MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS

AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO
AUTHORIZATION FOR PUBLICATION

AUTORES / AUTHORS — PALAVRAS CHAVES/KEY WORDS

PROBLEMA MULTIDIMENSIONAL DA MOCHILA 0-1
RELAXAÇÕES LAGRANGEANA E "SURROGATE"

AUTORIZADA POR/AUTHORIZED BY

Luiz A. Vieira Dias
Chefe do LAC

AUTOR RESPONSAVEL / RESPONSIBLE AUTHOR

Luiz A. N. Lorena

DISTRIBUIÇÃO/DISTRIBUTION

- [ ] INTERNA / INTERNAL
- [x] EXTERNA / EXTERNAL
- [ ] RESTRITA / RESTRICTED

REVISADA POR / REVISED BY

CDU/UDC: 519.87

DATA / DATE: Agosto 1989

PUBLICAÇÃO Nº / PUBLICATION NO: INPE-4894-PRE/1495

ORIGEM / ORIGIN: LAC

PROJETO / PROJECT: POPES

Nº DE PAG. / NO OF PAGES: 25

ULTIMA PAG. / LAST PAGE: 19

VERSÃO / VERSION:

Nº DE MAPAS / NO OF MAPS:

TÍTULO/TITLE

PROBLEMA MULTIDIMENSIONAL DA MOCHILA 0-1: HEURÍSTICAS E REDUÇÃO

AUTORES/AUTHORSHIP

Luiz Antonio Nogueira Lorena

RESUMO-NOTAS/ABSTRACT-NOTES

O problema multidimensional da mochila em variáveis 0-1 têm sido usado como modelo para vários processos de decisão para alocação de recursos. Como o problema é NP-difícil, várias heurísticas foram propostas para aproximar sua solução. Inicialmente faz-se uma revisão das principais heurísticas propostas na literatura para o problema. Para a sua solução exata utilizam-se duas fases: 1) a redução do tamanho do problema (caso maximização), onde calculam-se limitantes inferiores (heurísticas) e limitantes superiores (relaxações lagrangeana e/ou surrogate) do valor ótimo do problema, permitindo através de testes simples fixar variáveis ao seu valor ótimo e/ou eliminar restrições redundantes; 2) a enumeração do problema reduzido. Faz-se uma análise da fase de redução do problema apontando perspectivas de melhoras através de resultados de trabalhos recentes.

OBSERVAÇÕES/REMARKS

Apresentado na 1ª Escola Brasileira de Otimização, 16 a 27 de janeiro de 1989, Rio de Janeiro - RJ

MINISTERIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS

PROPOSTA PARA PUBLICAÇÃO

- [ ] DISSERTAÇÃO
- [ ] TESE
- [x] RELATÓRIO
- [ ] OUTROS

IDENTIFICAÇÃO

TÍTULO: O problema multidimensional da mochila 0-1: heurísticas e redução

AUTOR(ES): L. A. N. Lorena

ORIENTADOR:

CO-ORIENTADOR:

LIMITE: __/__/__ DEFESA: __/__/__ CURSO: ORGÃO:

DIVULGAÇÃO: [x] EXTERNA [ ] INTERNA [ ] RESTRITA

EVENTO/MEIO: [ ] CONGRESSO [ ] REVISTA [x] OUTROS

REV. TÉCNICA

NOME DO REVISOR:

RECEBIDO: __/__/__ DEVOLVIDO: __/__/__ ASSINATURA:

APROVAÇÃO

NOME DO RESPONSÁVEL: Luiz Alberto V. Dias

APROVADO: [x] SIM [ ] NÃO DATA: __/__/__ ASSINATURA: L. A. V. Dias

REV. LINGUAGEM

Nº PRIOR. RECEBIDO __/__/__ NOME DO REVISOR

PÁG. DEVOLVIDO __/__/__ ASSINATURA

DATILOGRAFIA

OS AUTORES DEVEM MENCIONAR NO VERSO INSTRUÇÕES ESPECÍFICAS, ANEXANDO NORMAS, SE HOUVER

RECEBIDO: 02/12/88 DEVOLVIDO: 14/12/88 NOME DA DATILÓGRAFA: Neusa

Nº DA PUBLICAÇÃO: PÁG.:

CÓPIAS: Nº DISCO: LOCAL:

DIRETOR

AUTORIZO A PUBLICAÇÃO

[ ] SIM
[ ] NÃO __/__/__

OBSERVAÇÕES E NOTAS

APÓS A PUBLICAÇÃO, ESTA FICHA SERÁ ARQUIVADA JUNTAMENTE COM A VERSÃO ORIGINAL

INPE 106

∴

ABSTRACT

The 0-1 multiknapsack problem had been largely used as a model of resource allocation problems. Like this problem is NP-hard, heuristical methods are very used to obtain an approximate solution. For an exact solution two phases are used: 1) the reduction of the problem size by fixing variables to their optimal values and/or eliminating redundant constraints; 2) the solution of the reduced problem by implicit enumeration. A survey of the main heuristical methods and the reduction phase is made and improving possibilities are reported.

SUMÁRIO

Pág.

O PROBLEMA MULTIDIMENSIONAL DA MOCHILA 0-1: HEURISTICAS E REDUÇÃO

Luiz Antonio Nogueira Lorena

INPE - Instituto de Pesquisas Espaciais

Ministério de Ciência e Tecnologia

Resumo: O problema multidimensional da mochila em variáveis 0-1 têm sido usado como modelo para vários processos de decisão para alocação de recursos. Como o problema é NP-difícil, várias heurísticas foram propostas para aproximar sua solução. Inicialmente faz-se uma revisão das principais heurísticas propostas na literatura para o problema. Para a sua solução exata utilizam-se duas fases:

1 - a redução do tamanho do problema (caso maximização), onde calculam-se limitantes inferiores (heurísticas) e limitantes superiores (relaxações lagrangeana e/ou surrogate) do valor ótimo do problema, permitindo através de testes simples fixar variáveis ao seu valor ótimo e/ou eliminar restrições redundantes;

2 - a enumeração implícita do problema reduzido.

Faz-se uma análise da fase de redução do problema apontando perspectivas de melhoras através de resultados de trabalhos recentes.

1 - INTRODUÇÃO:

O problema multidimensional da mochila em variáveis 0-1 pode ser definido como

$$
(P) \qquad \begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{suj a} & Ax \leq b \\ & x \in \{0,1\}^n, \end{array}
$$

onde, $c \in N^n$, $b \in N^m$, A é uma matriz $m x n$ de componentes inteiros não-negativos, e $\{0,1\}^n = \{x \in R^n : x_j = 0$ ou $x_j = 1;\ j=1,\ldots,n\}$.

Ele é frequentemente encontrado nas áreas de "scheduling", "cargo-loading" [23], "capital-budgeting" [26], "stock-cutting" [9] e modelos de alocação em geral [7]. Vários algoritmos para sua solução foram propostos, entre eles os de Gilmore & Gomory [9], Weingartner & Ness [26], Nemhauser & Ullman [17], Cabot [3], Shih [23], Gavish & Pirkul [7]. (P) também pode ser resolvido, com menos eficiência, por algoritmos desenvolvidos para problemas gerais de variáveis 0-1 [1, 21, 8, 24, 4, 11].

Como (P) é NP-difícil, muitas heurísticas têm sido propostas para aproximar o valor de sua solução ótima, tais como as de Weingartner & Ness [26], Kochenberger, McKarl & Wyman [12], Toyoda [25], Loulou & Michaelides [15], Senju & Toyoda [22], Hillier [10], Balas & Martin [2], Pirkul [19], Frévile & Plateau [6] e Lorena, Olivo & Oliveira [13].

Na seção 2 apresentam-se algumas das principais heurísticas propostas na literatura para (P), assim como uma tabela comparativa, destacando as melhores.

Para solução exata de (P) através de um algoritmo de enumeração implícita, apresenta-se na seção 3, um processo chamado redução de (P), isto é, redução de seu tamanho fixando variáveis ao seu valor ótimo e/ou eliminando definitivamente restrições. Alguns resultados recentes nesta área são citados.

2 - HEURISTICAS

As heurísticas que aparecem na literatura aplicadas a (P) visam obter soluções aproximadas de seu valor ótimo, usando um tempo sensivelmente menor de cálculo que para um método exato; fenomeno este mais sensível quando o problema é de grande porte. Visto que os dados de um problema são estimações, ou variam dentro de um intervalo de incerteza, a diferença entre o modelo e o problema real pode deixar de justificar o emprego de um método exato. Por outro lado, uma heurística não garante otimalidade, nem uma porcentagem de desvio do ótimo. Enfim, a escolha entre uma heurística e um método exato é essencialmente julgamento do usuário, dependendo de seus objetivos e dos equipamentos e facilidades disponíveis.

As heurísticas aqui descritas são divididas em três classes - "gulosas", "simplex" e "multiplicadores" - descritas a seguir:

2.1 - Heurísticas tipo "gulosas"

Heurísticas gulosas são as que fixam a cada iteração ao menos uma variável com o valor 0 ou 1. Podem ser de dois tipos:

(a) **primal** : iniciam com uma solução viável (não ótima);

(b) **dual** : iniciam com a solução $x_j = 1;\ j=1,\ldots,n$ (não viável)

(a) **Heurísticas tipo primal**

De uma forma geral obedecem o seguinte algoritmo:

{heurística primal}

1 { Início }

$N \leftarrow \{1, 2, \ldots, n\};\ S \leftarrow 0;\ v_h \leftarrow 0;$

2 { determinação das colunas candida tas }

Construir $J = \{ j \in N : A^j \leq b - S\}$

Se $J = \emptyset$ **então** $x_j \leftarrow 0,\ \forall j \in N;$ stop

3 { seleção da coluna dominante }

Determinar $K \in J : c_K/r_K = \max\limits_{j \in J} c_j/r_j$

4 { fixação em 1 da variável x_K }

$x_K \leftarrow 1;\ v_h \leftarrow v_h + c_K;\ S \leftarrow S + A^K;\ N \leftarrow N - \{K\}$

ir para 2.

Os diversos algoritmos que aparecem na literatura se diferenciam na escolha do r_j, isto é, como as demais colunas determinam a coluna dominante. A seguir são dados alguns exemplos de algoritmos da literatura:

{algoritmos da literatura}

{Autor}	{ r_j }
Weingartner, Ness [26]	eA^j ; $e_i = 1,\ i = 1, \ldots, m$
Kochenberger, McKarl, Wyman [12]	$S'A^j$; onde $S'_i = (1 - S_i/b_i)^{-1},\ i = 1, \ldots, m$
Toyoda [25]	$SA^j / \lVert S \rVert^2$;
Loulou, Michaelides [15]	$\max\limits_{i \in \{1, \ldots, m\}} \dfrac{(S_i + a_{ij})(\sum\limits_{j \in J} a_{ij} - a_{ij})^{\partial}}{(b_i - S_i - a_{ij})^{\partial}}$ onde $\partial \in\ ]0, 1]$.

(b) **Heurísticas tipo dual**

De uma forma geral obedecem o seguinte algoritmo:

{heurística dual}

1 { Início }

$$N \leftarrow \{1, \ldots, n\};\quad S \leftarrow \sum_{j=1}^{n} A^j;\quad v_h \leftarrow \sum_{j=1}^{n} c_j$$

2 { teste de viabilidade }

se $S \le b$ **então** parar

3 { seleção da coluna dominante }

determinar $K \in N$: $c_K/r_K = \min\limits_{j \in N} c_j/r_j$

4 { eliminação da variável k }

$v_h \leftarrow v_h - c_k$; $S \leftarrow S - A^k$; $N \leftarrow N - \{k\}$

ir para 2

A heurística tipo dual mais conhecida é a de Senju & Toyoda [22], onde

$$r_j = (\sum_{j\in N} A^j - b)A^j / \| \sum_{j\in N} A^j - b\|_2 .$$

2.2 - Heurísticas tipo "simplex"

São heurísticas que usam o resultado do método simplex aplicado a relaxação de programação linear $(\overline{P})$ associada a (P). São compostas de duas fases: busca de uma solução viável para (P) e seguido de uma tentativa de melhora dessa solução.

Hillier [10] propos o seguinte algoritmo:

1 Resolver $(\overline{P})$ obtendo $\overline{x}$;

2 Resolver obtendo x' o seguinte problema

$$
\begin{array}{lll}
(P') & \max & cx \\
 & \text{suj. a} & Ax \le b' \\
 & & x \in [0,1]^n
\end{array}
$$

onde b' é obtido de $(\overline{P})$ usando a base ótima I associada a $\overline{x}$:

$$\forall i \in \{1,\dots,m\},\ b'_i = b_i - 1/2 \sum_{j\in I} |a_{ij}|$$

3 Construir uma sequencia finita de pontos distintos $x^1 = x'$, $x^2, \dots, x^k = \overline{x}$ do segmento $[x', \overline{x}]$ e explorar cada uma das visinhanças dos x^i, $i=1,\dots,m$ definidas por

$$V(x^1) = \{x \in F(P): x_j = \lfloor x_j^1 \rfloor \text{ ou } x_j = \lceil x_j^1 \rceil, \forall j\},$$

onde $F(P)$ é o conjunto das soluções viáveis de (P)

A melhor solução viável é chamada $\tilde{x}$.

4 Procura-se melhorar a solução $\tilde{x}$ obtida, explorando visinhanças de $\tilde{x}$ usando a chamada distancia de "Hamming", isto é, conjuntos do tipo

$$H_k(\tilde{x}) = \{x \in \{0,1\}^n: \sum_{j=1}^{n} |x_j - \tilde{x}_j| \le k\}$$

onde k é um parametro que vale em geral 1, 2 ou 3.

Como o algoritmo de Hillier não é específico para o caso de variáveis 0-1, pois as variáveis devem ser somente inteiras, não necessariamente limitadas, seu comportamento na prática não é bom quando aplicado a (P).

Balas & Martin [2] apresentaram o seguinte algoritmo:

1 { busca de uma solução viável }

Usar o método simplex para obter a solução $\bar{x}$ de

$$(P_y) \quad \max \; cx \quad \text{suj. a} \quad Ax + y = 0, \quad 0 \le x \le e, \; y \ge 0;$$

2 A partir de $\bar{x}$, procurar uma solução viável $\underline{x}$:

(a) pivotendo - 3 tipos de pivos são usados de maneira a fazer os y_i entrar na base tentando satisfazer as restrições $Ax \le b$ sem diminuir muito $v(P_y)$,

(b) dois procedimentos complementares:
- complementação (ação sobre $Ax \le b$),
- truncar e arredondar (ação sobre $0 \le x \le e$)

3 { redução e melhora da solução }

(a) fixar variáveis ao seu valor ótimo através de testes que usam $v(P_y)$, $c\underline{x}$, e os custos reduzidos no ótimo de (P_y),

(b) explorar as visinhanças $H_K(\underline{x})$ com $K=1, 2, 3$ por uma solução melhor x'. Se x' existe, retornar em (a) para a redução, substituindo x por x'. Senão, parar.

2.3 - Heurísticas que usam multiplicadores

São heurísticas que trabalham com uma combinação linear não-negativa das restrições de (P). As seguintes relaxações de (P) são usadas:

{Lagrangeana}

(LR_w) max $\{cx - w(Ax - b)\}$
suj. a $x \in \{0,1\}^n$,
onde $w \in R_+^m$;

{Surrogate}

(SR_w) max cx
suj. a $wAx \leq wb$
$x \in \{0,1\}^n$,
onde $w \in R_+^m$.

Frévile & Plateau [6] utilizaram os multiplicadores quase-ótimos dos seguintes problemas duais de (P);

{dual Lagrangeano}

$$
\begin{array}{lll}
(D_L) & \min & l(w) \\
 & \text{suj. a} & w \in R_+^m, \\
 & \multicolumn{2}{l}{\text{onde } l(w) = \max \{cx - w(Ax - b) : x \in \{0,1\}^n\};}
\end{array}
$$

{dual Surrogate}

$$
\begin{array}{lll}
(D_S) & \min & s(w) \\
 & \text{suj. a} & w \in R_+^m \cap \text{Esfera unitária}, \\
 & \multicolumn{2}{l}{\text{onde } s(w) = v(\overline{SR_w}).}
\end{array}
$$

Dado um multiplicador dual (ou após um número determinado de iterações de um dos algoritmos que resolvem os duais), a solução de $(\overline{SR_w})$ é obtida pelo algoritmo NKR (Fayard & Plateau [5]) de complexidade linear esperada. Duas heurísticas foram propostas e diferem basicamente pela forma com que fixam variáveis a 1, usando a solução ótima primal-dual (x, λ) de $(\overline{SR_w})$:

Agnes 1: fixa a 1 āquelas variáveis que continuarem com o valor 1 após uma busca de solução viável para (P) utilizando uma variante do algoritmo de Senju & Toyoda [22];

Agnes 2: fixa um número pré-determinado de variáveis a 0 ou 1 de acordo com o maior valor absoluto dos custos reduzidos $c_j - \lambda w A^j$, respeitando a viabilidade de (P).

Após a utilização de um determinado número de multiplicadores, a melhor solução viável é selecionada.

Pirkul [19] após determinar um conjunto de multiplicadores de $(\overline{SR_w})$, propõe sua utilização na seguinte heurística:

1 - Calcular as razões c_j/wA^j. Ordenar e renumerar as variáveis de acordo com a ordem decrescente das razões;

2 - fixar variáveis a 1 de acordo com a ordem. Se uma das restrições de (P) é violada, fixar a variável respectiva a 0 e continuar;

3 - para cada variável fixada a 1 no passo anterior, fixar a 0 e repetir o passo 2 em busca de uma nova solução viável.

Lorena, Olivo & Oliveira [13] usaram uma forma diferente de relaxação Lagrangeana:

{Lagrangeano com corte}

$$(LRC_{w,U}) \quad \max \{cx - w(Ax - b)\}$$

$$\text{suj. a} \quad cx \leq U$$

$$x \in \{0,1\}^n,$$

onde $w \in R_+^m$, and $U \in R$.

{heurística Lagrangeana com corte}

1 { Início }

$U \leftarrow v(\overline{P})$; $v_h \leftarrow 0$; $w_i \leftarrow .1$ (ou .2), $i = 1,\ldots,m$

2 { solução de $(LRC_{w,U})$ }

resolver $(LRC_{w,U})$; $U \leftarrow cx - 1$

3 { teste de viabilidade }

se $Ax \leq b$ **então** $v_h \leftarrow cx$; parar

4 { atualização dos multiplicadores }

$w_i \leftarrow w_i + 2(Ax - b)_i/(m+n)b_i$, $i = 1,\ldots,m$

ir para 2

Após iniciar com $U \leftarrow v(\overline{P})$, $w_i = .1$ (ou .2), $i=1,\ldots,m$; a cada iteração, $U \leftarrow cx - 1$ combinado com a atualização $w_i \leftarrow w_i + 2(Ax - b)_i/(m+n)b_i$, $i=1,\ldots,m$, asseguram que a sequência $\{v(LRC_{w^*,U^*})\}$ seja decrescente até que uma solução viável de (P) seja encontrada. O processo pode ser repetido com $U \leftarrow v(\overline{P})$ mas com o w corrente obtendo-se novas soluções viáveis. A melhor solução viável é então selecionada.

Na tabela 1, reproduzida de [13], faz-se uma comparação de algumas das diversas heurísticas existentes para (P) quando aplicadas a problemas da literatura, destacando as de Lorena, Olivo & Oliveira [13], Fréville & Plateau [6] e Balas & Martin [2] como as melhores.

3 - REDUÇAO

Os algoritmos de redução visam aumentar a eficiência dos métodos exatos aplicados a (P), diminuindo o tamanho do problema, seja fixando variáveis ao seu valor ótimo 0 ou 1 ou eliminando restrições redundantes.

Em geral são compostos de três fases:

Red. 1 - cálculo de um limitante superior de v(P);

Red. 2 - cálculo de um limitante inferior de v(P);

Red. 3 - fixar variáveis e eliminar restrições através de testes simples aplicados a problemas unidimensionais da mochila, derivados de (P).

Fréville & Plateau [6] usaram os duais Lagrangeano e/ou Surrogate para o cálculo do limitante superior de v(P) na fase Red.1. O limitante inferior em

Red.2 é calculado pelas heurísticas Agnes 1 e/ou 2, e para Red.3 utilizaram os seguintes problemas:

(a) (LR_w) {Lagrangeano}

(b) (SR_w) {Surrogate}

(c) (P^k_w) max $A_k x$ {f.o.= restrição k}

suj. a $wAx \leq wb$

$x \in \{0, 1\}^n$; $k = 1, \ldots, m$.

A eliminação de algumas restrições redundantes e/ou a fixação de algumas variáveis pode ser óbvia, pelos seguintes motivos:

- se existe um índice $j \in \{1, \ldots, n\}$ e um índice $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que:

$$a_{ij} > b_i$$

então a variável x_j deve ser fixada ao valor 0;

- se existe um índice $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq b_i$$

então a restrição i deve ser eliminada;

- se exist e um índice $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que:

$$A^j = 0$$

então a variável x_j deve ser fixada no valor 1.

3.1 - Testes fixação de variáveis e eliminação de restrições [6]

Dados $\partial \in \{0,1\}$, $w \in R_+^m$ e um limitante inferior $v_{li}(P)$ de $v(P)$, as seguintes condições são suficientes para diminuir o tamanho de (P) fixando variáveis ao seu valor ótimo:

se existe algum índice $j \in \{1,...,n\}$ tal que

T1 $$\lfloor v(LR_w) - |d^{\partial}_j| \rfloor \leq v_{li}(P)$$

onde $c_j - wA^j = d^0_j$ (resp. d^1_j) se $c_j - wA^j$ é positivo (resp. negativo);

ou

T2 $$\lfloor v(\overline{SR_w}) - |d^{\partial}_j| \rfloor \leq v_{li}(P)$$

onde $c_j - \lambda wA^j = d^0_j$ (resp. d^1_j) se $c_j - \lambda wA^j$ é positivo (resp. negativo) e $\lambda = c_{i*}/wA^{i*}$, $i*$ é a variável básica ótima de $(\overline{SR_w})$;

ou

T3 $$\lfloor v(\overline{SR_w : x_j = \partial}) \rfloor \leq v_{li}(P)$$

então a variável x_j deve ser fixada no valor $1 - \partial$.

A seguinte condição é suficiente para a eliminação da restrição k correspondente:

se existe algum índice $k \in \{1,...,m\}$ tal que

T4 $$\lfloor v(\overline{P^k w}) \rfloor \leq b_k$$

então a restrição $A_k \leq b_k$ deve ser eliminada.

Fréville & Plateau [6] apresentaram resultados muito bons aplicando os testes de redução em problemas da literatura (os da tabela 1 entre eles).

Recentemente seus resultados têm sido extendidos em duas frentes:

- usando paralelismo (Plateau & Roucairol [20]);
- usando um novo algoritmo monotonicamente decrescente para o dual Surrogate (Lorena & Plateau [14]);

Paralelismo [20]

Dados dois conjuntos de multiplicadores W1 e W2, obtidos pela aplicação de determinado número de iterações de um algoritmo de subgradientes ao problema (LR_w), os testes

T2 para $w \in W1$, e

T4 para $\underline{w} \in W2$,

produzem um conjunto de problemas unidimensionais da mochila. Devido ao paralelismo é possível tratar ao mesmo tempo vários desses problemas aplicando os testes de redução a cada um deles.

Novo algoritmo Surrogate [14]

Nesse caso, como a sequência $\{v(\overline{SR_{w^{\cdot}}})\}$ é monotonicamente decrescente, combinando com uma heurística simples, os testes de redução podem ser aplicados a cada iteração do algoritmo. Como resultado final, além do valor do dual e o problema (P) reduzido, o algoritmo é fortemente meis eficiente que um algoritmo de subgradientes tradicional.

4 - CONCLUSÕES

Neste trabalho foram descritas as principais heurísticas e o processo de redução para o problema multidimansional da mochila em variáveis 0-1. Verificou-se que redução e heurísticas formam um integrado, objetivando a eficiencia na busca da solução do problema. Muitas das heurísticas e dos algoritmos de redução são aplicaveis também ao caso do problema de programação linear inteira em variáveis 0-1.

5 - REFERENCES

[1] Balas, E., "An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables", Operations Research, 13:517-545(1965)

[2] Balas, E. and Martin, C.H., "Pivot and complement - a heuristic for zero-one programming", Management Science, 26(1):86-96(1980)

[3] Cabot, A.V., "An enumeration algorithm for knapsack problems", Operations Research, 18:306-311(1970)

[4] Christofides, N. and Trypia, M., "A sequential approach to the 0-1 linear programming problem", SIAM Journal of Applied Mathematics, 31(2):271-285(1976)

[5] Fayard D. and Plateau G., "Contribuition a la résolution des programmes mathématiques en nombres entiers", dissertation (1979)

[6] Fréville, A. and Plateau, G., Heuristics and reduction methods for multiple constraints 0-1 linear programming problems", European Journal of Operational Research, 24:206-215(1986)

[7] Gavish, B. and Pirkul, H., "Efficient algorithms for solving multiconstraints zero-one knapsack problems to optimality", Mathematical Programming, 31:78-105(1985)

[8] Geoffrion, A.M., "An improved implicit enumeration approach for integer programming", Operations Research, 14:437-454(1969)

[9] Gilmore, P.C. and Gomory, R.E., "The theory and computation of knapsack functions", Operations Research, 14:1045-1074(1966)

[10] Hillier, F.S., "Efficient heuristics procedures for integer linear programming with an interior path", Operations Research, 17:600-636(1969)

[11] Ibaraki, T.; Baugh, C.R.; Liu, T.K. and Muroga, S., "An implicit enumeration program for zero-one integer programming", International Journal of Computer and Information Sciencesm 1:75-92(1972)

[12] Kochenberger, G.A.; McKarl, B.A. and Wyman, F.P., "A heuristic for general integer programming", Decision Sciences 5(1):36-44(1974)

[13] Lorena, L.A.N.; Olivo A.A. e Oliveira, P.R., "A subgradient algorithm for the multidimensional 0-1 knapsack problem", 11th Triennial Conference on Operations Research, Buenos Aires, Argentina (1987) e XX Simpósio Brasileiro de

Pesquisa Operacional, Salvador, BA (1987) [INPE-4203-PRE/1084]

[14] Lorena, L.A.N. and Plateau G., "A monotone decresing algorithm for the 0-1 multiknapsack dual problem", Relatório Técnico LIPN-CSP, Université de PARIS-NORD (1988)

[15] Loulou, R. and Michaelides, E., "New greedy like heuristics for the multidimensional 0-1 knapsack problem", Operations Research, 27(6):1101-1114(1979)

[16] Magazine, M.J. and Oguz, O., "A heuristic algorithm for the multidimensional 0-1 knapsack problem", European Journal of Operational Research, 16:319-326(1984)

[17] Nemhauser, G. and Ullman Z., "A note on the generalized lagrange multiplier solution to an integer programming", Operations Research 16(2)(1968)

[18] Petersen, C.C., "Computational experience with variants of the Balas algorithm applied to the solution of R and D projects", Management Science, 13(9):736-750(1967)

[19] Pirkul, H., "A heuristic procedure for the multiconstraint zero-one knapsack problem", Naval Research Logistcs, 34:161-172(1987)

[20] Plateau, G. and Roucairol, C., "A parallel algorithm for size reduction of the 0-1 multiknapsack problem", Relátorio Técnico LIPN-CSP, Université de PARIS-NORD (1988)

[21] Salkin, H.M. and Kluyver, C.A., "The knapsack problem: a survey", Naval Research Logistics Quaterly, 22:127-144(1975)

[22] Senju, S. and Toyoda, Y., "An approach to linear programming with 0-1 variables", Management Science 15(4): 196-207(1968)

[23] Shih, W., "A branch and bound method for the multiconstraint 0-1 knapsack problem", Journal of the Operational Research Society, 30(4): 369-378(1979)

[24] Soyster, A.L.; Lev, B. and Slivka, W., "Zero-one programming with many variables and few constraints", European Journal of Operational Research, 2(3): 195-201(1978)

[25] Toyoda, Y., "A simplified algorithm for obtaining approximate solutions to zero-one programming problems", Management Science, 21: 1417-1427(1975)

[26] Weingartner, H.M. and Ness, D.N., "Methods for the solution of the multidimensional 0-1 knapsack problem", Operations Research, 15: 83-103(1967)

[27] Zanakis, S.H., "Heuristic 0-1 linear programming: comparison of three methods", Management Science, 24: 91-104(1977)

TABLE 1

RESULTS FOR PROBLEMS TAKEN FROM THE LITERATURE

	PETERSEN 5 X 39	PETERSEN(*) 5 X 50	WEINGARTER 2 X 28	WEINGARTER 2 X 105	SENJU & TOYODA(*) 30 X 60	SENJU & TOYODA(*) 30 x 60
Olivo, Lòrena, Oliveira (1988)	10547 (99.33)	16436 (99.38)	141278 (100)	1094992 (99.95)	7706 (99.15)	8716 (99.93)
Magazine, Oguz (1984)	10354 (97.51)	16261 (98.33)	139418 (98.68)	1092971 (99.77)	7719 (99.31)	8623 (98.86)
Freville, Plateau (Agnes 1, 1986)	10552 (99.37)	16499 (99.77)	140568 (99.49)	1095445 (100)		
Freville, Plateau (Agnes 2, 1986)	10618 (100)	16447 (99.45)	141278 (100)	1094806 (99.94)		
Martin, Balas(1980)	10588 (99.71)	16499 (99.77)				
Senju, Toyoda(1968)	10516 (99.03)	16337 (98.79)	138878 (98.3)	1094611 (99.92)		
Kochenberguer(1974)	10313 (97.12)	16031 (96.94)	140618 (99.53)	1095332 (99.98)		
Hillier (1969)	8255 (77.74)	16499 (99.77)	127244 (90.06)	1088177 (99.33)		
Toyoda (1975)	9888 (93.12)	15897 (96.12)	139278 (98.58)	990337 (90.40)		
Loulou, Michaelides (1979)	10199 (96.05)	15897 (96.12)	141278 (100)	991921 (90.54)		
Guinard (1972)	10427 (98.20)	16274 (98.40)				

* Optimal values: 16537, 7772 and 8722.