ONDAS INERCIAIS NUM ÂNULO ESFÉRICO ESPESSO

Kioshi Hada
Instituto de Pesquisas Espaciais - MCT
12201 - S.J. Campos - São Paulo

Stanley Jacobs
University of Michigan - USA

INTRODUÇÃO: Ondas inerciais são ondas devido estritamente à rotação e são governadas por uma equação hiperbólica com condições de contorno do tipo elítico. Portanto, é um problema mal posto e a sua solução é possível somente quando for possível usar separação de variáveis ou desprezar os movimentos radiais. Caso contrário o problema é considerado patológico (Stewartson e Rickard, 1969) e a solução do problema permaneceu em aberto na literatura científica desde 1989. Em vista dessa dificuldade matemática, propomos usar o método WKB assintótico e onde este método falhar usamos o método das coordenadas esticadas.

MODELO MATEMÁTICO E SOLUÇÃO: Ondas inerciais num fluido homogêneo incompressível ou barotrópico contido num ânulo esférico são governadas pela equação

$$\sigma^2 \nabla F - (\hat{k}.\ \nabla)\ F = 0 \tag{1}$$

com condição de contorno

$$\sigma^2\ \hat{R}.\ \nabla F - \hat{R}.\hat{k}\ (\hat{k}.\nabla F) + i\sigma\ (\hat{k} \times \hat{R}).\ \nabla F = 0 \tag{2}$$

onde σ é a frequência no intervalo $0 < |\sigma| < 1$, F é a pressão, $\hat{k}$ e $\hat{R}$ são vetores unitários nas direções $\vec{\Omega}$ e radiais, sendo $\vec{\Omega}$ a velocidade angular constante das massas. Usando os métodos citados acima, os autovalores são dados por

$$|\sigma| = \frac{n\pi + n \left[\frac{2a^2 - 1}{1 - a^2} \, \mathrm{SIN}^{-1} (a) + \frac{\pi \, a^2}{2(1-a^2)} + \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} \right]}{2n + 4k + 2|m| + 1 + 4|m|/n\pi} \tag{3}$$

onde n, k e $|m|$ são inteiros positivos, $m\sigma < 0$, $(2n + 4k + 2\,|m| + 1 - n\pi + 4|m|/n\pi)/n$ maior que o termo entre colchete na equação (3), a é o raio interno, $\ell - |m| = 2k + 2t + i$ sendo $i = 0$ ou $i = 1$ se n for par ou ímpar e $t = 1, 2, 3, \ldots$. Note que se $a \to 1$ (raio externo) temos $\ell = \infty$ e a equação (3) fica reduzida a

$$|\sigma| = \frac{|m|}{\ell^*(\ell^*+1)} \, , \; \ell^* (\ell^* + 1) = \frac{(2\ell' + 1)}{4} \left[(2\ell'+1) \left[1 + \frac{A}{\pi} \right] - (2\ell+1) \right] \tag{4}$$

onde A é o termo entre colchete na equação (3), ℓ' é dado por $n\pi = |\sigma| \, (2\ell'+1)$ e ℓ e ℓ^* são ordens do polinômio de legendre associado quando $a = 0$ e $a \to 1$, respectivamente. Em resumo, o aumento do tamanho do núcleo interno aumenta a frequência, especialmente quando o seu raio for grande. Nossos resultados concordam com os de Greenspan (64), Aldridge (72) e Wood (81).

REFERÊNCIAS

Aldridge, K.D. Mathematika 19, 163-168, 1972.

Greenspan, N.P., J. Fluid Mech., 20, 673-696, 1964.

Stewartson, K. e Rickard, J.A., J. Fluid Mech., 35, 759-773, 1969.

Wood, W.W., J. Fluid Mech., 105, 427-449, 1981.