CONTROLE ÓTIMO DE ESTOQUES DE PEÇAS SEMI-ACABADAS NUMA LINHA DE PRODUÇÃO COM TRÊS MÁQUINAS

Solon Venâncio de Carvalho
Rita de Cássia Meneses Rodrigues
Paulo Renato de Morais

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada - LAC
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Av. dos Astronautas, 1758 C. P. 515
12201-970 - São José dos Campos - SP
email: solon@lac.inpe.br

Resumo: *Considera-se a otimização de estoques de peças semi-acabadas numa linha de produção composta de três máquinas sujeitas a falhas. Uma política de controle deve decidir dinamicamente sobre a ativação ou a desativação de cada uma das duas primeiras máquinas de forma a controlar os estoques de peças semi-acabadas. Dois tipos de políticas são consideradas: políticas (s, S) que ativam ou desativam a primeira ou a segunda máquina em função do tamanho do estoque entre as máquinas e políticas que consideram o estado global do sistema. Utiliza-se um Modelo Markoviano de Decisão para obter uma política que minimiza o custo médio do sistema a longo prazo. Custos de ociosidade, de estocagem e de reativação das máquinas são considerados. Resultados numéricos são apresentados.*

Abstract: *We consider the optimization of in-process inventories in a serial production system consisting of three machines subject to failure. A policy must decide dynamically whether to activate each of the first two machines in order to control the in-process inventories. Two types of policies are compared: (s, S) policies that depend on the size of inventory between the machines and policies that consider the system's global state. A Markov Decision Model is used in order to obtain a policy that minimizes the system's long run average cost. We consider starvation costs, inventory holding costs and restarting costs. Some performance indicators are obtained by a post-optimality analysis of the model. Numerical results are presented.*

Keywords: Markov Decision Processes, inventory, manufacturing systems.

1 - Introdução

Considera-se a fabricação contínua de uma peça num sistema de produção composto por três máquinas (M_1, M_2 e M_3) separadas por estoques intermediários. A fabricação de cada peça exige um processamento pela máquina M_1 seguido de um processamento pela máquina M_2 e, finalmente, um processamento pela máquina M_3. Admitindo que as máquinas estão sujeitas a quebras, o problema tratado é o controle ótimo do estoque P_1 de peças semi-acabadas entre as máquinas máquinas M_1 e M_2 e do estoque P_2 de peças semi-acabadas entre as máquinas M_2 e M_3. Este controle é efetuado pelo bloqueio ou desbloqueio dinâmico da máquina M_1 ou da máquina M_2. A solução clássica deste problema consiste em procurar uma política de estoque do tipo (s, S) que prescreve o desbloqueio de uma máquina quando o nível do estoque por ela alimentado decresce até atingir o nível s e prescreve o bloqueio da máquina quando o nível de estoque cresce até atingir o nível S ($S > s$).

Em [Hwang e Koh 92] é apresentado um modelo markoviano para a obtenção de uma política (s, S) que minimiza o custo esperado a longo prazo do estoque de peças semi-acabadas entre duas máquinas. A estrutura de custos considerada compreende um custo de estocagem proporcional ao número de peças semi-acabadas em estoque, um custo de ociosidade incorrido sempre que a máquina M_2 não puder produzir por falta de peças semi-acabadas em estoque e custos de reativação das máquinas incorrido quando a máquina M_1 é reativada após um período de bloqueio ou quando a máquina M_2 é reativada após um período de ociosidade. Em [Carvalho et alli 93], utilizou-se o modelo de

Hwang e Koh, considerando políticas de controle que decidem sobre o bloqueio ou desbloqueio da máquina M_1 não apenas em função do tamanho do estoque intermediário, mas também em função do estado observado de cada máquina (em processamento, quebrada, bloqueada ou ociosa). Concluiu-se que, considerando estas políticas, pode-se obter um custo médio mínimo para o sistema menor que o obtido por Hwang e Koh.

2 - Descrição do modelo

Como durante o processamento de uma peça as máquinas estão sujeitas à quebra, o conjunto de estados possíveis para cada uma das máquinas M_1, M_2 e M_3 é:

$$E_M = \{ W, P, R \}$$

onde o estado W significa "em espera", o estado P significa "processando uma peça" e o estado R significa "em reparo". Note-se que uma máquina fica ociosa no estado W sempre que for bloqueada ou não dispor de peça semi-acabada no estoque para processar.

O estado de cada estoque é dado pelo número de peças em estoque. Considera-se que o tamanho máximo do estoque P_1 é N_1 e que o tamanho máximo do estoque P_2 é N_2. Para simplificar a implementação do modelo, considera-se ainda que a peça em processamento numa máquina pertence ao estoque que a provisiona. Assim, se houver uma peça em processamento na máquina M_2, esta peça é considerada no estoque P_1 e, se houver uma peça em processamento na máquina M_3, esta peça é considerada no estoque P_2.

Define-se m_1 como o estado da máquina M_1, m_2 como o estado da máquina M_2, m_3 como o estado da máquina M_3, p_1 como o estado do estoque P_1 e p_2 como o estado do estoque P_2. O espaço de estados do modelo, que contém as informações sobre as quais é tomada a decisão sobre o bloqueamento ou desbloqueamento da máquina M_1 e/ou da máquina M_2, é definido como:

$$
\begin{array}{lll}
E = \{ m_1, p_1, m_2, p_2, m_3) \ / & m_1, m_2 \in E_M,\ p_1 \in \{0, 1, ..., N_1\},\ p_2 \in \{0, 1, ..., N_2\}, & \\
 & \text{se } p_1 = N_1 & \text{então } m_1 = W, \\
 & \text{se } p_1 = 0 & \text{então } m_1 \neq W, \\
 & \text{se } p_1 = 0 \text{ ou } p_2 = N_2 & \text{então } m_2 = W, \\
 & \text{se } p_1 \neq 0 \text{ ou } p_2 = 0 & \text{então } m_2 \neq W, \\
 & \text{se } p_2 = 0 & \text{então } m_3 = W, \\
 & \text{se } p_2 \neq 0 & \text{então } m_3 \neq W
\end{array}
$$

onde as condições impostas aos estados garantem que o nível máximo de cada estado seja respeitado e que a produção não seja definitivamente interrompida.

O comportamento dinâmico do sistema é descrito pelas mudanças de estado ao longo do tempo. Cada vez que o sistema muda de estado, deve-se observar o novo estado atingido e decidir sobre o bloqueio ou desbloqueio das máquinas M_1 e/ou M_2 em função do estado observado. Cada ação é representada por um par ordenado (b_1, b_2), onde, para i=1,2, b_i = B prescreve o bloqueio da máquina M_i e b_i = D prescreve o desbloqueio da máquina M_i até a próxima observação do sistema. A máquina M_1 (resp. M_2) deve obrigatoriamente ser desbloqueada se o estoque P_1 (resp. P_2) estiver vazio e deve obrigatoriamente ser bloqueada se o estoque P_1 (resp. P_2) atingir seu limite máximo. Então, para cada estado $(m_1, p_1, m_2, p_2, m_3)$ pertencente a E, o espaço de ações possíveis é:

$$A(i)=\begin{cases}\{(D,D)\} & \text{se } p_1=0 \text{ e } p_2=0\\ \{(D,D),(D,B)\} & \text{se } p_1=0 \text{ e } 0<p_2<N_2\\ \{(D,B)\} & \text{se } p_1=0 \text{ e } p_2=N_2\\ \{(D,D),(B,D)\} & \text{se } 0<p_1<N_1 \text{ e } p_2=0\\ \{(D,D),(D,B),(B,D),(B,B)\} & \text{se } 0<p_1<N_1 \text{ e } 0<p_2<N_2\\ \{(D,B),(B,B)\} & \text{se } 0<p_1<N_1 \text{ e } p_2=N_2\\ \{(B,D)\} & \text{se } p_1=N_1 \text{ e } p_2=0\\ \{(B,D),(B,B)\} & \text{se } p_1=N_1 \text{ e } 0<p_2<N_2\\ \{(B,B)\} & \text{se } p_1=N_1 \text{ e } p_2=N_2\end{cases}$$

Uma política de controle estacionária para o sistema é uma função $f:E\rightarrow\bigcup_{i\in E}A(i)$ que a cada estado i associa uma ação pertencente a A(i). Sob uma política estacionária f, a ação f(i) deve ser tomada cada vez que o sistema for observado no estado i. Note que uma política que adota os níveis de controle (s_1, S_1) para o estoque P_1 e os níveis de controle (s_2, S_2) para o estoque P_2 é tal que

$$f(m_1,p_1,m_2,p_2,m_3)=\begin{cases}(D,D) & \text{se } m_1\neq W \text{ e } p_1-1<S_1 \text{ ou } m_1=W \text{ e } p_1-1\leq s_1\\ & \text{e se } m_2\neq W \text{ e } p_2-1<S_2 \text{ ou } m_2=W \text{ e } p_2-1\leq s_2\\ (D,B) & \text{se } m_1\neq W \text{ e } p_1-1<S_1 \text{ ou } m_1=W \text{ e } p_1-1\leq s_1\\ & \text{e se } m_2\neq W \text{ e } p_2-1\geq S_2 \text{ ou } m_2=W \text{ e } p_2-1>s_2\\ (B,D) & \text{se } m_1\neq W \text{ e } p_1-1\geq S_1 \text{ ou } m_1=W \text{ e } p_1-1>s_1\\ & \text{e se } m_2\neq W \text{ e } p_2-1<S_2 \text{ ou } m_1=W \text{ e } p_1-1\leq s_1\\ (B,B) & \text{se } m_1\neq W \text{ e } p_1-1\geq S_1 \text{ ou } m_1=W \text{ e } p_1-1>s_1\\ & \text{e se } m_2\neq W \text{ e } p_2-1\geq S_2 \text{ ou } m_2=W \text{ e } p_2-1>s_2\end{cases}$$

A abordagem utilizada neste trabalho não impõe nenhuma restrição ao tipo de política estacionária a ser utilizada. No entanto, para motivo de comparação, considera-se políticas do tipo mostrado acima.

Para cada máquina M_i (i=1,2,3), o tempo de processamento de uma peça, o tempo de funcionamento até uma quebra e o tempo de reparo são considerados variáveis aleatórias independentes e exponencialmente distribuídas com taxas β_i, λ_i e μ_i, respectivamente. Define-se $\Lambda_{ij}(a)$ como a taxa de transição do estado e_i ao estado e_j (e_i, $e_j \in E$) quando a última ação escolhida foi $a \in A(i)$. A Figura 2.1 mostra o algoritmo para a obtenção das taxas de transição $\Lambda_{ij}(a)$ que descrevem o comportamento do sistema.

Sob a hipótese de independência e exponencialidade dos tempos de processamento, dos tempos de funcionamento até uma quebra e dos tempos de reparo e com vistas a obter uma política de controle de custo mínimo, modela-se o sistema como um Processo Markoviano de Decisão a Tempo Contínuo. Para estes processos, dado que em um instante de decisão o sistema está no estado $i\in E$ e a ação $a\in A(i)$ foi escolhida, definem-se: $\tau(i,a)$ como o tempo esperado até o próximo instante de decisão, p(i,j,a) como a probabilidade que no próximo instante de decisão o estado seja j e C(i,a) como o custo esperado incorrido até o próximo instante de decisão.

A partir das taxas de transição $\Lambda_{ij}(a)$ obtém-se facilmente a taxa total de saída de cada estado dada por $\Lambda_i(a)=\sum_{j\neq i}\Lambda_{ij}(a)$ e, então, as probabilidades de transição são dadas por $p(i,j,a)=\Lambda_{ij}(a)\,/\,\Lambda_i(a)$ e o tempo esperado entre transições é dado por $\tau(i,a)=1\,/\,\Lambda_i(a)$.

Figura 2.1 - Algoritmo para criação das transições entre estados

```
Para cada estado e_i = (m_1, p_1, m_2, p_2, m_3) ∈ E
e para cada ação a = (b_1, b_2) ∈ A(i)     fazer  {
    se ((e_i.m_1=P ou e_i.m_1=W) e a.b_1=D) então {
        e_j ← e_i;    // M_1 pode terminar a produção de uma peça...
        e_j.p_1 ← e_j.p_1 +1;
        se (e_j.p_1 < N_1)  entao e_j.m_1 ← P  senão   e_j.m_1 ← W;
        se (a.b_2=D e e_j.m_2 =W)  entao e_j.m_2 ← P;
        se (a.b_2=B e e_j.m_2 =P)  entao e_j.m_2 ← W;
        criar transição (e_i, e_j, a) com taxa β_1;

        e_j ← e_i;            // Pode quebrar...
        e_j.m_1 ← R
        se (a.b_2=D e e_j.m_2 =W e e_j.p_1 >0)  entao e_j.m_2 ← P;
        se (a.b_2=B e e_j.m_2 =P)  entao e_j.m_2 ← W;
        criar transição (e_i, e_j, a) com taxa λ_1;
    }
    se (e_i.m_1=R) então (  // Máquina M_1 quebrada
        e_j ← e_i;            // Pode-se terminar seu reparo...
        se (a.b_1=D)  entao e_j.m_1 ← P  senão   e_j.m_1 ← W;
        se (a.b_2=D e e_j.m_2 =W e e_j.p_1 >0)  entao e_j.m_2 ← P;
        se (a.b_2=B e e_j.m_2 =P)  entao e_j.m_2 ← W;
        criar transição (e_i, e_j, a) com taxa μ_1;
    }

    se ((e_i.m_2=P ou e_i.m_2=W) e e_i.s_1>0 e a.b_2=D) então (
        e_j ← e_i;    // M_2 pode terminar a produção de uma peça...
        e_j.p_1 ← e_j.p_1 -1;    e_j.p_2 ← e_j.p_2 +1;
        se (e_j.m_1 =W e (a.b_1=D ou e_j.p_1 =0))  entao e_j.m_1 ← P;
        se (a.b_1=B e e_j.m_1 =P e e_j.p_1 >0)  entao e_j.m_1 ← W;
        se (e_j.p_1 =0 ou e_j.p_2 =N_2)      entao   e_j.m_2 ← W
                                              senão   e_j.m_2 ← P;
        se (e_j.m_3 =W)  entao e_j.m_3 ← P;
        criar transição (e_i, e_j, a) com taxa β_2;

        e_j ← e_i;            // Pode quebrar...
        e_j.m_2 ← R
        se (a.b_1=D e e_j.m_1 =W)  entao e_j.m_1 ← P;
        se (a.b_1=B e o_j.m_1 =P)  entao e_j.m_1 ← W;
        criar transição (e_i, e_j, a) com taxa λ_2;
    }
    se (e_i.m_2=R) então { // Máquina M_2 quebrada
        e_j ← e_i;            // Pode-se terminar seu reparo...
        se (a.b_2=D)  entao e_j.m_2 ← P  senão   e_j.m_2 ← W;
        se (a.b_1=D e e_j.m_1 =W)  entao e_j.m_1 ← P;
        se (a.b_1=B e e_j.m_1 =P)  entao e_j.m_1 ← W;
        criar transição (e_i, e_j, a) com taxa μ_2;
    }

    se (e_i.m_3=P) então (  // Máquina M_3 produzindo
        e_j ← e_i;        // Pode terminar a produção de uma peça...
        e_j.p_2 ← e_j.p_2 -1;
        se (e_j.p_2 =0)  entao   e_j.m_3 ← W;
        se (a.b_1=D e e_j.m_1 =W)  entao e_j.m_1 ← P;
        se (a.b_1=B e e_j.m_1 =P)  entao e_j.m_1 ← W;
        se (e_j.m_2 ≠R e ((a.b_2=D e e_j.p_1>0) ou (e_j.p_1>0 e e_j.p_1 =0))
            entao   e_j.m_2 ← P;
            senão   se (a.b_2=B e_j.m_2 =P)  entao e_j.m_2 ← W;
        criar transição (e_i, e_j, a) com taxa β_3;

        e_j ← e_i;            // Pode quebrar...
        e_j.m_3 ← R
        se (a.b_1=D e e_j.m_1 =W)  entao e_j.m_1 ← P;
        se (a.b_1=B e e_j.m_1 =P)  entao e_j.m_1 ← W;
        se (a.b_2=D e e_j.m_2 =W e_j.p_1 >0)  entao e_j.m_2 ← P;
        se (a.b_2=B e e_j.m_2 =P)  entao e_j.m_2 ← W;
        criar transição (e_i, e_j, a) com taxa λ_3;
    }
    se (e_i.m_3=R) então (  // Máquina M_3 quebrada
        e_j ← e_i;            // Pode-se terminar seu reparo...
        e_j.m_3 ← P;
        se (a.b_1=D e e_j.m_1 =W)  entao e_j.m_1 ← P;
        se (a.b_1=B e e_j.m_1 =P)  entao e_j.m_1 ← W;
        se (a.b_2=D e e_j.m_2 =W e_j.p_1 >0)  entao e_j.m_2 ← P;
        se (a.b_2=B e e_j.m_2 =P)  entao e_j.m_2 ← W;
        criar transição (e_i, e_j, a) com taxa μ_3;
    )
}
```

O custo C(i,a) é dividido em sete parcelas: $C(i,a) = C_{h1}(i,a) + C_{h2}(i,a) + C_{s2}(i,a) + C_{s3}(i,a) + C_{r1}(i,a) + C_{r2}(i,a) + C_{r3}(i,a)$ que são respectivamente: o custo esperado de estocagem de peças semi-acabadas no estoque P_1, o custo esperado de estocagem de peças semi-acabadas no estoque P_2, o custo de ociosidade da máquina M_2, o custo de ociosidade da máquina M_3, o custo de reativação da máquina M_1, o custo de reativação da máquina M_2 e o custo de reativação da máquina M_3 incorridos até o próximo instante de decisão, dado que em um instante de decisão o sistema está no estado $i=(m_1, p_1, m_2, p_2, m_3) \in E$ e a ação $a \in A(i)$ foi escolhida. Estes custos são dados por:

$$C_{h1}(i,a) = \begin{cases} c_{h1}\,(p_1 - 1)\,\tau(i,a) & \text{se } p_1 > 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad C_{h2}(i,a) = \begin{cases} c_{h2}\,(p_2 - 1)\,\tau(i,a) & \text{se } p2 > 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$C_{s2}(i,a) = \begin{cases} c_{s2}\ \tau(i,a) & \text{se } p_1 = 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad C_{s3}(i,a) = \begin{cases} c_{s3}\ \tau(i,a) & \text{se } p_2 = 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$C_{rk}(i,a) = \begin{cases} c_{rk} \displaystyle\sum_{\substack{e_j \in E \\ e_j.m_k \neq W \\ e_j.p_k > e_i.p_k}} \Lambda_{ij}(a) \ / \ \Lambda_i(a) & \text{se } e_i.m_k = W \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad \text{para } k=1,2$$

$$C_{r3}(i,a) = \begin{cases} c_{r3} \displaystyle\sum_{\substack{e_j \in E \\ e_j.m_3 \neq W \\ e_j.p_2 < e_i.p_2}} \Lambda_{ij}(a) \ / \ \Lambda_i(a) & \text{se } e_i.m3 = W \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

onde c_{h1}, c_{h2}, c_{s2}, c_{s3}, c_{r1}, c_{r2} e c_{r3} são constantes positivas fornecidas ao modelo.

Com os valores de $\tau(i,a)$, $p(i,j,a)$ e $C(i,a)$ definidos acima, dois métodos foram utilizados para obtenção de políticas de custo mínimo:

- o algoritmo que limita sua busca às políticas do tipo (s, S) para os dois estoques e

- o Algoritmo de Iteração de Valores apresentado em [Tijms 86], que busca em todo o espaço de políticas estacionárias e obtém, assim, políticas de controle que consideram o estado geral do sistema.

Nos dois casos, por uma análise de pós-otimalidade, medidas de desempenho do sistema foram obtidas. Estas medidas serão apresentadas na Seção 3.

3 - Resultados numéricos

Para uma comparação entre a política ótima que controla os dois estoques segundo os níveis (s, S) e políticas que levam em conta o estado geral do sistema , os seguintes valores numéricos foram utilizados:

$N_1 = 5$, $N_2 = 5$

$\beta_1 = 20$, $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 10$, $\beta_2 = 15$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_2 = 10$, $\beta_3 = 12$, $\lambda_3 = 1$, $\mu_3 = 10$,

$c_{h1} = 10$ \$/unid. de tempo, $c_{h2} = 15$ \$/unid. de tempo, $c_{s2} = c_{s2} = 50$\$/unid. de tempo,

$c_{r1} = c_{r2} = c_{r3} = 10$ \$.

Na Tabela 3.1 são apresentados os resultados obtidos para este conjunto de valores e para as políticas ótimas dos dois tipos considerados. A política ótima que controla os dois estoques segundo os níveis (s, S) fixa os níveis de controle (1, 5) para o estoque P_1 e os níveis de controle (1, 4) para o estoque P_2. O custo médio a longo prazo desta política é 90,89. A política ótima que leva em conta o estado geral do sistema é definida por uma tabela que indica para cada estado a ação prescrita. Esta política tem custo médio a longo prazo 85,25 (6,2% menor que o da política anterior). Pode-se observar ainda que a produtividade do sistema sob esta política é 2,8% maior que sob a política anterior.

Para ilustrar a política ótima que leva em conta o estado geral do sistema, toma-se um caso onde a decisão sobre o bloqueio ou desbloqueio da máquina M_1 para o controle do estoque P_1 depende do estado da máquina M_3. Suponha que o sistema é observado num estado $i=(m_1, p_1, m_2, p_2, m_3)$ onde as máquinas M_1 e M_2 estão produzindo

(m_1=P, m_2=P) e se tem três peças em cada um dos estoques (p_1=3, p_2=3) . Neste caso, se a máquina M_3 estiver quebrada deve-se bloquear a máquina M_1, caso contrário deve-se desbloqueá-la.

Tabela 3.1 - Resultados Numéricos

	Política (s,S)	Política estacionária	Diferença (%)
Custo total	90,89	85,25	-6,2
Tamanho do estoque P_1	2,91	2,47	-15,1
Tamanho do estoque P_2	1,89	2,16	14,4
Produtividade (peças/unid. de tempo)	8,45	8,69	2,8
Disponibilidade da máquina M_1	0,958	0,957	-0,1
Disponibilidade da máquina M_2	0,944	0,942	-0,2
Disponibilidade da máquina M_3	0,930	0,928	-0,2
Custo de estocagem em P_1	19,15	14,68	-23,3
Custo de estocagem em P_2	13,47	17,46	29,6
Custo de falta de peças em M_2	7,04	4,89	-30,4
Custo de falta de peças em M_3	22,52	20,27	-9,0
Custo de reativação da máquina 1	6,23	7,74	24,2
Custo de reativação da máquina 2	9,11	8,09	-11,2
Custo de reativação da máquina 3	13,37	12,13	-9,3

4 - Conclusão e comentários

O modelo apresentado permitiu comparar dois tipos de políticas de controle para estoques de peças semi-acabadas entre máquinas numa linha de produção. O resultado da comparação mostra que a utilização de políticas do tipo (s, S) para controle destes estoques pode ser desvantajosa em relação a políticas de controle mais sofisticadas.

Pretende-se estender este trabalho, estudando medidas de acoplamento entre os diversos componentes do sistema.

Para a implementação do modelo, utilizou-se uma abordagem orientada para objetos em C++.

Bibliografia

CARVALHO, S. V.; RODRIGUES, R. C. M.; MORAIS, P.R. Otimização do controle de estoque entre máquinas numa linha de produção. Anais do *XXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional - SBPO*, de 16 a 19 de novembro de 1993, Campinas, SP. (pp. 623-627)

HWANG, H.; KOH, S.-G. Optimal control of work-in-process with dual limit switches in two-stage transfer line, European Journal of Operational Research, V. 63, 66-75, 1992.

TIJMS, H.C. Stochastic Modelling and Analysis: A Computational Approach, Wiley, New York, 1986.