computacional

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos no estudo computacional realizado com o algoritmo AFM-P. O objetivo é fazer uma análise do funcionamento deste algoritmo e um estudo comparativo entre as soluções obtidas com esse procedimento e a prática da fábrica visitada.

Os testes foram realizados em um computador Intel Core 2 Duo (2.80 GHz) com 2Gb de memória RAM. O *software* utilizado foi o Xpress<sup>MP</sup>, sob a plataforma Windows 2000, com a linguagem de modelagem *Mosel*, que está agregada ao *software*.

Os exemplares utilizados nos testes foram baseados nos dados cedidos pela Fábrica V e se referem a cinco produtos: guarda-roupas de 5, 4 e 3 portas (A5P, A4P e A3P), cômoda (Cmd) e criado (Crđ). Os itens para compor o produto são obtidos de objetos com espessuras diferentes (3, 9, 12, 15, 20 e 25mm). A produção é feita em lotes simples, duplos ou triplos. No caso de lotes duplos e triplos (lotes derivados da junção de dois ou três lotes simples, respectivamente), os itens de mesma espessura são agrupados e suas demandas somadas. Assim, nas tabelas de resultados, os exemplares foram nomeados de acordo com: “Nome”-“Espessura”. Por exemplo, o exemplar A4P-03 corresponde ao conjunto de itens que devem ser obtidos do corte de objetos de 3mm de espessura para o lote simples do guarda-roupas de 4 portas. A Tabela 1 mostra um resumo dos exemplares utilizados, em que são apresentados o exemplar, o número total de itens (**Nº Tot. Itens**) e a demanda total (**Dem. Tot.**). Para todas as espessuras, a dimensão do objeto considerada foi  $(L,W) = (2750mm,1830mm)$ . Note que para obter todos os itens associados a um determinado produto, é necessário resolver um problema de corte de estoque para cada espessura do objeto.

O algoritmo AFM-P foi testado usando quatro valores diferentes para  $\beta$  (porcentagem mínima de utilização da capacidade da máquina), sendo estes 30%, 50%, 80% e 100%. Os padrões de corte gerados são do tipo 3t-grupos. Na geração dos padrões de corte foi considerado o desgaste provocado pela serra de 4mm. Além disto, admitimos que os itens têm rotação permitida e que pode haver a produção de itens em excesso. A altura da serra considerada é de 60mm. Essas considerações são baseadas na realidade da fábrica de móveis visitada. O parâmetro  $M$  foi tomado como  $M = \sum_{i=1}^m b_i$  e o número de objetos utilizados pode ser no máximo 10% maior que a solução do PCE, ou seja,  $TOL = Z + 10\%Z$ , onde  $Z$  é o valor da função objetivo do PCE resolvido por geração de colunas na inicialização do algoritmo. O tempo máximo de execução do *solver*, na resolução do PCE e do PCE-R em cada iteração do algoritmo AFM-P foi limitado em 600 segundos. A solução do subproblema da geração de colunas foi limitada em 60 segundos e número máximo de iterações ( $it\_tot$ ) do AFM-P foi definido como 15. Estes parâmetros foram definidos com base em alguns testes preliminares (ver detalhes em (Martins, 2010)).

Para um melhor entendimento do AFM-P, são mostradas na Tabela 2 as soluções encontradas em cada iteração do AFM-P, para o exemplar A5P-03 e para  $\beta = 100\%$ . Nesta tabela são exibidos a iteração (**It**) em que a solução foi encontrada, o número de objetos cortados (**Obj**), o número de ciclos da serra (**Ciclos**), o número de padrões de corte (**Np**), o número de restrições

(a) Lotes Simples

Exemplar	Nº Tot. Itens	Dem. Tot.
A5P-03	8	1080
A5P-12	2	480
A5P-15	7	880
A5P-20	9	2720
A5P-25	3	400
A4P-03	7	1070
A4P-12	2	540
A4P-15	7	855
A4P-20	9	2610
A4P-25	3	315
A3P-03	5	1080
A3P-12	2	720
A3P-15	6	960
A3P-20	10	2940
A3P-25	3	400
Cmd-03	3	1600
Cmd-09	3	1280
Cmd-12	6	2880
Cmd-15	4	1280
Crd-03	3	2700
Crd-12	2	2700
Crd-15	2	1500

(b) Lotes Duplos/Triplo

Exemplar	Nº Tot. Itens	Dem. Tot.
A5P_Cmd-03	10	2680
A5P_Cmd-09	4	1320
A5P_Cmd-12	6	3360
A5P_Cmd-15	10	2160
A5P_Crd-03	11	3780
A5P_Crd-12	4	3180
A5P_Crd-15	9	2380
Cmd_Crd-03	6	4300
Cmd_Crd-12	8	5580
Cmd_Crd-15	6	2780
A5P_A4P_A3P-03	11	3230
A5P_A4P_A3P-12	2	1740
A5P_A4P_A3P-15	7	2695
A5P_A4P_A3P-20	12	8270
A5P_A4P_A3P-25	3	1115

Tabela 1: Resumo dos dados dos exemplares utilizados.

acrescentadas (**Rest\_Acr**), o número de colunas geradas (**Col\_Ger**), e o tempo gasto em segundos em cada iteração (**Tempo**). As soluções não dominadas, com relação ao número de objetos e de ciclos da serra, aparecem em negrito. Cabe notar que a solução da iteração 0 é a solução do PCE.

Observe que o tempo de resolução do PCE ((1)-(3)) (It=0) é, na maioria das vezes, maior que a resolução do PCE-R ((10)-(15)) de cada iteração. Isso é consequência de que poucas colunas são geradas para o PCE-R, uma vez que os valores duais das restrições (12-1), (12-2), (13),  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  e  $\pi_4$  respectivamente, não são incorporados no subproblema de geração de colunas. Este fato pode impedir o subproblema *price* de gerar colunas novas. A solução dual associada às restrições (11),  $\pi_1$ , nem sempre se altera após a reotimização do PCE-R.

It	Obj	Ciclos	Np	Rest_Acr	Col_Ger	Tempo
<b>0</b>	<b>135</b>	<b>12</b>	<b>8</b>	<b>0</b>	<b>9</b>	<b>609,89</b>
1	135	14	10	4	1	24,61
2	138	11	7	7	3	26,52
3	138	11	7	2	0	5,77
<b>4</b>	<b>137</b>	<b>10</b>	<b>6</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>2,33</b>
5	139	10	5	1	1	1,06
6	139	10	5	1	1	1,09
7	148	10	6	1	1	1,24
8	148	10	6	2	0	0,81
Total				20	17	673,32

Tabela 2: Soluções para o A5P-03,  $\beta = 100\%$ .

Quanto a geração de colunas, é possível observar ainda que nem sempre a geração de novas colunas durante a resolução do PCE-R melhora a solução até então encontrada. Veja na Tabela 2, por exemplo, que a geração de 1 coluna na iteração 1 aumentou o número de ciclos em relação a solução encontrada na iteração 0. Porém na iteração 4, a adição de 1 coluna melhorou ambos os objetivos (número de objetos e número de ciclos da serra). O efeito positivo das restrições de frequência mínima pôde ser observado também, para outros exemplares. Por exemplo o A3P-20. Somente com a reotimização do problema, ou seja, sem a geração de nenhuma coluna nova, foi

possível encontrar uma solução melhor que a de uma iteração anterior, ou ainda uma nova solução não dominada. Um outro fato interessante ocorrido para o A3P-20 foi que para  $\beta = 30\%$  a única solução encontrada pelo AFM-P foi a do PCE. Isto ocorreu porque na solução do PCE não existia nenhum padrão  $j$  tal que  $x_j < Freq\_Min$ .

Note na Tabela 2 que algumas vezes aparecem soluções repetidas, como nas iterações 2 e 3, 5 e 6, 7 e 8. Isto acontece porque o AFM-P faz apenas um rearranjo entre os padrões de corte gerados, de forma que os padrões para os quais foram acrescentadas restrições de frequência mínima não sejam utilizados na nova solução. O conjunto de padrões de corte utilizado é quase sempre o mesmo para as soluções repetidas. Quando o AFM-P gera soluções repetidas com relação ao número de objetos e de ciclos em iterações diferentes, como discutido acima, e estas estão entre as soluções não dominadas, adota-se como solução a que apresentar o menor número de padrões de corte.

A Tabela 3 mostra todas as soluções não dominadas encontradas para cada valor de  $\beta$  para o exemplar A5P-03. Para representar a solução do PCE o valor de  $\beta$  é preenchido com o símbolo “-”. O gráfico da Figura 3 mostra a relação de dominância entre estas soluções. Note na Tabela 3 que há apenas uma solução não dominada para cada  $\beta$ , porém isto foi apenas uma coincidência como pode ser visto nas Tabelas 4(a) e 4(b).

Obj	Ciclos	Np	$\beta$
135	12	8	-
134	9	7	30%
139	10	6	50%
143	9	6	80%
137	10	6	100%

Tabela 3: Soluções não dominadas do A5P-03 para cada  $\beta$ .

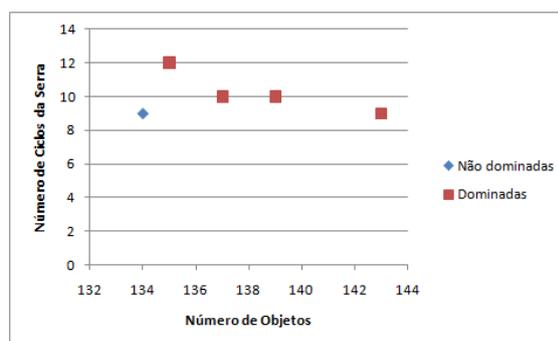


Figura 3: Relação de dominância entre as soluções não dominadas do A5P-03 de cada  $\beta$ .

As Tabelas 4(a) e 4(b) mostram os resultados obtidos com o AFM-P e a prática da Fábrica V para os lotes simples e duplos/triplos, respectivamente. Apenas as soluções não dominadas para cada exemplar são exibidas. Nos exemplares dos lotes simples o AFM-P apresentou soluções melhores que a indústria, no que diz respeito ao número de ciclos e objetos, em 9 de um total de 22 exemplares (A5P-03, A5P-20, A5P-25, A4P-12, A3P-12, A3P-20, Cmd-12, Cmd-15 e Crd-03). Em 6 exemplares dos lotes simples a Fábrica V e o AFM-P empataram (A5P-12, A5P-15, A4P-15, Cmd-03, Crd-12 e Crd-15) e em 3 exemplares (A4P-03, A4P-25 e A3P-03) o AFM-P apresentou soluções não dominadas em relação às soluções da indústria. Veja por exemplo que o AFM-P apresenta uma solução para o A3P-03 com 8 objetos a menos que a Fábrica V, porém esta consegue para este mesmo exemplar uma solução com 2 ciclos a menos, logo não é possível determinar qual destas duas soluções é a melhor. Note que nem sempre uma solução com menos padrões de corte implica em menos ciclos da serra. No caso do exemplar A5P-15, por exemplo, o algoritmo AFM-P e a Fábrica V apresentam soluções com o mesmo número de ciclos e objetos porém a indústria em questão utiliza 1 padrão a menos que o AFM-P.

(a) Lotes Simples					(b) Lotes Duplos/Triplos				
Exemplar	AFM-P				Fábrica V				
	Obj	Ciclos	Np	$\beta$	Obj	Ciclos	Np		
A5P-03	134	9	7	30%	134	11	7		
A5P-12	11	3	2	-	11	3	2		
A5P-15	57	17	7	30%	57	17	6		
A5P-20	31	12	6	100%	32	14	8		
A5P-25	4	2	2	100%	5	4	3		
A4P-03	122	11	6	-	124	10	5		
	128	10	6	50%					
	137	9	6	80%					
A4P-12	11	3	2	100%	12	3	2		
A4P-15	55	16	6	100%	55	16	6		
A4P-20	28	12	9	80%	27	12	6		
A4P-25	4	2	2	100%	3	3	3		
A3P-03	118	9	5	-	126	7	3		
A3P-12	15	3	2	-	15	4	2		
A3P-15	64	18	6	-	63	18	5		
A3P-20	29	11	9	100%	29	13	6		
A3P-25	4	2	2	100%	3	2	1		
Cmd-03	124	7	2	-	124	7	2		
Cmd-09	7	3	3	50%	7	2	1		
	10	2	2	80%					
Cmd-12	46	12	6	-	46	13	6		
	48	11	6	80%					
	45	14	10	100%					
Cmd-15	64	16	4	-	64	18	3		
Crd-03	72	5	3	-	74	5	2		
Crd-12	24	6	3	100%	24	6	2		
Crd-15	46	12	2	-	46	12	2		
A5P_Cmd-03	256	18	9	30%	258	18	9		
	261	17	9	50%					
	264	16	8	80%					
A5P_Cmd-09	10	3	3	50%	9	3	2		
A5P_Cmd-12	55	13	6	80%	57	16	8		
A5P_Cmd-15	120	33	9	100%	121	35	9		
A5P_Crd-03	203	16	12	30%	208	16	9		
	204	15	11	30%					
	205	14	11	50%					
	220	13	10	80%					
A5P_Crd-12	34	9	4	-	35	9	4		
A5P_Crd-15	103	31	11	-	103	29	8		
Cmd_Crd-03	191	13	7	30%	198	12	4		
	193	12	7	80%					
Cmd_Crd-12	70	18	10	80%	70	19	8		
	72	17	5	100%					
Cmd_Crd-15	110	30	6	-	108	30	5		
A5P_A4P_A3P-03	374	23	11	-	384	25	12		
A5P_A4P_A3P-12	35	8	2	-	37	9	9		
A5P_A4P_A3P-15	172	45	7	-	177	49	10		
A5P_A4P_A3P-20	83	31	12	80%	88	37	18		
A5P_A4P_A3P-25	10	6	3	80%	10	7	5		

Tabela 4: Resultados AFM-P × Fábrica V

O AFM-P foi melhor que a Fábrica V em 12 exemplares de um total de 15 de lotes duplos e triplos. Os únicos exemplares em que a indústria apresentou soluções melhores foram: A5P\_Cmd-09, A5P\_Crd-15 e Cmd\_Crd-15. Observe que para o exemplar A5P\_A4P\_A3P-03 o AFM-P encontrou uma solução com 10 objetos e 2 ciclos a menos que a Fábrica V. No exemplar A5P\_A4P\_A3P-20, que possui a maior demanda e o maior número de itens dentre todos os exemplares, o AFM-P obteve uma solução com 5 objetos e 6 ciclos a menos que a indústria. Note ainda no exemplar A5P\_Crd-03 que o AFM-P gera um conjunto de 4 soluções eficientes, permitindo ao decisor escolher qual solução utilizar dependendo do objetivo a ser priorizado.

Com base nestes resultados é possível dizer que o AFM-P mostrou-se mais vantajoso quando aplicado aos lotes duplos e triplos, que são os lotes compostos por mais itens e com a demanda total mais alta. Logo, o AFM-P tem maior escopo para fazer um balanceamento entre o número de objetos e ciclos da serra em cenários que envolvam muitos itens e demanda alta. Mais detalhes sobre o estudo computacional realizado podem ser obtidos em Martins (2010).

## 5. Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho foi apresentado um algoritmo (AFM-P) para resolver o problema de corte de estoque bidimensional considerando dois objetivos conflitantes: minimizar número total de objetos e o número total de ciclos da serra. O algoritmo AFM-P foi testado com dados reais de uma fábrica de móveis característica do setor com o intuito de analisar o funcionamento do algoritmo e avaliar qualidade das soluções por ele obtidas com relação à solução praticada pela fábrica.

Ao realizar uma análise mais detalhada do AFM-P para alguns exemplares foi possível

fazer algumas observações interessantes sobre seu comportamento. Nem sempre a geração de colunas durante a resolução do PCE-R (10)-(15) melhora a solução corrente, sendo que em alguns casos somente a reotimização já é capaz de encontrar soluções melhores. Uma possível maneira de gerar novas colunas para o PCE-R a cada iteração, e assim gerar padrões que possam aproveitar melhor a capacidade da máquina mantendo um compromisso com o número de objetos cortados, é fazer uma reformulação do problema (10)-(15) para que as variáveis duais associadas às restrições de frequência mínima possam ser incorporados no subproblema *price*. Uma proposta neste sentido é apresentada por Vanderbeck (2000) considerando a minimização do número de padrões de corte diferentes.

Uma outra observação interessante feita durante a análise do AFM-P é que impor a utilização de 30% da capacidade da serra ( $\beta = 30\%$ ) não permitiu melhorar a solução do PCE para o exemplar A3P-20, isto porque com valores pequenos de  $\beta$  a maioria das soluções  $x_j$  (senão todas), já estão acima de *Freq\_Min*. Outros critérios para a definição de *Freq\_Min* podem contornar esta situação.

Comparando os resultados do algoritmo proposto com a prática da Fábrica V é possível notar que o AFM-P conseguiu encontrar soluções próximas e, na maioria das vezes melhores que às praticadas na fábrica, no que diz respeito ao número de ciclos e objetos. Além disso, com base nestas soluções, é possível constatar que o AFM-P cumpre o seu objetivo de fazer um balanceamento entre o número de objetos e de ciclos da serra de forma a encontrar a maior variedade possível de soluções mantendo o compromisso entre estes dois objetivos. Este conjunto de soluções não dominadas permite que o decisor escolha a melhor opção para um determinado momento.

### Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq, à FAPESP e à FUNDUNESP pelo apoio financeiro, e à Fábrica V por ter cedido os dados usados neste trabalho.

### Referências

- Alves, C. e Carvalho, J.M.V. (2008), New lower bounds based on column generation and constraint programming for the pattern minimization problem, *Computers and Operations Research*, 36, 435-453.
- Arenales, M.N., Morabito, R. e Yanasse, H.H. (2004), Problemas de Corte e Empacotamento, *Anais do XXXVI SBPO - SOBRAPO*, Mini-curso, 2690-2769.
- Chu, C. e Antonio, J. (1999), Approximation algorithms to solve real-life multicriteria cutting stock problems, *Operations Research*, 47, 495-508.
- Deb, K., (2004) *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*, England: John Wiley & Sons Ltd.
- Diegel, A., Miller, G., Montocchio, E., Van Schalkwyk, S. e Diegel, O. (2006), Enforcing minimum run length in the cutting stock problem, *European Journal of Operational Research*, 171, 708-721.
- Faccio, A.P. e Rangel, S. (2009), Geração de padrões de corte  $n$ -grupos para a indústria moveleira, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 27, 41-57.
- Foerster, H. e Washer, G. (2000), Pattern Reduction in one-dimensional cutting stock problem, *International Journal of Production Research*, 38, 1657-1676.
- Gilmore, P.C. e Gomory, R.E. (1961), A linear programming approach to the cutting-stock problem, *Operations Research*, 9, 849-859.
- Gilmore, P.C. e Gomory, R.E. (1965), Multistage cutting stock problems of two and more dimensional, *Operations Research*, 14, 1045-1074.
- Haessler, R.W. (1975), Controlling Cutting Pattern Changes in One-Dimensional Trim Problems, *Operations Research*, 23, 483-493.

- Martins, A.T.**, (2010) *Estratégias para a redução de ciclos da serra no problema de corte de estoque na indústria moveleira*. Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP.
- Moretti, A.C. e Salles Neto, L.L.** (2008), Nonlinear cutting stock problem model to minimize the number of different patterns and objects, *Computational and Applied Mathematics*, 27, 61-78.
- Mosquera, G.P. e Rangel, S.** (2007), Redução de ciclos da serra no problema de corte de estoque bidimensional na indústria de móveis, *Anais do XXX CNMAC*.
- Ranck R.Jr.**, (2008) *Desenvolvimento de alguns métodos de solução para o problema de redução de ciclos da serra*. Dissertação de Mestrado, INPE.
- Rangel, S. e Figueiredo, A.** (2008), O problema de corte de estoque em indústria de móveis de pequeno e médio portes. *Pesquisa Operacional*. v. 28, n. 3, p. 451-472.
- Umetani, S., Yagiura, M. e Ibaraki, T.** (2006), One-Dimensional Cutting Stock Problem with a Given Number of Setups: A Hybrid Approach of Metaheuristics and Linear Programming, *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, 5, 43-64.
- Vanderbeck, F.** (2000), Exact algorithm for minimizing the number of setups in the one-dimensional cutting stock problem. *Operations Research*, 48, 915-926.
- Vasko, F.J., Newhart, D.D., Stott JR, K.L. e Wolf, F.E.** (2000), Fiddler on the Roof: Balancing Trim Loss and Setups, *OR Insight*, 13, 9-14.
- Wang, P. e Waescher, G.** (Eds.) (2002), Special issue on cutting and packing. *European Journal of Operational Research* 141(2).
- Waescher, G. e Gau, T.** (1996) Heuristics for the Integer One-dimensional Cutting Stock Problem: a computational study. *OR Spektrum*. v. 18, p. 131-144.
- Yanasse, H.H.** (2008) A note on the minimization of the number of cutting cycles problem. *Livro de resumos do XI SPOLM*. v. 1, p. 24-24.
- Yanasse, H.H., Harris, R.G. e Zinober, A.S.I.** (1993), Two-dimensional cutting stock with multiple stock sizes, *Journal Operations Research Society*, 42, 673-683.
- Yanasse, H.H. e Limeira, M.S.** (2006), A hybrid heuristic to reduce the number of different patterns in cutting stock problems. *Computers and Operations Research*, 33, 2744-2756.
- Yanasse, H.H. e Morabito, R.** (2008), A note on linear models for two-group and three-group two-dimensional guillotine cutting problems, *International Journal of Production Research* 46, 6189-6206.