



PALAVRAS CHAVES/KEY WORDS

AUTORES/AUTHORS

CONTROLE DE ATITUDE
OTIMIZAÇÃO DE MANOBRAS
ESTABILIZAÇÃO POR "SPIN" E BOBINAS MAGNÉTICAS

AUTORIZADA POR/AUTHORIZED BY

Pl. *Marlene Sáez Ferreira*
Marco Antonio Raupp
Diretor Geral

AUTOR RESPONSÁVEL
RESPONSIBLE AUTHOR

Victor O. Gamarra Rosado
Victor O. Gamarra Rosado

DISTRIBUIÇÃO/DISTRIBUTION

INTERNA / INTERNAL
 EXTERNA / EXTERNAL
 RESTRITA / RESTRICTED

REVISADA POR / REVISED BY

Atair Rios Neto
Atair Rios Neto

CDU/UDC

629.7.062.2

DATA / DATE

Dezembro, 1988

TÍTULO/TITLE	PUBLICAÇÃO Nº PUBLICACION NO INPE-4778-TDL/350
	OTIMIZAÇÃO DE MANOBRAS DE SATÉLITES ESTABILIZADOS POR "SPIN", UTILIZAN- DO BOBINAS MAGNÉTICAS
AUTORES/AUTHORSHIP	Victor Orlando Gamarra Rosado

ORIGEM
ORIGIN

PG/DCG

PROJETO
PROJECT

FRH/CIE

Nº DE PAG. NO OF PAGES	ULTIMA PAG. LAST PAGE
94	A.5

VERSÃO VERSION	Nº DE MAPAS NO OF MAPS

RESUMO - NOTAS / ABSTRACT - NOTES

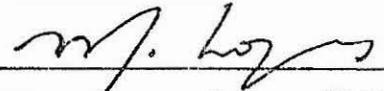
Apresentam-se desenvolvimentos de leis de controle ótimo em malha aberta que minimizam o tempo de manobra de atitude de um satélite estabilizado por "spin" através da otimização dos intervalos e polaridades de funcionamento de um atuador do tipo bobina magnética. O torque de controle que executa a manobra é gerado através da interação do campo geomagnético com o momento magnético desta bobina. A proposta de otimização da manobra consta de duas fases, ambas com abordagem subótima: Primeiro, otimização com a determinação dos intervalos de funcionamento da bobina, cobrindo separadamente cada período orbital. Segundo, otimização global da manobra, utilizando como parâmetros de partida os intervalos obtidos na fase anterior. Expõem-se os fundamentos teóricos para a formulação do problema, a modelagem da dinâmica de atitude do satélite, o tratamento de otimização para obter a lei de controle e os testes numéricos para avaliar o comportamento do procedimento. Simulações através de computador digital indicam a praticabilidade de formulação e obtenção das leis de controle ótimo propostas.

OBSERVAÇÕES / REMARKS

Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial, aprovada em 05 de agosto de 1988.

Aprovado pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Mestre
em Ciência Espacial

Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza



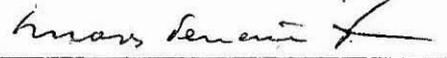
Presidente

Dr. Atair Rios Neto



Orientador

Dr. Luis Novaes Ferreira França



Membro da Banca
-convidado-

Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira



Membro da Banca

Candidato: Víctor Orlando Gamarra Rosado

São José dos Campos, 05 de agosto de 1988

A meus pais, Alejandro e Georgina

A minha esposa, Valentina

A minha filha, Ariane

AGRADECIMENTOS

O autor expressa seus mais sinceros agradecimentos:

Ao Instituto de Pesquisas Espaciais-INPE, pela oportunidade de realizar o Mestrado; e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES pela ajuda financeira durante o Curso.

Ao Dr. Atair Rios Neto, pelos exemplos profissional e pessoal.

Aos demais membros da Banca Examinadora, por suas observações e sugestões durante as apresentações preliminar e final.

À minha esposa e a nossa "Chiquita", fontes de apoio, carinho e incentivo em todo instante.

À minha família, amigos; colegas do curso e pessoas que direta ou indiretamente permitiram a realização desta dissertação.

ABSTRACT

This work presents the development of open-loop controls that minimize the attitude maneuver time of a spin-stabilized satellite through the optimization of both polarity and time intervals of actuation of a magnetic coil type actuator. The maneuver control torque is generated by the interaction between the magnetic moment of this coil and the geomagnetic field. The proposed maneuver optimization consists of two phases, both with suboptimal approaches: 1) The optimization of coil's operating intervals, covering every orbital period separately; and 2) the maneuver global optimization, using the intervals obtained in the previous phase as the starting parameters. The theoretical foundations for the formulation of the problem, the modelling of the satellite attitude dynamics, the optimization treatment to obtain the control, and numerical tests to evaluate the behavior of the procedure are presented. Simulations have verified the feasibility of formulation and obtainment of the proposed optimal control.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	<i>xi</i>
LISTA DE SÍMBOLOS	<i>xiii</i>
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
1.1 - Objetivos e motivações do trabalho	1
1.2 - Utilização de bobinas magnéticas como atuadores de atitude	2
1.3 - Revisão bibliográfica	5
1.4 - Organização do trabalho	6
<u>CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS, MODELAGEM E PROCEDIMENTO DE OTIMIZAÇÃO</u>	9
2.1 - Introdução	9
2.2 - Modelagem da dinâmica do satélite	9
2.3 - Modelagem do torque de controle e lei geral de comando..	12
2.3.1 - Introdução	12
2.3.2 - Aproximações para satélites estabilizados por "spin" ...	13
2.3.3 - Componentes do dipolo geomagnético no sistema da órbita..	14
2.3.4 - Torque médio e deslocamento temporal	16
2.3.5 - Considerações sobre o torque de controle durante um período orbital	17
2.3.6 - Componentes instantâneas do torque de controle.....	18
2.3.7 - Lei geral de comando	19
2.3.8 - Orientação do eixo de "spin"	22
2.3.9 - Componentes médias do torque de controle válidas durante um período orbital	23
2.3.10 - Cálculo das componentes instantâneas do torque de controle	25
2.4 - Problema de controle	26
2.4.1 - Introdução	26
2.4.2 - Formulação do problema	27
2.4.3 - Solução das equações de vínculo	29

	<u>Pág.</u>
2.5 - Procedimento Subótimo	34
2.5.1 - Problema associado à iteração típica	35
<u>CAPÍTULO 3 - SIMULAÇÕES E TESTES NUMÉRICOS</u>	39
3.1 - Introdução	39
3.2 - Formulação do problema de teste	39
3.3 - Implementação da lei de controle	42
3.4 - Lei de controle com critério de estabilização	44
3.5 - Exequibilidade (controlabilidade) de manobras com o sistema de controle proposto	48
3.6 - Otimização da manobra por período	49
3.7 - Otimização global da manobra	52
<u>CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DOS RESULTADOS</u>	57
4.1 - Introdução	57
4.2 - Modelo simulado	57
4.3 - Resultados do controle inicial	58
4.4 - Resultados da otimização por período	61
4.5 - Resultados da otimização global	64
4.6 - Análise dos resultados	67
<u>CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS</u>	69
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71
APÊNDICE A - TÓPICOS DE CONTROLE ÓTIMO	

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 - Disposição da bobina magnética	4
2.1 - Representação do sistema inercial (X,Y,Z) e do sistema associado ao satélite (x,y,z)	10
2.2 - Sistemas de referência e dipolo geomagnético	14
2.3 - Lei geral de comando durante uma órbita	20
2.4 - Orientação do eixo de "spin" do satélite no sistema inercial	22
2.5 - Orientação do vetor do eixo de "spin" no ponto de injeção do satélite, e no instante inicial e final da manobra no sistema inercial	28
3.1 - Esboço de manobra típica	41
3.2 - Implementação da lei geral de comando durante um período orbital	43
3.3 - Orientação do eixo de "spin" do satélite no sistema da órbita.....	46
4.1 - Respostas do controle inicial	59
4.2 - Respostas da otimização por período	62
4.3 - Respostas da otimização global	65

LISTA DE SÍMBOLOS

A, E, C, D	-	Coefficientes do torque de controle médio
a	-	Semi-eixo maior da órbita
B	-	Indução do campo geomagnético
$B_{x_0}, B_{y_0}, B_{z_0}$	-	Componentes da indução do campo geomagnético no sistema da órbita
D_m	-	Momento do dipolo geomagnético
\vec{E}	-	Vetor erro
e	-	Excentricidade da órbita
H	-	Momento angular do satélite
I_1, I_2, I_3	-	Momentos principais de inércia, transversais e axial, do satélite
IP	-	Índice de desempenho
i	-	Inclinação da órbita
K	-	Número de pulsos
M	-	Dipolo geomagnético
M_I	-	Dipolo geomagnético no sistema inercial
$M_{x_0}, M_{y_0}, M_{z_0}$	-	Componentes do dipolo geomagnético no sistema da órbita
m	-	Magnitude do momento magnético da bobina
n	-	Movimento médio orbital
p	-	Parâmetro orbital
p_m	-	Polaridade do momento magnético da bobina
r	-	Distância desde o centro da Terra
R_1	-	Matriz de rotação do sistema inercial para o sistema orbital
R_2	-	Matriz de rotação do sistema inercial para o sistema associado ao satélite

R_3	- Matriz de rotação do sistema da órbita para o sistema associado ao satélite
S	- Função de chaveamento
T	- Torque magnético
T_x, T_y, T_z	- Componentes do torque magnético no sistema associado ao satélite
t	- Tempo
\vec{k}	- Orientação do eixo "spin" do satélite
w	- Velocidade angular do sistema associado ao satélite
w_x, w_y, w_z	- Componentes ortogonais de w .
X, Y, Z	- Sistema de referência inercial
x, y, z	- Sistema de referência associado ao satélite
x_0, y_0, z_0	- Sistema de referência da órbita
ω	- Argumento do perigeu.
ζ	- Período da órbita
θ_g	- Tempo Sideral de Greenwich
δ	- Declinação do eixo "spin"
α	- Ascensão reta do eixo "spin"
θ	- Ângulo entre o momento magnético da bobina e a indução geomagnética
θ'	- Co-elevação no sistema da órbita
ψ'	- Azimute no sistema da órbita
Ω	- Ascensão reta do nodo ascendente
ξ	- Inclinação do dipolo geomagnético em relação ao eixo de rotação terrestre
v	- Anomalia verdadeira
f	- O subscrito indica o estado final

- i - 0 subscrito indica o estado inicial
- o - 0 subscrito indica o sistema da órbita
- $\dot{\phi}$ - Taxa do "spin" do satélite
- | | - Valor em módulo
- < > - Valor médio

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - OBJETIVOS E MOTIVAÇÕES DO TRABALHO

A interação entre fontes de campo magnético a bordo do satélite e a indução do campo geomagnético tem sido utilizada para o desenvolvimento de amortecedores de precessão e nutação, dessaturadores da quantidade de movimento angular (de rodas de reação), para manobras de grandes ângulos e para o controle de atitude fina. A utilidade destes torques magnéticos para o controle de atitude de satélites tem sido bem estabelecida para órbitas próximas à Terra conforme se verifica na seção de revisão da literatura.

O objetivo deste trabalho consiste na obtenção, simulação e teste de leis de controle em malha aberta, otimizando os intervalos e polaridades de funcionamento de um atuador do tipo bobina magnética, de modo a minimizar o tempo de manobra de atitude de um satélite rígido, axialmente simétrico e estabilizado por "spin", isto é, a obtenção de leis de controle com critério de otimização. A manobra de teste a ser simulada e o controle inicial, com critério de estabilização, são dados por Shigehara (1972). A interação do campo geomagnético com o momento magnético, gerado pela bobina de eixo paralelo ao eixo "spin" (eixo de rotação) do satélite, origina o torque magnético de controle que executa a manobra a ser otimizada.

A grande motivação deste trabalho é analisar uma alternativa de manobra otimizada de interesse do Primeiro Satélite de Coleta de Dados da MECB. Neste satélite tem-se que proceder a manobras de modo a evitar que o ângulo entre o versor satélite-Sol e o versor do eixo "spin" cheguem à situação que leve à incidência direta da radiação solar sobre o painel geocêntrico, o que provocaria problemas térmicos, significando o final do tempo de vida do satélite.

A proposta de otimização da manobra consta de duas fases ambas com abordagens subótimas: Primeiro, otimização por período, ou seja, otimização cobrindo separadamente cada período orbital, para de terminação dos intervalos e polaridades de funcionamento da bobina. Segundo, otimização global da manobra, utilizando os intervalos e polaridades obtidos anteriormente como parâmetros de partida. Em cada caso utiliza-se um procedimento subótimo de busca direta (Rios Neto e Ceballos, 1979).

1.2 - UTILIZAÇÃO DE BOBINAS MAGNÉTICAS COMO ATUADORES DE ATITUDE

O processo de reorientação angular do satélite no espaço denomina-se manobra de atitude e, para conseguir isto, é necessário que o satélite possua um sistema de controle de atitude. Em geral, este sistema consiste de três componentes: sensores, estimadores mais controladores e atuadores. Os sensores fornecem as informações para os estimadores determinarem a atitude. Os controladores determinam a lei de controle (que torques são necessários e como gerá-los) e os atuadores fornecem os torques de controle.

Existem diversos tipos de sistemas de controle de atitude de de satélites, podendo-se dividi-los em sistemas passivos e ativos.

Os sistemas de controle de atitude passivos fazem uso exclusivo da interação natural com o meio ambiente para manter a orientação do satélite. Não precisam de fontes internas de energia ou massa para funcionarem e são úteis quando não se tem necessidade de uma precisão elevada. Eles ainda têm a vantagem de serem bastante confiáveis devido à simplicidade. Entre esses sistemas podem ser citados: a estabilização por "spin" que consiste em girar o satélite artificial em torno do seu eixo principal de maior momento de inércia, tal que seu vetor momento angular permanece aproximadamente fixo no espaço inercial; a estabilização por "dual spin" na qual o satélite tem uma roda de inércia girando em alta velocidade; a estabilização por gradiente de gravidade que, interagindo com o campo gravitacional, mantém a ati

tude do satélite, motivo pela qual são frequentemente usados para missões próximas da Terra ou da Lua; e o controle magnético passivo.

Os sistemas de controle de atitude ativos são úteis quando se necessita manter o satélite em uma determinada atitude com uma precisão elevada. Entretanto, eles têm a desvantagem de necessitarem de uma fonte interna de energia ou massa (neste caso limitando a vida útil do sistema). Entre os sistemas ativos, podem-se citar aqueles que aplicam torques sobre o satélite utilizando jatos de gás, ou troca de quantidade de movimento angular (rodas de inércia) ou, ainda, interações com o campo geomagnético através do uso de bobinas magnéticas.

Dentre os sistemas ativos citados acima, o sistema de controle através de interações com o campo magnético da Terra exibe as características favoráveis de não requerer partes móveis em relação ao satélite, nem equipamentos complexos e ser relativamente pouco pesado (Wertz, 1978). Este sistema proporciona manobras lentas por causa do torque ser limitado e sua operação depende da configuração do campo magnético, apresentando contudo a vantagem de poder ser alimentado por energia coletada através de células solares e, portanto, poder ter uma vida útil bem maior do que o sistema que usa jatos de gás. Na prática são usados sistemas de torque magnético, entre os quais, bobinas de torque com núcleo de "ar" (isto é, eletromagnetos ou espiras circulares percorridas por corrente elétrica), e bobinas de torque com núcleo de ferro (solenóide); usados tanto para estabilizações como para manobras em órbitas com altitudes bem menores que altitudes síncronas (35.800 km).

A decisão para usar um sistema de controle de atitude passivo ou ativo ou a combinação dos dois depende da missão a ser efetuada e dos seus requisitos. Por exemplo, um satélite estabilizado por "spin", próximo à Terra, poderá usar bobinas magnéticas para manobras de atitude. Estas bobinas magnéticas podem ser colocadas na direção perpendicular ou paralela ao eixo "spin", frequentemente usadas para o controle da taxa do "spin" e para a reorientação do eixo "spin", res

pectivamente. Para o caso de altitudes síncronas utiliza-se para estas funções, jatos de gás, por causa do campo geomagnético ser geralmente muito fraco na execução de manobras magnéticas eficazes (Wertz, 1978).

A Figura 1.1 representa a configuração do sistema, com posto pelo corpo do satélite e uma bobina magnética alinhada segundo o eixo "spin", a qual, interagindo com o campo geomagnético origina o torque que executa a manobra a ser otimizada.

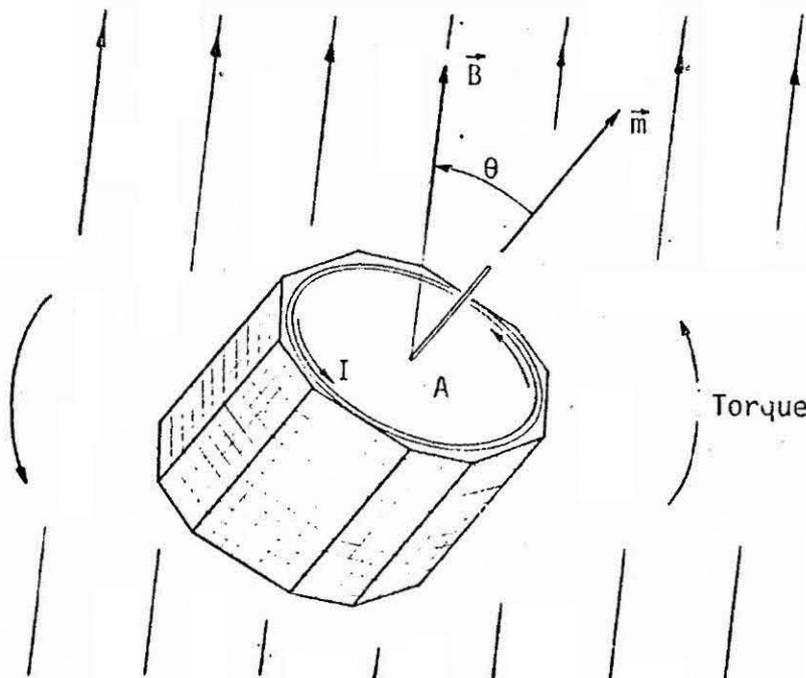


Fig. 1.1 - Disposição da bobina magnética.

O torque magnético é dado por (Wertz, 1978)

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

(1.1)

ou seja, $T = mB\sin\theta$, onde \vec{m} é o momento magnético da bobina, \vec{B} é a indução geomagnética e θ o ângulo entre os dois vetores, conforme a Figura 1.1.

O momento magnético da bobina é dado por

$$\vec{m} = p_m m \vec{k} \quad (1.2)$$

onde, $m = nIA$ é a magnitude do momento magnético, p_m é a polaridade de $(-1,0,+1)$ e \vec{k} é o vetor unitário do eixo "spin". Sendo n o número de espiras, I é a intensidade da corrente elétrica e A é a área circunscrita pelo perímetro da bobina.

1.3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A utilização do campo geomagnético fornece um dos meios mais simples de controle de atitude de satélites. A maioria dos problemas envolvidos neste tipo de controle de atitude consiste em determinar a lei de controle que vai governar o dipolo magnético da bobina.

Renard (1967) obteve uma lei de controle de atitude através do processo "averaging", o qual considera invariante o deslocamento do eixo de "spin" do satélite durante um período orbital de operação, para efeito do cálculo do torque de controle médio. Os resultados obtidos do estudo comparativo das possibilidades de controle de cinco tipos de leis de comando, mostram que o controle do tipo "bang-bang" de um quarto de órbita foi o mais apropriado para órbitas polares baixas.

Shigehara (1972) desenvolveu uma lei de controle do tipo liga-desliga para um satélite estabilizado por "spin", consistindo de quatro chaveamentos por órbita, porém não a cada quarto de órbita, como o sistema de controle desenvolvido por Renard. Leis de controle para a redução de erros e com amortecedores de nutação para satélites

estabilizados por "spin" e satélites estabilizados por "dual spin" foram obtidas por Wheeler (1967) e Alfriend (1975), respectivamente.

Tossman (1977) formulou as condições necessárias de otimização de controle magnético sob a suposição de o campo geomagnético ser um dipolo não-rotativo. Também introduziu artificialmente um modelo aproximado de uma função de chaveamento, permitindo uma aproximação unidimensional simples para o problema não-linear de valores de contorno em dois pontos em otimização de manobras. Motivados neste trabalho, Junkins, Carrington e Williams (1981) e Junkins e Turner (1986) desenvolveram uma formulação para a otimização de manobras magnéticas para um satélite estabilizado por "spin" próximo à Terra usando o Princípio de Pontryagin. Esta formulação, com uma abordagem indireta, através das condições necessárias, é utilizada para construir mapas de campos extremantes de manobras típicas.

O presente trabalho difere daqueles localizados na literatura quanto ao procedimento para determinação da lei de controle em malha aberta, para a manobra de atitude. De princípio toma-se a abordagem subótima de parametrização da função de controle (Williamson, 1971; Rios Neto e Ceballos, 1979), usando-se em seguida um procedimento direto de solução numérica; como resultado obtém-se em cada iteração um problema de Programação Matemática.

1.4 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No Capítulo 2 desenvolve-se a modelagem da dinâmica do satélite e apresentam-se os fundamentos teóricos para a formulação do problema de controle e para a implementação da lei geral de comando (Renard, 1967), como também, o procedimento numérico direto subótimo (Rios Neto e Ceballos, 1979; Ceballos, 1980) utilizado para a resolução do problema de otimização.

No Capítulo 3 apresentam-se a manobra de teste, a lei de controle inicial e as fases de otimização propostas.

No Capítulo 4 realizam-se a simulação e os testes numéricos da otimização do problema de teste usando-se o computador Burroughs B-6800 do INPE. Também se analisam os resultados obtidos na otimização do problema, comparando-os com aqueles fornecidos pela função de chaveamento desenvolvida por Shigehara (1972).

No Capítulo 5, apresentam-se as conclusões e sugestões para desenvolvimentos posteriores.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS, MODELAGEM E PROCEDIMENTO DE OTIMIZAÇÃO

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste Capítulo apresentam-se os principais fundamentos teóricos para o desenvolvimento deste trabalho. Na seção 2.2 apresenta-se a modelagem da dinâmica do satélite utilizando as equações de Euler simplificadas e explorando as características do movimento do satélite estabilizado por "spin".

Nas demais seções, apresentam-se as aproximações para um satélite estabilizado por "spin" e a lei geral de comando numa situação genérica conforme Renard (1967), assim como a formulação do problema de controle ótimo a ser tratado e o procedimento numérico de busca direta (Rios Neto e Ceballos, 1979; Ceballos, 1980) utilizado.

2.2 - MODELAGEM DA DINÂMICA DO SATÉLITE

Conforme a Figura 2.1, considere-se os seguintes sistemas de referência:

- (i) O Sistema aproximadamente inercial (X,Y,Z) com origem no centro da Terra, tal que o eixo X se encontre na direção do Equinócio Vernal, o eixo Y perpendicular ao eixo X , contido no plano equatorial da Terra, e o eixo Z na direção do eixo de "spin" da Terra, e
- (ii) O Sistema de coordenadas associado ao satélite (x,y,z) tal que o eixo z define o eixo de "spin" do satélite (dado no sistema inercial pela ascensão reta α e a declinação δ), e o eixo x paralelo ao plano inercial (X,Y) .

Admitindo-se que o vetor do momento angular \vec{H} do satélite simétrico coincide com o eixo de "spin", tem-se (Wertz, 1978)

$$\vec{H} = I_3 \dot{\phi} \vec{k} \quad (2.1)$$

onde I_3 é o momento principal de inércia na direção do vetor \vec{k} e $\dot{\phi}$ é a taxa do "spin" do satélite.

Sendo,

$$\left(\frac{dH}{dt}\right) = \dot{\vec{H}} = \vec{T} \quad (2.2)$$

onde \vec{T} é o momento em relação ao centro de massa, resultante de todas as forças externas atuando no satélite e $\dot{\vec{H}}$ é a derivada temporal do momento angular referido ao centro de massa. Sendo,

$$\vec{T} = T_x \vec{i} + T_y \vec{j} + T_z \vec{k} \quad (2.3)$$

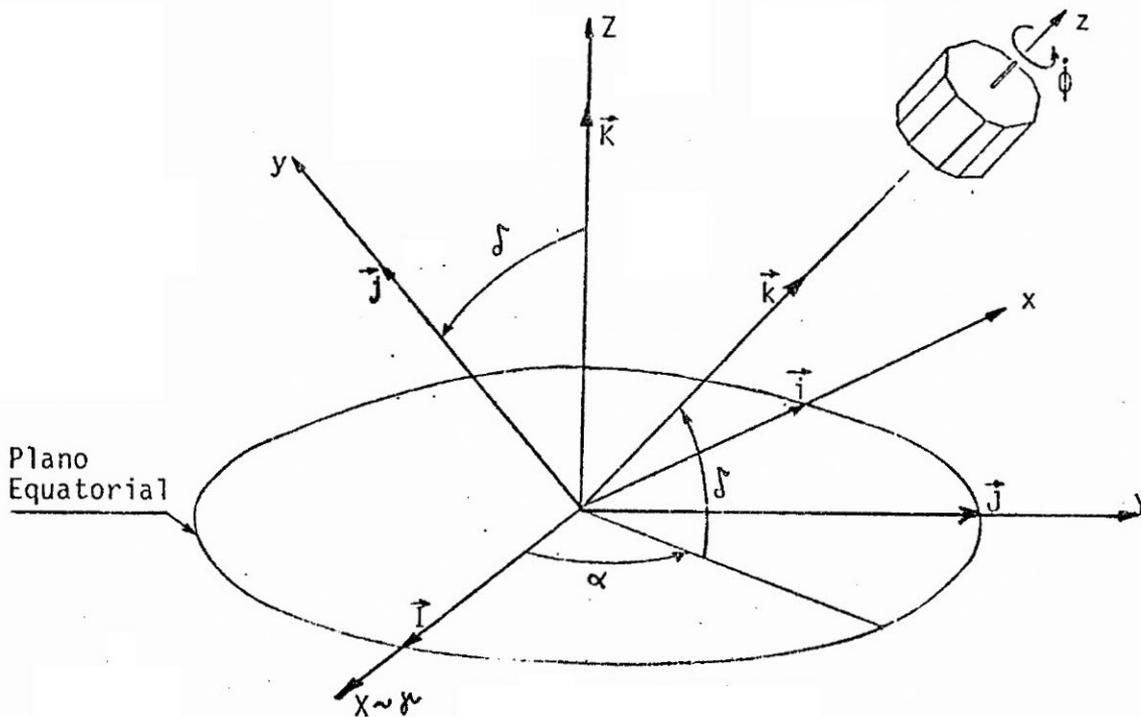


Fig. 2.1 - Representação do sistema inercial (X,Y,Z) e do sistema associado ao satélite (x,y,z).

Admitindo-se que o vetor do momento angular \vec{H} do satélite simétrico coincide com o eixo de "spin", tem-se (Wertz, 1978)

$$\vec{H} = I_3 \dot{\phi} \vec{k} \quad (2.1)$$

onde I_3 é o momento principal de inércia na direção do vetor \vec{k} e $\dot{\phi}$ é a taxa do "spin" do satélite.

Sendo,

$$\left(\frac{dH}{dt}\right) = \dot{\vec{H}} = \vec{T} \quad (2.2)$$

onde \vec{T} é o momento em relação ao centro de massa, resultante de todas as forças externas atuando no satélite e $\dot{\vec{H}}$ é a derivada temporal do momento angular referido ao centro de massa. Sendo,

$$\vec{T} = T_x \vec{i} + T_y \vec{j} + T_z \vec{k} \quad (2.3)$$

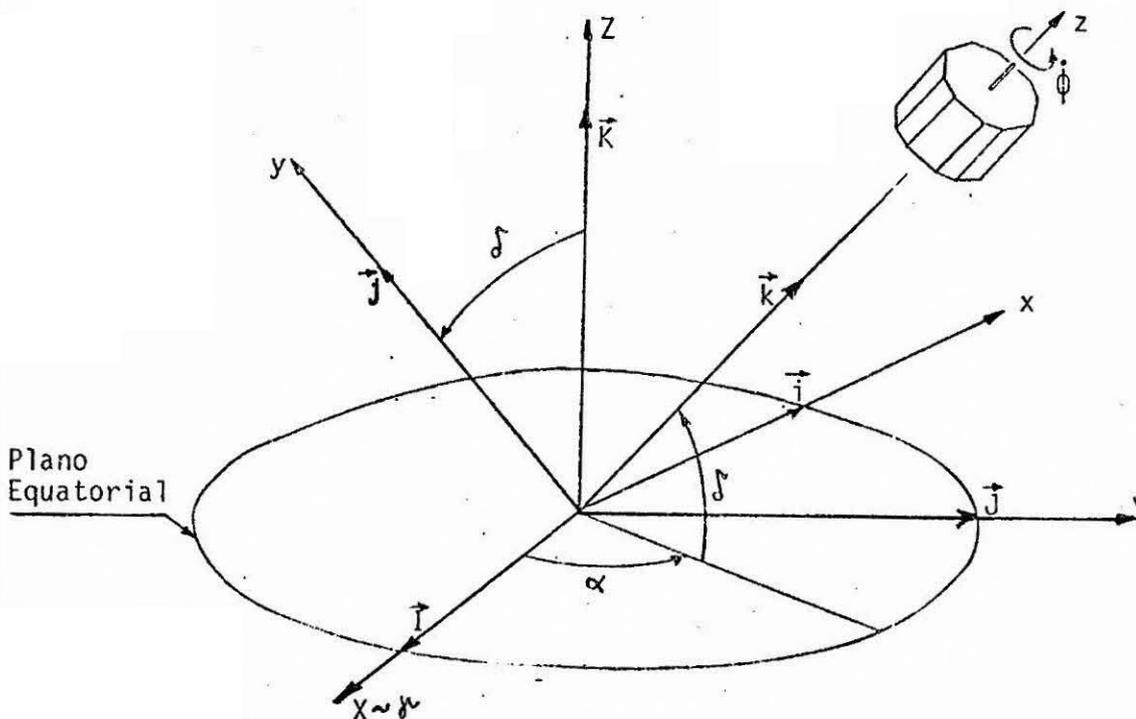


Fig. 2.1 - Representação do sistema inercial (X,Y,Z) e do sistema associado ao satélite (x,y,z).

e derivando \vec{H} na equação (2.1), em relação ao tempo, obtêm-se

$$\dot{\vec{H}} = I_3 [\ddot{\phi} \vec{k} + \dot{\phi} (\vec{\omega} \times \vec{k})] \quad (2.4)$$

onde $\vec{\omega}$ é a velocidade angular do sistema associado ao satélite em relação ao sistema inercial.

Expressando $\vec{\omega}$ no sistema associado ao satélite, obtêm-se

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad (2.5)$$

onde, ω_x , ω_y e ω_z são as componentes ortogonais dadas por

$$\vec{\omega} = -\dot{\delta} \vec{i} + \alpha \cos \delta \dot{\vec{j}} + \alpha \sin \delta \dot{\vec{k}} \quad (2.6)$$

Combinando as equações (2.2), (2.3), (2.4) e (2.6), obtêm-se

$$\vec{T} = I_3 [\dot{\phi} \alpha \cos \delta \dot{\vec{i}} + \dot{\phi} \dot{\delta} \dot{\vec{j}} + \ddot{\phi} \dot{\vec{k}}] \quad (2.7)$$

Sendo as componentes do torque no sistema associado ao satélite, as seguintes

$$\begin{cases} T_x = I_3 \dot{\phi} \alpha \cos \delta \\ T_y = I_3 \dot{\phi} \dot{\delta} \\ T_z = I_3 \ddot{\phi} \end{cases} \quad (2.8)$$

Obtendo-se assim, as taxas de variação aproximadas para o movimento giratório do eixo "spin"

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = T_x / ((I_3 \dot{\phi}) \cos \delta) \\ \dot{\delta} = T_y / (I_3 \dot{\phi}) \end{cases} \quad (2.9)$$

Na verdade (Goldstein, 1959, e Thomas e Cappellari, 1964), as equações gerais do movimento em torno do centro de massa de um corpo rígido qualquer, com o eixo z como o eixo de "spin" e simétrico em torno deste eixo, tendo como momentos principais de inércia transversais $I = I_1 = I_2$ e axial I_3 , são

$$\begin{cases} T_x = -I\ddot{\delta} + (I_3 - I)\dot{\alpha}^2 \sin\delta \cos\delta + I_3\ddot{\phi}\alpha\cos\delta \\ T_y = I\ddot{\alpha}\cos\delta + I_3\ddot{\alpha}\delta \sin\delta + I_3\ddot{\phi}\delta - 2I\dot{\alpha}\dot{\delta} \sin\delta \\ T_z = I_3(\ddot{\alpha}\sin\delta + \dot{\alpha}\dot{\delta} \cos\delta + \ddot{\phi}) \end{cases} \quad (2.10)$$

Como para satélites estabilizados por "spin" os termos do momento do "spin" geralmente são dominantes, assume-se que o eixo de simetria sempre permanece alinhado com o vetor do momento angular instantâneo e, portanto, o cone do movimento em torno do vetor do momento angular é sempre de amplitude pequena, tendo-se para manobras lentas equações conforme (2.9).

2.3 - MODELAGEM DO TORQUE DE CONTROLE E LEI GERAL DE COMANDO

2.3.1 - INTRODUÇÃO

Com base no trabalho desenvolvido por Renard (1967) que apresenta um estudo comparativo e crítico dos fundamentos teóricos das leis de comando para o controle magnético de atitude de um satélite estabilizado por "spin", através de uma bobina magnética de eixo paralelo ao eixo de "spin", expõem-se os tópicos utilizados para o desenvolvimento deste trabalho.

Desenvolve-se, também, o cálculo das componentes do dipolo geomagnético e as componentes médias do torque magnético, durante um período orbital; assim como as componentes instantâneas do torque de controle e a orientação do eixo de "spin" do satélite.

2.3.2 - APROXIMAÇÕES PARA SATÉLITES ESTABILIZADOS POR "SPIN"

Ao considerar um satélite estabilizado por "spin", que descreve uma órbita em torno da Terra, pode-se desprezar a ação da atitude do satélite na sua própria órbita. Contudo, existe uma forte influência dos parâmetros orbitais sobre os torques perturbadores de atitude, como também sobre os torques de controle que usam o campo geomagnético.

Conforme a Figura 1.1 e das equações básicas (2.1) e (2.2), considera-se que:

- (i) O torque magnético \vec{T} atua normalmente ao eixo de "spin" do satélite, por causa do momento magnético da bobina coincidir com este eixo, e
- (ii) Na presença de um amortecedor de nutação eficiente, o vetor do momento angular \vec{H} é suposto coincidir com o vetor do eixo de "spin" do satélite.

Para efeitos de atualização dos parâmetros orbitais ao longo da manobra, o argumento do perigeu (ω) e a ascensão reta do nó do ascendente (Ω) sofrem variações seculares dadas pelos valores constantes ($d\omega/dt$) e ($d\Omega/dt$), respectivamente. Considera-se sem perturbações a anomalia excêntrica (E) e a anomalia média (M); e constantes o semi-eixo maior (a), a excentricidade (e) e a inclinação (i) da órbita.

Durante o tempo de vida de um satélite, o eixo "spin" será deslocado sob a ação de inúmeros torques perturbadores, por exemplo: torque do momento magnético residual, torque do gradiente de gravidade, torque de Foucault (devido às "correntes parasitas"), torque aerodinâmico e torque de radiação solar. Admite-se no desenvolvimento deste trabalho que o torque de controle dado pela equação (1.1) atua sozinho e é dominante em relação a esses torques perturbadores. Este torque

resulta da interação com o meio ambiente do momento magnético de controle \vec{m} , paralelo ao eixo de "spin" do satélite, em um ponto onde a indução externa é \vec{B} . Caso a magnitude do momento magnético residual seja conhecida, pode-se adicioná-la à magnitude do momento magnético da bobina, considerando-a na lei de controle.

2.3.3 - COMPONENTES DO DIPOLO GEOMAGNÉTICO NO SISTEMA DA ÓRBITA

Considere-se o campo geomagnético representado por um dipolo magnético \vec{M} , inclinado de ξ em relação ao eixo de rotação terrestre, conforme a Figura 2.2.

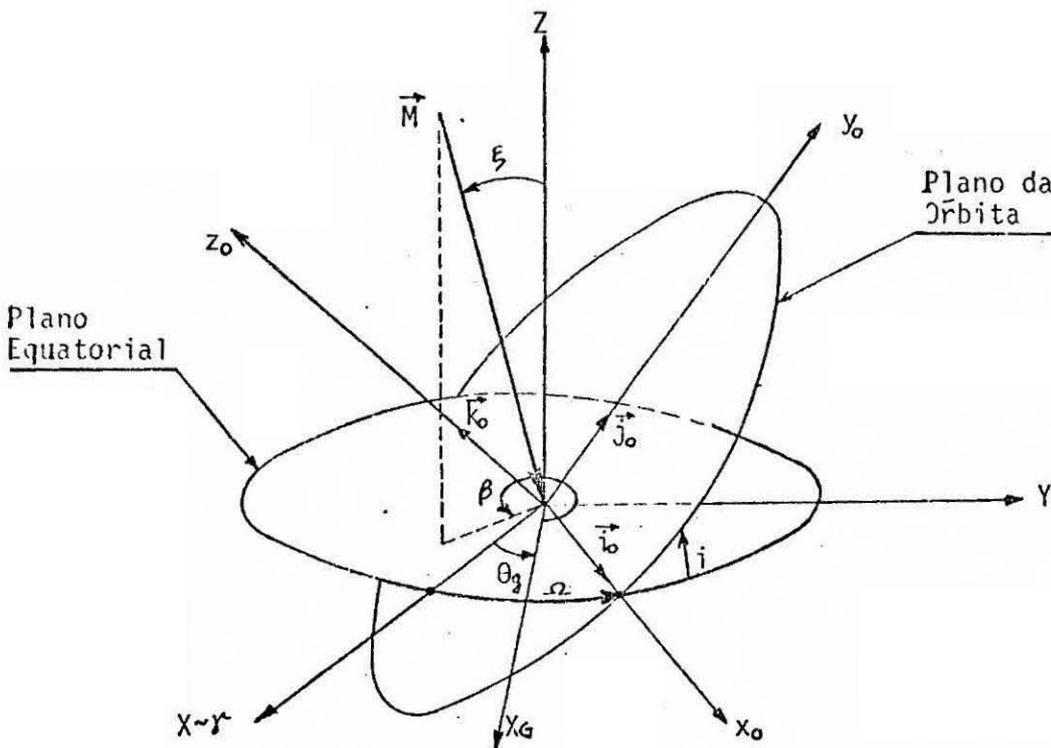


Fig. 2.2 - Sistemas de referência e dipolo geomagnético.

Conforme já definido na seção 2.2, o sistema inercial (X,Y,Z) é fixo em relação à Terra com o eixo Z coincidente com o eixo de rotação da mesma, e o eixo X no plano do Equador e apontando para o Equinócio Vernal. O sistema da órbita (x_0, y_0, z_0) tem o eixo x_0 na direção do nodo ascendente, e o eixo z_0 normal ao plano da órbita (ver Figura 2.2).

O dipolo geomagnético representado no sistema inercial é dado por

$$\vec{M}_I = M \left[-\text{sen}\xi \cos(\beta+\theta_g), \text{sen}\xi \text{sen}(\beta+\theta_g), -\text{cos}\xi \right] \quad (2.11)$$

onde $\xi = 11,4^\circ$; $\beta = 289,3^\circ$ e $M = 8,1 \times 10^{15} \text{Wb.m}$ (Wertz, 1978).

O Tempo Sideral de Greenwich θ_g é dado pela expressão:

$$\theta_g = \bar{\theta}_g + \dot{\theta} t \quad (2.12)$$

sendo $\dot{\theta} = 360,9856473^\circ/\text{dia}$

onde $\bar{\theta}_g$ é o tempo sideral de Greenwich às zero horas, e t é a fração do dia, sendo

$$t = (\text{HORA}/24) + (\text{MIN}/1440) + (\text{SEG}/86400)$$

$$\bar{\theta}_g = 99,6909833^\circ + 36000,7889^\circ Tu + 0,00038708^\circ Tu^2$$

$$Tu = (\text{DJ} - 2415020)/36525$$

A Data Juliana DJ é dada por

$$\text{DJ} = 367(\text{ANO}) - 7(\text{ANO} + (\text{MES} + 9)/12)/4 + 275(\text{MES}/9) + \text{DIA} + 1721013,5$$

Admitindo-se fixo o sistema do plano orbital, utiliza-se a matriz de rotação $R_1(i, \Omega)$ que leva do sistema inercial para o sistema orbital, obtendo-se assim as componentes do dipolo geomagnético no sistema da órbita,

$$\vec{M}_0 = R_1 \vec{M}_I \quad (2.13)$$

sendo

$$R_1(i, \Omega) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\cos i \sin \Omega & \cos i \cos \Omega & \sin i \\ \sin i \sin \Omega & -\sin i \cos \Omega & \cos i \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Fazendo $\gamma = \beta + \theta_g$, obtêm-se

$$\begin{aligned} M_{x_0} &= M [(-\sin \xi \cos \gamma) \cos \Omega + (\sin \xi \sin \gamma) \sin \Omega] \\ M_{y_0} &= M [(-\sin \xi \cos \gamma)(-\cos i \sin \Omega) + (\sin \xi \sin \gamma)(\cos i \cos \Omega) \\ &\quad + \sin i (-\cos \xi)] \\ M_{z_0} &= M [(-\sin \xi \cos \gamma)(\sin i \sin \Omega) + (\sin \xi \sin \gamma)(-\sin i \cos \Omega) \\ &\quad + \cos i (-\cos \xi)] \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde M_{x_0} , M_{y_0} e M_{z_0} representam as componentes do dipolo geomagnético no sistema da órbita. As *médias* destas componentes durante um período orbital podem ser obtidas levando em conta a rotação aproximada da Terra durante esse mesmo período.

2.3.4 - TORQUE MÉDIO E DESLOCAMENTO TEMPORAL

Das equações (2.1) e (2.2) (Renard, 1967), no intervalo de tempo $[t_i, t_f]$ obtêm-se

$$\begin{aligned} \Delta \vec{k} &= \vec{k}(t_f) - \vec{k}(t_i) = (1/I_3 \dot{\phi}) \int_{t_i}^{t_f} \vec{T} dt \equiv \\ &[(t_f - t_i)/I_3 \dot{\phi}] \langle \vec{T} \rangle \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde \vec{k} é a orientação do eixo de "spin" e $\langle \vec{T} \rangle$ é o torque médio (representado pelo símbolo $\langle \rangle$) durante o intervalo $[t_i, t_f]$, obtendo-se o deslocamento aproximado ou reorientação de \vec{k} no mesmo período. A validade desta análise foi confirmada pelos resultados obtidos através de computador analógico (Swiss Study Group ESR0 II, 1964).

Sendo o momento de controle dado por

$$\vec{m} = m^* \vec{k} \quad (2.17)$$

onde m^* é constante, conclui-se que o deslocamento $\Delta \vec{k}$ é proporcional ao torque médio $\langle \vec{T} \rangle$, isto é, considerando a taxa do "spin" $\dot{\phi}$ constante e admitindo a média da indução do campo geomagnético \vec{B} durante este período.

2.3.5 - CONSIDERAÇÕES SOBRE O TORQUE DE CONTROLE DURANTE UM PERÍODO ORBITAL

Para efeitos de cálculo do torque de controle causados pelo campo geomagnético (Patapoff, 1963), em períodos orbitais muito menores que um dia (processo "averaging"), considera-se:

- (i) Admitir que a orientação do eixo de "spin" não varia (deslocamento lento) durante um intervalo de integração de uma órbita).
- (ii) Desprezar a regressão nodal e a rotação apsidal durante o mesmo tempo, ou seja, a órbita fica "congelada" durante o mesmo período orbital. Estes movimentos são considerados muito lentos em relação ao movimento médio orbital.
- (iii) Admitir as médias das componentes do dipolo geomagnético no período orbital considerado (período da órbita $\tau \ll 24$ horas).

Este processo ("averaging") foi estendido para efeitos do cálculo do controle, ou seja, pode-se admitir que o momento magnético de controle, embora de ordem de magnitude superior à do momento magnético residual e variando durante o período orbital, ainda assim causará taxas lentas de deslocamento em relação ao rápido movimento médio orbital $n = 2\pi/\zeta$. Conseqüentemente, a variação na atitude do eixo de "spin", durante o período de integração, será desprezada nas expressões que contêm fatores que variam rapidamente com a anomalia verdadeira. Não obstante, a integração dos efeitos de curto período será considerada durante um período orbital, para levar em conta as rápidas variações das componentes do campo geomagnético.

2.3.6 - COMPONENTES INSTANTÂNEAS DO TORQUE DE CONTROLE

Considerando fixa a magnitude do momento magnético da bobina, e dada a orientação do vetor do eixo de "spin" \vec{k} e a indução do campo geomagnético \vec{B} no sistema da órbita, as *componentes instantâneas* do torque de controle para um satélite com órbita não-circular no campo rotativo geomagnético são dadas por

$$(\vec{T})_0 = m(\vec{k} \times \vec{B})_0 \quad (2.18)$$

onde, a indução do campo geomagnético no sistema da órbita \vec{B}_0 é dada por (Patapoff, 1963)

$$\vec{B}_0 = \left[\begin{array}{l} (3M_{y_0}/r^3)(\text{sen}\chi\text{cos}\chi) + (M_{x_0}/r^3)(3\text{cos}^2\chi - 1), \\ (M_{y_0}/r^3)(3\text{sen}^2\chi - 1) + (3M_{x_0}/r^3)(\text{sen}\chi\text{cos}\chi), \\ -M_{z_0}/r^3 \end{array} \right] \quad (2.19)$$

sendo, $\chi = \omega + v$ o ângulo entre o nodo ascendente e o raio vetor do satélite, v representa a anomalia verdadeira, r é a distância do sa

têlite ao centro da Terra, e M_{x_0} , M_{y_0} e M_{z_0} são os elementos do dipolo geomagnético dados no sistema da órbita (Figura 2.2).

Estas expressões são utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

2.3.7 - LEI GERAL DE COMANDO

Para gerar o momento magnético de controle através de bobinas magnéticas, utiliza-se geralmente o computador a bordo do satélite ou assume-se comandos de rotina da Terra, seja para ligar, desligar ou inverter a polaridade da bobina. O controle, quase sempre, será usado para a aquisição de atitude após a injeção do satélite, para manobras ou para corrigir pequenos erros na orientação ideal.

Considerando duas polaridades e um número discreto de magnitudes de momentos de controle, numa situação genérica de acionamento do tipo liga-desliga (Renard, 1967), o pulso inicial é dado pelo momento $m^* \vec{k}$ no intervalo $[x_i^*, x_f^*]$. Analogamente m^{**} , m^{***} ... são definidos para os intervalos $[x_i^{**}, x_f^{**}]$, $[x_i^{***}, x_f^{***}]$... respectivamente, durante um período orbital. Portanto, a *Lei Geral de Comando* para um número total de K pulsos durante um período orbital (Figura 2.3) é dada por

$$\left\{ \begin{array}{ll} m = m^* & \text{em } x_i^* \leq x \leq x_f^* \\ m = m^{**} & \text{em } x_i^{**} \leq x \leq x_f^{**} \dots \\ m = m^{(K)} & \text{em } x_i^{(K)} \leq x \leq x_f^{(K)} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

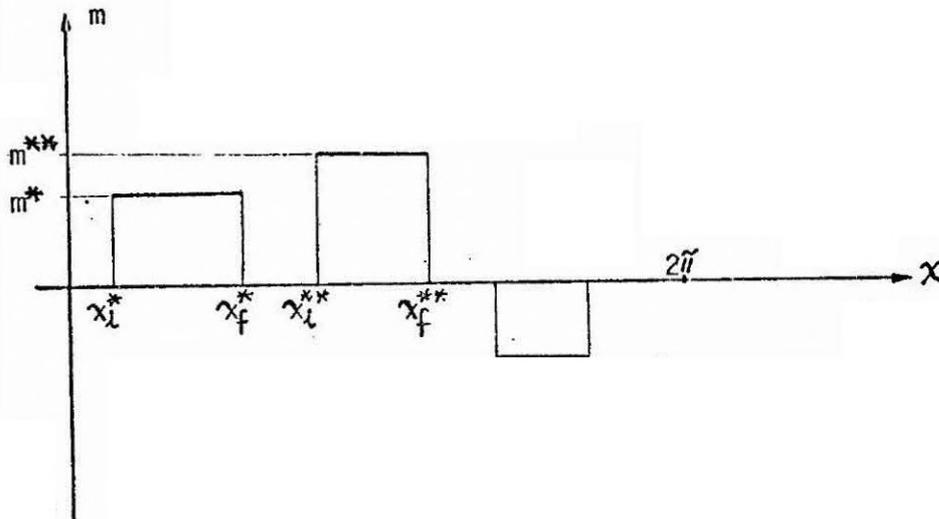


Fig. 2.3 - Lei geral de comando durante uma órbita.

Apenas para efeito de ilustração (já que esta abordagem não será usada neste trabalho), se forem consideradas as aproximações de Renard (1967), integrando-se as equações (2.18) durante o período da órbita, utilizando o processo "averaging" estendido, obtêm-se

$$\langle \vec{T}_0 \rangle_{\zeta} = \vec{k}_{s0} \times \vec{K}_{\zeta} \quad (2.21)$$

onde \vec{k}_{s0} é a orientação do eixo de "spin" no sistema da órbita, $\langle \vec{T}_0 \rangle_{\zeta}$ é o torque médio durante um período orbital, e o vetor \vec{K}_{ζ} , o qual depende das componentes do dipolo geomagnético no sistema da órbita (geometria da órbita, instante do dia) e dos coeficientes do torque de controle (parâmetros orbitais, lei de comando e magnitude do momento de controle), dados na equação (2.23), é aproximado pela expressão (Renard, 1967):

$$\vec{K}_{\zeta} = [3AM_{y0} + DM_{x0}, 3AM_{x0} + CM_{y0}, -EM_{z0}] \quad (2.22)$$

onde os elementos do dipolo geomagnético M_{x0} , M_{y0} e M_{z0} são definidos anteriormente, e os coeficientes do torque de controle, tam

bem válidos ao longo de um período orbital, são dados pelas expressões

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{k=1}^K Fa(x_i^{(k)}, x_f^{(k)}, m^{(k)}) \\
 E &= \sum_{k=1}^K Fe(x_i^{(k)}, x_f^{(k)}, m^{(k)}) \\
 C &= \sum_{k=1}^K Fc(x_i^{(k)}, x_f^{(k)}, m^{(k)}) \\
 D &= E - C
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde $m^{(k)}$ é a magnitude do momento magnético ao longo do pulso, $[x_i^{(k)}, x_f^{(k)}]$ é o intervalo do pulso aplicado, e K é o número de pulsos.

As funções Fa , Fe e Fc são dadas pelas expressões

$$\begin{aligned}
 Fa(x_i, x_f, m) &= (1/2\pi p^3)(1-e^2)^{3/2} m \left[(1/4)(\cos 2x_i - \cos 2x_f) \right. \\
 &\quad \left. + (1/3)e \cos \omega (\cos^3 x_i - \cos^3 x_f) - (1/3)e \sin \omega (\sin^3 x_i - \sin^3 x_f) \right] \\
 Fe(x_i, x_f, m) &= (1/2\pi p^3)(1-e^2)^{3/2} m \left[(x_f - x_i) + e \cos \omega (\sin x_f - \sin x_i) \right. \\
 &\quad \left. - e \sin \omega (\cos x_f - \cos x_i) \right] \\
 Fc(x_i, x_f, m) &= (1/2\pi p^3)(1-e^2)^{3/2} m \left[(1/2)(x_f - x_i) - (3/4)(\sin 2x_f - \sin 2x_i) \right. \\
 &\quad - e \cos \omega (\sin x_f \cos^2 x_f - \sin x_i \cos^2 x_i) \\
 &\quad - e \sin \omega (\sin^2 x_f \cos x_f - \sin^2 x_i \cos x_i) \\
 &\quad \left. - e \sin \omega (\cos x_f - \cos x_i) \right]
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

que dependem dos parâmetros orbitais e , p , ω .

Esta modelagem aproximada pode ser bastante útil numa fase de análise, associada aos resultados da equação (2.16), de modo a permitir a formulação de problemas de subotimização de manobras como problemas totalmente parametrizados nos "instantes" $x_i^{(k)}$, $x_f^{(k)}$ de cada período orbital da manobra.

2.3.8 - ORIENTAÇÃO DO EIXO DE "SPIN"

A orientação do eixo de "spin" no sistema inercial é dada pelo vetor unitário

$$\vec{k} = [\cos\delta \cos\alpha, \cos\delta \operatorname{sen}\alpha, \operatorname{sen}\delta] \quad (2.25)$$

onde, δ é a declinação e α é a ascensão reta (ver Figura 2.4).

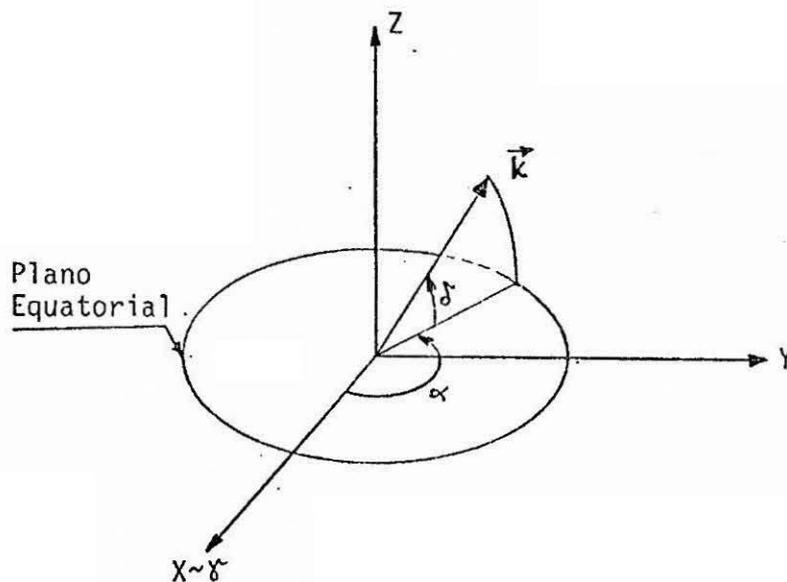


Fig. 2.4 - Orientação do eixo de "spin" do satélite no sistema inercial.

Fazendo uso da matriz de rotação $R_1(i, \Omega)$, leva-se a orientação do eixo de "spin" do sistema inercial para o sistema da órbita, ou seja

$$\vec{k}_{SO} = R_1 \vec{k} \quad (2.26)$$

onde a matriz de rotação $R_1(i, \Omega)$ é admitida fixa ao longo da manobra, obtendo

$$\vec{k}_{SO} = R_1(i, \Omega) \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{x_0} \\ 1_{y_0} \\ 1_{z_0} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

2.3.9 - COMPONENTES MÉDIAS DO TORQUE DE CONTROLE VÁLIDAS DURANTE UM PERÍODO ORBITAL

Sendo o torque médio durante um período orbital dado por $\langle \vec{T}_0 \rangle_\zeta = \vec{k}_{SO} \times \vec{K}_\zeta$ (ver seção 2.3.7),

$$\text{onde } \vec{K}_\zeta = [3AM_{y_0} + DM_{x_0}, 3AM_{x_0} + CM_{y_0}, -EM_{z_0}]$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \langle T_{x_0} \rangle_\zeta &= [1_{y_0} (-EM_{z_0}) - 1_{z_0} (3AM_{x_0} + CM_{y_0})] \\ \langle T_{y_0} \rangle_\zeta &= -[1_{x_0} (-EM_{z_0}) - 1_{z_0} (3AM_{y_0} + DM_{x_0})] \\ \langle T_{z_0} \rangle_\zeta &= [1_{x_0} (3AM_{x_0} + CM_{y_0}) - 1_{y_0} (3AM_{y_0} + DM_{x_0})] \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde $\langle T_{x_0} \rangle_\zeta$, $\langle T_{y_0} \rangle_\zeta$ e $\langle T_{z_0} \rangle_\zeta$ representam as componentes do torque médio, durante um período orbital, no sistema da órbita. Para obter as componentes do torque médio no sistema associado ao satélite, faz-se a

transformação do sistema da órbita para o sistema associado ao satêlite, utilizando a matriz de rotação $R_1(i, \Omega)$ dada anteriormente e a matriz de rotação $R_2(\alpha, \delta)$, que leva do sistema inercial para o sistema associado ao satélite, dada por

$$R_2(\alpha, \delta) = \begin{bmatrix} -\text{sen}\alpha & \text{cos}\alpha & 0 \\ -\text{sen}\delta \text{ cos}\alpha & -\text{sen}\delta \text{ sen}\alpha & \text{cos}\delta \\ \text{cos}\delta \text{ cos}\alpha & \text{cos}\delta \text{ sen}\alpha & \text{sen}\delta \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Portanto, o torque médio durante um período orbital, no sistema associado ao satélite é dado por

$$\langle \vec{T} \rangle_{\zeta} = R_3(\alpha, \delta, i, \Omega) \langle \vec{T}_0 \rangle_{\zeta} \quad (2.30)$$

onde

$$R_3(\alpha, \delta, i, \Omega) = R_2(\alpha, \delta) R_1^T(i, \Omega) =$$

$$= \begin{bmatrix} R_3(1,1) & R_3(1,2) & R_3(1,3) \\ R_3(2,1) & R_3(2,2) & R_3(2,3) \\ R_3(3,1) & R_3(3,2) & R_3(3,3) \end{bmatrix}$$

representa a matriz de rotação das componentes do torque médio, durante um período orbital, do sistema orbital para o sistema associado ao satêlite. Sendo,

$$\begin{aligned}
 R_3(1,1) &= -\text{sen}\alpha\text{cos}\Omega + \text{cos}\alpha\text{sen}\Omega \\
 R_3(1,2) &= \text{cos}\delta(\text{sen}\alpha\text{sen}\Omega + \text{cos}\alpha\text{cos}\Omega) \\
 R_3(1,3) &= -\text{sen}\delta(\text{sen}\alpha\text{sen}\Omega + \text{cos}\alpha\text{cos}\Omega) \\
 R_3(2,1) &= -\text{sen}\delta(\text{cos}\alpha\text{cos}\Omega + \text{sen}\alpha\text{sen}\Omega) \\
 R_3(2,2) &= \text{sen}\delta\text{cos}\delta(\text{cos}\alpha\text{sen}\Omega - \text{sen}\alpha\text{cos}\Omega) + \text{cos}\delta\text{sen}\delta \quad (2.31) \\
 R_3(2,3) &= -\text{sen}\delta\text{sen}\delta(\text{cos}\alpha\text{sen}\Omega - \text{sen}\alpha\text{cos}\Omega) + \text{cos}\delta\text{cos}\delta \\
 R_3(3,1) &= \text{cos}\delta(\text{cos}\alpha\text{cos}\Omega + \text{sen}\alpha\text{sen}\Omega) \\
 R_3(3,2) &= -\text{cos}\delta\text{cos}\delta(\text{cos}\alpha\text{sen}\Omega - \text{sen}\alpha\text{cos}\Omega) + \text{sen}\delta\text{sen}\delta \\
 R_3(3,3) &= \text{cos}\delta\text{sen}\delta(\text{cos}\alpha\text{sen}\Omega - \text{sen}\alpha\text{cos}\Omega) + \text{sen}\delta\text{cos}\delta
 \end{aligned}$$

obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 \langle T_x \rangle_\zeta &= R_3(1,1) \langle T_{x_0} \rangle_\zeta + R_3(1,2) \langle T_{y_0} \rangle_\zeta + R_3(1,3) \langle T_{z_0} \rangle_\zeta \\
 \langle T_y \rangle_\zeta &= R_3(2,1) \langle T_{x_0} \rangle_\zeta + R_3(2,2) \langle T_{y_0} \rangle_\zeta + R_3(2,3) \langle T_{z_0} \rangle_\zeta \quad (2.32) \\
 \langle T_z \rangle_\zeta &= R_3(3,1) \langle T_{x_0} \rangle_\zeta + R_3(3,2) \langle T_{y_0} \rangle_\zeta + R_3(3,3) \langle T_{z_0} \rangle_\zeta = \text{zero}
 \end{aligned}$$

onde $\langle T_x \rangle_\zeta$, $\langle T_y \rangle_\zeta$ e $\langle T_z \rangle_\zeta$ representam as *componentes do torque médio*, durante um período orbital, no sistema associado ao satélite; sendo $\langle T_z \rangle_\zeta$ igual a zero, porque a direção do vetor do momento magnético de controle \vec{m} coincide com esta direção.

2.3.10 - CÁLCULO DAS COMPONENTES INSTANTÂNEAS DO TORQUE DE CONTROLE

Conforme as equações (2.18), (2.19) e (2.27) as componentes instantâneas do torque de controle no sistema da órbita são dadas por

$$\begin{aligned}
 T_{x_0} &= I_{y_0} (B_{z_0}) - I_{z_0} (B_{y_0}) \\
 T_{y_0} &= - [I_{x_0} (B_{z_0}) - I_{z_0} (B_{x_0})] \\
 T_{z_0} &= I_{x_0} (B_{y_0}) - I_{y_0} (B_{x_0}) \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} B_{x_0} &= (3M_{y_0}/r^3)(\text{sen}\chi \cos\chi) + (M_{x_0}/r^3)(3\cos^2\chi - 1) \\ B_{y_0} &= (M_{y_0}/r^3)(3\text{sen}^2\chi - 1) + (3M_{x_0}/r^3)(\text{sen}\chi \cos\chi) \\ B_{z_0} &= -M_{z_0}/r^3 \end{aligned} \quad (2.34)$$

sendo, B_{x_0} , B_{y_0} e B_{z_0} as componentes da indução do campo geomagnético no sistema da órbita.

Analogamente à seção anterior, utilizando a matriz de rotação $R_3(\alpha, \delta, i, \Omega)$, obtêm-se as *componentes instantâneas do torque* de controle no sistema associado ao satélite, sendo

$$\begin{aligned} T_x &= R_3(1,1) T_{x_0} + R_3(1,2) T_{y_0} + R_3(1,3) T_{z_0} \\ T_y &= R_3(2,1) T_{x_0} + R_3(2,2) T_{y_0} + R_3(2,3) T_{z_0} \\ T_z &= R_3(3,1) T_{x_0} + R_3(3,2) T_{y_0} + R_3(3,3) T_{z_0} = \text{zero} \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde T_x e T_y são as componentes do torque de controle utilizadas no sistema de equações (2.9).

2.4 - PROBLEMA DE CONTROLE

2.4.1 - INTRODUÇÃO

Nesta seção formula-se o problema de controle a ser otimizado e desenvolve-se a solução das equações dinâmicas.

Mostra-se, também, o procedimento numérico de busca direta, onde o problema associado a cada iteração típica foi construído de forma a permitir uma solução por programação linear, dando ao procedimento características de formulação e implementação bastante simples, para a obtenção de soluções subótimas.

O objetivo deste procedimento numérico consiste em minimizar o tempo de manobra a ser executada pelo eixo de "spin" do satélite, através da otimização dos intervalos de funcionamento da bobina e das respectivas polaridades, considerando-se fixa a magnitude do momento magnético da bobina.

2.4.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema geral a ser otimizado consiste na manobra de reorientação de atitude do eixo de "spin" do satélite (eixo de maior momento de inércia) através da interação do momento magnético de uma bobina, neste eixo, com o campo geomagnético e otimizando-se os intervalos e polaridades de funcionamento desta bobina, de modo a minimizar o tempo de manobra.

Admitindo-se fixo o sistema do plano da órbita, a orientação do eixo "spin" do satélite no ponto de injeção é dada pela declinação δ_0 e a ascensão reta α_0 , com velocidade angular $\dot{\phi}_0$.

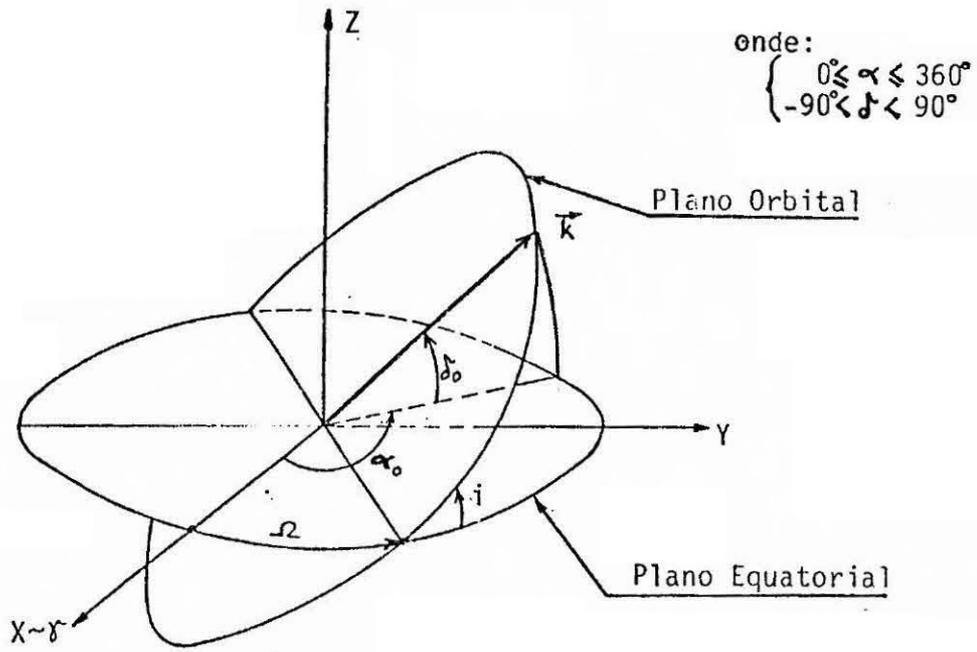
No instante inicial da manobra a orientação do eixo "spin" será dada por δ_i e α_i , com a velocidade angular inicial $\dot{\phi}_i$.

O objetivo desejado, que consiste na reorientação do eixo de "spin", é dado pelas condições finais, isto é, δ_f e α_f , conforme a Figura 2.5, em uma situação genérica.

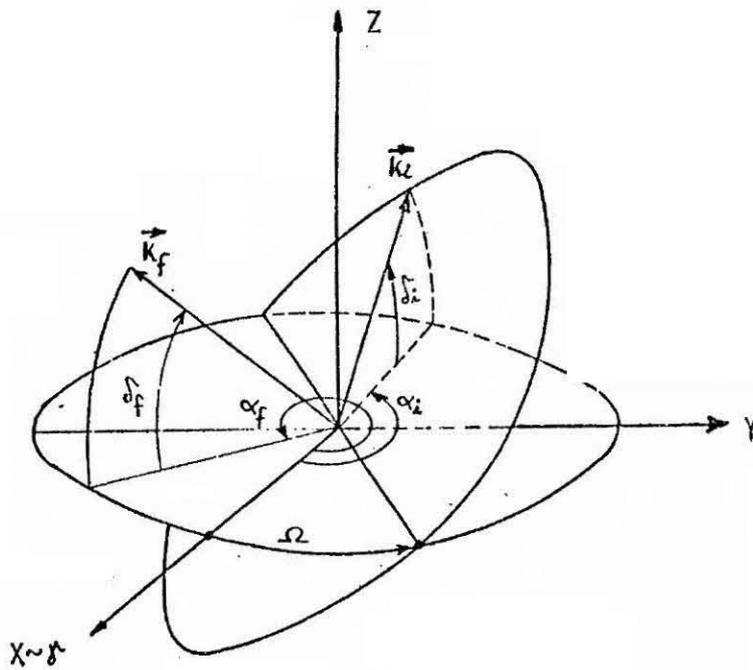
Sendo portanto, o problema a otimizar o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } IP &= t_f \\ \{p_m(t)\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \text{.Sujeito a: } \dot{x}_1 &= \bar{T}_y(p_m(t))/H \\ \dot{x}_2 &= \bar{T}_x(p_m(t))/(H \cos(x_1)); \text{ onde } H = I_3 \dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.37)$$



(a)



(b)

Fig. 2.5 - (a) Orientação do vetor do eixo de "spin" no ponto de injeção do satélite e (b) no instante inicial e final da manobra no sistema inercial.

Dadas as condições iniciais: $x_1(t_i) = \delta_i$

$$x_2(t_i) = \alpha_i$$

e as condições finais: $x_1(t_f) = \delta_f$

$$x_2(t_f) = \alpha_f$$

onde, $p_m(t)$ é a polaridade temporal do momento magnético da bobina, x_1 é a declinação, x_2 é a ascensão reta, H é o momento angular do satélite, e T_x e T_y representam as componentes do torque de controle no sistema associado ao satélite.

2.4.3 - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE VÍNCULO

A solução analítica aproximada das equações de vínculo (2.37) é dada conforme a seguir:

De

$$\dot{x}_1 = (1/H) T_y ; \quad \text{onde } H = \text{cte.}$$

tem-se,

$$x_1(t) = \bar{x}_1(t_i) + (1/H) \int_{t_i}^t T_y(\zeta) d\zeta$$

Para efeitos do cálculo do torque considera-se \vec{k} (orientação do eixo de "spin") constante durante o intervalo de integração $[t_i, t_f]$, por causa do deslocamento ser muito lento, isto é, x_1 e x_2 variam lentamente durante um período da órbita (ver seção 2.3.5).

Utilizando as equações (2.27), (2.33), (2.34) e (2.35), obtêm-se:

$$\int_{t_i}^t T_y dt = \overline{R_3(2,1)} \int T_{x_0} dt + \overline{R_3(2,2)} \int T_{y_0} dt + \overline{R_3(2,3)} \int T_{z_0} dt$$

onde,

$$\int T_{x_0} dt = \bar{l}_{y_0} \int B_{z_0} dt - \bar{l}_{z_0} \int B_{y_0} dt$$

$$\int T_{y_0} dt = - [\bar{l}_{x_0} \int B_{z_0} dt - \bar{l}_{z_0} \int B_{x_0} dt]$$

$$\int T_{z_0} dt = \bar{l}_{x_0} \int B_{y_0} dt - \bar{l}_{y_0} \int B_{x_0} dt$$

As expressões B_{x_0} , B_{y_0} e B_{z_0} são as componentes da indução do campo geomagnético, funções de $\chi = \omega + \nu$ (conforme seção 2.3.6), as quais variam muito rapidamente durante uma órbita.

Neste problema, tem-se que a excentricidade \bar{e} é igual a zero ($e = 0$) o que implica que o argumento do perigeu (ω) é indeterminado, ficando $\chi = \nu$, isto é, $E = M = \nu = nt$; onde $n = \sqrt{\mu/a^3}$, E é a anomalia excêntrica, M é a anomalia média, a é o semi-eixo maior da órbita, $\mu = 3,986006 \times 10^{14} \text{m}^3/\text{s}^2$ é a constante gravitacional geocêntrica e t é o instante de tempo correspondente à posição atual do satélite, medido a partir do cruzamento do nodo ascendente.

Portanto, as integrais de B_{x_0} , B_{y_0} e B_{z_0} em relação ao tempo, são

$$\int B_{x_0} dt = (M_{y_0}/r^3) [3((t/2) - (\text{sen} 2nt/4n)) - t]_{t_i}^t + (3M_{x_0}/r^3) [\text{sen}^2 nt/2n]_{t_i}^t = K_1(t)$$

$$\int B_{z_0} dt = (-M_{z_0}/r^3) [t]_{t_i}^t = K_3(t)$$

$$\int B_{y_0} dt = (3M_{y_0}/r^3) [\text{sen}^2 nt/2n]_{t_i}^t + (M_{x_0}/r^3) [3((t/2)+(\text{sen}2nt/4n))-t]_{t_i}^t = K_2(t)$$

Substituindo estas expressões nas equações anteriores, ob-
têm-se a solução de \dot{x}_1 , dada por

$$x_1(t) = \bar{x}_1(t_i) + (1/H) \left\{ \begin{aligned} &\bar{R}_3(2,1) [\bar{T}_{y_0}(K_3) - \bar{T}_{z_0}(K_2)] \\ &- \bar{R}_3(2,2) [\bar{T}_{x_0}(K_3) - \bar{T}_{z_0}(K_1)] \\ &+ \bar{R}_3(2,3) [\bar{T}_{x_0}(K_2) - \bar{T}_{y_0}(K_1)] \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

Em $\dot{x}_2 = (1/H)(T_x/\cos(x_1))$; $H = \text{cte.}$

faz-se $\dot{x}_2 = (1/H) \sec(x_1) T_x$

obtendo-se $x_2(t) = \bar{x}_2(t_i) + (1/H) \int_{t_i}^t \sec(x_1) T_x dt$

$$\begin{aligned} \text{sendo, } \int_{t_i}^t \sec(x_1) T_x dt &= \bar{R}_3(1,1) \int \sec(x_1) T_{x_0} dt \\ &+ \bar{R}_3(1,2) \int \sec(x_1) T_{y_0} dt \\ &+ \bar{R}_3(1,3) \int \sec(x_1) T_{z_0} dt \end{aligned}$$

Fazendo, $f(x_1) = \sec(x_1) T_{x_0}$, e linearizando esta expressão através do 1º termo da série de Taylor, tem-se

$$f(x_1) = f(\bar{x}_1) + f_{x_1}(\bar{x}_1) [x_1 - \bar{x}_1] + R \quad ; \quad R = \text{resíduo}$$

sendo,

\bar{x}_1 calculado no instante inicial em que se executa a integração,

$$f(\bar{x}_1) = \sec(\bar{x}_1) \bar{T}_{x_0}$$

$$f_{x_1}(\bar{x}_1) = \sec(\bar{x}_1) \operatorname{tg}(\bar{x}_1) \bar{T}_{x_0}$$

obtendo-se:

$$\int \sec(x_1) \bar{T}_{x_0} dt = \bar{T}_{x_0} \sec(\bar{x}_1) \left[t + \operatorname{tg}(\bar{x}_1) \left(\int_{t_i}^t x_1 dt - (\bar{x}_1)t \right) \right]_{t_i}^t = Q_1(t)$$

onde a solução da integral $\int_{t_i}^t x_1 dt$ é dada por

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^t x_1 dt = & (\bar{x}_1) \left[t \right]_{t_i}^t + (1/H) \left\{ \bar{R}_3(2,1) \left[\bar{T}_{y_0} \int K_3 dt - \bar{T}_{z_0} \int K_2 dt \right] \right. \\ & - \bar{R}_3(2,2) \left[\bar{T}_{x_0} \int K_3 dt - \bar{T}_{z_0} \int K_1 dt \right] \\ & \left. + \bar{R}_3(2,3) \left[\bar{T}_{x_0} \int K_2 dt - \bar{T}_{y_0} \int K_1 dt \right] \right\} \end{aligned}$$

sendo,

$$\begin{aligned} \int K_1 dt = & (M_{y_0}/r^3) \left\{ (1/2) \left[t^2/2 \right]_{t_i}^t - (3/4n) \left[-\cos 2nt/2n \right]_{t_i}^t \right\} \\ & + (3M_{x_0}/r^3 2n) \left[(t/2) - (\operatorname{sen} 2nt/4n) \right]_{t_i}^t \end{aligned}$$

$$\int K_3 dt = (-M_{z_0}/r^3) \left[t^2/2 \right]_{t_i}^t$$

$$\int K_2 dt = (3M_{y_0}/r^3 2n) \left[(t/2) - (\text{sen}2nt/4n) \right]_{t_i}^t$$

$$+ (M_{x_0}/r^3) \left\{ (1/2) \left[t^2/2 \right]_{t_i}^t + (3/4n) \left[-\text{cos}2nt/2n \right]_{t_i}^t \right\}$$

obtendo-se assim o valor da integral $\int_{t_i}^t \sec(x_1) T_{y_0} dt$.

Linearizando $g(x_1) = \sec(x_1) T_{y_0}$, conforme a solução da integral anterior, tem-se

$$g(x_1) = g(\bar{x}_1) + g_{x_1}(\bar{x}_1) \left[x_1 - \bar{x}_1 \right] + R$$

onde,

$$g(\bar{x}_1) = \sec(\bar{x}_1) \bar{T}_{y_0}$$

$$g_{x_1}(\bar{x}_1) = \sec(\bar{x}_1) \text{tg}(\bar{x}_1) \bar{T}_{y_0}$$

obtendo-se

$$\int \sec(x_1) T_{y_0} dt = \bar{T}_{y_0} \sec(\bar{x}_1) \left\{ \left[t \right]_{t_i}^t + \text{tg}(\bar{x}_1) \left(\int x_1 dt - (\bar{x}_1) \left[t \right]_{t_i}^t \right) \right\}$$

$$= Q_2(t)$$

Analogamente, a solução de $\int \sec(x_1) T_{z_0} dt$ é dada por

$$\int \sec(x_1) T_{z_0} dt = \bar{T}_{z_0} \sec(\bar{x}_1) \left\{ \left[t \right]_{t_i}^t + \text{tg}(\bar{x}_1) \left(\int x_1 dt - \bar{x}_1 \left[t \right]_{t_i}^t \right) \right\}$$

$$= Q_3(t)$$

Obtendo-se a solução de \dot{x}_2 dada por:

$$x_2(t) = \bar{x}_2(t_i) + (1/H) \left[\bar{R}_3(1,1)Q_1(t) + \bar{R}_3(1,2)Q_2(t) + \bar{R}_3(1,3)Q_3(t) \right] \quad (2.39)$$

Nas equações anteriores, o tempo t é dado em segundos, os valores do estado em radianos (rad) e a aproximação admitida válida ao longo de cada período orbital.

2.5 - PROCEDIMENTO SUBÓTIMO

Este procedimento consiste na transformação de problemas de controle ótimo em problemas de otimização de parâmetros, pela imposição de uma forma matemática particular ao controle (Williamson, 1971; Rios Neto e Ceballos, 1979), conforme se mostra a seguir.

O problema de controle ótimo básico a ser tratado é o de encontrar a função ótima de controle $u(t)$, no intervalo $t_i \leq t \leq t_f$, de modo a satisfazer as condições a seguir

$$\text{Minimizar: } IP = IP(x_f, t_f) \\ \{u(t)\}$$

$$\text{Sujeito a: } \dot{x} = f(x, u, t), \quad (2.40)$$

$$M(x_f, t_f) = 0$$

$$\text{dados } t_i \text{ e } x(t_i)$$

onde, x é o vetor de estado ($n \times 1$), x_f é o vetor de estado final, u é o vetor de controle ($p \times 1$), M é o vetor de condições terminais ($m \times 1$), IP é o índice de desempenho, t_i é o tempo inicial e t_f é o tempo final.

Tratando o problema (2.40) para o caso em que $u(t)$ é aproximada por uma função parametrizada, a partir da substituição de $u(t)$ por $u(a,t)$ ou, em uma forma mais geral, por $u(a,x,t)$, tem-se o problema a seguir

$$\text{Minimizar: } IP = IP(x_f, a_g) \\ \{u(a,x,t)\}$$

$$\text{Sujeito a: } \dot{x} = f(x, a_1, a_2, \dots, a_{g-1}, t), \quad (2.41)$$

$$M(x_f, a_g) = 0$$

$$\text{dados } t_i \text{ e } x(t_i)$$

onde, a é o vetor $(g \times 1)$ de parâmetros a serem otimizados e a_g é o último parâmetro do vetor a , que representa o tempo final t_f .

2.5.1 - PROBLEMA ASSOCIADO À ITERAÇÃO TÍPICA

Considere-se o problema (2.41). A partir de uma perturbação linear das equações de restrições e do índice de desempenho, respeitados os vínculos dinâmicos, tem-se o sistema de equações a seguir:

$$\Delta M = (\partial M / \partial x_f)(\partial x_f / \partial a) \Delta a + (\partial M / \partial a_g) \Delta a_g \\ \Delta IP = (\partial IP / \partial x_f)(\partial x_f / \partial a) \Delta a + (\partial IP / \partial a_g) \Delta a_g \quad (2.42)$$

A condição de caminhar na direção da satisfação dos vínculos e da minimização de IP sugere as seguintes imposições

$$\Delta M = \alpha M \quad , \quad -1 \leq \alpha < 0 \\ \Delta IP \geq \beta |IP| \quad , \quad \beta < 0 \quad (2.43)$$

onde, o parâmetro α é negativo, pois está associado à necessidade de reduzir cada componente de M em uma iteração típica e β é também um parâmetro negativo pois está associado à minimização.

O sinal maior ou igual na equação de ΔIP (equação 2.43) evita a quebra da linearização do sistema de equações (2.42) ao longo do processo de busca para reduzir ΔIP . Para a escolha do problema associado a cada iteração típica, dois aspectos devem ser considerados: o primeiro é que dentro do limite permitido nas equações (2.43) para ΔIP , este deve ser o menor possível, ou seja, deve ser minimizado. O segundo aspecto é, que além de satisfazer as aproximações de primeira ordem, para se obter uma convergência mais rápida faz-se necessário que uma norma do vetor Δa deva ser minimizada.

Das equações (2.42); (2.43) e das considerações anteriores, pode ser proposto o problema associado à cada iteração típica a seguir.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } G &= W_1 |\Delta a_1| + W_2 |\Delta a_2| + \dots + W_g |\Delta a_g| + \bar{W} \Delta IP \\ \{\Delta a\} \end{aligned}$$

sendo $\bar{W} > 0$, $W_i > 0$

$$\text{Sujeito a: } (\partial M / \partial x_f)(\partial x_f / \partial a) \Delta a + (\partial M / \partial a_g) \Delta a_g = \alpha M$$

$$(\partial IP / \partial x_f)(\partial x_f / \partial a) \Delta a + (\partial IP / \partial a_g) \Delta a_g \geq \beta |IP| \quad (2.44)$$

onde W_1, W_2, \dots, W_g e \bar{W} são pesos positivos, e Δa é o incremento do vetor a (incógnita do problema associado à iteração típica).

Para formular o problema na forma usual de programação linear, a seguinte transformação de variáveis é feita

$$\Delta a_i = S_i - S_{g+i} \quad , \quad S_i \geq 0 \quad , \quad S_{g+i} \geq 0 \quad , \quad i=1,2,\dots,g \quad (2.45)$$

onde a variável $S_{2g+1} \geq 0$ (variável de folga) será introduzida para eliminar a desigualdade da equação (2.44). Estas transformações levam ao problema equivalente de minimização

$$\text{Minimizar: } G = \sum_{i=1}^{2g+1} \eta_i S_i \quad ; \quad \eta_i > 0$$

$$\{S_i, i=1, \dots, 2g+1\}$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^g A_{ji} S_i - \sum_{i=1}^g A_{ji} S_{g+i} = \alpha M_j \quad ; \quad j=1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^g B_i S_i - \sum_{i=1}^g B_i S_{g+i} - S_{2g+1} = \beta \quad |IP| \quad (2.46)$$

onde

$$S_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2g+1$$

dados

$$A_{ji} = (\partial M_j / \partial x_f) (\partial x_f / \partial a_i), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, g-1$$

$$A_{jg} = (\partial M_j / \partial x_f) (\partial x_f / \partial a_g) + (\partial M_j / \partial a_g), \quad \text{para } i = g$$

$$B_i = (\partial IP / \partial x_f) (\partial x_f / \partial a_i), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, g-1$$

$$B_g = (\partial IP / \partial x_f) (\partial x_f / \partial a_g) + (\partial IP / \partial a_g), \quad \text{para } i = g$$

Assim, em cada iteração do procedimento, determinam-se os incrementos do vetor de parâmetros a . Usando os valores do vetor a de uma prévia iteração, ou valores inicialmente supostos, determinam-se os valores da matriz A , dos vetores B e M e do escalar IP .

Da solução do problema definido pelas equações (2.46) as variáveis S_k são obtidas, permitindo a determinação do vetor de incrementos Δa na equação (2.45) e assim a definição de um novo vetor

de parâmetros a . O processo é repetido até que as restrições sejam satisfeitas com a precisão desejada e a oscilação nos valores de IP esteja nos limites compatíveis com esta precisão.

No problema (2.46) α , β e os η_i são parâmetros bastante importantes para o cumprimento dos objetivos do método, para cada iteração. Para efeito de uma maior dinamização e garantia do processo de convergência, os parâmetros α , β e η_{2g+1} devem ser controlados ao longo do processo de convergência e, para isto, é necessário ao final de cada iteração verificar se os objetivos esperados foram alcançados.

O tratamento numérico envolve as seguintes etapas típicas em cada iteração: integrações numéricas, derivadas numéricas e a solução do problema de programação linear.

CAPÍTULO 3

SIMULAÇÕES E TESTES NUMÉRICOS

3.1 - INTRODUÇÃO

Apresentam-se neste Capítulo a formulação do problema de teste e a implementação da lei de controle. Inicialmente reproduz-se a lei de controle sem otimização, a cada período orbital e conforme o desenvolvimento de Shigehara (1972). Em seguida é feita a otimização através do procedimento subótimo apresentado no Capítulo anterior.

A otimização da lei de controle desenvolve-se em duas fases: na primeira fase, a otimização é executada separadamente em cada período da órbita, e é repetida até o final da manobra; e na segunda fase se realiza a otimização de uma forma global, desde o início até o fim da manobra.

3.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE TESTE

A manobra a ser otimizada para efeito de teste, conforme o exemplo simulado por Shigehara (1972), pode ser representada para a otimização global conforme a seguir

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & IP = t_f & (3.1) \\ & \{p_m(t)\} \end{aligned}$$

Sujeito a: Vínculos dinâmicos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = \dot{\delta} &= T_y(p_m(t)) / H \\ \dot{x}_2 = \dot{\alpha} &= T_x(p_m(t)) / (H \cos(x_1)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Condições iniciais

t_i é dado.

$$x_1(t_i) = 30^\circ$$

$$x_2(t_i) = 130,966^\circ$$

Condições finais

$$x_1(t_f) = (\pi/2) - i = 60^\circ$$

$$x_2(t_f) = \Omega + (3\pi/2) = 310,966^\circ$$

ou

$$M_1(x_1(t_f), t_f) = x_1(t_f) - 60^\circ = 0$$

$$M_2(x_2(t_f), t_f) = x_2(t_f) - 310,966^\circ = 0$$

Os valores dados das condições iniciais e finais do problema de teste referem-se à orientação (no início e no fim da manobra) do eixo de "spin" do satélite, conforme a Figura 2.5 dada no Capítulo anterior.

Parâmetros do sistema

$$a = 7.378.140 \text{ metros}$$

$$e = 0$$

$$i = 30^\circ$$

$$\Omega = 40,966^\circ$$

(3.3)

os quais foram definidos anteriormente e são os mesmos valores do modelo simulado por Shigehara (1972).

Dos valores destes parâmetros, conclui-se que:

- (i) O argumento do perigeu (ω) é indeterminado porque a excentricidade (e) é igual a zero.
- (ii) Sendo $i=30^\circ$ conclui-se das condições finais que a orientação desejada do eixo de "spin" do satélite é a sua perpendicularidade ao plano da órbita. (ver Figura 2.5).

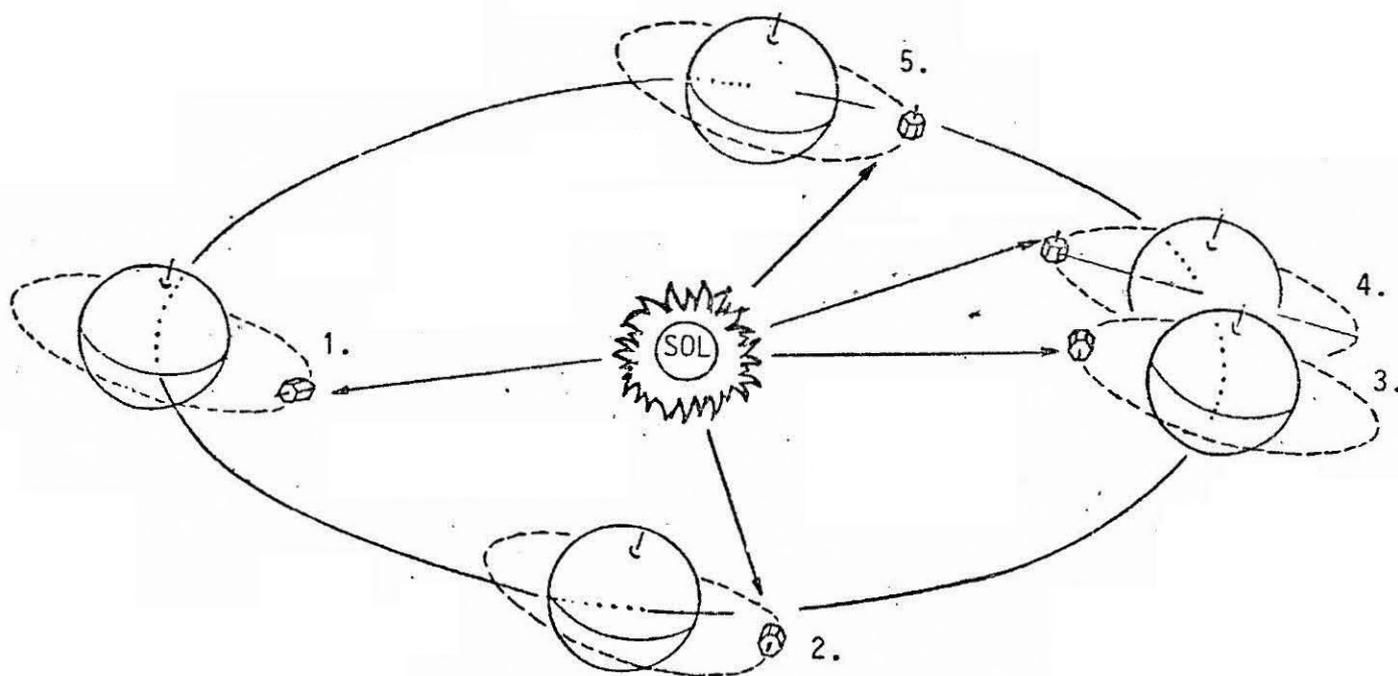


Fig. 3.1 - Esboço de manobra típica:

- 1: Ponto de injeção do satélite com o eixo "spin" paralelo ao plano da órbita.
- 2: Eixo de "spin" paralelo ao plano da órbita.
- 3: Eixo de "spin" paralelo ao plano da órbita, início da manobra.
- 4: Fim da manobra, eixo de "spin" perpendicular ao plano da órbita.
- 5: Eixo de "spin" perpendicular ao plano da órbita.

3.3 - IMPLEMENTAÇÃO DA LEI DE CONTROLE

Para implementar a lei de comando fazem-se as seguintes considerações:

- (i) Das equações de vínculo (2.37) verifica-se que a função Hamiltoniana é linear em m (Apêndice A),
- (ii) Considera-se a magnitude do momento magnético da bobina como sendo de um nível com duas polaridades: $|m(t)| = m^*$,
- (iii) Das duas considerações anteriores, conclui-se que a lei geral de comando é do tipo "bang-bang", e
- (iv) Auxiliados pela lei de controle com critério de estabilização desenvolvida por Shigehara (1972), propõe-se a seguinte lei de controle inicial, por período, conforme a seguir (ver Figura 3.2),

$$\begin{aligned} m^1 &= +m & , & & X_j^1 &\leq X \leq X_f^1 \\ m^2 &= -m & , & & X_j^2 &\leq X \leq X_f^2 \\ m^3 &= +m & , & & X_j^3 &\leq X \leq X_f^3 \\ m^4 &= -m & , & & X_j^4 &\leq X \leq X_f^4 \end{aligned} \tag{3.4}$$

ou, no sentido inverso, isto é,

$$\begin{aligned} m^1 &= -m & , & & X_j^1 &\leq X \leq X_f^1 \\ m^2 &= +m & , & & X_j^2 &\leq X \leq X_f^2 \\ m^3 &= -m & , & & X_j^3 &\leq X \leq X_f^3 \\ m^4 &= +m & , & & X_j^4 &\leq X \leq X_f^4 \end{aligned}$$

conforme indique a lei de controle por estabilização de Shigehara -
(item iv).

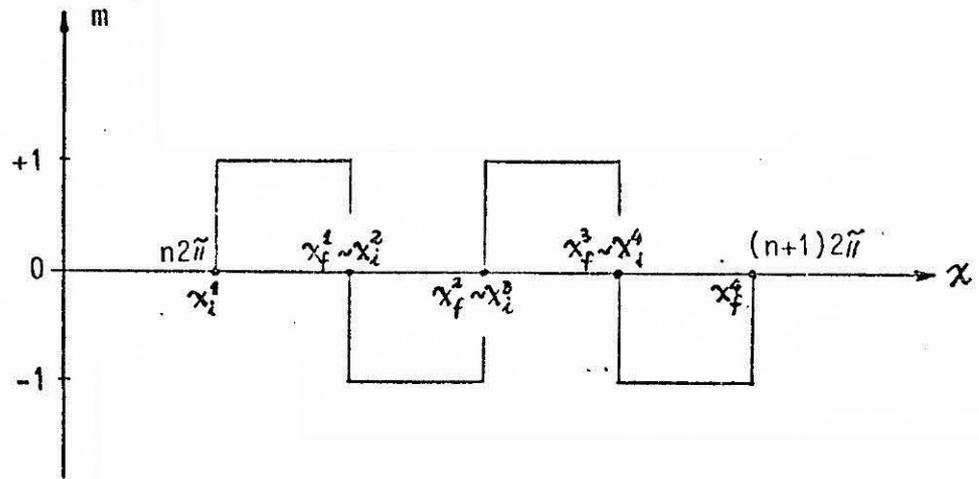


Fig. 3.2 - Implementação da lei geral de comando durante um período orbital.

A otimização desta lei de controle inicial se realiza em dois níveis de aproximação:

O primeiro nível consiste na otimização da manobra, por período, isto é, otimização período por período, conforme detalhado a seguir:

- (i) Calculam-se os pontos de chaveamento do problema de teste através da função de chaveamento (seção 3.4) desenvolvida por Shigehara (1972).
- (ii) Aplica-se o procedimento subótimo em cada período da órbita em que se executa a manobra através da utilização dos parâmetros obtidos no item anterior como suposições iniciais.
- (iii) Repete-se isso sucessivamente, período por período, até o final da manobra.

Desta maneira, se obtêm os intervalos de funcionamento da bobina que forneçam os melhores resultados de deslocamento do eixo "spin" na direção desejada, durante cada período orbital, isto é, a obtenção do torque máximo na direção desejada, em cada período da órbita.

O segundo nível consiste na otimização global da manobra, utilizando os intervalos otimizados a cada período orbital no nível anterior, durante toda a manobra, como parâmetros de partida no procedimento numérico utilizado. Esta segunda fase é executada globalmente, desde o início até o fim da manobra, com a intenção de melhorar o desempenho da lei de controle obtida na fase anterior.

Em geral, as duas fases são diferentes, isto porque na otimização global existirão as interações da manobra como um todo, numa forma íntegra, e na otimização por período estas interações aparecerão de forma incompleta, isto é, a cada período orbital.

Os desempenhos das leis de controle ótimo obtidas nestas duas fases, em relação ao controle inicial por período (Shigehara, 1972), serão fornecidos através dos testes de simulação (Capítulo 4).

3.4 - LEI DE CONTROLE COM CRITÉRIO DE ESTABILIZAÇÃO

Para efeitos de cálculo dos pontos de chaveamento (na manobra de teste) utiliza-se a seguinte lei de controle inicial, por período, chamada *função de chaveamento* a qual é deduzida de uma condição de estabilidade assintótica (Shigehara, 1972).

Para controlar a orientação do eixo de "spin" em termos do momento angular \vec{H} , define-se $\vec{H}_f = I_3 \dot{\phi} \vec{k}_f$ onde \vec{H}_f representa o estado desejado e \vec{k}_f representa a orientação desejada do eixo de "spin".

Sendo o atual estado $\vec{H} = I w_x \vec{i} + I w_y \vec{j} + I_3 w_z \vec{k}$ a diferença entre \vec{H}_f e \vec{H} é chamada de vetor erro $\vec{E} = \vec{H}_f - \vec{H}$. O objetivo da lei de controle consiste em reduzir \vec{E} para zero.

Substituindo esta relação em (2.1), obtêm-se

$$\left(\frac{d\vec{E}}{dt}\right) = -\vec{T} = -U(\vec{k} \times \vec{B})$$

$$\left(\frac{dE^2}{2dt}\right) = -U\vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{B}) \quad ; \quad E = |\vec{E}|$$

onde, $U = m^* \bar{e}$ é a magnitude do momento do dipolo magnético e \vec{B} é o vetor de indução geomagnética.

Se a condição de estabilidade assintótica para \vec{E} é $\left(\frac{dE^2}{dt}\right) \leq 0$, conclui-se que o critério de controle é $U\vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{B}) \geq 0$.

Definindo a função de chaveamento S , por

$$S \equiv \vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{B}) \tag{3.5}$$

a lei de controle do tipo "bang-bang" que governa a polaridade de U é a seguinte:

$$\begin{cases} p_m = +1, & \text{quando } S > 0 \\ p_m = -1, & \text{quando } S < 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

O desenvolvimento da função de chaveamento, a qual reorienta o eixo de "spin" de (θ', ψ') para (θ'_f, ψ'_f) é como segue. No sistema da órbita (ver Figura 3.3), têm-se

$$\vec{k} = (\cos\psi' \operatorname{sen}\theta', \operatorname{sen}\psi' \operatorname{sen}\theta', \cos\theta') \quad \text{e}$$

$$\vec{k}_f = (\cos\psi'_f \operatorname{sen}\theta'_f, \operatorname{sen}\psi'_f \operatorname{sen}\theta'_f, \cos\theta'_f)$$

onde, ψ' e θ' são os ângulos de azimute e co-elevação, respectivamente.

Sendo,

$$\vec{k} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \text{sen}\psi' \text{sen}\theta' B_{03} - \text{cos}\theta' B_{02} \\ \text{cos}\theta' B_{01} - \text{cos}\psi' \text{sen}\theta' B_{03} \\ \text{cos}\psi' \text{sen}\theta' B_{02} - \text{sen}\psi' \text{sen}\theta' B_{01} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

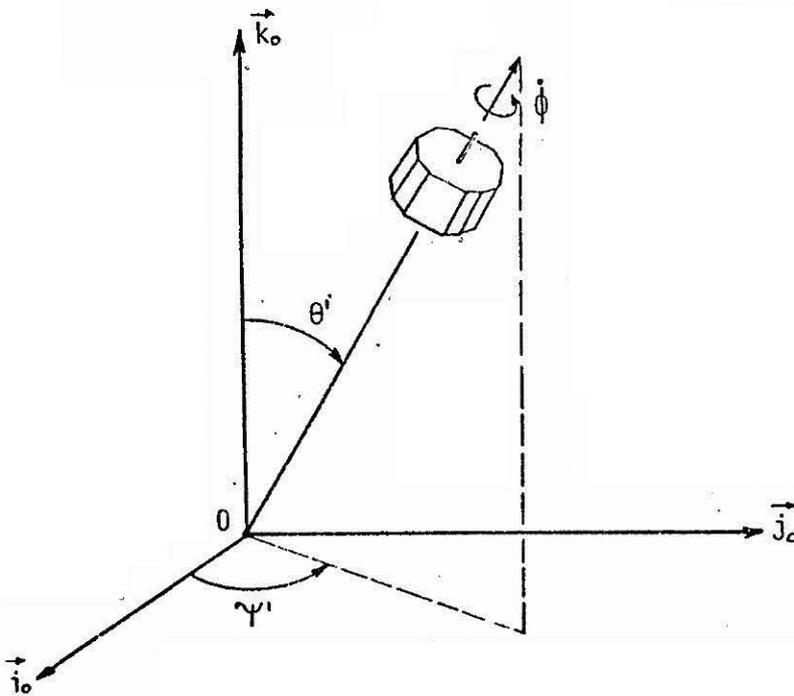


Fig. 3.3 - Orientação do eixo de "spin" do satélite no sistema da órbita.

Ao decompor o vetor erro \vec{E} no sistema da órbita, têm-se

$$\vec{E} = I_3 \dot{\phi} \vec{k}_f - (I w_x \vec{i} + I w_y \vec{j} + I_3 w_z \vec{k})$$

e aplicando as simplificações, tais como, $|\psi' \text{sen} \theta'| |\dot{\theta}'| \ll \dot{\phi}$ e $\dot{\phi}_s + \dot{\psi}' \text{cos} \theta' = \dot{\phi}$, onde $\dot{\phi}_s$ é o ângulo de rotação do eixo de "spin", obtêm-se

$$\vec{E} = I_3 \dot{\phi} \begin{bmatrix} \text{cos} \psi'_f \text{sen} \theta'_f - \text{cos} \psi' \text{sen} \theta' \\ \text{sen} \psi'_f \text{sen} \theta'_f - \text{sen} \psi' \text{sen} \theta' \\ \text{cos} \theta'_f - \text{cos} \theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Substituindo-se estas expressões na equação (3.5), obtêm-se a função de chaveamento S, dada por

$$\begin{aligned} (S/I_3 \dot{\phi}) &= (\text{sen} \psi'_f \text{sen} \theta'_f \text{cos} \theta' - \text{cos} \theta'_f \text{sen} \psi' \text{sen} \theta') B_{O_1} \\ &+ (\text{cos} \theta'_f \text{cos} \psi' \text{sen} \theta' - \text{cos} \psi'_f \text{sen} \theta'_f \text{cos} \theta') B_{O_2} \\ &+ (\text{cos} \psi'_f \text{sen} \theta'_f \text{sen} \psi' \text{sen} \theta' - \text{sen} \psi'_f \text{sen} \theta'_f \text{cos} \psi' \text{sen} \theta') B_{O_3} \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde B_{O_1} , B_{O_2} e B_{O_3} são as componentes da indução geomagnética \vec{B} no sistema da órbita (B_{x_0} , B_{y_0} e B_{z_0} , respectivamente) dadas por

$$\begin{aligned} (B_{O_1}/Dm) &= (3/2) \text{sen} i \text{sen} 2\eta \text{cos} \xi + (1/2) \{ \text{cos}(\gamma - \Omega) + (3/2) \\ &\quad [(1 + \text{cos} i) \text{cos}(2\eta - \gamma + \Omega) + (1 - \text{cos} i) \text{cos}(2\eta + \gamma - \Omega)] \} \text{sen} \xi \\ (B_{O_2}/Dm) &= (1/2) \text{sen} i (1 - 3 \text{cos} 2\eta) \text{cos} \xi + (1/2) \{ \text{cos} i \text{sen}(\gamma - \Omega) \\ &\quad + (3/2) [(1 + \text{cos} i) \text{sen}(2\eta - \gamma + \Omega) + (1 - \text{cos} i) \text{sen}(2\eta + \gamma - \Omega)] \} \text{sen} \xi \\ (B_{O_3}/Dm) &= -\text{cos} i \text{cos} \xi + \text{sen} i \text{sen}(\gamma - \Omega) \text{sen} \xi \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde, $\eta = \chi = \omega + \nu$, $\gamma = \beta + \theta_g$, $Dm = M/r^3$, sendo r já definido anteriormente e Dm o momento do dipolo geomagnético.

3.5 - EXEQUIBILIDADE (CONTROLABILIDADE) DE MANOBRAS COM O SISTEMA DE CONTROLE PROPOSTO

Na análise a seguir, toma-se a orientação do dipolo magnético como sendo coincidente com o eixo de "spin" do satélite. Conforme a lei de controle (Shigehara, 1972) obtida na seção anterior, o controle do sistema é possível a partir de qualquer condição inicial até qualquer condição final de atitude do eixo "spin" relativa à órbita, dentro de certas tolerâncias. Apenas, no caso particular de se modelar o campo geomagnético como um dipolo, existiriam situações iniciais em que o torque de controle seria nulo. Seriam aquelas em que a orientação do eixo de "spin" do satélite no sistema inercial fosse fixa e paralela ao dipolo geomagnético. No entanto, estas situações só existem a nível de modelo. No caso do modelo real do campo geomagnético não há como o eixo de "spin" permanecer paralelo ao vetor de indução geomagnética, ao longo do movimento orbital. A situação mencionada, para o caso de dipolo, no mundo real apenas significaria a existência de torques de controle de pequena intensidade.

Observe-se que o torque produzido nem sempre coincide com o torque líquido ou efetivo. Por isto, define-se o *torque efetivo* T_e (torque que reduz o erro) como sendo o produto escalar do torque \vec{T} e o vetor unitário \vec{E}/E ,

$$T_e = (\vec{E}/E) \cdot \vec{T} = (U/E) \vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{B}) = (U/E) S \quad (3.11)$$

que é proporcional à função de chaveamento; o que significa com exceção das situações citadas, que o dipolo magnético utilizado produz a cada instante um torque efetivo \vec{T}_e que reduz o erro \vec{E} .

A análise desta lei de controle (Shigehara, 1972) revela que para controlar o ângulo de co-elevação θ' (no sistema da órbita) do eixo de "spin" são necessários quatro pontos de chaveamento (instantes em que a polaridade do dipolo magnético é invertida) a cada período orbital, porém, em pontos diferentes daqueles fornecidos pelo mé

todo "averaging" (Renard, 1967), o qual leva a chaveamentos a cada quarto de órbita. Esta diferença faz com que o eixo de "spin" do satélite atinja mais rapidamente a direção desejada. O ponto de chaveamento é sensível ao ângulo de azimute (no sistema da órbita) do eixo de "spin" e à indução geomagnética, de modo que a escolha da polaridade magnética p_m , conforme a atualização da função de chaveamento em cada instante de operação, pode ser feita de maneira a atingir uma taxa do torque de controle mais rápida.

Simulações através de computador digital têm verificado a praticabilidade desta lei de controle (Shigehara, 1972), assim como a notável melhoria em desempenho, relativamente àquela desenvolvida por Renard (1967). Ver resultados obtidos neste trabalho (Capítulo 4).

3.6 - OTIMIZAÇÃO DA MANOBRA POR PERÍODO

Conforme a implementação da lei de controle inicial (seção 3.3), a cada período da órbita em que se executa a manobra, a posição dos pontos de chaveamento de um modo geral são dados por

$$\begin{aligned} a_1 &= x_f^1 \\ a_2 &= x_f^2 \\ a_3 &= x_f^3 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Sendo o problema de otimização, a cada período da órbita, o seguinte

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } IP &= W_1 \left[x_{f_1} - x_1(t_{f_n}) \right]^2 + W_2 \left[x_{f_2} - x_2(t_{f_n}) \right]^2 \\ &\{p_m(t)\} \\ \text{Sujeito a: } \dot{x} &= f(x, a_1, a_2, a_3, t) \\ \text{dados } t_i &\text{ e } x(t_i) \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde, W_1 e W_2 são pesos positivos, x_{f_1} e x_{f_2} são os valores do estado no instante final da manobra, e $x_1(t_{f_n})$ e $x_2(t_{f_n})$ são as variáveis livres do estado ou valores do estado no final do n-ésimo período orbital em que se executa a manobra.

Aplicando uma perturbação linear no índice de desempenho (equação 3.13), obtêm-se

$$\begin{aligned} \Delta IP &= \left(\frac{\partial IP}{\partial x(t_{f_n})} \right) \left(\frac{\partial x(t_{f_n})}{\partial a} \right) \Delta a = & (3.14) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial IP}{\partial x_{1n}} & \frac{\partial IP}{\partial x_{2n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{1n}}{\partial a_1} & \frac{\partial x_{1n}}{\partial a_2} & \frac{\partial x_{1n}}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_{2n}}{\partial a_1} & \frac{\partial x_{2n}}{\partial a_2} & \frac{\partial x_{2n}}{\partial a_3} \end{bmatrix} \Delta a \end{aligned}$$

onde, o vetor Δa é o incremento do vetor a , a matriz $\frac{\partial x(t_{f_n})}{\partial a}$ é calculada através de derivação numérica e o vetor $\frac{\partial IP}{\partial x(t_{f_n})}$ é dado por

$$\frac{\partial IP}{\partial x_{1n}} = -2W_1 \left[x_{f_1} - x_{1n} \right]$$

$$\frac{\partial IP}{\partial x_{2n}} = -2W_2 \left[x_{f_2} - x_{2n} \right]$$

ficando,

$$\begin{aligned} \Delta IP &= \left(\frac{\partial IP}{\partial x_{1n}} \frac{\partial x_{1n}}{\partial a_1} + \frac{\partial IP}{\partial x_{2n}} \frac{\partial x_{2n}}{\partial a_1} \right) \Delta a_1 + \left(\frac{\partial IP}{\partial x_{1n}} \frac{\partial x_{1n}}{\partial a_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial IP}{\partial x_{2n}} \frac{\partial x_{2n}}{\partial a_2} \right) \Delta a_2 + \left(\frac{\partial IP}{\partial x_{1n}} \frac{\partial x_{1n}}{\partial a_3} + \frac{\partial IP}{\partial x_{2n}} \frac{\partial x_{2n}}{\partial a_3} \right) \Delta a_3 \end{aligned}$$

Utilizando a imposição dada pela equação (2.43), propõe-se o seguinte problema associado a cada iteração,

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } G = & \sum_{i=1}^{g=3} W_i |\Delta a_i| + W \Delta IP \quad ; \\ \{\Delta a_i\} & \\ & W_i > 0, \quad W > 0, \quad g=3 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\text{Sujeito a: } (\partial IP / \partial x(t_{f_n})) (\partial x(t_{f_n}) / \partial a) \Delta a \geq \beta |IP|$$

Eliminando o sinal de desigualdade que aparece em uma das equações anteriores, pela introdução de uma variável de folga (z), obtêm-se o seguinte problema equivalente

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } G = & \sum_{i=1}^g W_i |\Delta a_i| + Wz \quad , \\ \{\Delta a_i\} & \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\text{Sujeito a: } (\partial IP / \partial x(t_{f_n})) (\partial x(t_{f_n}) / \partial a) \Delta a - z = \beta |IP|,$$

$$z \geq 0$$

Utilizando as transformações de variáveis dadas pelas equações (2.45), leva-se o problema (3.15) à forma usual de programação linear, a saber:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } G = & \sum_{i=1}^{2g+1} \eta_i S_i \quad , \quad \eta_i > 0, \quad g=3 \\ \{S_i\} & \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^g B_i \cdot S_i - \sum_{i=1}^g B_i \cdot S_{g+i} - S_{2g+1} = \beta |IP|$$

$$s_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2g+1$$

onde,

$$B_1 = (\partial IP / \partial x_{1n})(\partial x_{1n} / \partial a_1) + (\partial IP / \partial x_{2n})(\partial x_{2n} / \partial a_1)$$

$$B_2 = (\partial IP / \partial x_{1n})(\partial x_{1n} / \partial a_2) + (\partial IP / \partial x_{2n})(\partial x_{2n} / \partial a_2)$$

$$B_3 = (\partial IP / \partial x_{1n})(\partial x_{1n} / \partial a_3) + (\partial IP / \partial x_{2n})(\partial x_{2n} / \partial a_3)$$

Para iniciar o procedimento, utilizam-se como suposições iniciais, os parâmetros (a_1, a_2, a_3) obtidos em cada período orbital, através da função de chaveamento de Shigehara (1972).

3.7 - OTIMIZAÇÃO GLOBAL DA MANOBRA

Os parâmetros obtidos, por período, na seção anterior, são utilizados nesta fase da otimização para dar início ao procedimento numérico.

O problema de otimização a ser tratado, numa forma geral, conforme a seção 3.2, é

Minimizar: $IP = ag$

$\{u(a, x, t)\}$

Sujeito a: $\dot{x} = f(x, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{g-1}, t)$ (3.18)

$$M(x_f, a_g) = 0$$

são dados t_i e $x(t_i)$, a é o vetor $(gx1)$ de parâmetros a serem otimizados e a_g é o tempo final.

Substituindo as condições do problema de controle obtém-se o problema a seguir,

Minimizar: $IP = t_f$

$\{p_m(t)\}$

Sujeito a: $\dot{x}_1 = T_y(p_m(t))/H$ (3.19)

$\dot{x}_2 = T_x(p_m(t))/(H \cos(x_1))$

sendo,

$$M_1(x_{f_1}, t_f) = x_1(t_f) - x_{f_1} = 0$$

$$M_2(x_{f_2}, t_f) = x_2(t_f) - x_{f_2} = 0$$

Linearizando as equações de restrição e do índice de desempenho, obtêm-se o seguinte sistema

$$\Delta M = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x_{f_1}} = 1 & \frac{\partial M_1}{\partial x_{f_2}} = 0 \\ \frac{\partial M_2}{\partial x_{f_1}} = 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x_{f_2}} = 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{f_1}}{\partial a_1} & \frac{\partial x_{f_1}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial x_{f_1}}{\partial a_g} \\ \frac{\partial x_{f_2}}{\partial a_1} & \frac{\partial x_{f_2}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial x_{f_2}}{\partial a_g} \end{bmatrix} \Delta a$$

Ficando,

$$\Delta M = \begin{bmatrix} \Delta M_1 \\ \Delta M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{f_1}}{\partial a_1} & \frac{\partial x_{f_1}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial x_{f_1}}{\partial a_g} \\ \frac{\partial x_{f_2}}{\partial a_1} & \frac{\partial x_{f_2}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial x_{f_2}}{\partial a_g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \vdots \\ \Delta a_g \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\Delta IP = \Delta a_g = \Delta t_f$$

Através das imposições dadas pela equação (2.43), propõe-se o seguinte problema equivalente

$$\text{Minimizar: } G = \sum_{i=1}^g W_i |\Delta a_i| + W \Delta IP \quad ; \quad W > 0, W_i > 0$$

{ Δa_i }

Sujeito a:

(3.21)

$$\frac{\partial x_{f1}}{\partial a_1} \Delta a_1 + \frac{\partial x_{f1}}{\partial a_2} \Delta a_2 + \dots + \frac{\partial x_{f1}}{\partial a_g} \Delta a_g = \alpha \bar{M}_1$$

$$\frac{\partial x_{f2}}{\partial a_1} \Delta a_1 + \frac{\partial x_{f2}}{\partial a_2} \Delta a_2 + \dots + \frac{\partial x_{f2}}{\partial a_g} \Delta a_g = \alpha \bar{M}_2$$

$$\Delta a_g \geq \beta |IP|$$

Eliminando o sinal de desigualdade na equação anterior pela introdução de uma variável de folga, obtém-se

$$\text{Minimizar: } G = \sum_{i=1}^{g-1} W_i |\Delta a_i| + W \Delta a_g + \bar{W} z \quad ; \quad \bar{W} > 0$$

{ Δa_i }

Sujeito a:

(3.22)

$$\frac{\partial x_{f1}}{\partial a_1} \Delta a_1 + \frac{\partial x_{f1}}{\partial a_2} \Delta a_2 + \dots + \frac{\partial x_{f1}}{\partial a_g} \Delta a_g = \alpha \bar{M}_1$$

$$\frac{\partial x_{f2}}{\partial a_1} \Delta a_1 + \frac{\partial x_{f2}}{\partial a_2} \Delta a_2 + \dots + \frac{\partial x_{f2}}{\partial a_g} \Delta a_g = \alpha \bar{M}_2$$

$$\Delta a_g - z = \beta |t_f|$$

Fazendo a transformação na forma usual de programação linear, através das equações (2.45), tem-se

$$\text{Minimizar: } G = \sum_{i=1}^{2g+1} \eta_i S_i \quad ; \quad \eta_i > 0$$

{S_i}

(3.23)

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^g A_i S_i - \sum_{i=1}^g A_i S_{g+i} = \alpha \bar{M}_j \quad ; \quad j = 1, 2$$

$$\sum_{i=1}^g B_i S_i - \sum_{i=1}^g S_i S_{g+i} - S_{2g+1} = \beta |t_f|$$

onde,

$$S_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2g+1$$

$$A_{ji} = (\partial M_j / \partial x_f) (\partial x_f / \partial a_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{f1}}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial x_{f1}}{\partial a_g} \\ \frac{\partial x_{f2}}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial x_{f2}}{\partial a_g} \end{bmatrix}$$

$$B_i = \text{zero}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, g-1$$

$$B_g = (\partial IP / \partial a_g) = (\partial a_g / \partial a_g) = 1$$

Para iniciar o procedimento subótimo neste problema, utilizam-se como valores iniciais, todos os parâmetros obtidos na otimização por período, durante toda a manobra.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1 - INTRODUÇÃO

Apresentam-se a seguir o modelo simulado, os testes numéricos e a análise dos seus resultados, obtidos através da utilização do computador Burroughs B-6800 do INPE.

4.2 - MODELO SIMULADO

O problema de teste selecionado é o mesmo que o simulado por Shigehara (1972), conforme a seguir.

Os dados do satélite são:

$$I_3 = 8,1 \text{ kg.m}^2$$

$$\dot{\phi} = 12 \text{ rpm} = 1,256 \text{ rad/s}$$

$$m = 25 \text{ A.m}^2$$

Os dados da órbita são:

$$a = 7.378.140 \text{ metros, isto é, altitude} = 1.000 \text{ km}$$

$$i = 30^\circ$$

$$\Omega = 40,966^\circ$$

$$e = 0$$

$$\zeta \approx 100 \text{ minutos}$$

Os dados do dipolo geomagnético são:

$$M = 8,1 \times 10^{15} \text{Wb.m}$$

$$\beta = 289,3^\circ$$

$$\xi = 11,4^\circ$$

As condições iniciais e finais da manobra são:

$$\delta_i = 30^\circ \quad , \quad \alpha_i = 130,966^\circ$$

$$\delta_f = 60^\circ \quad , \quad \alpha_f = 310,966^\circ$$

Tendo-se considerado:

- (i) O tempo sideral de Greenwich, no início da manobra, $\theta_g \cong 0^\circ$;
- (ii) A rotação da Terra, de aproximadamente $0,25^\circ/\text{minuto}$; e
- (iii) Constante o valor da ascensão reta do nodo ascendente (Ω) durante a manobra.

4.3 - RESULTADOS DO CONTROLE INICIAL

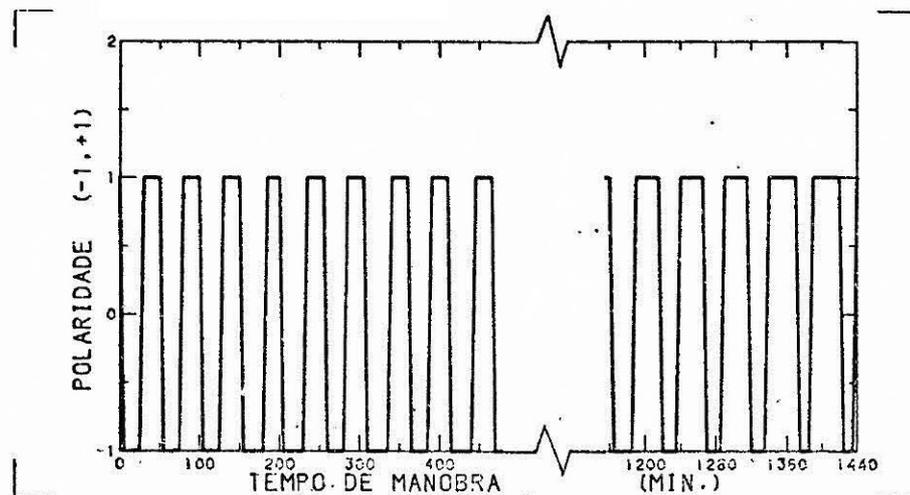
Utilizando os dados da seção anterior e o controle inicial apresentado na seção 3.4, obtêm-se os pontos de chaveamento (ver Figura 4.1.a), onde

$$\text{tempo final da manobra: } t_f = 1.445 \text{ minutos} \cong 24 \text{ horas}$$

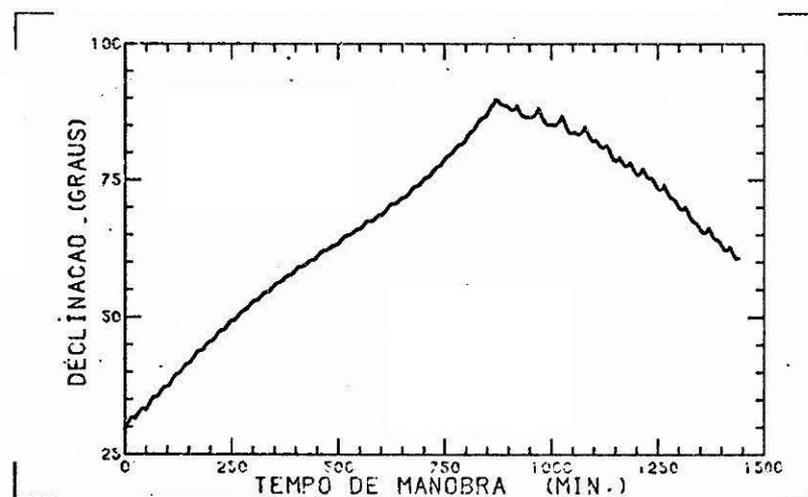
As Figuras 4.1.b, c, d, e, mostram a trajetória do eixo de "spin" do satélite, dados pela declinação e ascensão reta no sistema inercial, e pelo azimute e co-elevação no sistema da órbita, respectivamente.

Os valores do estado no instante final, dados pela declinação e pela ascensão reta, são:

$$\delta_f = 60,743^{\circ} \quad ; \quad \alpha_f = 312,5^{\circ}$$



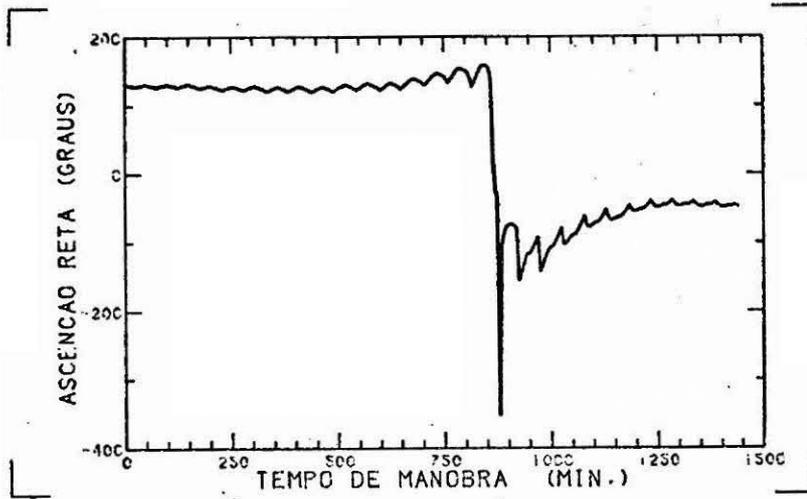
a) Instantes de chaveamento do momento magnético da bobina.



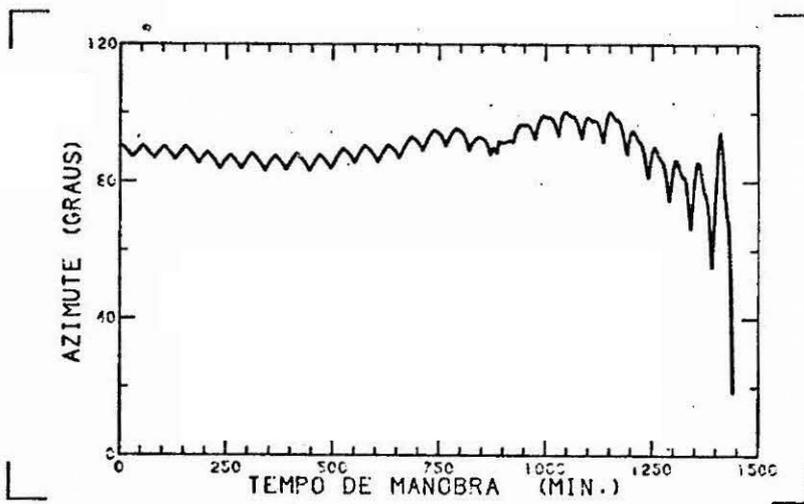
b) Declinação em função do tempo.

Fig. 4.1 - Respostas do controle inicial.

(continua)

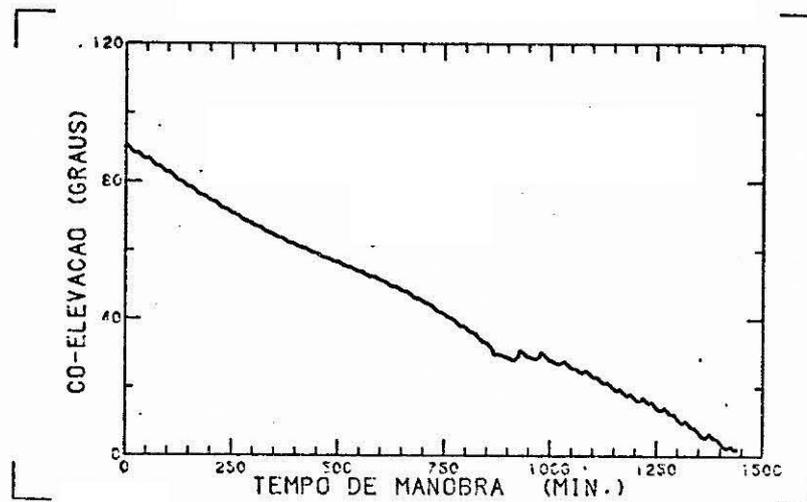


c) Ascensão reta em função do tempo.



d) Azimute em função do tempo.

Fig. 4.1 - Continuação.



e) Co-elevação em função do tempo.

Fig. 4.1 - Conclusão.

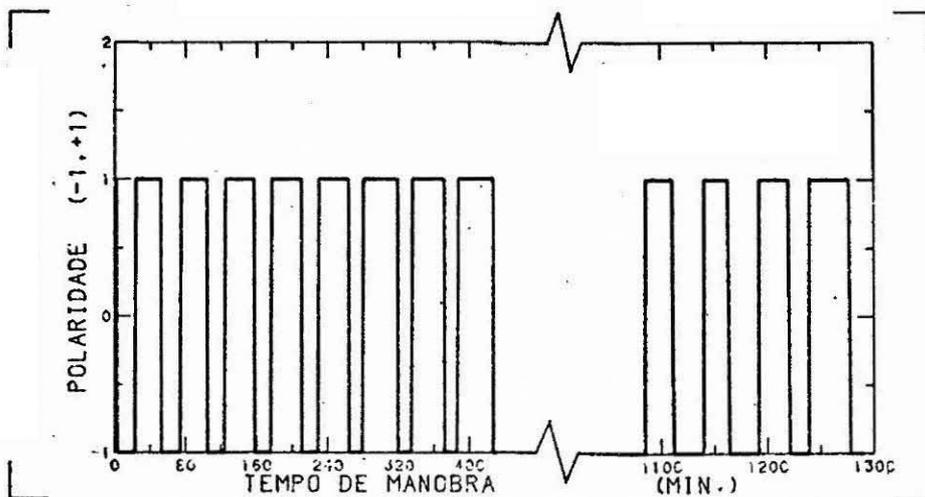
4.4 - RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO POR PERÍODO

Os pontos de chaveamento obtidos pelo controle inicial, dados na seção anterior, são otimizados a cada período da órbita, através do procedimento subótimo, obtendo-se os resultados a seguir (ver Figuras 4.2.a, b, c, d, e). Obtêm-se:

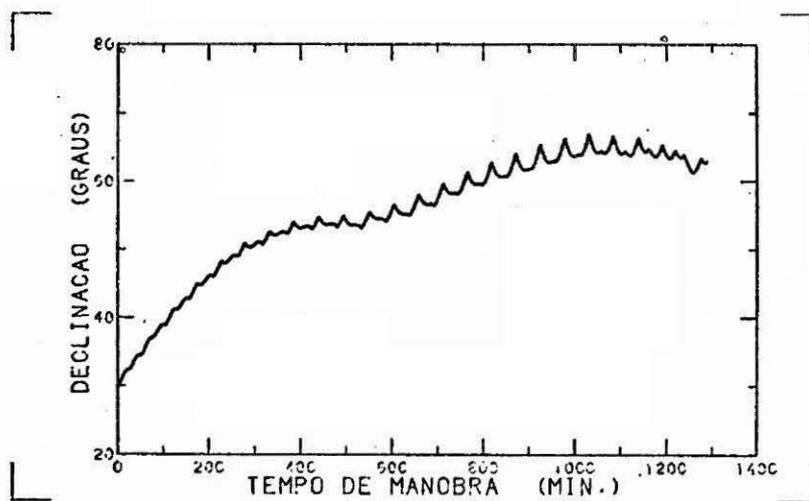
tempo final da manobra: $t_f = 1.290$ minutos ≈ 21 horas

Os valores do estado no instante final são:

$$\delta_f \approx 58^\circ \quad ; \quad \alpha_f \approx 308^\circ$$



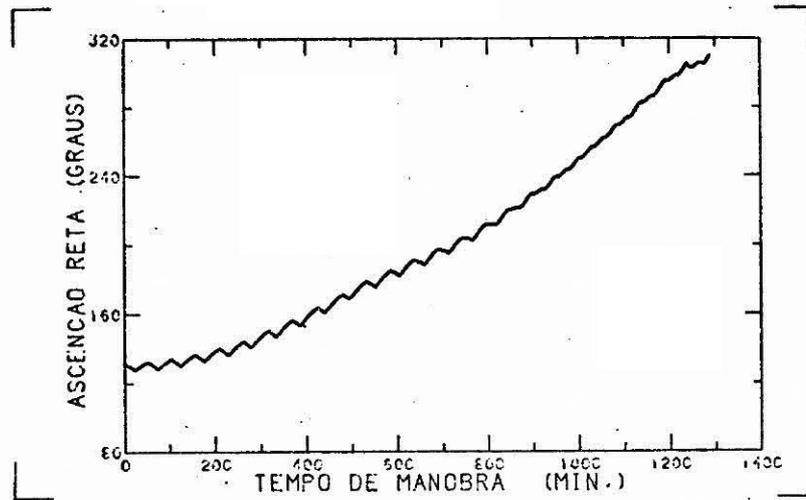
a) Instantes de chaveamento do momento magnético da bobina.



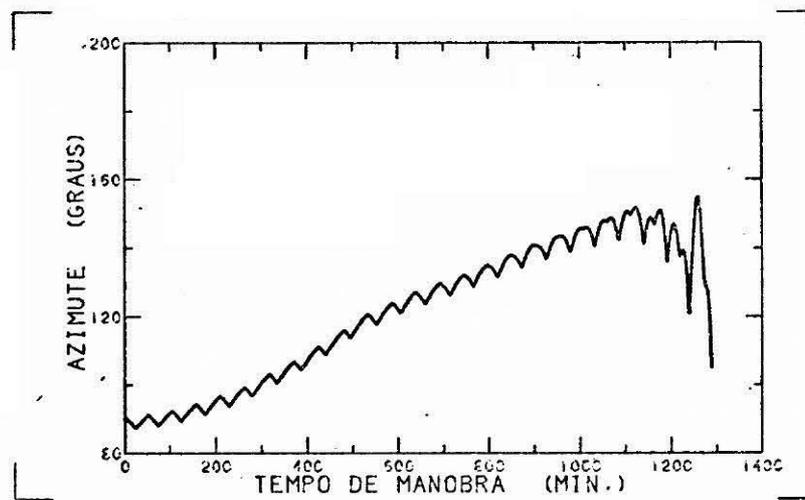
b) Declinação em função do tempo.

Fig. 4.2 - Respostas da otimização por período.

(continua)

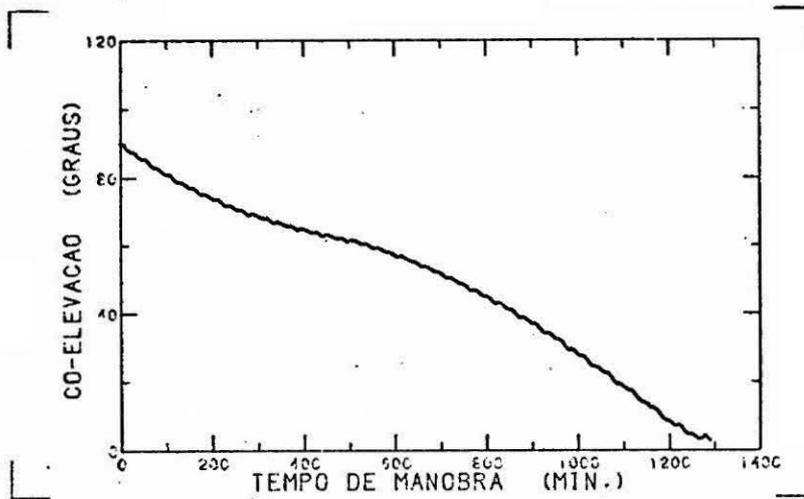


c). Ascensão reta em função do tempo.



d) Azimute em função do tempo.

Fig. 4.2 - Continuação.



e) Co-elevação em função do tempo.

Fig. 4.2 - Conclusão.

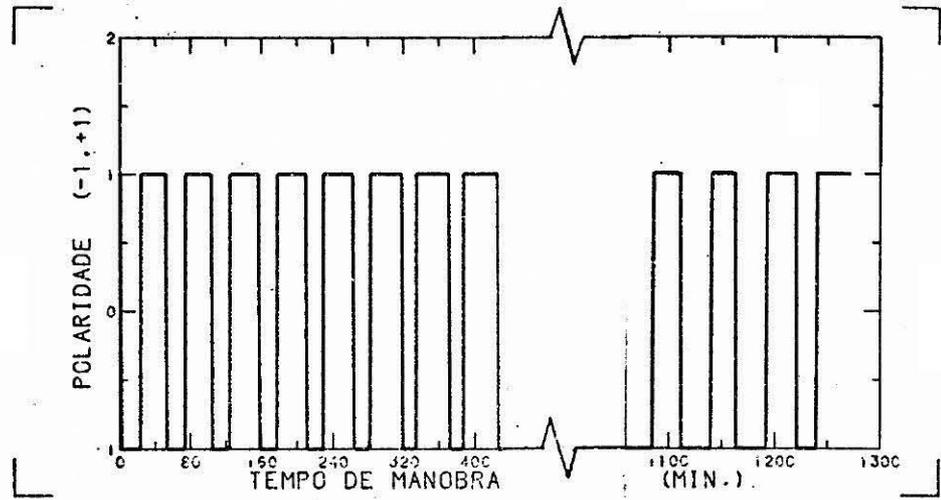
4.5 - RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO GLOBAL

Empregando os pontos de chaveamento otimizados na seção anterior como parâmetros de partida no procedimento subótimo, executa-se a otimização global, obtendo-se (ver Figuras 4.3.a, b, c, d, e)

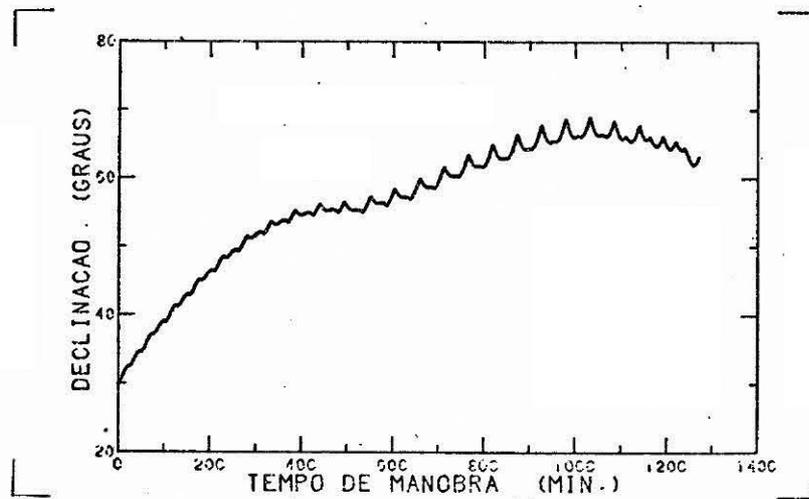
tempo final da manobra: $t_f \cong 1.272$ minutos $\cong 21$ horas

Os valores do estado no instante final são:

$$\delta_f \cong 60^{\circ} \quad ; \quad \alpha_f \cong 310^{\circ}$$



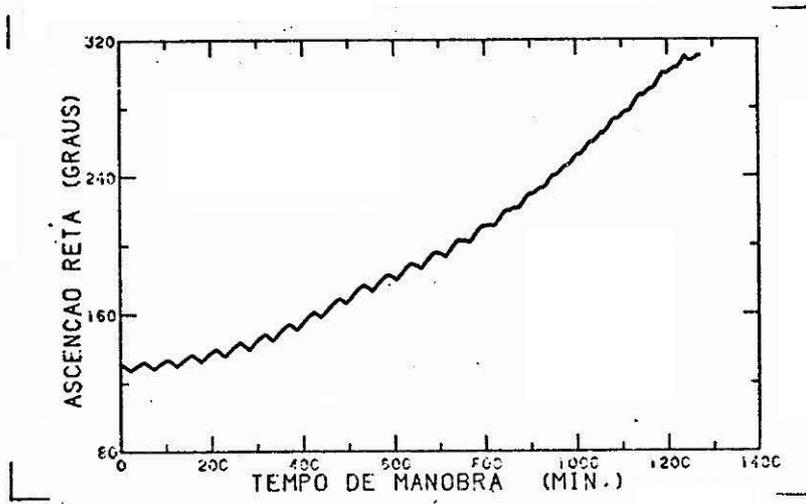
a) Instantes de chaveamento do momento magnético da bobina.



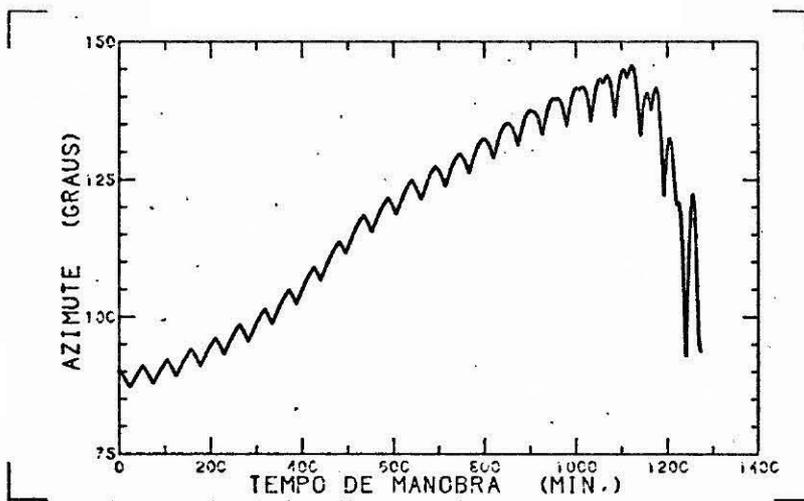
b) Declinação em função do tempo.

Fig. 4.3 - Respostas da otimização global.

(continua)

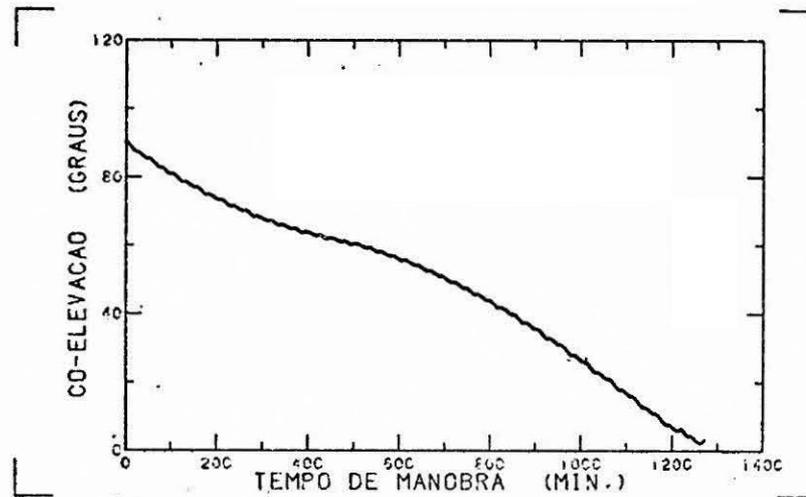


c) Ascensão reta em função do tempo.



d) Azimute em função do tempo.

Fig. 4.3 - Continuação.



e) Co-elevação em função do tempo.

Fig. 4.3 - Conclusão.

4.6 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Observe-se que a lei de controle inicial por período - (Shigehara, 1972), a qual atua o torque efetivo na direção do objetivo desejado, é deduzida de um critério de estabilização assintótica (seção 3.4); enquanto que as leis de controle obtidas através da otimização por período e a otimização global são deduzidas do critério de controle ótimo conforme análise a seguir.

As respostas do controle inicial (seção 4.3), conforme o modelo simulado (seção 4.2), são verificadas através dos resultados obtidos por Shigehara (1972). Observe-se que a perpendicularidade do eixo de "spin" do satélite ao plano da órbita é alcançada no final da manobra, isto é, a co-elevação neste instante é $\theta'(t_f) \cong 0^0$.

Dos resultados da otimização por período (seção 4.4) de duz-se que o tempo final foi reduzido de aproximadamente 3 horas, ou seja, aproximadamente 12% a menos que o tempo de manobra fornecido pe la lei de controle inicial, pelo que se conclui que os resultados da dos pelos pontos de chaveamento (Figura 4.2.a) são satisfatórios. Po de-se observar que a trajetória dada pela declinação e a ascensão reta (Figuras 4.2.b e c, respectivamente) é diferente em relação à fornecida pela lei de controle inicial (Figuras 4.1.b e c).

Na fase seguinte, otimização global, as interações in fluenciarão de uma maneira global durante o percurso da manobra, sendo esta a grande diferença em relação à otimização por período. Porém, os resultados da seção anterior (ver Figuras 4.3.a, b, c, d, e) indicam a inexistência de grandes mudanças em relação aos resultados da otimização por período. Acredita-se que as principais causas para que isto aconteça sejam as condições da quase periodicidade devido às variações lentas do eixo de "spin" que justificaram as aproximações consideradas durante o desenvolvimento do trabalho (seção 2.3.2 e seção 2.4.3).

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

Baseados nos resultados computacionais de simulação, os quais são bastante satisfatórios, verificou-se a validade da formulação e a obtenção de leis de controle ótimo, conforme o desenvolvimento de otimização proposto, para manobras de satélites estabilizados por "spin", utilizando a interação com o campo geomagnético. Da mesma forma, confirmou-se a grande simplicidade de formulação e implementação do procedimento subótimo, utilizado nas fases de otimização do problema de teste.

Uma análise mais abrangente, baseada em situações de teste também mais abrangentes, deverá ser feita para melhor avaliar as diferenças entre manobras otimizadas por período e manobras otimizadas globalmente.

Para evitar singularidades ou situações de cálculo em que as expressões se apresentam com o denominador igual a zero e para evitar as imprecisões numéricas, propõe-se a representação dos ângulos de Euler através do formalismo de quatérnions. Propõe-se também a análise da utilização do torque médio, conforme apresentado nas seções 2.3.4 e 2.3.7, para a verificação da viabilidade de desenvolvimento de versão mais simplificada para a otimização da manobra estudada.

Com base nos resultados obtidos e tendo em vista os recursos computacionais normalmente hoje existentes a bordo de satélites, sugere-se este processo de otimização na execução de manobras de satélites estabilizados por "spin" e atuados por bobinas magnéticas, como é o caso real da manobra a ser executada no Primeiro Satélite de Coleta de Dados da MECB.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALFRIEND, K.T. Magnetic attitude control system for dual-spin satellites. AIAA Journal, 13(6):817-822, June 1975.
- ATHANS, M.; FALB, P.L. Optimal control. New York, McGraw-Hill, 1966.
- CEBALLOS, D.C. Aproximações sub-ótimas para o controle em problemas dinâmicos de otimização. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, Fev. 1980 (INPE-1676-TDL/019).
- GOLDSTEIN, H. Classical mechanics. Addison-Wesley, 1959.
- JUNKINS, J.L.; CARRINGTON, C.K.; WILLIAMS, C.E. Time-optimal magnetic attitude maneuvers. Journal of Guidance and Control, 4(4):363-368, July-Aug. 1981.
- JUNKINS, J.L.; TURNER, J.D. Optimal spacecraft rotational maneuvers. New York, Elsevier, 1986. (Studies in Astronautics 3).
- KIRK, D.E. Optimal control theory. New Jersey, Prentice-Hall Inc., 1970.
- PATAPOFF, H. Attitude drift of a spin stabilized satellite due to the Earth's magnetic and gravitational fields. XIVe Congrès International d'Astronautique. Paris, 1963. (Rept. 66).
- RENARD, M.L. Command laws for magnetic attitude control of spin-stabilized Earth satellites. Journal of Spacecraft and Rockets, 4(2):156-163, Feb. 1967.
- RIOS NETO, A.; CEBALLOS, D.C. Approximation by polynomial arcs to generate suboptimal numerical solutions in control problems. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 5., Campinas, Dez. 1979. Anais. Campinas, UNICAMP, 1979, p. 034-043.
- SHIGEHARA, M. Geomagnetic attitude control of an axisymmetric spinning satellite. Journal of Spacecraft and Rockets, 9(6):391-398, June 1972.
- THOMAS, L.C.; CAPPELLARI, J.O. Attitude determination and prediction of spin-stabilized satellites. The Bell System Technical Journal, 43(3-4):1657-1726, July 1964.

- TOSSMAN, B.E. Magnetic attitude control system for the Radio Astronomy Explorer-A satellite. Journal of Spacecraft and Rockets, 6(3):239-244, Mar. 1969.
- WEELER, P.C. Spinning spacecraft attitude control via the environmental magnetic field. Journal of Spacecraft and Rockets, 4(12):846-850, Dec. 1967.
- WERTZ, J.R. Spacecraft attitude determination and control. London, D. Reidel, 1978. (Astrophysics and Space Library).
- WILLIAMSON, W.E. Use of polynomial approximations to calculate suboptimal controls. AIAA Journal, 9(11):2271-2273, Nov. 1971.

APÊNDICE A

TÓPICOS DE CONTROLE ÓTIMO

A.1 - INTRODUÇÃO

O conteúdo deste apêndice foi retirado de Kirk (1970) como também de Athans e Falb (1966), com o objetivo de consulta.

A.2 - FORMA DO CONTROLE ÓTIMO PARA UM TIPO DE PROBLEMAS DE TEMPO MÍNIMO

Determina-se a forma do controle ótimo para uma classe de problemas através do Princípio do Mínimo de Pontryagin. Assumindo que o problema de controle ótimo é da forma,

$$\text{Minimizar globalmente: } J = \int_{t_0}^{t_f} 1 \, dt$$

Com relação a: $u(.) \in U$

$$\text{Sujeito a: } \dot{x}(t) = A(x(t), t) + B(x(t), t)u(t) , \quad (\text{A.1})$$

dados

$$\begin{cases} t_0, x(t_0) \\ x(t_f) \end{cases}$$

onde $x(t)$ é o vetor de estado ($n \times 1$), $u(t)$ é o vetor de controle ($m \times 1$), A é o vetor ($n \times 1$) e B é a matriz ($n \times m$) explicitamente dependentes do estado e do tempo.

Especifica-se que as variáveis admissíveis de controle devem satisfazer os vínculos de desigualdade:

$$M_{j-} \leq u_j(t) \leq M_{j+} , \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [t_0, t_f^*] \quad (\text{A.2})$$

sendo M_{j+} e M_{j-} os limites superior e inferior conhecidos para a j -ésima componente de controle.

A Hamiltoniana \bar{H} é a função dada por:

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = 1 + p^T(t) \left[A(x(t), t) + B(x(t), t)u(t) \right] \quad (A.3)$$

onde $p(t)$ é o vetor de variáveis adjuntas.

Do Princípio do Mínimo, é necessário que:

$$1 + p^{*T}(t) \left[A(x^*(t), t) + B(x^*(t), t)u^*(t) \right] \leq 1 + p^{*T}(t) \left[A(x^*(t), t) + B(x^*(t), t)u(t) \right] \quad (A.4)$$

para todo $u(t)$ admissível e para todo $t \in [t_0, t_f^*]$.

A equação (A.4) implica que:

$$p^{*T}(t) B(x^*(t), t)u^*(t) \leq p^{*T}(t) B(x^*(t), t)u(t), \quad (A.5)$$

portanto, $u^*(t)$ é o controle que leva $p^{*T}(t) B(x^*(t), t)u(t)$ a assumir seu valor mínimo.

Se a matriz B é expressa como:

$$B(x^*(t), t) = \left[b_1(x^*(t), t) \quad b_2(x^*(t), t) \quad \dots \quad b_m(x^*(t), t) \right], \quad (A.6)$$

onde $b_j(x^*(t), t)$, $j=1, \dots, m$; é a j -ésima coluna da matriz, então o coeficiente da j -ésima componente do controle $u_j(t)$ na equação (A.5) é $p_i^{*T}(t)b_{ij}(x^*(t), t)$, sendo:

$$p^{*T}(t)B(x^*(t),t)u(t) = \sum_{i=1}^n p_i^{*T}(t) \sum_{j=1}^m \left[b_{ij}(x^*(t),t) \right] u_j(t), \quad (A.7)$$

onde:

$$i=1, \dots, n$$

Sendo as componentes de controle independentes entre si, deve-se minimizar

$$p_i^{*T}(t) \left[b_{ij}(x^*(t),t) \right] u_j(t)$$

em relação a $u_j(t)$ para $j=1,2,\dots,m$. Se o coeficiente de $u_j(t)$ é positivo, $u_j^*(t)$ deve ser o menor valor de controle admissível M_{j-} . Se o coeficiente de $u_j(t)$ é negativo, $u_j^*(t)$ deve ser o maior valor de controle admissível M_{j+} . Assim a forma de controle ótimo é:

$$u_j^*(t) = \begin{cases} M_{j+} & , \text{ para } p_i^{*T}(t)b_{ij}(x^*(t),t) < 0 \\ M_{j-} & , \text{ para } p_i^{*T}(t)b_{ij}(x^*(t),t) > 0 \\ \text{indeterminado} & , \text{ para } p_i^{*T}(t)b_{ij}(x^*(t),t) = 0 \end{cases} \quad (A.8)$$

$$j=1,2,\dots,m \quad ; \quad i=1,2,\dots,n$$

Se as trajetórias extremantes do estado e co-estado $p^*(t)$, são tais que o coeficiente de $u_j(t)$ seja conforme mostrado na Figura A.1(a) então o comportamento de $u_j^*(t)$ será como mostrado na Figura A.1(b):

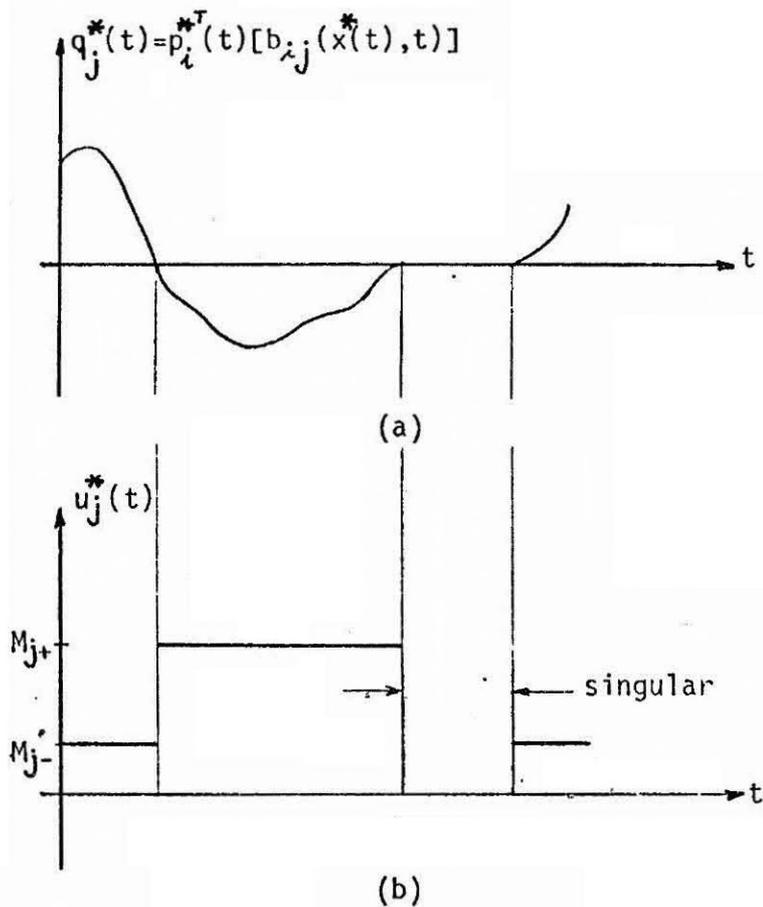


Fig. A.1 - Relação entre o controle de tempo ótimo e seus coeficientes na Hamiltoniana.

Observe que se $p^{*T}(t)b_{ij}(x^*(t), t)$ passa através de zero, um chaveamento do controle $u_j^*(t)$ é indicado. Se $p^{*T}(t)b_{ij}(x^*(t), t)$ é zero num intervalo de tempo não nulo, então o coeficiente de $u_j(t)$ na Hamiltoniana é zero, não fornecendo informação em torno de qual $u_j^*(t)$ escolher como a condição necessária para minimizar H ; este comportamento tem o nome de "condição singular". Os problemas em que não aparece a condição singular são chamados "normais".

A.3 - CONTROLE ÓTIMO DO TIPO "BANG-BANG"

Este tipo de controle diz, seja $u^*(t)$ o vetor de controle de tempo mínimo para o problema (A.1) e, $x^*(t)$ e $p^*(t)$ as trajetórias

correspondentes do estado e co-estado. Se o problema \bar{e} normal, então as componentes $u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_m^*(t)$ do vetor $u^*(t)$ serão definidas pela relação

$$u_j^*(t) = - \operatorname{sgn} \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ij} \left[x^*(t), t \right] p_i^*(t) \right\} \quad (\text{A.9})$$

através da função sinal, para $j=1, \dots, m$, $t \in [t_0, t_f^*]$ e para o caso particular em que $M_{j-} = -1$ e $M_{j+} = +1$.

Escrevendo a equação (A.9) numa forma mais compacta tem-se:

$$u^*(t) = -\operatorname{sgn} \left\{ q(t) \right\} \quad (\text{A.10})$$

$$= -\operatorname{sgn} \left\{ B^T \left[x^*(t), t \right] p^*(t) \right\}$$

Concluindo-se que, se o problema \bar{e} normal, as componentes do controle de tempo ótimo são funções constantes por partes no tempo, ou seja, "bang-bang".