

PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE DE ATITUDE DE UM SATÉLITE CONSIDERANDO O EFEITO DE SLOSHING USANDO O MÉTODO LQR

Alain Giacobini de Souza

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE /DMC
Avenida dos Astronautas, 1758 – São José dos Campos, SP, Brasil
alaingiacobini@gmail.com

Luiz Carlos Gadelha de Souza

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE /DMC
Avenida dos Astronautas, 1758 – São José dos Campos, SP, Brasil
gadelha@dem.inpe.br

Resumo: *O projeto do Sistema de Controle de Atitude (SCA) de satélites se torna mais complexo quando este possui componentes tais como: painéis flexíveis, antenas e/ou tanques com combustível líquido. Todos esses componentes introduzem perturbações que afetam tanto a dinâmica do satélite como o desempenho do seu SCA. Portanto, torna-se de extrema importância levar em consideração tais efeitos no projeto do SCA de satélites rígido-flexíveis. Além disso, embora as vibrações provenientes de tais componentes possam ser suprimida rapidamente, tais perturbações podem introduzir um erro de apontamento, resultando na necessidade de um tempo mínimo de aquisição de atitude. Por outro lado, as manobras rápidas de atitude podem excitar modos flexíveis e/ou líquidos, implicando na perda da precisão requerida pela missão. Sabe-se que uma forma de amenizar tais problemas é projetar controladores com uma banda passante pequena o que pode implicar em manobras de atitude lentas incompatíveis com os requisitos da missão. Neste artigo projeta-se um SCA para um satélite rígido-flexível com rotação em um plano, considerando os efeitos do movimento de um líquido (slosh) existente dentro de um tanque parcialmente preenchido. Aplica-se o método do Regulador Linear Quadrático (LQR) o qual apresenta um bom desempenho em controlar tanto a parte rígida do movimento como o movimento de líquido. Entretanto, observa-se que o controlar LQR não apresenta bom desempenho quando este é empregado para controlar o sistema na sua forma não linear. Na sequência deste trabalho pretende-se aplicar a técnica do Regulador Linear Gaussiano (LQG) o qual é mais realista uma vez que permite considerar os ruídos e perturbações no projeto do controlador.*

Palavras Chave: *Dinâmica de Sloshing, LQR, Sistema de Controle de Atitude.*

1 Introdução

Hoje em dia muitas estruturas espaciais (foguetes, satélites) contêm reservatórios de líquidos que chegam a representar mais de 40% da massa inicial do sistema (Sidí, 1997), o que gera uma necessidade de um estudo mais detalhado sobre os fenômenos e consequências causados por se ter uma grande massa de líquido retida dentro de um recipiente em um corpo móvel.

O principal fenômeno que ocorre é em determinado momento quando o recipiente que contêm o combustível está parcialmente preenchido e o sistema está submetido a uma aceleração translacional, que faz com que grande parte desse fluido se desloque dentro do tanque, de forma não controlável, causando um fenômeno conhecido como efeito de sloshing.

A dinâmica desse efeito vem sendo estudado há muito anos, tanto pelas indústrias aero espaciais, bem como nas indústrias tradicionais de consumo, com o objetivo de analisar as consequências do sloshing na estrutura rígida-flexível do sistema.

2 Sloshing

O movimento livre da superfície de um líquido, que preenche parcialmente um compartimento é chamado de *sloshing*. O movimento livre efetuado por esta camada do líquido é um movimento oscilatório que depende da forma do tanque, da aceleração da gravidade ou da aceleração axial do tanque. Como representante da maior parte da massa total do sistema é de se aceitar que quando oscilar a massa de líquido o centro de massa do corpo também oscila, perturbando assim a parte rígida-flexível do veículo em estudo.

Devido a sua complexidade, a dinâmica do sloshing é usualmente representada por modelos mecânicos análogos que descrevem e reproduzem com certa fidelidade as ações e reações devido a forças e torques atuantes no

sistema. A principal vantagem de se trocar o modelo do fluido por um modelo equivalente, uma massa pontual oscilante (Ibrahim, 2005), consiste na simplificação da análise das equações do movimento, quando inserido a dinâmica do corpo rígido, comparada com as equações dinâmicas do fluido.

O modelamento do *sloshing* teve início na década de sessenta a partir do artigo de Abramson (1961), não sofrendo muitas modificações desde então. Devido à complexidade de se criar analiticamente um modelo para o fluido que se move livremente dentro de um recipiente fechado, recorre – se para um sistema simplificado, levando em conta os seguintes critérios:

- (1) Pequenos deslocamentos, pequenas velocidades e pouco escoamento do líquido na superfície livre.
- (2) Tanque rígido.
- (3) Fluido não viscoso, incompressível e homogêneo.
- (4) Campo de fluxo não rotacional.

Com estas condições a dinâmica do *sloshing* pode se aproximar para um sistema mecânico composto por um sistema composto de massa-mola, ou por um conjunto de pêndulos (Neste presente artigo será usado o análogo mecânico do tipo “pêndulo”).

3 Equações de movimento

Para modelar um sistema com *sloshing*, foi escolhido um modelo de satélite com tanque esférico apresentado no livro *Spacecraft Dynamics and Control* (Sidi, 1997). Considerando o análogo mecânico tipo pêndulo e apenas o primeiro modo de oscilação. As equações do movimento são obtidas através da formulação lagrangiana para quasi-coordenadas e para coordenada generalizada (Lemos, 2007), ainda se admite uma dissipação de energia interna (função de dissipação de Rayleigh).

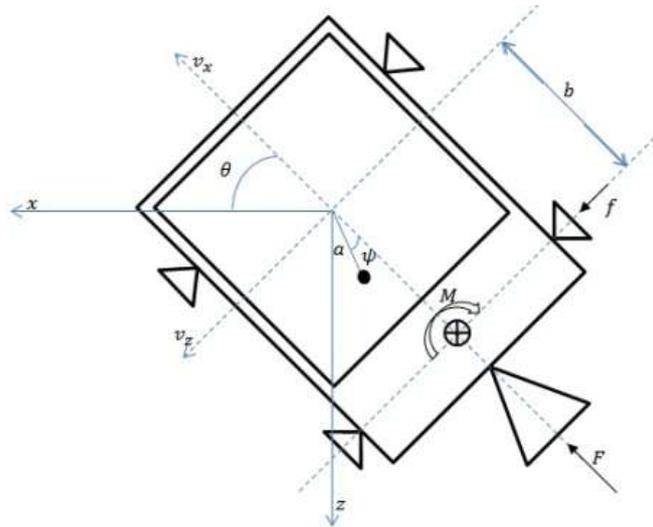


Figura 1. Modelo com análogo tipo pêndulo

Considera-se o satélite como sendo um corpo rígido, que se move em apenas em um plano, como o indicado na Fig.1. Admite-se que a força transversal f , gerada pelo jato lateral, e o momento de *pitching* M (sendo estas as variáveis de controle), e b como sendo a distância entre o jato lateral com o centro do tanque. A massa do satélite e o momento de inércia, sem considerar o combustível, são dados por m e I respectivamente. A massa de combustível e o seu momento de inércia são dados por m_f e I_f . Considera-se também a força F do jato inferior como sendo constante.

As componentes, radial e transversal da velocidade do centro do tanque são dadas por v_x e v_z respectivamente. A variável θ representa o ângulo de atitude do satélite (corpo rígido) em respeito à base de referência, ψ o ângulo formado entre a haste do pendulo com o eixo de referência, representando o *slosh*. Com relação aos torques, a variável τ_l representa as forças de controle (devido aos jatos laterais) e τ_r representa torques de

controle (torque devido a rodas de reações). Os parâmetros m_f , I_f e a dependem da forma do tanque, das características químico-físicas do combustível e de sua taxa de vazão.

Considerando como coordenadas generalizadas: V representando a velocidade linear, ω representando a velocidade angular do corpo rígido, ψ o deslocamento angular do pendulo e $\dot{\psi}$ a velocidade angular do pendulo. A haste do pendulo possui comprimento a .

As equações de Lagrange para o movimento são:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right) + \omega^\times \frac{\partial L}{\partial V} = \tau_t \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega} \right) + \omega^\times \frac{\partial L}{\partial \omega} + V^\times \frac{\partial L}{\partial V} = \tau \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\psi}} = 0 \quad (3)$$

Em que L é a lagrangiana do sistema, R função de dissipação de Rayleigh, ω^\times é a matriz antissimétrica da velocidade angular do corpo, V representa a velocidade linear e V^\times é a matriz antissimétrica da velocidade linear.

Assumido que R , τ_r , τ_t , ω , V sejam da forma:

$$R = \frac{1}{2} \varepsilon \dot{\psi}^2; V = \begin{bmatrix} v_x \\ 0 \\ v_z \end{bmatrix}; \omega = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}; \tau_t = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ f \end{bmatrix}; \tau_r = \begin{bmatrix} 0 \\ M + fb \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

A energia cinética deste modelo é representada por:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_f \dot{r}_f^2 + \frac{1}{2} I_f (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (5)$$

Desprezando a componente da energia potencial, a energia cinética total fica sendo a Lagrangiana do sistema em estudo ($T = L$).

Substituindo as equações (4) e (5) em (1), (2) e (3) e efetuando as devidas operações tem-se:

$$(m+m_f)(\dot{v}_x + v_z \dot{\theta}) + mb \dot{\theta} + m_f a (\ddot{\psi} + \ddot{\theta}) \text{sen}(\psi) + m_f a (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \cos(\psi) = F \quad (6)$$

$$(m+m_f)(\dot{v}_z - v_x \dot{\theta}) + m_f a (\ddot{\theta} + \ddot{\psi}) \cos(\psi) - m_f a (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \text{sen}(\psi) mb \ddot{\theta} = f \quad (7)$$

$$(I_f + mb^2) \ddot{\theta} + mb(\dot{v}_z - v_x \dot{\theta}) - \varepsilon \dot{\psi} = M + bf \quad (8)$$

$$(m_f a^2 + I_f)(\ddot{\theta} + \ddot{\psi}) + m_f a ((\dot{v}_x + v_z \dot{\theta}) \text{sen}(\psi) + (\dot{v}_z - v_x \dot{\theta}) \cos(\psi)) + \varepsilon \dot{\psi} = 0 \quad (9)$$

Assim sendo, admite-se que $a_x = \dot{v}_x + v_z \dot{\theta}$, $a_z = \dot{v}_z - v_x \dot{\theta}$ substituindo e isolando em (6) e (7):

$$a_x = \frac{F - mb \dot{\theta} - m_f a (\ddot{\psi} + \ddot{\theta}) \text{sen}(\psi) - m_f a (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \cos(\psi)}{m + m_f} \quad (10)$$

$$a_z = \frac{f - m_f a (\ddot{\theta} + \ddot{\psi}) \cos(\psi) + m_f a (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \sin(\psi) - m b \ddot{\theta}}{m + m_f} \quad (11)$$

Realocando as equações (10) e (11) nas equações (8) e (9) chega-se à:

$$\ddot{\theta}(I_f + m^*(a^2 - b a \cos(\psi))) + \ddot{\psi}(I_f + m^* a^2) + (a^* F - m^* a b \dot{\theta}^2) \sin(\psi) + \varepsilon \dot{\psi} = -a^* f \cos(\psi) \quad (12)$$

$$\ddot{\theta}(I + m^*(b^2 - b a \cos(\psi))) - m^* a b \cos(\psi) \ddot{\psi} + m^* b a (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \sin(\psi) - \varepsilon \dot{\psi} = M + b^* f \quad (13)$$

em que $b^* = \frac{b m_f}{m + m_f}$, $m^* = \frac{m m_f}{m + m_f}$ e $a^* = \frac{m_f a}{m + m_f}$

Para linearizar este sistema consideram-se pequenos deslocamentos em torno do ponto de equilíbrio, sem perda de generalidade, pode ser considerado valores bem próximos à zero (Reyanoglu et al, 2011).

Desta forma tem-se:

$$\ddot{\theta}(I_f + m^*(a^2 - b a)) + \psi(I_f + m^* a^2) + a^* F \psi + \varepsilon \dot{\psi} = -a^* f \quad (14)$$

$$\ddot{\theta}(I + m^*(b^2 - b a)) - m^* a b \psi - \varepsilon \dot{\psi} = M + b^* f \quad (15)$$

Na representação de espaço-estado ($\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(m^* a b)(a^* F)}{\Delta} & \frac{I_f + m^* a (a - b)}{\Delta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-m^* a b (I + m^* (b^2 - a b))}{\Delta} & \frac{-(I + I_f + m^* (a - b)^2) \varepsilon}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{(I_f + m^* a^2) b^* - m^* a b a^*}{\Delta} & \frac{I_f + m^* a^2}{\Delta} \\ 0 & 0 \\ \frac{-((I + m^* (b^2 - a b)) a^* - (I_f + m^* (a^2 - b a)) b^*)}{\Delta} & \frac{I_f + m^* (a^2 - b a)}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ M \end{bmatrix} \quad (16)$$

em que $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]' = [\theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}]'$ é o vetor de estado.

4 Regulador Quadrático Linear (LQR)

Assumindo que a planta linear seja dada no espaço de estados como sendo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \quad (17)$$

em que \mathbf{x} representa o vetor de estados, \mathbf{A} é a chamada matriz de estado, \mathbf{B} é a matriz de entrada e \mathbf{u} é a lei de controle (Ogata, 2003), dada por:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{Kx}(t) \quad (18)$$

em que \mathbf{K} é a matriz ganho.

Esta técnica de controle consiste em minimizar o funcional (eq.(19)), e encontrar soluções definida positiva para equação algébrica de Riccati (ERA) associada eq.(20), (Kirk, 1998).

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t(t_f) \mathbf{H} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^t(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^t(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \quad (19)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{P}(t) \mathbf{A} - \mathbf{A}^t \mathbf{P}(t) - \mathbf{Q} + \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^t \mathbf{P}(t) \quad (20)$$

Sendo que t_f é fixo, \mathbf{Q} e \mathbf{H} são matrizes reais semi-definidas positivas, \mathbf{R} é matriz definida real simétrica positiva e \mathbf{P} é a matriz solução da EAR. E o sinal de controle ótimo pode ser escrito como:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^t \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (21)$$

Assim substituído a eq.(21) na eq.(18), tem-se:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^t \mathbf{P}(t) \quad (22)$$

que é o ganho ótimo do sistema em estudo.

5 Simulação

Em primeiro será determinado um ganho ótimo para o modelo linearizado, e em seguida será analisada a eficiência deste ganho no sistema não linear tendo como comparação o sistema linearizado sujeito as mesmas alterações. Devido à facilidade algébrica usa-se, comumente, o modelo linearizado para se calcular a matriz ganho, calculado pelo método LQR, e em seguida se insere este ganho no sistema não linear.

As simulações aqui apresentadas possuem os seguintes parâmetros físicos (Reyanoglu et al, 2011): $m = 600\text{kg}$, $m_f = 100\text{kg}$, $I = 720\text{kg} / \text{m}^2$, $I_f = 90\text{kg} / \text{m}^2$, $a = 0.2\text{m}$, $b = 0.3\text{m}$, $F = 2300\text{N}$, $\varepsilon = 0.19\text{kgm}^2 / \text{s}$.

5.1 Calculo do ganho

Utilizando o sistema, dado pela Equação (16), é possível determinar a lei de controle usando o método LQR manipulando o valor das matrizes peso \mathbf{Q} e \mathbf{R} . Neste artigo será usado os seguintes valores para as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} , calculados empiricamente.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \quad (24)$$

com esses valores de \mathbf{Q} e \mathbf{R} tem-se a seguinte ganho ótimo \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -2.5456 & -5.2050 & -0.66065 & -12.388 \\ 316.13 & 841.20 & -283.83 & -115.81 \end{bmatrix} \quad (25)$$

5.2 Análise do desempenho do LQR

Uma vez foi determinado o ganho, submete-se a planta linear e a linearizada a este ganho e em seguida os sistemas (eq. (6-9) e eq.(16)) são integrados, usando o método Runge-Kutta de quarta ordem com as seguintes condições iniciais: $\theta = 2^\circ$, $\dot{\theta} = 0.57^\circ / \text{s}$, $\psi = 30^\circ$ e $\dot{\psi} = 0^\circ$. Para o caso não linear também serão considerados os seguintes valores iniciais para as velocidades $v_x = 350\text{m/s}$ e $v_z = 30\text{m/s}$. Com isso a propagação dos modelos no tempo fica sendo:

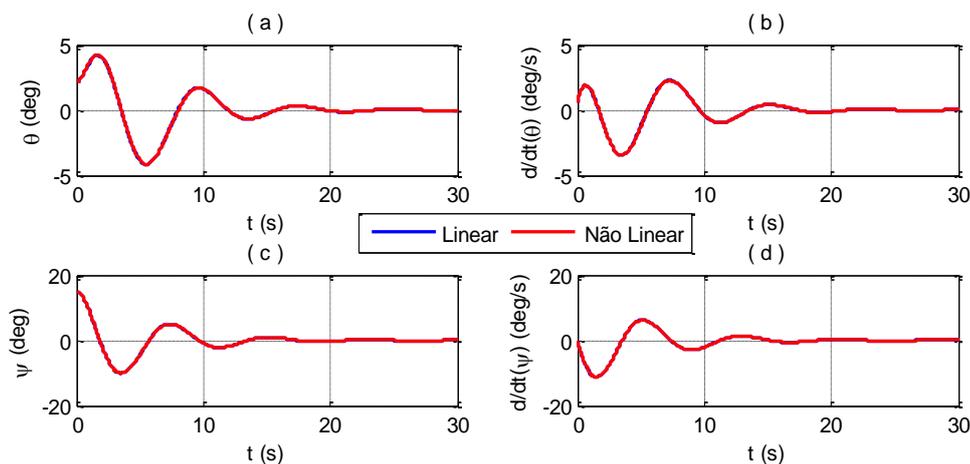


Figura 2. Comparação entre o modelo linear com o não linear

Na figura 2 (a) e (b) correspondem à atitude do satélite, na figura 2 (c) e (d) correspondem à oscilação (deslocamento angular e velocidade angular) do pêndulo que corresponde à dinâmica de *slosh*. Com estas condições os dois sistemas são controlados de forma idêntica tanto para a atitude quanto para a estabilização da dinâmica do *slosh*.

Agora alterado as condições iniciais para $\theta = 360^\circ$, $\dot{\theta} = 0.57^\circ/s$, $\psi = 0^\circ$ e $\dot{\psi} = 0^\circ$, tem-se:

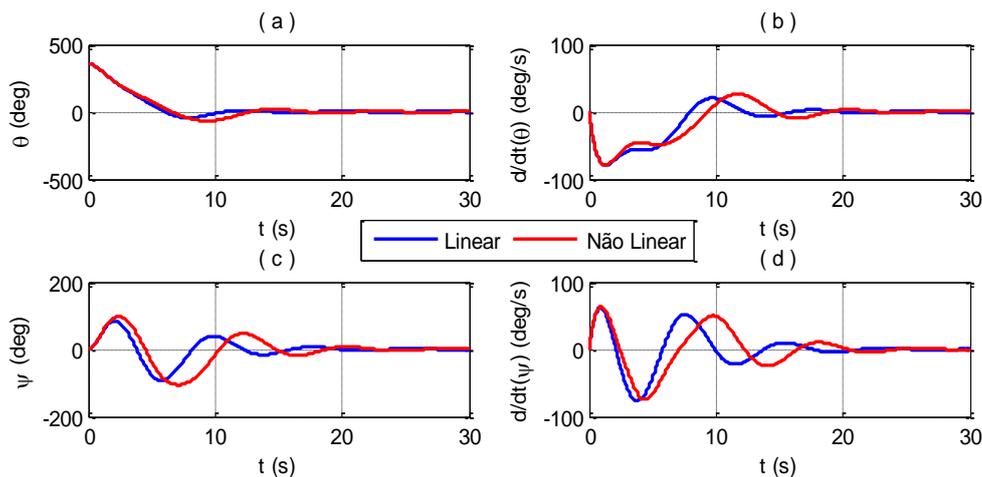


Figura 3. Comparação entre o modelo linearizado com o não linear

Com esta nova configuração percebe-se que o aumentar da condição inicial do ângulo de atitude θ , interfere na não linearidade causada por ele no sistema e assim gerando um atraso no sistema não linear, fazendo com que tenha uma defasagem com relação ao sistema linear, mas mesmo assim o ganho encontrado foi capaz de controlar a atitude (figura 3 (a) e (b)) e estabilizando a dinâmica do *slosh* (figura 3 (c) e (d)).

Agora alterado as condições iniciais para $\theta = 0^\circ$, $\dot{\theta} = 0.57^\circ/s$, $\psi = 360^\circ$ e $\dot{\psi} = 0^\circ$, tem-se:

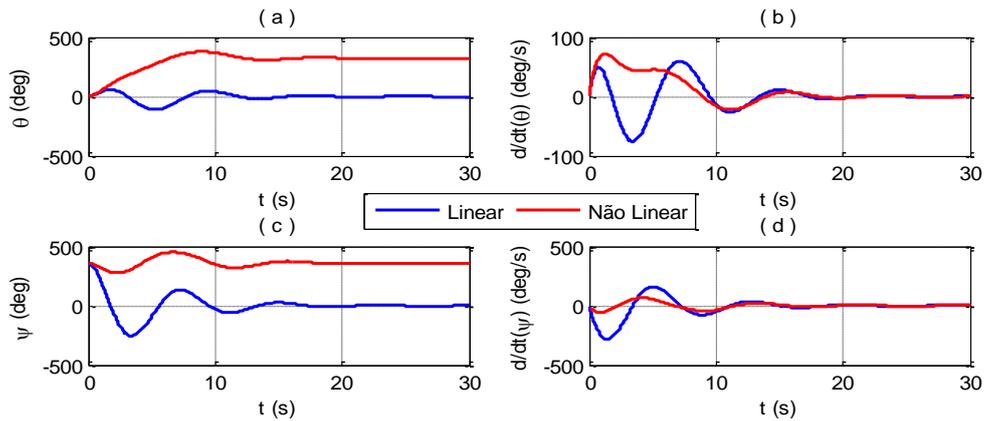


Figura 4. Comparação entre o modelo linearizado com o não linear

Com esta nova configuração percebe-se que o aumentar da condição inicial do ângulo de oscilação do pendulo que representa o *slosh*, ψ , interfere na não linearidade causada por ele no sistema e assim fazendo que sistema não linear fique não controlado, neste caso o ganho calculado não foi capaz de controlar a atitude (figura 4 (a)) e o deslocamento angular do pendulo que representa o *slosh* (figura 4 (c)), em contra partida ele consegue controlar a velocidade angular da atitude (figura 4 (b)) e do pendulo que representa o *slosh* (figura 4 (d)).

Agora alterado as condições iniciais para $\theta = 360^\circ$, $\dot{\theta} = 0.57^\circ/s$, $\psi = 360^\circ$ e $\dot{\psi} = 0^\circ$, tem-se:

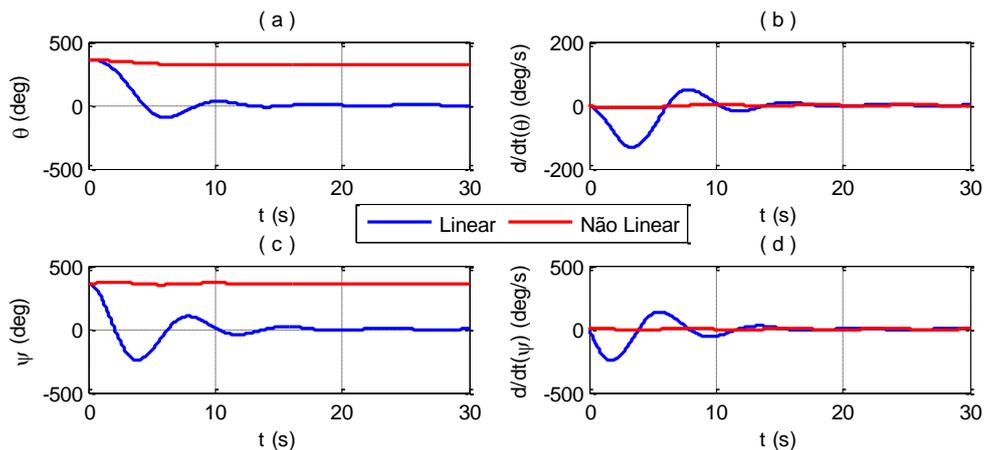


Figura 5. Comparação entre o modelo linearizado com o não linear

Com esta nova configuração percebe-se que o aumentar da condição inicial do ângulo de oscilação do pendulo que representa o *slosh*, ψ e do ângulo de atitude θ , o sistema não linear com este ganho não é controlado. O ganho calculado não foi capaz de controlar a atitude (figura 5 (a)) e o deslocamento angular do pendulo que representa o *slosh* (figura 5 (c)), em contra partida ele consegue controlar a velocidade angular da atitude (figura 5 (b)) e do pendulo que representa o *slosh* (figura 5 (d)).

6 Conclusão

Neste artigo apresenta-se o projeto de um SCA para um satélite rígido-flexível considerando a perturbação devido ao movimento do líquido (*slosh*) nas equações dinâmicas do movimento. Na modelagem do sistema o movimento do líquido é introduzido por meio de um método que usa um análogo mecânico representado por um pendulo com uma massa em sua ponta. As equações de movimento são obtidas inicialmente na sua forma não linear e através de uma mudança de variáveis chega-se a um sistema linear. Este ultimo é usado para projetar o sistema de controle de atitude do satélite rígido-flexível por meio da técnica do Regulador Linear Quadrático. As simulações mostraram que o controlador LQR tem um bom desempenho no controle da atitude e do movimento do líquido quando o efeito do movimento do líquido (*slosh*) é pequeno. Além disso, observou-se que o controlador tem sua robustez degradada quando os termos não lineares associados ao movimento do líquido são intensificados. Na sequência deste trabalho pretende-se aplicar a técnica do Regulador Linear Gaussiano (LQG) o qual é mais realista uma vez que permite considerar os ruídos e perturbações no projeto do controlador.

Referencias

- Ibrahim, R.A., 2005, "Liquid sloshing dynamics, theory and applications", Cambridge university press, New York.
- Kirk, D.E., 1998, "Optimal control theory, an introduction", Dover publications, Mineola, New York.
- Lemos, N. A., 2007, "Mecânica Analítica", Ed. livraria da física, São Paulo, Brasil.
- Ogata, K., 1997, "Modern control engineering", Prentice Hall, New Jersey
- Reyhanoglu, M., et al, 2011, "Advances in spacecraft technologies", Jason Hall, India
- Sidi, M. J., 1997, "Spacecraft Dynamics and Control", Cambridge university press, New York, USA.