



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS

AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO
AUTHORIZATION FOR PUBLICATION

AUTORES
AUTHORS

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA
TRANSFORMAÇÃO DE TEMPO
TEMPO FICTÍCIO

ESTABILIZAÇÃO
REGULARIZAÇÃO

PALAVRAS CHAVES/KEY WORDS

AUTORIZADA POR/AUTHORIZED BY

Marco Antonio Haupp
Diretor Geral

AUTOR RESPONSÁVEL
RESPONSIBLE AUTHOR

Sebastião C.P. Gomes

DISTRIBUIÇÃO/DISTRIBUTION

- ☐ INTERNA / INTERNAL
☒ EXTERNA / EXTERNAL
☐ RESTRITA / RESTRICTED

REVISADA POR / REVISED BY

Wilson C.C. da Silva

CDU/UDC

521.3:629.7.076

DATA / DATE

Dezembro 1987

PUBLICAÇÃO Nº
PUBLICATION NO

INPE-4555-TDL/330

TÍTULO/TITLE

INVESTIGAÇÃO SOBRE OS EFEITOS DA TRANSFORMAÇÃO DE TEMPO, ESTABILIZAÇÃO E REGULARIZAÇÃO EM PROPAGAÇÃO NUMÉRICA DE ÓRBITA

AUTORES/AUTHORSHIP

Sebastião Cícero Pinheiro Gomes

ORIGEM
ORIGIN

PG/DCG

PROJETO
PROJECT

FRH/CEA

Nº DE PAG.
NO OF PAGES

192

ULTIMA PAG.
LAST PAGE

175

VERSÃO
VERSION

Nº DE MAPAS
NO OF MAPS

RESUMO - NOTAS / ABSTRACT - NOTES

Este trabalho tem por objetivo investigar várias formulações das equações diferenciais do movimento orbital para utilização em propagação numérica de órbita. As teorias que deram origem às diversas formulações são apresentadas em conjunto com simulações numéricas. As simulações foram efetuadas utilizando-se três integradores numéricos distintos com tamanho fixo de passo, a saber: Runge-Kutta de quarta ordem, Runge-Kutta de oitava ordem e preditor-corrector de oitava ordem. Inicialmente foram estudadas a transformação do tempo Sundman de tempo, que produz um controle analítico do tamanho do passo; a estabilização das equações diferenciais que promove melhoramentos no comportamento numérico da integração; e a regularização, que elimina as singularidades nas equações diferenciais do movimento kepleriano. Em seguida, uma nova transformação de tempo foi proposta com o objetivo de se obter um controle analítico mais eficiente do tamanho do passo, numa tentativa de redistribuir de forma mais equitativa os comprimentos de arco ao longo de uma revolução orbital. Nota-se que em todas as diferentes formulações, o tempo físico é obtido numericamente como uma coordenada generalizada do sistema. Dedicou-se então um capítulo ao estudo do erro global dessa coordenada bem como sua influência na obtenção da órbita propagada. Também, um mecanismo conhecido como elemento de tempo para se obter o tempo físico de forma mais precisa, foi estudado. Finalmente, foram apresentadas conclusões gerais bem como conclusões quanto a eficiência das formulações em termos de precisão e tempo de processamento.

OBSERVAÇÕES / REMARKS

Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial, aprovada em novembro de 1987.

Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Mestre
em Ciência Espacial

Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira

Imprensa

Presidente

Dr. Wilson Custódio Canesin da Silva

Wilson C. Silva

Orientador

Dr. Roberto Vieira Martins

Roberto V. Martins

Membro da Banca
-convidado-

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes

Rodolpho Vilhena de Moraes

Membro da Banca
-convidado-

Candidato: Sebastião Cícero Pinheiro Gomes

São José dos Campos, 04 de novembro de 1987

Aos meus pais, Manoel Gomes de Souza
e Diva Pinheiro Gomes.

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Wilson Custódio Canesin da Silva, por sua orientação técnica e pessoal durante todo o desenvolvimento do presente trabalho.

Ao MSc. Hélio Koiti Kuga, que apesar de não constar oficialmente também como orientador por não ter ainda concluído o seu doutorado, orientou-me de fato desde o início do trabalho, transmitindo-me sempre confiança e conhecimento técnico.

ABSTRACT

This work aims at investigating several formulations of the differential equations of the orbital motion for use in numerical orbit propagation. The theories which gave rise to various formulations are presented along with simulations of numerical propagation. The simulations were carried out using three different numerical integrators with fixed step size, namely: fourth order Runge-Kutta, eighth order Runge-Kutta and eighth order multistep predictor-corrector. At first, studied were the Sundman time transformation, which yields an analytical step size control; the stabilization of differential equations, which promotes enhancements on the numerical behaviour of the integration; and the regularization, which eliminates the singularities in the differential equations of keplerian motion. Afterwards, a new time transformation was proposed, in order to obtain a more efficient analytical step size control in an attempt to redistribute more equitably the arc lengths along one orbital revolution. It's noted that in all different formulations the physical time is obtained numerically as a generalized coordinate of the system. Because of this, a full chapter to study the global error on this coordinate as well as its influence when obtaining the propagated orbit. Also, a mechanism called time element to obtain a more accurate physical time was studied. Finally, some general conclusion as well as some comments about the efficiency of the formulations in terms of accuracy and processing time were presented.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE TABELAS	xiii
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO 2 - PERTURBAÇÕES NA ÓRBITA DE SATÉLITES ARTIFICIAIS TERRESTRES</u>	5
2.1 - Perturbações devidas ao geopotencial.....	6
2.2 - Perturbações devidas ao arrasto atmosférico	9
2.3 - Perturbações devidas à pressão de radiação solar direta ...	10
2.3.1 - Albedo terrestre	10
2.4 - Perturbações devidas a ação gravitacional de um terceiro corpo	11
2.5 - Perturbações devidas às marés terrestres	12
2.6 - Efeitos das forças perturbadoras sobre os elementos orbitais	12
<u>CAPÍTULO 3 - TRANSFORMAÇÃO DE TEMPO</u>	19
3.1 - Considerações sobre a integração numérica	19
3.2 - Transformação de tempo	21
3.3 - Resultado de testes computacionais e conclusões	23
<u>CAPÍTULO 4 - ESTABILIZAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO ORBITAL</u>	35
4.1 - Estudo sobre o comportamento dinâmico em órbita kepleriana circular	35
4.2 - Estabilização do sistema de equações diferenciais orbitais	40
4.3 - Resultado de testes computacionais e conclusões	46
<u>CAPÍTULO 5 - REGULARIZAÇÃO</u>	57
5.1 - Regularização em movimento unidimensional	57
5.2 - Regularização em movimento bidimensional	59
5.3 - Regularização em movimento tridimensional	65
5.3.1 - Considerações sobre a matriz KS	67
5.3.2 - Equações regulares do movimento no espaço	68

	<u>Pág.</u>
5.4 - Considerações sobre a integração numérica	71
5.4.1 - Condições iniciais da integração	73
5.5 - Resultado de testes computacionais e conclusões	74
<u>CAPÍTULO 6 - ESTUDO EM MOVIMENTO PERTURBADO</u>	81
6.1 - Perturbação em movimento orbital	81
6.2 - Mecanismo de parada no tempo físico final	83
6.3 - Resultado de testes computacionais e conclusões	85
6.3.1 - Sistema em tempo físico em órbita perturbada	85
6.3.2 - Sistema transformado em órbita perturbada	90
6.3.3 - Sistema estabilizado em órbita perturbada	94
6.3.4 - Sistema regularizado em órbita perturbada	99
6.4 - Análises gráficas e conclusões finais	104
<u>CAPÍTULO 7 - PROPOSTA DE TRANSFORMAÇÃO DE TEMPO</u>	111
7.1 - Motivação da transformação proposta	111
7.2 - A formulação proposta	112
7.3 - O novo tempo fictício	116
7.4 - Resultado de testes computacionais e conclusões	119
<u>CAPÍTULO 8 - A COORDENADA DE TEMPO FÍSICO</u>	129
8.1 - Erro na coordenada de tempo físico	129
8.2 - Testes com o mecanismo de parada	136
8.3 - Conclusões	139
<u>CAPÍTULO 9 - ELEMENTOS DE TEMPO</u>	141
9.1 - O elemento de tempo	141
9.2 - Testes computacionais e conclusões	144
<u>CAPÍTULO 10 - CONCLUSÕES</u>	161
10.1 - Conclusões gerais	161
10.2 - Conclusões quanto ao custo e precisão de resultados	164
10.3 - Sugestão para futuras aplicações	171
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	173

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Sistema inercial equatorial geocêntrico	5
2.2 - Sistemas equatoriais inercial e geocêntrico terrestre ...	7
2.3 - Sistema geocêntrico no qual originalmente obtem-se o gra diente do geopotencial.....	8
2.4 - Comportamento do semi-eixo maior no tempo	14
2.5 - Comportamento da excentricidade no tempo	15
2.6 - Comportamento da inclinação no tempo	15
2.7 - Comportamento da ascensão reta do nodo ascendente no tem po	16
2.8 - Comportamento do argumento do perigeu no tempo	16
2.9 - Comportamento da anomalia média sem a componente keple riana	17
3.1 - Erro em posição dos sistemas em tempo físico e transfor mado utilizando-se um Runge-Kutta de oitava ordem, dados da Tabela 3.2	33
4.1 - Configuração do sistema em coordenadas polares	35
4.2 - Órbitas circulares solução ($r = r_1$) e deslocada ($r = r_2$).	36
4.3 - Órbitas solução (i) e deslocada (e)	39
4.4 - Sistemas transformado e estabilizado propagados em um Run ge-Kutta de oitava ordem com um tamanho de passo equiva lente ao período orbital sobre vinte ($T/20$).....	54
5.1 - Sistemas estabilizado e regularizado, propagados em um preditor-corretor de oitava ordem e com $T/20$ para tamanho de passo	78
6.1 - Situação de convergência	84
6.2 - Sistemas em tempo físico, transformado, estabilizado e re gularizado, propagados em um Runge-Kutta de quarta ordem e com $T/60$ para tamanho de passo	105
6.3 - Sistemas em tempo físico, transformado, estabilizado e re gularizado, propagados em um Runge-Kutta de oitava ordem e com $T/20$ para tamanho de passo	106
6.4 - Sistemas em tempo físico ($T/60$), transformado, estábili zado e regularizado, propagados em um preditor -corretor de oitava ordem e com $T/20$ para tamanho de passo	107

7.1 - Órbitas com os sistemas em tempo físico e transformado, com seus respectivos comprimentos de arco	112
7.2 - Variação do intervalo de tempo físico em função da anomalia média, obtida com um preditor-corretor de oitava ordem em conjunto com o sistema transformado	118
7.3 - Variação do intervalo de tempo físico em função da anomalia média, obtida com um preditor-corretor de oitava ordem em conjunto com o sistema proposto	118
7.4 - Erro em função da excentricidade para os sistemas transformado e proposto, propagados em um Runge-Kutta de oitava ordem, com T/20 para tamanho de passo	125
7.5 - Erro em função da excentricidade para os sistemas regularizado e proposto, propagados em um preditor-corretor de oitava ordem com T/60 para tamanho de passo, mais a curva do sistema proposto para os tamanhos ótimos de passo.....	126
8.1 - Erro global da coordenada de tempo físico em órbita com excentricidade nula	131
8.2 - Variação do erro da Figura 8.2	131
8.3 - Erro global da coordenada de tempo físico em órbita com excentricidade 0,2	132
8.4 - Variação do erro da Figura 8.3	132
8.5 - Erro global da coordenada de tempo físico em órbita com excentricidade 0,4	133
8.6 - Variação do erro da Figura 8.5	133
8.7 - Erro global da coordenada de tempo físico em órbita com excentricidade 0,6	134
8.8 - Variação do erro da Figura 8.7	134
8.9 - Erro global da coordenada de tempo físico em órbita com excentricidade 0,8	135
8.10 - Variação do erro da Figura 8.9	135
9.1 - Sistemas transformado, com e sem elemento de tempo, propagados em um Runge-Kutta de oitava ordem e com T/20 para tamanho de passo	154
9.2 - Sistemas transformado, com e sem elemento de tempo, propagados em um Runge-Kutta de quarta ordem e com T/60 para tamanho de passo	155
9.3 - Sistemas regularizado sem elemento de tempo, regularizado com elemento de tempo e estabilizado com elemento de tempo, em um Runge-Kutta de quarta ordem e com T/60 para tamanho de passo	156

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Ordem de grandeza das forças específicas perturbadoras ...	13
3.1 - Sistemas em tempo físico e transformado, propagados em um Runge-Kutta de quarta ordem	27
3.2 - Sistemas em tempo físico e transformado, propagados em um Runge-Kutta de oitava ordem	28
3.3 - Sistemas em tempo físico e transformado, propagados em um preditor-corretor de oitava ordem.....	29
4.1 - Sistema estabilizado, propagado em Runge-Kutta de quarta ordem	51
4.2 - Sistema estabilizado, propagado em um Runge-Kutta de oitava ordem	52
4.3 - Sistema estabilizado, propagado em um preditor-corretor de oitava ordem	53
5.1 - Sistema regularizado propagado em um Runge-Kutta de quarta ordem	75
5.2 - Sistema regularizado propagado em um Runge-Kutta de oitava ordem	76
5.3 - Sistema regularizado propagado em um preditor-corretor de oitava ordem	77
6.1 - Sistema em tempo físico, com perturbação, propagado em Runge-Kutta de quarta ordem	87
6.2 - Sistema em tempo físico, com perturbação, propagado em um Runge-Kutta de oitava ordem	88
6.3 - Sistema em tempo físico, com perturbação, propagado em um preditor-corretor de oitava ordem	89
6.4 - Sistema transformado, com perturbação, propagado em um Runge-Kutta de quarta ordem	91
6.5 - Sistema transformado, com perturbação, propagado em um Runge-Kutta de oitava ordem	92
6.6 - Sistema transformado, com perturbação, propagado em um preditor-corretor de oitava ordem	93
6.7 - Sistema estabilizado, com perturbação, propagado em um Runge-Kutta de quarta ordem	96
6.8 - Sistema estabilizado, com perturbação, propagado em um Runge-Kutta de oitava ordem	97
6.9 - Sistema estabilizado, com perturbação, propagado em um preditor-corretor de oitava ordem	98

	<u>Pág.</u>
6.10 - Sistema regularizado, com perturbação, propagado em um Runge-Kutta de quarta ordem	101
6.11 - Sistema regularizado, com perturbação, propagado em um Runge-Kutta de oitava ordem	102
6.12 - Sistema regularizado, com perturbação, propagado em um preditor-corretor de oitava ordem	103
7.1 - Sistema proposto, propagado em um Runge-Kutta de quarta ordem	121
7.2 - Sistema proposto, propagado em um Runge-Kutta de oitava ordem	122
7.3 - Sistema proposto, propagado em um preditor-corretor de oitava ordem	123
7.4 - Sistema proposto, propagado em um preditor-corretor com tamanho ótimo de passo	124
8.1 - Erros com paradas no tempo físico final obtidos de forma analítica e numérica	137
8.2 - Erros em posição e velocidade em órbita kepleriana	138
8.3 - Erros em posição e velocidade em órbita perturbada	139
9.1 - Sistema transformado, com elemento de tempo, propagado em um Runge-Kutta de quarta ordem	145
9.2 - Sistema estabilizado, com elemento de tempo, propagado em um Runge-Kutta de quarta ordem	146
9.3 - Sistema regularizado, com elemento de tempo, propagado em um Runge-Kutta de quarta ordem	147
9.4 - Sistema transformado, com elemento de tempo, propagado em um Runge-Kutta de oitava ordem	148
9.5 - Sistema estabilizado, com elemento de tempo, propagado em um Runge-Kutta de oitava ordem	149
9.6 - Sistema regularizado, com elemento de tempo, propagado em um Runge-Kutta de oitava ordem	150
9.7 - Sistema transformado, com elemento de tempo, propagado em um preditor-corretor de oitava ordem	151
9.8 - Sistema estabilizado, com elemento de tempo, propagado em um preditor-corretor de oitava ordem	152
9.9 - Sistema regularizado, com elemento de tempo, propagado em um preditor-corretor de oitava ordem	153
10.1 - Eficiência dos diferentes conjuntos para excentricidades no intervalo $ 0, 0,2 $	166

	<u>Pág.</u>
10.2 - Eficiência dos diferentes conjuntos para excentricidades no intervalo 0,2 , 0,4 	167
10.3 - Eficiência dos diferentes conjuntos para excentricidades no intervalo 0,4 , 0,6 	168
10.4 - Eficiência dos diferentes conjuntos para excentricidades no intervalo 0,6 , 0,8 	169
10.5 - Quantidades de resultados ótimos das diferentes formulações, extraídos de um total de trinta e seis resultados apresentados	170

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo o estudo sobre diferentes formas de se escrever as equações diferenciais do movimento orbital, visando uma propagação numérica. Não se estudará os integradores numéricos mas sim as diferentes formulações, embora se explore as interações entre ambos.

O trabalho está subdividido em dez capítulos dos quais os oito intermediários formam o seu corpo, sendo este a introdução e o último as conclusões. O Capítulo 2 trata das perturbações que atuam sobre um satélite artificial em movimento orbital e em seu final, uma tabela relatando as ordens de grandeza das perturbações é apresentada. No Capítulo 3 é apresentada a primeira das diferentes formulações. Trata-se da transformação do tipo Sundman de tempo na versão da anomalia excêntrica. Uma vez efetuada a transformação, o sistema passa a ser chamado de sistema transformado e sua variável independente é conhecida como tempo fictício. Após o desenvolvimento teórico, resultados de testes computacionais de propagação em movimento não perturbado são apresentados e comparados com resultados de propagações em tempo físico. Aqui ressalta-se que o termo em tempo físico refere-se ao sistema de equações diferenciais do movimento orbital, possuindo o tempo físico como variável independente. No Capítulo 4 estuda-se uma segunda formulação conhecida como estabilização, que faz uso da energia mecânica total do movimento. O sistema é então chamado de sistema estabilizado e sua variável independente é o tempo fictício. Após a apresentação teórica, testes computacionais são mostrados novamente considerando-se movimento não perturbado. O Capítulo 5 contém uma terceira formulação conhecida como regularização. Após a regularização, o sistema é então chamado de sistema regularizado e este além de se desenvolver no tempo fictício, que como será visto varia de forma não linear com o tempo físico, desloca-se em um espaço de quatro dimensões. Apresenta-se inicialmente o desenvolvimento teórico da formulação e em seguida, resultados

de testes de propagação numérica envolvendo também movimento orbital não perturbado. No Capítulo 6 são apresentados resultados de testes de propagações em movimento perturbado. Nele as formulações em tempo físico, transformado, estabilizado e regularizado foram propagadas considerando-se o segundo harmônico do geopotencial como efeito perturbador. Diversas tabelas e gráficos são apresentados, além de conclusões sobre as diferentes formulações. No Capítulo 7 propõe-se uma nova transformação de tempo. Qualquer transformação tem seu valor associado à forma mais ou menos equitativa na qual redistribuirá os comprimentos de arco ao longo de uma revolução, conforme será visto em detalhe. Este Capítulo destina-se a mostrar que podem haver transformações outras que melhor cumpram seu objetivo. São apresentados resultados de testes computacionais logo após o desenvolvimento teórico, testes estes efetuados em movimento perturbado com o segundo harmônico do geopotencial. O Capítulo 8 trata-se especificamente de um estudo sobre a coordenada de tempo físico. As diferentes formulações se desenvolvem no tempo fictício e precisa-se parar a propagação em um tempo físico qualquer. Com isto, o tempo físico precisa ser obtido em cada passo de integração, passando então a ser uma coordenada generalizada do sistema dinâmico. Esta coordenada, como qualquer outra, possui o seu erro numérico embutido e neste capítulo, curvas contendo o erro global da referida coordenada são traçadas, concluindo-se também quanto a influência deste erro na obtenção dos erros em posição e velocidade ao término da propagação. No Capítulo 9, estuda-se mecanismos que foram desenvolvidos com o objetivo de se obter a coordenada de tempo físico com um maior nível de precisão. São os chamados elementos de tempo. Após a apresentação teórica, são apresentados resultados de testes computacionais, concluindo-se em seguida sobre a eficiência e viabilidade da utilização de tais elementos em propagação numérica de órbita. No Capítulo 10 estão reunidas as principais conclusões de âmbito geral obtidas neste trabalho. Nele os diversos testes computacionais são confrontados segundo critérios de eficiência, tanto em precisão quanto em custo do processamento. Finaliza-se com sugestões para futuras aplicações das diferentes formulações em problemas reais de satélites artificiais.

Neste trabalho, três integradores numéricos foram utilizados na elaboração dos testes computacionais, o Runge-Kutta de quarta ordem, o Runge-Kutta de oitava ordem e o preditor-corretor também de oitava ordem, todos com tamanho de passo fixo. A construção dos programas de computador que formam a estrutura de testes tomou boa parte do tempo total do trabalho, tendo sido desenvolvidos cerca de setenta programas diferentes.

Apesar do Sundman ter idealizado sua transformação de tempo em 1912, o estudo das formulações é mais ou menos recente e a maioria dos trabalhos publicados o foram nas décadas de sessenta e setenta. Na década de sessenta o Kustaanheimo e o Stiefel idealizaram a regularização para movimento tridimensional através da transformação KS (Stiefel e Scheifele, 1971), que é uma generalização da já então conhecida regularização em duas dimensões, proposta por Levi-Civita. A partir de então os trabalhos se intensificaram e o Baumgarte propôs em 1972 (Baumgarte, 1972) um método para tornar Liapunov-Estável as equações diferenciais orbitais, sem aumentar em uma dimensão o movimento, como é o caso da regularização através da transformação KS. Atualmente duas tendências se ressaltam quanto a publicação de trabalhos: A apresentação de novas transformações do tipo Sundman de tempo para diferentes valores de c e n (ver Equação 7.16) (Nacozy, 1977; Velez e Hilinski, 1978; Ferrer e Sein-Echaluce, 1984) ou ainda, o desenvolvimento de novos elementos de tempo (Stokes, 1978; Janin e Bond, 1981; Nacozy, 1981; Zare, 1983). Pesquisou-se no presente trabalho de dissertação, as principais formulações desenvolvidas até a atualidade, bem como suas interações com diferentes integradores numéricos, mostradas em diversos testes computacionais. No Brasil, não se tem conhecimento de alguma publicação do tipo.

Este trabalho foi apresentado no Terceiro Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital, realizado em novembro de 86 na cidade de Águas de Lindóia, SP. Sua apresentação verificou-se em caráter preliminar, pois na época não se dispunha de todos os resultados.



CAPÍTULO 2

PERTURBAÇÕES NA ÓRBITA DE SATÉLITES ARTIFICIAIS TERRESTRES

Desprezando outros efeitos perturbadores e considerando a terra perfeitamente esférica e com distribuição homogênea de massa, as equações diferenciais orbitais escritas em um sistema com origem no centro de massa terrestre e com direções paralelas às direções de um sistema inercial conforme a Figura 2.1 são:

$$\ddot{\vec{r}} = -(u/r^3) \cdot \vec{r} \quad (2.1)$$

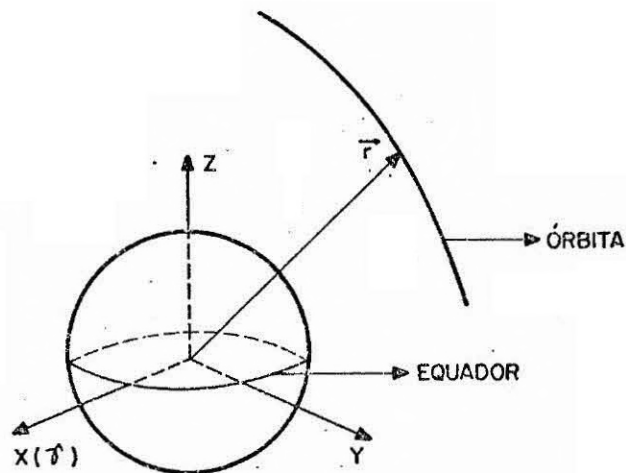


Fig. 2.1 - Sistema inercial Equatorial Geocêntrico.

onde $u=G(M+m)$ é a constante terrestre, sendo G a constante de gravitação universal, M e m as massas da terra e satélite respectivamente. Em tal caso, existe solução analítica que consiste na equação de uma cônica da forma:

$$r = P/(1+e \cdot \cos f) \quad (2.2)$$

onde P é o semi-parâmetro, e é a excentricidade da órbita e f a anomalia verdadeira. Porém, no caso específico de satélites artificiais terrestres o movimento não é plano uma vez que efeitos outros perturbam-no tais como:

- Não esferoidicidade e distribuição não homogênea de massa.
- Pressão de radiação solar direta e indireta.
- Arrasto atmosférico.
- Efeito gravitacional de um terceiro corpo perturbador.
- Marés terrestres devidas ao Sol e a Lua.

Após a inclusão destes efeitos (acelerações), as equações diferenciais do movimento orbital ficam na forma:

$$\ddot{\vec{r}} = -(u/r^3) \cdot \vec{r} - \partial V / \partial \vec{r} + \vec{P} \quad (2.3)$$

onde $\partial V / \partial \vec{r}$ representa perturbações oriundas de um campo potencial conservativo V , enquanto que $\vec{P}$ representa o vetor das demais perturbações não conservativas.

2.1 - PERTURBAÇÕES DEVIDAS AO GEOPOTENCIAL

Uma vez que a Terra não é uma esfera e não possui distribuição homogênea de massa, o campo potencial formado no espaço apresenta deformações que modificam a direção e intensidade do gradiente em determinados pontos, tornando a força específica em tais pontos não central. A modelagem deste campo (geopotencial) é feita através de uma série infinita de termos conhecidos como harmônicos esféricos terrestres e possui a forma (Heiskanen e Moritz, 1967):

$$U = (u/r) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (R/r)^n (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \cdot P_{nm}(\sin \psi) \quad (2.4)$$

onde C_{nm} e S_{nm} são os coeficientes dos harmônicos esféricos, R é o raio equatorial terrestre, r , λ , e Ψ são a distância em relação ao centro da Terra, longitude e latitude geocêntrica de um ponto no espaço, e $P_m(\sin\Psi)$ é o polinômio associado de Legendre. O geopotencial, Equação 2.4, está escrito no sistema geocêntrico terrestre com eixo X_g coincidente com o meridiano de Greenwich, conforme a Figura 2.2. Sabe-se que o gradiente da função potencial representa a aceleração que atuará em um determinado ponto no espaço. Tal gradiente é obtido em coordenadas esféricas (r, λ, Ψ) em um sistema fixo a Terra com eixo X_a na direção radial ao ponto no qual deseja-se conhecer a força específica, o Y_a no plano equatorial e o Z_a normal aos últimos, conforme a Figura 2.3.

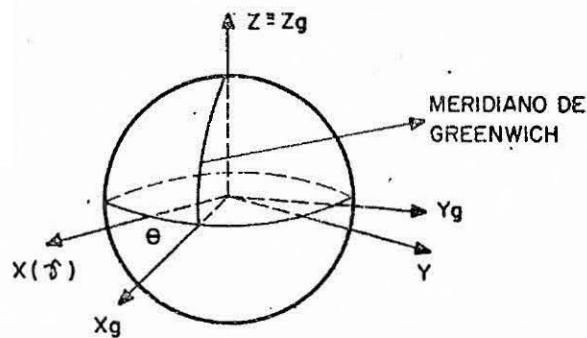


Fig. 2.2 - Sistemas equatoriais inercial e geocêntrico terrestre.

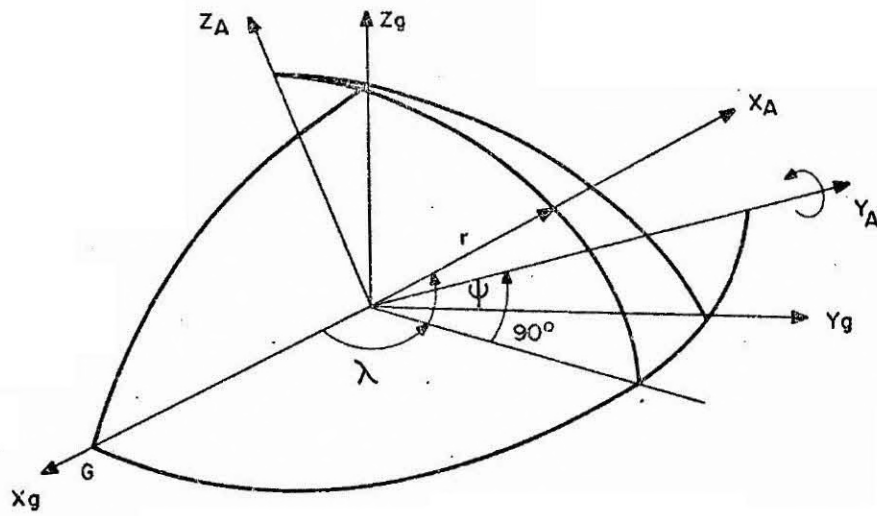


Fig. 2.3 - Sistema geocêntrico no qual originalmente obtém-se o gradiente do geopotencial.

Uma vez obtida a força específica neste sistema, esta é convertida para o sistema inercial, ficando sua expressão final na forma:

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} C\psi C\lambda C\theta - C\psi S\lambda S\theta & -S\lambda C\theta - C\lambda S\theta & -S\psi C\lambda C\theta + S\psi S\lambda S\theta \\ C\psi C\lambda S\theta + C\psi S\lambda C\theta & -S\lambda S\theta + C\lambda C\theta & -S\psi C\lambda S\theta - S\psi S\lambda C\theta \\ S\psi & 0 & C\psi \end{bmatrix} \cdot (u/r^2) \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n$$

$$(R/r)^n \begin{bmatrix} -(n+1)P'_n(\sin\psi) \cdot (C_n m \cos(m\lambda) + S_n m \sin(m\lambda)) \\ m \sec\psi P'_n(\sin\psi) \cdot (-C_n m \sin(m\lambda) + S_n m \cos(m\lambda)) \\ \cos\psi P''_n(\sin\psi) \cdot (C_n m \cos(m\lambda) + S_n m \sin(m\lambda)) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

sendo θ o tempo sideral de Greenwich (Fig. 2.2), N o número no qual de-seja-se truncar a série, $P'_n(\sin\psi)$ a derivada do polinômio de Legendre

dre, e R o raio equatorial terrestre. Algumas fórmulas de recorrência auxiliam a montagem final das Equações 2.5, são elas:

$$\cos \Psi . P'_{nm} = -n \sin \Psi (\sec \Psi P_{nm}) + (n+m) . \sec \Psi (P_{n-1}, m) \quad (2.6)$$

$$\cos(m\lambda) = \cos((m-1)\lambda) \cos \lambda - \sin((m-1)\lambda) \sin \lambda \quad (2.7)$$

$$\sin(m\lambda) = \sin((m-1)\lambda) \cos \lambda + \cos((m-1)\lambda) \sin \lambda \quad (2.8)$$

2.2 - PERTURBAÇÕES DEVIDAS AO ARRASTO ATMOSFÉRICO

O atrito com partículas da alta atmosfera produz, em satélites com altitude inferior a 2000 Km, uma força resistiva que tende a diminuir a velocidade do satélite alterando assim a quantidade de energia do movimento. A órbita entra num processo de circularização e a queda do satélite sobre o planeta é inevitável. Dos elementos orbitais, o semi-eixo é o que mais sofre variações devidas ao arrasto, embora todos os elementos variem com tal efeito. A força específica relativa ao arrasto atuante em um satélite artificial, é proporcional ao quadrado da velocidade relativa (V_r) entre este e a atmosfera local e possui a forma (Silva e Ferreira, 1984):

$$\ddot{\vec{r}} = -(1/2) . C_d . (S/m) . \rho . V_r \vec{V}_r \quad (2.9)$$

sendo S a secção transversal do satélite (área de referência), m a massa do satélite, C_d o coeficiente de arrasto, e ρ a densidade atmosférica local. A densidade atmosférica varia com a altitude e com a temperatura local, que por sua vez é estimada em função do fluxo solar médio e instantâneo bem como do índice geomagnético. Dentre os diversos modelos atmosféricos, destacam-se os de Jacchia (1970, 1971, 1977) como os mais utilizados. O coeficiente de arrasto depende do material que constitui a superfície do satélite bem como da sua forma, além de depender da densidade atmosférica local, embora possa ser considerado constante juntamente com a área de referência em certos casos nos quais a atitude do satélite é controlada. Considerando toda a atmosfera deslocando-se conjuntamente

com a terra em rotação, cuja velocidade angular é ω_t , a força específica devida ao arrasto possui a forma final:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{Bmatrix} = -(1./2) C_d (S/m) \rho V_r \begin{Bmatrix} \dot{X} + \omega_t Y \\ \dot{Y} - \omega_t X \\ \dot{Z} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

2.3 - PERTURBAÇÕES DEVIDAS À PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR DIRETA

Tal efeito é resultante da troca de quantidade de movimento entre radiações emitidas pelo Sol com o satélite. De forma semelhante ao arrasto atmosférico, a força específica devida a pressão de radiação direta manifesta-se expressivamente em satélites com grande razão área sobre massa, estando na mesma direção e sentido oposto ao vetor satélite-Sol, possuindo a forma (Lala, 1974):

$$\ddot{\vec{r}} = - \nu C_r (S/m) P_s \hat{R}_s \quad (2.11)$$

sendo ν o fator de eclipse, C_r o coeficiente de reflectividade, S/m a razão área sobre massa, P_s pressão de radiação solar na vizinhança da terra, e $\hat{R}_s$ o versor solar (satélite-Sol). O fator de eclipse ν assume os valores 1, quando o satélite está iluminado, ou 0 quando está passando pela sombra da terra projetada no espaço. O coeficiente de reflectividade C_r dependerá basicamente da superfície do material que constitui o satélite, fato associado aos percentuais de reflexão especular e difusa após o impacto da radiação.

2.3.1 - ALBEDO TERRESTRE

Parte da superfície terrestre iluminada pelo Sol, reflete uma parcela dessa radiação incidente que chega a atingir e trocar quantidade de movimento com o satélite. A força específica atuante no

satélite devida a tal efeito é uma parcela da força específica devida a radiação solar direta. O efeito conjunto das pressões de radiação direta e indireta (albedo) possui a forma (Lautman, 1977):

$$\ddot{\vec{r}} = \nu Cr(S/m)Ps \left\{ \begin{bmatrix} -Xs/Rs \\ -Ys/Rs \\ -Zs/Rs \end{bmatrix} + n(A0 + A2(Z/r)^2) \begin{bmatrix} X/r \\ Y/r \\ Z/r \end{bmatrix} \right\} \quad (2.12)$$

sendo Xs/Rs , Ys/Rs e Zs/Rs as coordenadas versor solar no sistema inercial, n o fator de existência do albedo que assume os valores 0 ou 1, dependendo se o satélite estará ou não sobre a parte iluminada da terra assumida como causadora do albedo, $A0=0,219$ e $A2=0,41$ são os coeficientes que modelam o albedo (Silva e Ferreira, 1984), e X/r , Y/r , Z/r são as coordenadas do versor do satélite no sistema inercial.

2.4 - PERTURBAÇÕES DEVIDAS A AÇÃO GRAVITACIONAL DE UM TERCEIRO CORPO

Além da Terra, considera-se também o Sol e a Lua como causadores de atração gravitacional sobre o satélite. O potencial relativo a um terceiro corpo perturbador é dado por (Kaplan, 1976):

$$U_i = GM_i(1/|\vec{r}-\vec{R}_i| - \vec{r} \cdot \vec{R}_i/(R_i^3)) \quad (2.13)$$

onde G é a constante de gravitação universal, M_i é a massa do corpo perturbador (Sol ou Lua), $\vec{r}$ e $\vec{R}_i$ são os vetores posição do satélite e corpo perturbador, ambos no sistema inercial. A força específica atuante terá resultante igual ao gradiente do potencial perturbador com relação a $\vec{r}$, ou seja:

$$\ddot{\vec{r}} = -GM_i((\vec{r}-\vec{R}_i)/|\vec{r}-\vec{R}_i|^3 + \vec{r} \cdot \vec{R}_i/(R_i^3)) \quad (2.14)$$

2.5 - PERTURBAÇÕES DEVIDAS ÀS MARÉS TERRESTRES

Os campos gravitacionais do Sol e Lua provocam uma redistribuição de massa nas regiões da Terra mais próximas desses as tros, provocando protuberâncias superficiais nas direções dos respec tivos astros. Esta protuberância por sua vez cria um novo campo gravi tacional e portanto, uma nova força específica atua no satélite, cuja a expressão final possui a forma (Heiskanen e Meinesz, 1958):

$$\begin{Bmatrix} \ddots \\ X \\ \ddots \\ Y \\ \ddots \\ Z \end{Bmatrix} = (3./2)K_2(GM_i R^5 / R_i^3 r^5) \begin{Bmatrix} (1-5D^2)X + 2DrX_i \\ (1-5D^2)Y + 2DrY_i \\ (1-5D^2)Z + 2DrZ_i \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

onde K_2 é o coeficiente de elasticidade terrestre de ordem 2, também co_nhecido como número de Love, $\vec{r}$ e $\vec{R}_i$ são os vetores posição do satélite e corpo perturbador no sistema inercial, $D = \vec{r} \cdot \vec{R}_i$, e M_i é a massa do Sol ou Lua.

2.6 - EFEITO DAS FORÇAS PERTURBADORAS SOBRE OS ELEMENTOS ORBITAIS

As forças perturbadoras têm suas ordens de grandeza em função da altitude do satélite conforme tenta ilustrar a Tabela 2.1 (Silva e Ferreira, 1984), na qual a força gravitacional terrestre em órbita kepleriana tem valor unitário, enquanto que as demais têm ordem relativa a primeira.

TABELA 2.1

ORDEM DE GRANDEZA DAS FORÇAS ESPECÍFICAS PERTURBADORAS

PERTURBAÇÕES	SAT. PRÓXIMO	GEOESTACIONÁRIO
Orb. Kepler.	1	1
Achat. polar	10^{-3}	10^{-5}
Derais harm.	10^{-6}	10^{-8}
Arrasto	10^{-7}	0
Lua e Sol	10^{-7}	10^{-5}
P. de rad.	10^{-8}	10^{-6}
Marés	10^{-10}	10^{-13}

Integrações numéricas (Kuga e Silva, 1984) considerando todas as forças perturbadoras citadas foram efetuadas na seguinte órbita inicial:

$a = 7136636,4 \text{ m}$; Altitude = 758,5 Km

$e = 0,05$

$i = 15^\circ$

$\Omega = 45^\circ$

$W = 30^\circ$

$M = 0^\circ$

As constantes para o cálculo das perturbações foram as seguintes:

$C_d = 2$

$C_r = 1.$

Índice Geomagnético = 10

Fluxo Solar = $100 \cdot 10^{-22}$ watts.s/m²

Fluxo Solar Médio = $100 \cdot 10^{-22}$ watts.s/m²

A/m = 1.m²/Kg

Após aproximadamente três períodos de revolução, foram obtidos os seguintes gráficos que ilustram o comportamento dos elementos orbitais no tempo:

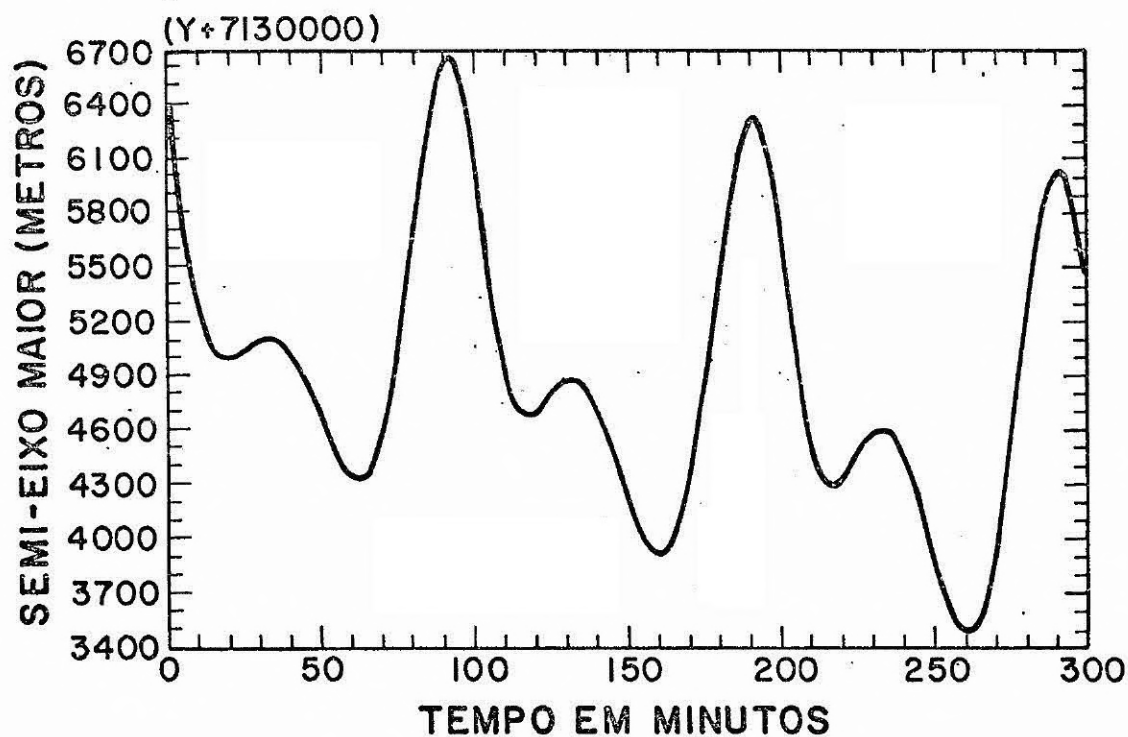


Fig. 2.4 - Comportamento do semi-eixo maior no tempo.

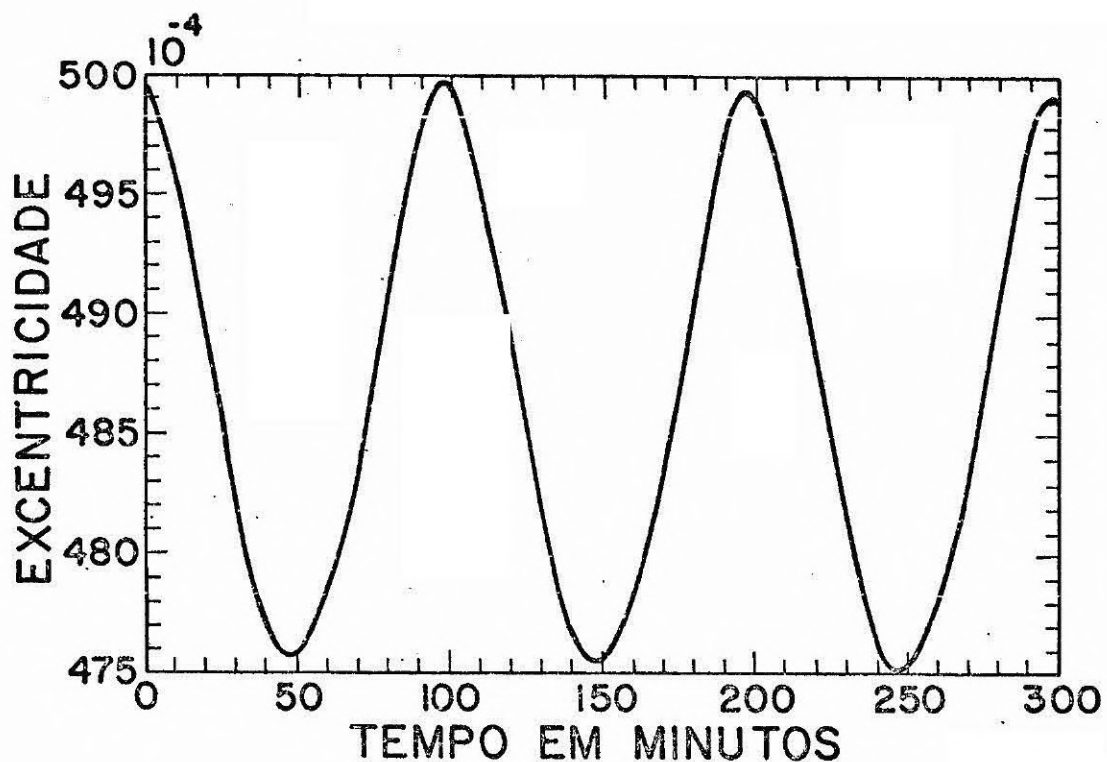


Fig. 2.5 - Comportamento da excentricidade no tempo.

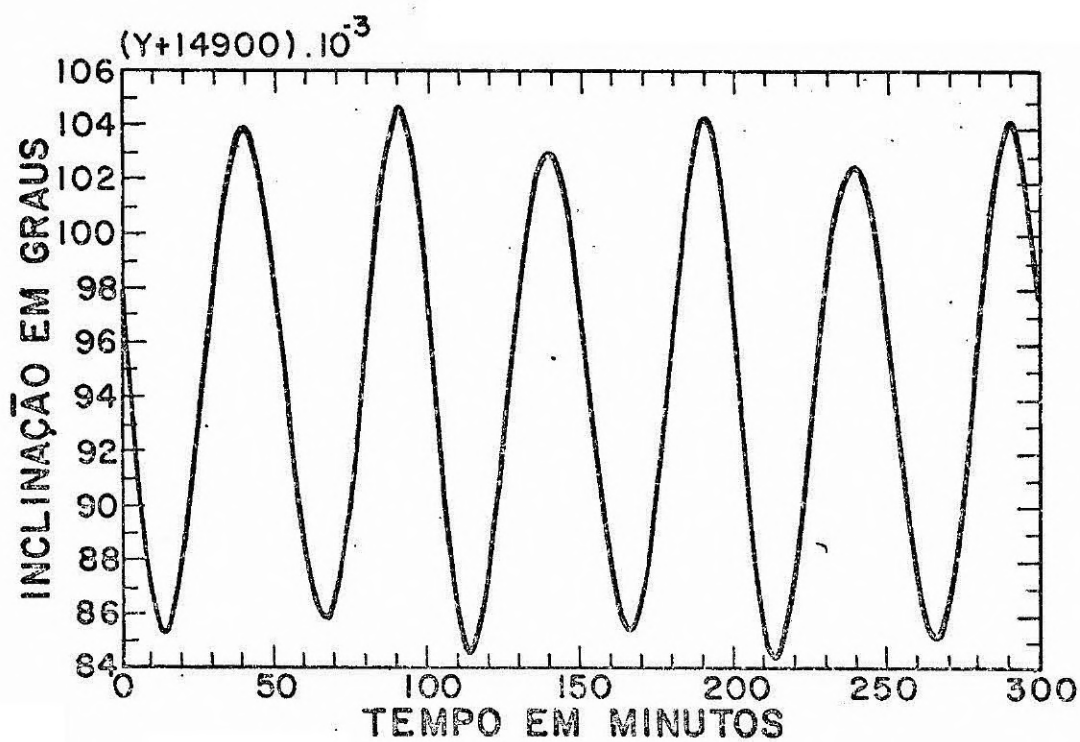


Fig. 2.6 - Comportamento da inclinação no tempo.

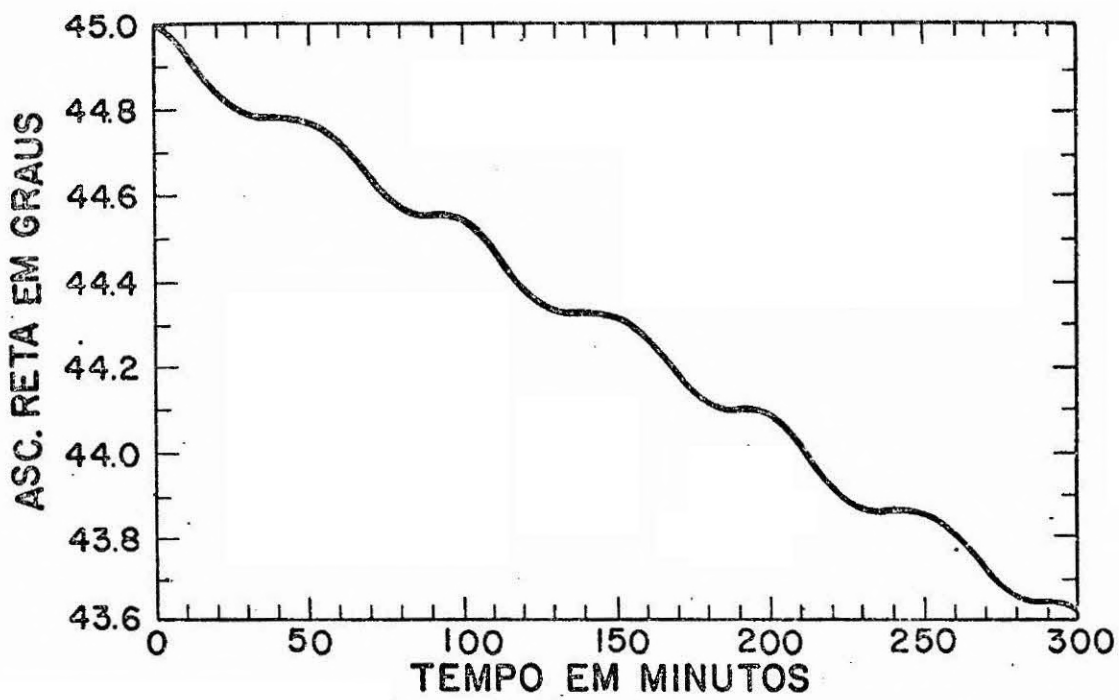


Fig. 2.7 - Comportamento da ascensão reta do nodo ascendente no tempo.

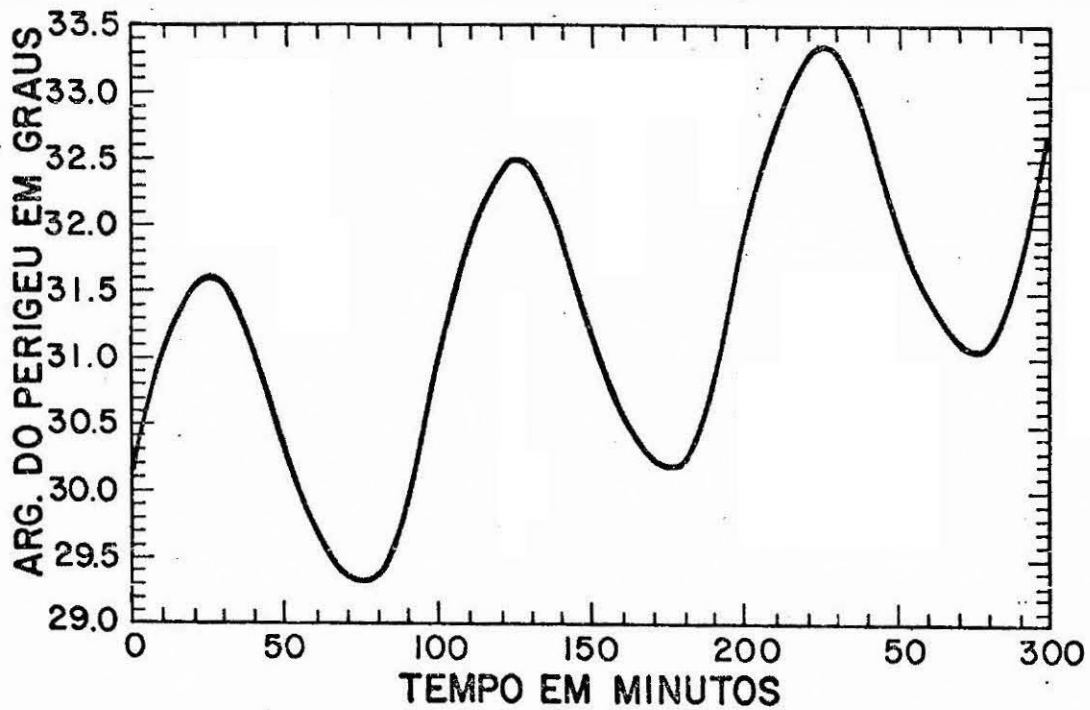


Fig. 2.8 - Comportamento do argum. do Perigeu no tempo.

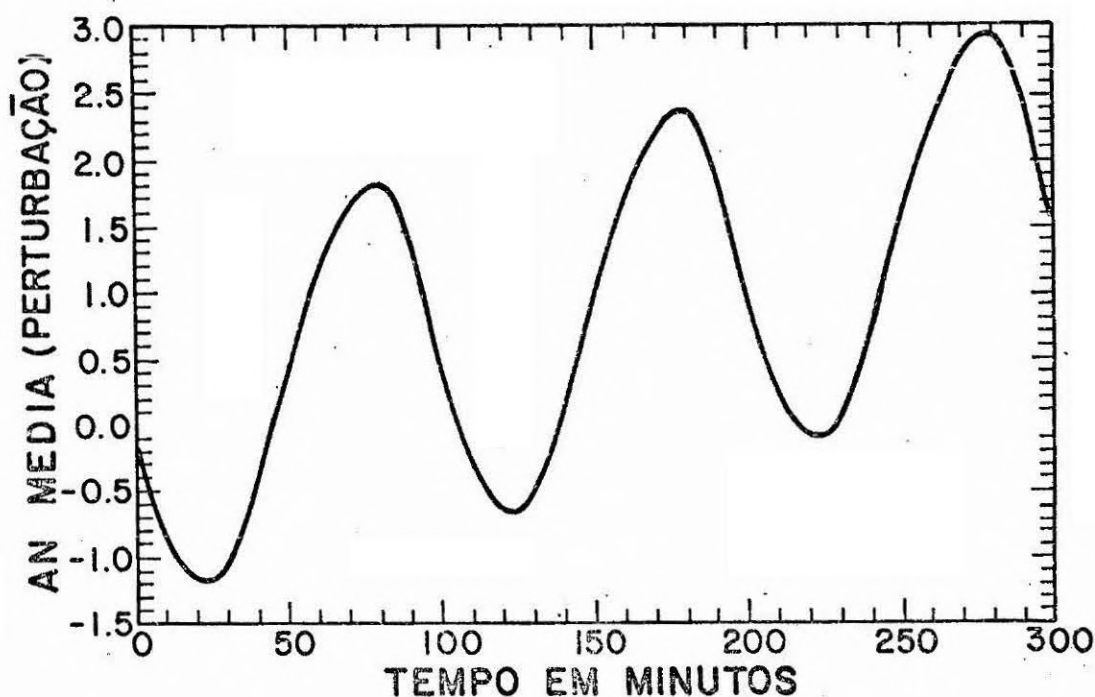


Fig. 2.9 - Comportamento da anomalia média sem a componente kepleriana (graus).

A composição das forças perturbadoras forma uma resultante que varia com o vetor de estado do satélite. Tal resultante provoca variações na forma da órbita bem como na energia mecânica do movimento, acarretando como consequência variações periódicas e seculares nos elementos orbitais.

Uma das maiores aplicações da mecânica celeste em movimento orbital de satélites artificiais terrestres é a determinação da posição e velocidade de um satélite em um determinado tempo após um tempo de referência. A órbita propagada é perturbada, e as perturbações fazem com que não existam soluções analíticas para as equações diferenciais orbitais, fazendo com que a propagação seja numérica. Passa-se então a conviver com erros devidos ao método numérico, que discretiza uma solução que é contínua, e erros de truncamento devidos as operações algébricas no computador.

Há, entretanto, diferentes maneiras de formulação das equações diferenciais do movimento orbital que representam a dinâmica do sistema às quais possibilitam um aumento por vezes significativo do rendimento em precisão da integração. Baseando-se nessa motivação, inicia-se no próximo capítulo o estudo de tais formulações.

CAPÍTULO 3

TRANSFORMAÇÃO DE TEMPO

Tendo-se como objetivo a determinação da posição e velocidade de um satélite em um determinado tempo, há a necessidade de se integrar o sistema:

$$\ddot{\vec{r}} = -(u/r^3) \cdot \vec{r} - \partial V / \partial \vec{r} + \vec{P} \quad (3.1)$$

Sem dúvida, a parte predominante da Equação 3.1 é a que se refere a órbita kepleriana, ou seja, $-u\vec{r}/r^3$. Tal equação é singular na origem ($r=0$) e existe uma espécie de "gradiente de singularidade" à medida em que o satélite varia sua posição com relação a origem, o que torna a solução mais ou menos divergente em um determinado ponto em função do raio vetor $\vec{r}$. Este fato contribui, por exemplo, para que a solução do sistema tenha sua precisão em função da excentricidade da órbita uma vez que para órbitas muito excêntricas há uma grande variação dos módulos posição e velocidade em uma única revolução. Esta imprecisão relativa à singularidade das equações diferenciais orbitais pode ser em parte superada com uma grande diminuição no tamanho do passo de integração numa região próxima ao perigeu utilizando-se um integrador de ordem e passo variáveis ajustados automaticamente, mas tal procedimento aumenta em muito o custo do processamento. Uma outra alternativa que dependendo da precisão desejada pode ser mais viável, está na utilização das formulações analisadas no presente trabalho, que permitem controlar o tamanho do passo de integração de forma analítica, no caso de se utilizar um sistema com o tempo transformado (aqui chamado de sistema transformado), assunto deste capítulo, ou ainda, na utilização de sistemas estabilizados e regularizados, assuntos de capítulos posteriores.

3.1 - CONSIDERAÇÕES SOBRE A INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Desmembrando-se a Equação 3.1 em suas componentes vetoriais, o sistema dinâmico ficará na forma:

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= -(u/r^3)X - \partial V/\partial X + P_x = F_1(t, Q_i) \\ \ddot{Y} &= -(u/r^3)Y - \partial V/\partial Y + P_y = F_2(t, Q_i) \\ \ddot{Z} &= -(u/r^3)Z - \partial V/\partial Z + P_z = F_3(t, Q_i)\end{aligned}\tag{3.2}$$

sendo P_x , P_y , P_z as projeções da resultante das perturbações não conservativas, e Q_i as coordenadas generalizadas correspondentes à posição e velocidade.

O sistema 3.2 de três dimensões pode ser representado através de um sistema equivalente de seis dimensões com as seguintes definições:

$$X = X_1, \quad Y = Y_1, \quad Z = Z_1$$

$$\dot{X} = X_2, \quad \dot{Y} = Y_2, \quad \dot{Z} = Z_2$$

Assumindo as referidas definições, tem-se o sistema de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{Y}_1 &= Y_2 \\ \dot{Z}_1 &= Z_2 \\ \dot{X}_2 &= F_1(t, Q_i) \\ \dot{Y}_2 &= F_2(t, Q_i) \\ \dot{Z}_2 &= F_3(t, Q_i)\end{aligned}\tag{3.3}$$

Os métodos numéricos para solução de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem (Henrici, 1965), avaliam o vetor de estado solução a partir de algumas avaliações das derivadas (lado di

reito do sistema de Equações 3.3) em pontos precedentes aos pontos nos quais deseja-se conhecer tal vetor. Portanto, é a singularidade contida nas equações diferenciais e não na solução uma das causas da imprecisão dos resultados finais da integração.

3.2 - TRANSFORMAÇÃO DE TEMPO

Em órbitas excêntricas, o excessivo acréscimo da velocidade física numa região próxima ao perigeu, faz com que se obtenha comprimentos maiores de arco por passo de revolução nessa região, ocorrendo o contrário numa região próxima ao apogeu, isso para um tamanho de passo fixo em tempo físico. Os diferentes comprimentos de arco tomados ao longo de uma revolução elevam o nível dos erros obtidos ao término da propagação. Uma maneira de diminuir esse efeito é através de uma transformação de tempo, ou seja, transforma-se a variável independente do sistema, tempo físico (t), escrevendo-se um novo sistema equivalente ao primeiro com uma nova variável independente (s), conhecida como tempo fictício. Tal transformação é conhecida na literatura como transformação de Sundman (Nacozy, 1975; Zaire, 1983). A razão física desta transformação está na necessidade de se minimizar o efeito negativo do acréscimo da velocidade criando-se uma nova velocidade, a fictícia, que terá módulo igual ao da velocidade física $\dot{r}$ multiplicado pelo módulo do raio vetor r .

$$d\vec{r}/ds = r \cdot d\vec{r}/dt \quad (3.4)$$

O módulo do raio vetor do satélite funciona como um moderador da velocidade física, fazendo com que a velocidade fictícia assuma valores mais uniformes do que a velocidade física durante uma revolução, o que efetivamente redistribui de forma mais equitativa os comprimentos de arco ao longo da órbita. O tempo fictício varia de forma não linear com o tempo físico e isto permite uma regulação analítica do tamanho do passo de integração. Da equação 3.4 pode ser escrito o operador transformação:

$$d/dt = (1/r) d/ds \quad (3.5)$$

Ainda da Equação 3.4

$$\vec{dr}/dt = (1/r) \vec{dr}/ds ; \quad d^2\vec{r}/dt^2 = d/dt((1/r)\vec{dr}/ds)$$

Aplicando-se o operador 3.5

$$d^2\vec{r}/dt^2 = (1/r)d/ds((1/r)\vec{dr}/ds)$$

$$d^2\vec{r}/dt^2 = -(1/r)^2((r'/r)\vec{dr}/ds - d^2\vec{r}/ds^2) : \quad r' = dr/ds$$

Com a Equação 3.1 tem-se:

$$-(1/r)^2((r'/r)\vec{dr}/ds - d^2\vec{r}/ds^2) = -(u/r^3)\vec{r} + \vec{P}-\partial V/\partial\vec{r} .$$

Reagrupando-se termos:

$$d^2\vec{r}/ds^2 = (1/r) (r'\vec{dr}/ds - u\vec{r}) + r^2(\vec{P}-\partial V/\partial\vec{r}) \quad (3.6)$$

A Equação 3.6 escrita em termos das componentes vetoriais possui a forma,

$$X'' = 1/r \cdot (r'X' - uX) + r^2(P_x - \partial V/\partial X)$$

$$Y'' = 1/r \cdot (r'Y' - uY) + r^2(P_y - \partial V/\partial Y) \quad (3.7)$$

$$Z'' = 1/r \cdot (r'Z' - uZ) + r^2(P_z - \partial V/\partial Z)$$

e representa o sistema dinâmico tendo como variável independente o tempo fictício s . Há entretanto a necessidade de se parar a integração em um determinado tempo físico forçando assim o acréscimo de uma nova equação diferencial ao sistema. Da equação base da transformação (Equação 3.4), tem-se:

$$dt/ds = r \quad (3.8)$$

Assumindo as igualdades,

$$X = X1, \quad Y = Y1, \quad Z = Z1,$$

$$X' = X2, \quad Y' = Y2, \quad Z' = Z2$$

e acrescentando a equação do tempo físico 3.8, o sistema ficará na forma :

$$X1' = X2$$

$$Y1' = Y2$$

$$Z1' = Z2$$

$$X2' = (1/r)(r'X2 - uX1) + r^2(Px - \partial V / \partial X) \quad (3.9)$$

$$Y2' = (1/r)(r'Y2 - uY1) + r^2(Py - \partial V / \partial Y)$$

$$Z2' = (1/r)(r'Z2 - uZ1) + r^2(Pz - \partial V / \partial Z)$$

$$t' = r$$

As Equações 3.9 mostram que após a transformação de tempo o sistema passou a ser de sétima ordem, o que aumentará um pouco o tempo de processamento na integração numérica. Porém, esse acréscimo no tempo de processamento é compensado pelo expressivo ganho em precisão conforme será visto a seguir.

3.3 - RESULTADO DE TESTES COMPUTACIONAIS E CONCLUSÕES

Inicialmente todos os testes de propagação apresentados estarão restritos a órbitas keplerianas. Isto deve-se ao fato de que o comportamento relativo em termos de precisão entre as diferentes formulações mantém-se para órbitas perturbadas, diferindo apenas na dimensão

do erro, em relação a órbita kepleriana. Em outras palavras, o percentual de ganho ou perda em precisão entre as diferentes formulações mantém-se aproximadamente constante, quer seja órbita kepleriana ou perturbada. Uma vez que se conhece a solução analítica do sistema de equações diferenciais da órbita kepleriana, pode-se então avaliar com exatidão o erro da solução obtida em qualquer formulação, o que além de permitir conclusões preliminares, serve como base de testes para desenvolvimento de novas formulações.

Ao considerar-se órbita kepleriana, o sistema de equações diferenciais do movimento orbital tendo o tempo fictício como variável independente (Equações 3.9) assumirá a forma:

$$X1' = X2$$

$$Y1' = Y2$$

$$Z1' = Z2$$

$$X2' = (1/r)(r'X2 - uX1) \quad (3.10)$$

$$Y2' = (1/r)(r'Y2 - uY1)$$

$$Z2' = (1/r)(r'Z2 - uZ1)$$

$$t' = r$$

Como a propagação da órbita através do sistema transformado (Equação 3.9) é feita no tempo fictício e há obviamente a necessidade de se conhecer a solução, vetor de estado do satélite, em um determinado tempo físico, tem-se que interpolar a solução neste tempo físico final desejado. Mecanismos de parada no tempo físico final foram desenvolvidos e são objeto de capítulos posteriores. Porém, caso trabalhe-se com órbita kepleriana, o mecanismo de parada no tempo físico final pode ser obtido de forma ana

lítica partindo-se da equação de kepler, conforme ilustra o seguinte formalismo baseado no tempo físico final equivalente a um período orbital:

$$M = E - e \cdot \text{Sen} E = \sqrt{u/a^3} \cdot (t - T_0), \quad (3.11)$$

onde M é a anomalia média, e a excentricidade, a o semi-eixo maior e E a anomalia excêntrica. Derivando-se a Equação 3.11 em relação ao tempo físico t, tem-se:

$$dM/dt = dM/ds \cdot ds/dt = \sqrt{u/a^3} \quad (3.12)$$

$$ds/dt = 1/r : dM/ds = dE/ds \cdot (1 - e \cos E)$$

Substituindo as duas últimas equações na Equação 3.12 tem-se:

$$\begin{aligned} 1/r \cdot (1 - e \cos E) \, dE/ds &= 1/a \cdot \sqrt{u/a} \\ ds &= \sqrt{a/u} \cdot dE \end{aligned} \quad (3.13)$$

Com a equação 3.13 identifica-se claramente que o tempo fictício s é proporcional a anomalia excêntrica E, sendo esse o motivo pelo qual a transformação de tempo apresentada é conhecida como transformação do tipo Sundman na versão da anomalia excêntrica. Considerando-se o intervalo de integração equivalente ao período orbital, o tempo fictício final será:

$$s = \sqrt{a/u} \cdot \int_0^{2\pi} dE = \sqrt{a/u} \cdot 2\pi \quad (3.14)$$

Os Sistemas 3.3 (tempo físico) e 3.10 (tempo fictício), foram integrados através dos métodos Runge-kutta de quarta e oitava ordem, e Adams-Basforth-Multon (preditor-corretor) de oitava ordem, todos com tamanho de passo fixo. Uma órbita de referência foi escolhida e foram efetuadas integrações com 60, 40 e 20 passos por revolução, com a

excentricidade variando de 0 a 0,8, estando os resultados dispostos nas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3. Os erros em posição e velocidade apresentados nas tabelas foram obtidos com as expressões:

$$\Delta r = \sqrt{((X_p - X_r)^2 + (Y_p - Y_r)^2 + (Z_p - Z_r)^2)} ,$$

$$\dot{\Delta r} = \sqrt{((\dot{X}_p - \dot{X}_r)^2 + (\dot{Y}_p - \dot{Y}_r)^2 + (\dot{Z}_p - \dot{Z}_r)^2)} ,$$

onde os índices p e r representam valores propagados e reais, sendo os últimos obtidos de forma analítica.

Algumas convenções foram adotadas nas tabelas, a saber:

T/60 - Período orbital sobre 60.

CPU - Tempo de processamento em segundos.

As propagações foram efetuadas considerando o tempo físico final equivalente a um período orbital, sobre as seguintes órbitas de referência:

$$a = 34869261. \text{ m}$$

$$e = 0. , 0,2 , 0,4 , 0,6 , 0,8$$

$$i = 15.$$

$$\Omega = 45.$$

$$W = 30.$$

$$M = 0.$$

TABELA 3.1

SISTEMAS EM TEMPO FÍSICO E TRANSFORMADO, PROPAGADOS
EM UM RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

EXC.	PASSO	SISTEMA EM TEMPO FÍSICO			SISTEMA TRANSFORMADO		
		$\Delta r(m)$	$\Delta r(m/s)$	CPU	$\Delta r(m)$	$\Delta r(m/s)$	CPU
0,0	T/60	731,54255	0,070924	0,4	109,2296	0,019407	0,4
	T/40	3543,6573	0,343510	0,3	512,6328	0,048553	0,3
	T/20	61628,348	5,969623	0,2	11300,13	0,997608	0,2
0,2	T/60	135,25099	0,101769	0,4	76,65952	0,009584	0,4
	T/40	1949,4344	0,666859	0,3	296,8085	0,036128	0,3
	T/20	112987,50	20,13424	0,2	7422,086	0,832993	0,2
0,4	T/60	12073,069	2,741241	0,4	163,0423	0,026435	0,4
	T/40	101847,61	20,87057	0,3	1025,552	0,169070	0,3
	T/20	3082855,1	579,9179	0,2	15148,52	2,505758	0,2
0,6	T/60	949434,76	295,6526	0,4	1129,619	0,327146	0,4
	T/40	6270950,7	1904,748	0,3	5914,004	1,716661	0,3
	T/20	42784633,	8974,153	0,2	86216,09	25,04552	0,3
0,8	T/60	27987765,	11726,83	0,4	6232,818	4,887867	0,4
	T/40	1495405,5	1996,568	0,3	29319,84	22,97029	0,4
	T/20	440851349,	5775,656	0,2	373556,2	294,7239	0,2

TABELA 3.2

SISTEMAS EM TEMPO FÍSICO E TRANSFORMADO, PROPAGADOS
EM UM RUNGE-KUTTA DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	SISTEMA EM TEMPO FÍSICO			SISTEMA TRANSFORMADO		
		$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	72,439267	0,007023	1,1	27,44706	0,002661	1,3
	T/40	72,444628	0,007024	0,8	27,45249	0,002661	0,9
	T/20	70,229294	0,006809	0,5	27,43642	0,002660	0,6
0,2	T/60	139,35999	0,017239	1,1	40,39291	0,004996	1,3
	T/40	139,30630	0,017230	0,8	40,39456	0,004996	0,9
	T/20	121,07320	0,014593	0,5	40,39547	0,004997	0,6
0,4	T/60	278,46016	0,049095	1,2	58,74703	0,010358	1,3
	T/40	273,21002	0,048087	0,8	58,75106	0,010359	0,9
	T/20	644,72973	0,123075	0,5	58,89803	0,010385	0,6
0,6	T/60	547,81619	0,165407	1,1	87,90736	0,026636	1,3
	T/40	994,70137	0,308213	0,8	87,93163	0,026643	0,9
	T/20	831967,19	249,7728	0,5	90,30483	0,027352	0,6
0,8	T/60	1652847,2	1324,172	1,1	148,2303	0,119773	1,3
	T/40	53892661,	11245,80	0,8	148,5012	0,119987	0,9
	T/20	208244648,	8316,349	0,5	259,9465	0,209818	0,6

TABELA 3.3

SISTEMAS EM TEMPO FÍSICO E TRANSFORMADO, PROPAGADOS
EM UM PREDITOR-CORRETOR DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	SISTEMA EM TEMPO FÍSICO			SISTEMA TRANSFORMADO		
		$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	72,352545	0,007015	0,7	27,46846	0,002663	0,8
	T/40	69,229277	0,006704	0,6	27,40518	0,002654	0,6
	T/20	866,07089	0,086810	0,5	205,8943	0,013025	0,6
0,2	T/60	94,378819	0,010987	0,8	40,41962	0,004999	0,8
	T/40	4594,4964	0,527599	0,7	40,40266	0,004994	0,7
	T/20	94891,910	9,667247	0,5	166,0755	0,014196	0,7
0,4	T/60	27452,008	4,598533	0,8	58,76881	0,010362	0,8
	T/40	5144,3002	2,285873	0,7	58,80854	0,010364	0,6
	T/20	704091,20	110,2773	0,5	137,7687	0,018086	0,7
0,6	T/60	722867,11	222,8826	0,8	87,93037	0,026643	0,8
	T/40	850777,05	232,6749	0,7	88,00745	0,026660	0,6
	T/20	1204067,3	868,6753	0,5	136,5897	0,034561	0,7
0,8	T/60	4275241,8	3341,525	0,8	148,2438	0,119784	0,7
	T/40	48863027,	10581,10	0,8	148,5827	0,120041	0,6
	T/20	208050090,	8323,319	0,5	274,8334	0,210510	0,7

A Tabela 3.1 apresenta os resultados da propagação por um período orbital dos sistemas em tempo físico (Equação 3.3) e transformado (Equação 3.10), utilizando-se um Runge-Kutta de quarta ordem. Este integrador apresenta um comportamento irregular uma vez que avalia apenas quatro vezes as derivadas em cada passo de integração. A precisão dos resultados obtidos pode variar muito para pequenas variações da excentricidade da órbita para um mesmo tamanho de passo de integração. Tem-se portanto como uma boa norma, o fato de não ser aconselhável para efeito de propagação orbital a utilização de Runge-Kutta de quarta ordem. Mesmo assim, o sistema transformado apresentou sempre uma sensível vantagem em termos de precisão em relação ao sistema em tempo físico, como pode ser verificado a partir da análise dos dados apresentados na tabela.

Na Tabela 3.2 estão dispostos os resultados da propagação por um período orbital dos sistemas em estudo, tendo sido utilizado um Runge-Kutta de oitava ordem. Dado o seu bom comportamento em termos de regularidade, esse integrador será utilizado com maior frequência nos testes que dão sequência a este trabalho. Da análise dos dados apresentados na tabela, percebe-se uma sensível vantagem em termos de precisão do sistema transformado sobre o sistema em tempo físico, vantagem esta que se amplia à medida em que a excentricidade da órbita aumenta. Deve ser ressaltado que para excentricidade nula o sistema transformado mostrou-se também melhor do que o sistema em tempo físico, apesar de teoricamente serem iguais. Este fato está associado à forma na qual estão escritas as equações do movimento orbital, ou seja, $(-u/r^3)\vec{r}$ passou a ser $(1/r)(\vec{r}'\vec{r}' - u\vec{r})$, onde percebe-se que houve uma espécie de redução da instabilidade (ver capítulo 4), o que fez com que o Stiefel (Stiefel-Sheifele, 1971) chamasse a transformação de tempo de primeiro passo de regularização. A fim de se certificar sobre esse efeito, propagou-se, em dupla precisão, a órbita com excentricidade nula presente nos testes. Verificou-se que os resultados da Tabela 3.2 se mantiveram sem mudanças significativas com a referida propagação. O tempo de processamento foi sempre maior com o sistema transformado, fato associado ao acréscimo de mais uma equação

ao sistema. Porém, o nível de precisão dos resultados finais com o sistema transformado compensa o acréscimo de tempo.

Na Tabela 3.3 estão os resultados dos mesmos sistemas agora propagados com um preditor-corretor de oitava ordem. Com este integrador, o sistema em tempo físico apresentou resultados menos precisos do que os apresentados com o Runge-Kutta de mesma ordem. Já o sistema transformado apresentou resultados idênticos aos apresentados pelo Runge-Kutta de mesma ordem, diferindo apenas nos resultados obtidos com o tamanho de passo $T/20$. Analisando-se os dados da referida tabela, percebe-se a mesma tendência das tabelas anteriores, ou seja, resultados mais precisos são obtidos com o sistema transformado, sendo que a vantagem em termos de precisão sobre o sistema em tempo físico, cresce com o aumento da excentricidade da órbita. O tempo de processamento médio com média referente aos três passos de integração apresentou-se ligeiramente maior com a utilização do sistema transformado em relação ao sistema em tempo físico, porém esse acréscimo tenderia a aumentar se a propagação fosse feita por mais de uma revolução.

O gráfico contido na Figura 3.1 realça o comportamento das formulações em tempo físico e transformado em função da excentricidade da órbita. Ele foi construído a partir dos dados da Tabela 3.2, para o tamanho de passo equivalente ao período orbital sobre sessenta ($T/60$). Com ele percebe-se com maior nitidez que, ao contrário do sistema em tempo físico, o sistema transformado pode ser utilizado em órbitas com excentricidades mais elevadas. Percebe-se ainda que o erro em posição do sistema transformado, cresce quase que linearmente com a excentricidade variando de 0. a 0,4, ao passo que o erro do sistema em tempo físico possui crescimento do tipo exponencial, assumindo valores extremamente elevados para valores de excentricidade maiores que 0,6. Aqui percebe-se o efeito da transformação de tempo com consequente controle analítico do tamanho do passo de integração, fazendo com que os erros locais da integração com o sistema transformado sejam menores do que os erros com o sis

tema em tempo físico, uma vez que o efeito negativo da excessiva variação do módulo da velocidade durante uma revolução em órbitas com elevadas excentricidades foi em parte amortizado com a criação da velocidade fictícia, que assume valores mais uniformes em uma revolução.

Ao analisar-se os resultados obtidos nas tabelas e em parte expressados no gráfico, foram propostas conclusões que comprovam o que de forma intuitiva se esperava. Para ambas as formulações, os erros crescem com a elevação da excentricidade, ressaltando-se porém o fato de que esse crescimento é bem mais suave quando se trabalha com o sistema transformado. Os métodos de maior ordem, de uma forma geral, apresentam melhores resultados, porém, ao custo de um maior tempo de processamento justamente porque avaliam mais vezes as derivadas.

No cômputo geral, houve expressivo ganho em precisão do sistema transformado em relação ao sistema em tempo físico, o que justifica em muito o relativamente pequeno aumento no tempo de processamento devido ao acréscimo de mais uma equação.

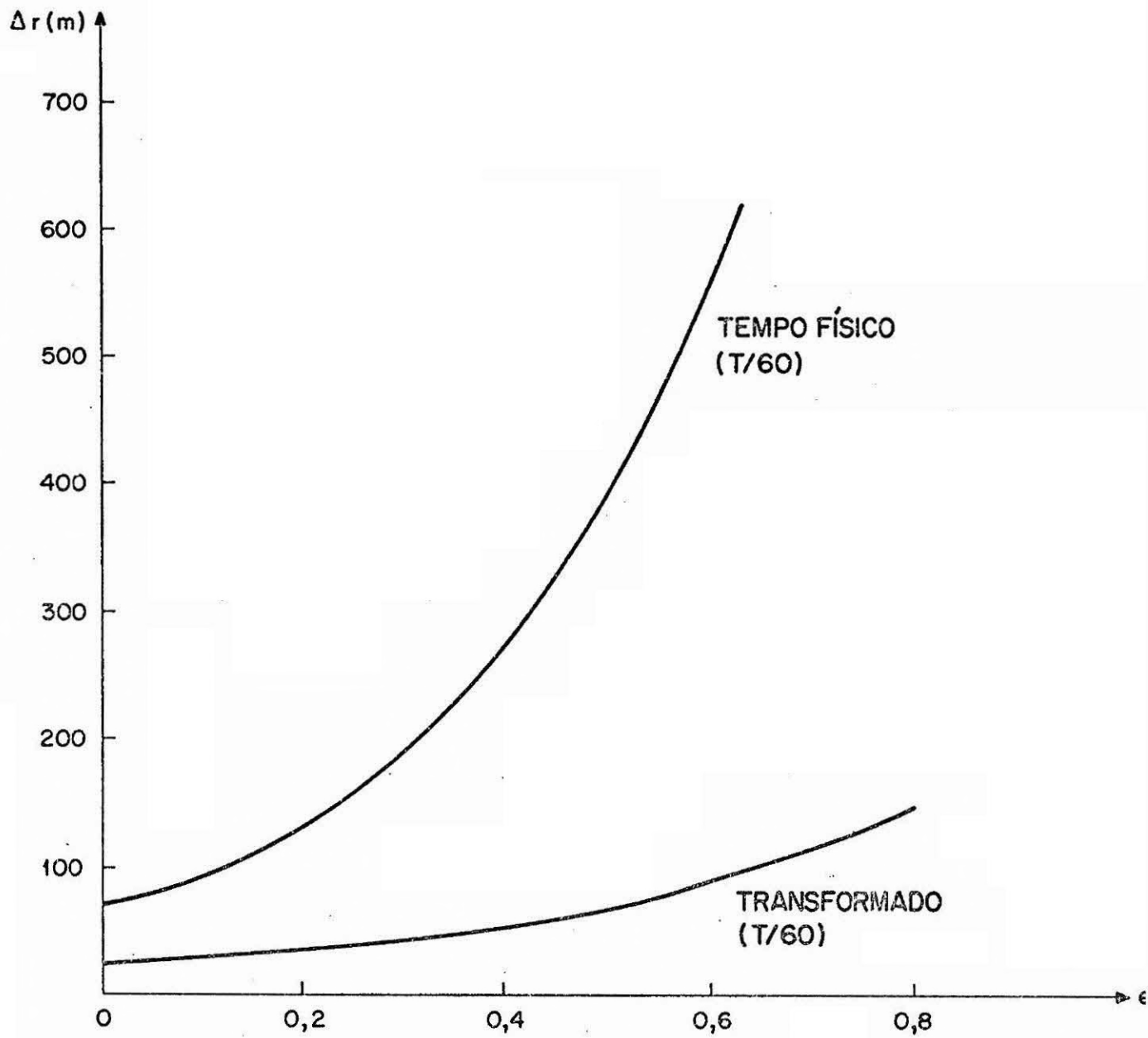


Fig. 3.1 - Erro em posição dos sistemas em tempo físico e transformado utilizando-se um Runge-Kutta de oitava ordem, dados da Tabela 3.2.

CAPÍTULO 4

ESTABILIZAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO ORBITAL

O sistema de equações diferenciais orbitais possui comportamento instável no sentido de Liapunov (Baumgarte, 1972; Stiefel e Sheifele, 1971). Tal instabilidade pode aumentar os erros globais em uma propagação orbital, ou até tornar a solução divergente, quando se trabalha com órbitas de alta excentricidade e com um considerado pequeno tamanho do passo de integração. Neste capítulo, estuda-se inicialmente a natureza do comportamento dinâmico do sistema de equações diferenciais orbitais. Em seguida, estuda-se a estabilização do sistema, finalizando-se com a apresentação de resultados de testes computacionais sobre a formulação apresentada.

4.1 - ESTUDO SOBRE O COMPORTAMENTO DINÂMICO EM ÓRBITA KEPLERIANA CIRCULAR

Desprezando-se perturbações, o sistema de equações diferenciais orbitais possui a forma:

$$\ddot{\vec{r}} + (u/r^3)\vec{r} = 0 \quad (4.1)$$

Pode-se obter o sistema em coordenadas polares (Figura 4.1) a partir do seguinte formalismo:

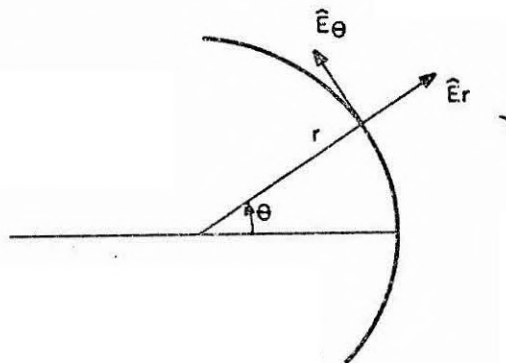


Fig. 4.1 - Configuração do sistema em coordenadas polares.

$$\dot{\vec{r}} = r \cdot \hat{E}r$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{E}r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{E}\theta \quad (4.2)$$

Considerando-se as Equações 4.1 e 4.2, pode-se escrever:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + u/r^2 = 0 \quad (4.3)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

As equações 4.3 representam o sistema de equações diferenciais do movimento kepleriano escrito em coordenadas polares. Caso considere-se órbita circular,

$$\ddot{\theta} = \ddot{r} = \dot{r} = 0$$

O Sistema 4.3 assume então a forma:

$$\dot{\theta} = \sqrt{u/r^3} \quad (4.4)$$

com r e $\dot{\theta}$ constantes. Admitindo-se que para $r = r_1$ tem-se a solução do sistema, uma órbita ligeiramente deslocada $r = r_2$ é imaginada para efeito do estudo sobre o comportamento dinâmico, conforme a Figura 4.2, sendo as respectivas equações diferenciais do movimento as Equações 4.5.

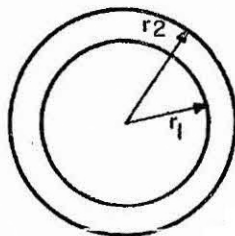


Fig. 4.2 - Órbitas circulares solução ($r = r_1$) e deslocadas ($r = r_2$).

$$\dot{\theta}_1 = \sqrt{u/r_1^3} \quad (4.5)$$

$$\dot{\theta}_2 = \sqrt{u/r_2^3}$$

Segundo o conceito de estabilidade de Liapunov, para um sistema ser estável é necessário que o valor absoluto da diferença entre as coordenadas solução e deslocada permaneça menor que uma certa tolerância para todo o desenvolvimento do sistema no tempo. A aplicação do conceito de estabilidade segundo Liapunov ao estudo sobre o comportamento dinâmico de qualquer sistema, requer inicialmente a criação de forma compatível com as dimensões, das tolerâncias ou valores positivos q e z de forma que para algum $q > 0$ exista um $z > 0$ tal que:

$$|r_1 - r_2| < q \quad |\theta_1(t) - \theta_2(t)| < z$$

para todo o $t \geq 0$. Como a velocidade angular orbital depende do raio, o valor absoluto da diferença dos ângulos $|\theta_1(t) - \theta_2(t)|$ tende a crescer no tempo, fato que caracteriza o sistema do movimento kepleriano circular de Liapunov-instável.

Baumgarte (1972) comprovou a análise acima utilizando álgebra linear através do seguinte formalismo: Aplicando-se variações ao Sistema 4.3 tem-se:

$$\delta \ddot{r} - \dot{\theta}^2 \delta r - 2r \dot{\theta} \delta \dot{\theta} - (2u/r^3) \delta r = 0 \quad (4.6)$$

$$\ddot{\theta} \delta r + r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} + 2\dot{\theta} \delta r = 0$$

Ao considerar-se movimento circular com $r = a(\text{cte})$, a velocidade angular será:

$$\dot{\theta} = \sqrt{u/a^3} \quad (4.7)$$

O Sistema 4.6 assumirá a forma:

$$\delta \ddot{r} - 3u/a^3 \cdot \delta r - 2\sqrt{u/a} \cdot \dot{\delta \theta} = 0 \quad (4.8)$$

$$\ddot{\delta \theta} + 2\sqrt{u/a^5} \delta \dot{r} = 0$$

Adotando-se a transformação:

$$\delta r = \delta Y1 ; \quad \delta \dot{r} = \delta Y2$$

$$\delta \theta = \delta Y3 ; \quad \dot{\delta \theta} = \delta Y4 ,$$

pode-se montar o sistema:

$$\begin{Bmatrix} \delta Y1 \\ \delta Y2 \\ \delta Y3 \\ \delta Y4 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3u/a^3 & 0 & 0 & 2\sqrt{u/a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\sqrt{u/a^5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta Y1 \\ \delta Y2 \\ \delta Y3 \\ \delta Y4 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

O Sistema 4.9 escrito na forma compacta será:

$$\dot{(\delta Y)} = [A] (\delta Y) \quad (4.10)$$

Os auto valores da matriz $[A]$ são:

$$0. , 0. , i \sqrt{u/a^3} , -i \sqrt{u/a^3} .$$

Uma vez que a matriz $[A]$ é de posto 3, existe apenas um único auto vetor linearmente independente para os respectivos auto valores múltiplos nu los, fato que caracteriza a instabilidade dinâmica.

O estudo acima foi restrito ao movimento circular ke pleriano. Poder-se-ia no entanto, analisar o comportamento dinâmico em

um movimento excêntrico e perturbado de forma estrutural com os seguintes raciocínios:

- a) Para órbitas excêntricas keplerianas, a frequência do movimento orbital é $n = \sqrt{\mu/a^3}$ onde a é o semi-eixo maior. Segundo o conceito de estabilidade de Liapunov, para considerar de forma conveniente uma órbita solução e outra vizinha deslocada, órbitas i e e (Figura 4.3), de forma que $|r_i - r_e| < q$ mantenha-se verdadeiro, o mesmo não acontecendo ao módulo da diferença dos ângulos $|\theta_i(t) - \theta_e(t)| < z$, que cresceria de forma não linear no tempo. Este fato é evidente considerando-se a diferença das frequências orbitais dos movimentos. Portanto, o movimento kepleriano excêntrico, da mesma forma que o circular, é instável no sentido de Liapunov.
- b) Caso considere-se movimento perturbado, uma imposição ao problema torna-se necessária:
- Durante um tempo relativamente grande de observação, os efeitos de perturbações secundárias não causam alterações significativas comparadas à taxa de crescimento, agora sofrendo decaimento ou aumento secular além de variações periódicas, do módulo da diferença dos ângulos $|\theta_i(t) - \theta_e(t)|$. Após esta imposição, o mesmo raciocínio anterior pode ser usado para com provar que o movimento perturbado é Liapunov-instável.

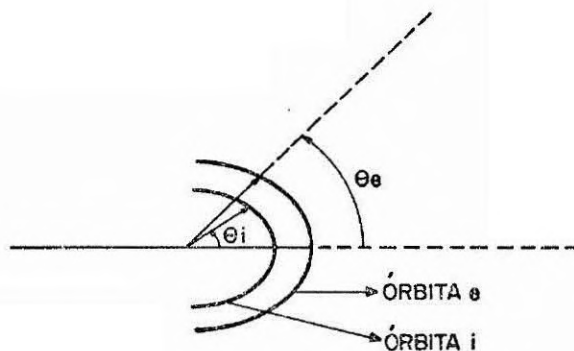


Fig. 4.3 - Órbitas solução (i) e deslocada (e).

4.2 - ESTABILIZAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORBITAIS

Foi visto no tópico 4.1 sobre a análise do comportamento dinâmico, que o fato da velocidade angular do movimento kepleriano circular depender do raio é que caracteriza tal movimento de instável. Baumgarte (1972) introduziu no sistema de equações diferenciais escrito em coordenadas polares e possuindo o tempo fictício s como variável independente, um termo de controle, mais precisamente a equação da energia, acabando com a dependência da velocidade angular fictícia do raio da órbita, tornando o sistema Liapunov-estável. Tal procedimento é apresentado em detalhes a seguir.

Considerando-se a transformação de tempo na versão da anomalia excêntrica, monta-se o operador transformação:

$$d\vec{r}/ds = r \cdot d\vec{r}/dt ; d/dt = (1/r)d/s$$

O sistema 4.3 juntamente com a equação da energia, podem ser escritos com o tempo fictício s como variável independente utilizando-se para isso o operador transformação como segue: Trabalhando-se inicialmente com a primeira das Equações 4.3:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + u/r^2 = 0 : \dot{r} = (1/r) r'$$

$$d^2r/dt^2 = (1/r)d/ds((1/r)r')$$

$$\ddot{r} = (1/r)(r'' - r'^2/r^2) \quad (4.11)$$

$$\dot{\theta} = (1/r) \theta' \quad (4.12)$$

$$\theta' = d\theta/ds$$

Substituindo-se as Equações 4.11 e 4.12 na primeira das Equações 4.3 tem-se:

$$r''/r - r'^2/r^2 - \theta'^2 + u/r = 0 \quad (4.13)$$

A equação da energia do movimento kepleriano possui a forma:

$$(1/2) (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) - u/r = -Hk$$

Considerando-se que:

$$\dot{\vec{r}} = r \cdot \hat{E}_r : \dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \hat{E}_r + r \dot{\theta} \cdot \hat{E}_\theta$$

A equação da energia assume então a forma:

$$(1/2)(r'^2/r^2 + \theta'^2) - u/r + Hk = 0 \quad (4.14)$$

onde Hk corresponde ao negativo da energia do movimento kepleriano, ou seja, o negativo da soma das energias cinética e potencial, considerando-se a Terra esférica e com distribuição homogênea de massa. Por ser nula, a Equação 4.14 multiplicada por um fator de peso (w) pode ser introduzida na Equação 4.13 sem alterá-la:

$$r''/r - r'^2/r^2 - \theta'^2 + u/r + w((1/2)(r'^2/r^2 + \theta'^2) - u/r + Hk) = 0$$

Reagrupando-se termos:

$$r''/r + (w/2 - 1)(r'^2/r^2 + \theta'^2) + (1-w)u/r + wHk = 0 \quad (4.15)$$

Ao considerar-se movimento circular,

$$r'' = r' = 0 ,$$

o que faz com que a Equação 4.15 assumam a forma:

$$\theta'^2 = ((w-1)u/r - wHk)/(w/2 - 1) \quad (4.16)$$

Com a Equação 4.16 percebe-se que para $w=1$, a velocidade angular fictícia (θ') independe do raio (r), o que caracteriza estabilidade dinâmica no sentido de Liapunov. Com $w=1$, a Equação 4.15 que representa a dinâmica do sistema tendo o tempo fictício como variável independente torna-se:

$$r''/r - (1/2)(r'^2/r^2 + \theta'^2) + Hk = 0 \quad (4.17)$$

A segunda equação do Sistema 4.3 pode ser escrita tendo o tempo fictício como variável independente a partir do seguinte formalismo:

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} = (1/r)d/ds((1/r)\dot{\theta})$$

$$r\ddot{\theta} = (1/r)\dot{\theta}'^2 - (\dot{\theta}'/r^2)r' \quad (4.18)$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} = 2r'\dot{\theta}'/r^2 \quad (4.19)$$

Substituindo-se as Equações 4.18 e 4.19 na segunda equação do sistema 4.3 tem-se:

$$r\dot{\theta}'^2 + r'\dot{\theta}' = 0 \quad (4.20)$$

Com as Equações 4.17 e 4.20 pode-se montar o sistema de equações do movimento kepleriano estabilizado, tendo o tempo fictício como variável independente e escrito em coordenadas polares, possuindo a forma:

$$r''/r - (1/2)(r'^2/r^2 + \dot{\theta}'^2) + Hk = 0 \quad (4.21)$$

$$r\dot{\theta}'^2 + r'\dot{\theta}' = 0$$

O mesmo princípio de estabilização utilizado para o movimento kepleriano, também o é para o perturbado, tratando-se da inclusão da equação da energia, agora não mais a energia do movimento kepleriano e sim a energia total, na equação da dinâmica do movimento perturbado tendo o tempo fictício como variável independente.

Ao apresentar-se a transformação de tempo efetuada no capítulo anterior, encontrou-se a seguinte equação:

$$\ddot{\vec{r}}' = (1/r)(r'\ddot{\vec{r}} - u\dot{\vec{r}}) + r^2(\ddot{\vec{P}} - \partial V/\partial \vec{r}) \quad (4.22)$$

onde V é o potencial conservativo do movimento perturbado e $\vec{P}$ o somatório das forças específicas de natureza não conservativa. A energia total do movimento é dada por:

$$(1/2)\dot{r}^2 - u/r + V + H = 0 \quad (4.23)$$

sendo H o negativo da energia mecânica total. A equação da energia (Equação 4.23) escrita em função do tempo fictício s fica na forma:

$$(1/2r^2)r'^2 - u/r + V + H = 0 \quad (4.24)$$

Por ser nula, a Equação 4.24 multiplicada pelo vetor posição $\vec{r}$ e por uma constante w pode ser introduzida na Equação 4.22 sem alterá-la:

$$\begin{aligned} \vec{r}'' &= (1/r)(r'\vec{r}' - u\vec{r}) - w(1/2r^2)r'^2 - (u/r + V + H)\vec{r} + \\ &+ r^2(\vec{P} - \partial V / \partial \vec{r}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Considerando-se $w=1$ (condição de estabilidade), a Equação 4.25 reduz-se a forma:

$$\vec{r}'' = (1/r)r'\vec{r}' - ((1/2r^2)r'^2 + V + H)\vec{r} + r^2(\vec{P} - \partial V / \partial \vec{r}) \quad (4.26)$$

O Sistema 4.26 representa a dinâmica do movimento perturbado de forma estabilizada e tendo o tempo fictício como variável independente. É necessário no entanto, que se ressalte uma importante particularidade do formalismo empregado no processo de estabilização. Inicialmente foi comprovado que o movimento perturbado possui comportamento Liapunov instável, lembrando-se para isso o fato de que a parcela matemática que representa o movimento kepleriano também está presente na expressão matemática do movimento perturbado. Porém, quando se trata do método de estabilização empregado a mesma linha de raciocínio não pode ser exatamente seguida, ou seja, aplicando-se o mesmo processo de estabilização, desenvolvido para o sistema que representa o movimento

kepleriano, no sistema perturbado, não significa que este último estará plenamente estabilizado. Contudo, a mais significativa parcela da expressão matemática do movimento perturbado é a que representa o harmônico zero, ou seja, a parcela do movimento kepleriano, que considera a Terra esférica e com distribuição homogênea de massa. Esta é precisamente a parcela da expressão perturbada que será estabilizada, melhorando assim o seu comportamento numérico.

O sistema estabilizado (Equação 4.26) possui o tempo fictício como variável independente e há obviamente a necessidade de se parar a integração em um tempo físico qualquer. Com isso, torna-se necessária a integração da equação base da transformação de tempo,

$$dt/ds = r. \quad (4.27)$$

Observa-se também que a energia total do movimento passou a ser uma coordenada generalizada do sistema, sendo variável no caso de existirem perturbações de natureza não conservativa. Neste caso, há portanto a necessidade de se integrar a derivada da equação da energia a fim de avaliá-la em cada passo de integração. A equação da derivada da energia total em relação ao tempo físico pode ser encontrada da seguinte forma:

Sabe-se que

$$E_c = (1/2)\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}},$$

corresponde a energia cinética específica.

$$\dot{E}_c = \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -(u/r^3)\vec{r} - \partial V/\partial \vec{r} + \vec{P}$$

$$\dot{E}_c = -(u/r^3)\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} - \dot{\vec{r}} \cdot (\partial V/\partial \vec{r} - \vec{P})$$

Lembrando-se que:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r \dot{r} : r = |\vec{r}|, \dot{r} = |\dot{\vec{r}}|$$

$$dE_C/dt = -(u/r^2)\dot{r} - \dot{\vec{r}} \cdot (\partial V/\partial \vec{r} - \vec{P})$$

$$d/dt(u/r - (1/2)\dot{r}^2) = \dot{\vec{r}} \cdot (\partial V/\partial \vec{r} - \vec{P}) \quad (4.28)$$

A energia do movimento kepleriano é igual ao termo entre parenteses do lado esquerdo da última equação:

$$H_K = u/r - (1/2)\dot{r}^2 \quad (4.29)$$

Com a equação 4.29, a Equação 4.28 torna-se:

$$\dot{H}_K = \dot{\vec{r}} \cdot (\partial V/\partial \vec{r} - \vec{P}) \quad (4.30)$$

A energia total do movimento possui a forma:

$$E = (1/2)\dot{r}^2 - u/r + V \quad (4.31)$$

Ou de outra forma:

$$-H = -H_K + V \quad (4.32)$$

Derivando-se a Equação 4.32 em relação ao tempo físico, encontra-se a expressão da derivada do negativo da energia total, que possui a forma:

$$\dot{H} = \dot{\vec{r}} \cdot (\partial V/\partial \vec{r} - \vec{P}) - dV/dt \quad (4.33)$$

$$\dot{H} = \dot{\vec{r}} \cdot (\partial V/\partial \vec{r} - \vec{P}) - (\partial V/\partial \vec{r}) \cdot d\vec{r}/dt$$

$$\dot{H} = -\vec{P} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (4.34)$$

Considerando-se que

$$H' = \dot{r} \cdot \dot{H} \quad \text{e} \quad Hk' = \dot{r} \cdot \dot{Hk} ,$$

podem ser escritas as equações:

$$Hk' = \dot{\vec{r}}' \cdot (\partial V / \partial \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{P}}) \quad (4.35)$$

$$H' = -\dot{\vec{P}} \cdot \dot{\vec{r}}' \quad (4.36)$$

As Equações 4.35 e 4.36 representam as derivadas em relação ao tempo fictício da energia do movimento kepleriano e energia total.

Para se propagar o sistema estabilizado, necessário é que se integre as equações:

$$\ddot{\vec{r}}' = (1/r)\dot{r}'\dot{\vec{r}}' - ((1/2r^2)\dot{r}'^2 + V + H)\dot{\vec{r}} + r^2(\dot{\vec{P}} - \partial V / \partial \dot{\vec{r}})$$

$$H' = -\dot{\vec{P}} \cdot \dot{\vec{r}}' \quad (4.37)$$

$$t' = r$$

Observando-se o sistema de Equações 4.37, percebe-se que após a estabilização, o sistema de equações diferenciais que representa a dinâmica do movimento passou a ser de oitava ordem, com seis coordenadas generalizadas referentes a posição e velocidade, mais as coordenadas de energia e tempo.

4.3 - RESULTADO DE TESTES COMPUTACIONAIS E CONCLUSÕES

O sistema estabilizado (Equação 4.37) escrito em termos de suas componentes vetoriais possui a forma:

$$X'' = (1/r)\dot{r}'\dot{X}' - ((1/2r^2)\dot{r}'^2 + V + H)\dot{X} + r^2(\dot{P}_X - \partial V / \partial \dot{X})$$

$$Y'' = (1/r)r'Y' - ((1/2r^2)r'^2 + V + H)Y + r^2(Py - \partial V / \partial Y)$$

$$Z'' = (1/r)r'Z' - ((1/2r^2)r'^2 + V + H)Z + r^2(Pz - \partial V / \partial Z) \quad (4.38)$$

$$H' = -(Px.X' + Py.Y' + Pz.Z')$$

$$t' = r$$

O caracter ' significa derivada em relação ao tempo fictício. Px, Py e Pz já definidos, representam as projeções nas direções inerciais X, Y e Z das perturbações de natureza não conservativa. V é o potencial de natureza conservativa do movimento perturbado e H é a energia mecânica total do movimento. Adotando-se a transformação,

$$X = Y1 \quad ; \quad Y = Y2 \quad ; \quad Z = Y3$$

$$X' = Y4 \quad ; \quad Y' = Y5 \quad ; \quad Z' = Y6 \quad ,$$

o Sistema 4.38 assume então a forma:

$$Y1' = Y4$$

$$Y2' = Y5$$

$$Y3' = Y6$$

$$Y4' = (1/r)r'Y4 - ((1/2r^2)r'^2 + V + H)Y1 + r^2(Py1 - \partial V / \partial Y1) \quad (4.39)$$

$$Y5' = (1/r)r'Y5 - ((1/2r^2)r'^2 + V + H)Y2 + r^2(Py2 - \partial V / \partial Y2)$$

$$Y6' = (1/r)r'Y6 - ((1/2r^2)r'^2 + V + H)Y3 + r^2(Py3 - \partial V / \partial Y3)$$

$$H' = -(Py1.Y4 + Py2.Y5 + Py3.Y6)$$

$$t' = r$$

O Sistema 4.39, que possui oito equações diferenciais de primeira ordem, corresponde ao sistema estabilizado para o movimento perturbado.

Caso considere-se movimento não perturbado, o Sistema 4.39 assume a forma:

$$Y1' = Y4$$

$$Y2' = Y5$$

$$Y3' = Y6$$

$$Y4' = (1/r)r'Y4 - ((1/2r^2)r'^2 + Hk)Y1 \quad (4.40)$$

$$Y5' = (1/r)r'Y5 - ((1/2r^2)r'^2 + Hk)Y2$$

$$Y6' = (1/r)r'Y6 - ((1/2r^2)r'^2 + Hk)Y3$$

$$t' = r$$

Com o potencial conservativo perturbador $V=0$, e com a energia total igual a energia do movimento kepleriano que assume valor constante $H=Hk=$ CTE, o sistema passou a ter sete equações diferenciais de primeira ordem.

O sistema estabilizado possui o tempo fictício s como variável independente. Há entretanto a necessidade de se parar a integração em um determinado tempo físico. Uma vez que o sistema estabilizado possui embutido em seu equacionamento a mesma transformação de tempo adotada para o sistema apenas transformado, ou seja, transformação do tipo Sundman de tempo na versão da anomalia excêntrica,

$$d\vec{r}/ds = r \, d\vec{r}/dt \quad ,$$

a forma de se parar a integração será a mesma utilizada no capítulo anterior,

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a/u} \, dE ,$$

que considera órbita kepleriana com o tempo de propagação equivalente a um período orbital.

As condições iniciais para a propagação, são as três coordenadas de posição, dadas por X, Y e Z, que são as próprias coordenadas físicas já que não há transformação de espaço. As três coordenadas da velocidade fictícia X', Y' e Z' são obtidas a partir da equação base da transformação de tempo

$$\dot{r}' = r \dot{r} ,$$

tendo-se obviamente o prévio conhecimento da velocidade física $\dot{r}$ no ponto inicial da propagação. A energia inicial é obtida com a Equação 4.29 e permanecerá constante, caso considere-se órbita kepleriana. Caso considere-se movimento perturbado, a energia total inicial é obtida através da Equação 4.32. A coordenada de tempo inicial fica a critério do programador, sendo que nos testes deste trabalho adotou-se o valor zero para a mesma.

As mesmas órbitas propagadas no capítulo anterior, também o foram neste capítulo e serão também nos posteriores. Isto é feito com o objetivo de permitir uma comparação real entre as formulações apresentadas em cada capítulo. Trabalha-se com métodos numéricos de quarta e oitava ordem, porém, com o cuidado de identificar efeitos que as vezes surgem quando se utiliza métodos de quarta ordem em movimento kepleriano e que não se verificam de forma geral, ou seja, para movimento perturbado. Repetindo-se as órbitas propagadas por um período orbital:

$$a = 34869261. \text{ m}$$

$$e = 0. \quad ; \quad 0,2 \quad ; \quad 0,4 \quad ; \quad 0,6 \quad ; \quad 0,8$$

$$i = 15.$$

$$\Omega = 45.$$

$$w = 30.$$

$$M = 0.$$

Os resultados obtidos com a propagação estão dispostos nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, nas quais integrações foram efetuadas com tamanhos de passo equivalentes ao período orbital sobre sessenta ($T/60$), sobre quarenta ($T/40$) e sobre vinte ($T/20$).

A Tabela 4.1 expõe resultados da propagação do sistema estabilizado através de um Runge-Kutta de quarta ordem, nos tamanhos de passo $T/60$, $T/40$ e $T/20$. É perceptível que o erro em posição diminui com o aumento da excentricidade, enquanto que o erro da velocidade cresce. Por exemplo, no intervalo entre 0 e 0,2 de excentricidade, o erro em posição para $T/60$ diminui em 9% e o erro em velocidade cresce em 14%. Mesmo assim tal efeito não se verifica em movimento perturbado, conforme será visto no Capítulo 6 (Tabela 6.7). Acontece que a órbita kepleriana não se deforma sendo fixa no espaço (solução analítica). O Runge-Kutta de quarta ordem avalia apenas quatro vezes as derivadas em cada passo, e os pontos discretos obtidos durante a integração numérica, têm sua distância da solução analítica em função do tamanho do passo e da excentricidade, ambos intrinsecamente relacionados. Tais pontos estão sobre uma curva não coincidente, obviamente, com a curva solução analítica. Uma vez variando-se a excentricidade em um sentido, a órbita kepleriana assume formas fixas no espaço para cada excentricidade, assim como a curva com os pontos discretos, só que a variação da forma para cada excentricidade desta última em relação a primeira não se verifica de forma

proporcional, podendo-se estar diminuindo coincidentemente a distância entre o ponto discreto solução numérica e o ponto sobre a curva solução analítica na saída, numa espécie de ajustamento onde as duas curvas tendem a ficar coincidentes no tempo físico final desejado. Isso considerando-se a transformação de tempo embutida e a consequente estabilização, que eliminam grande parte do efeito negativo da variação excessiva dos módulos dos vetores velocidade e posição ao longo da órbita com elevada excentricidade.

TABELA 4.1

SISTEMA ESTABILIZADO PROPAGADO EM UM RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

EXC	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta r(m/s)$	CPU
0,0	T/60	192,2077	0,018544	0,4
	T/40	1084,044	0,104166	0,3
	T/20	16906,27	1,583522	0,3
0,2	T/60	174,8966	0,021515	0,4
	T/40	1048,764	0,128586	0,3
	T/20	16578,95	1,994287	0,3
0,4	T/60	142,7779	0,025015	0,4
	T/40	960,2675	0,167951	0,3
	T/20	15630,31	2,759851	0,3
0,6	T/60	88,38912	0,026524	0,4
	T/40	801,9341	0,341363	0,3
	T/20	14103,49	4,669779	0,3
0,8	T/60	20,51953	0,015617	0,4
	T/40	520,1799	0,418223	0,3
	T/20	12687,09	14,12580	0,3

TABELA 4.2

SISTEMA ESTABILIZADO PROPAGADO EM UM RUNGE-KUTTA DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta r(m/s)$	CPU
0,0	T/60	27,44884	0,002661	1,4
	T/40	27,45191	0,002661	1,1
	T/20	27,45818	0,002662	0,6
0,2	T/60	40,39559	0,004996	1,4
	T/40	40,39898	0,004997	1,0
	T/20	40,40371	0,004998	0,6
0,4	T/60	58,74636	0,010358	1,5
	T/40	58,75090	0,010359	1,0
	T/20	58,75511	0,010360	0,6
0,6	T/60	87,90808	0,026636	1,4
	T/40	87,91198	0,026637	1,1
	T/20	87,92099	0,026642	0,6
0,8	T/60	148,2284	0,119771	1,5
	T/40	148,2309	0,119773	1,0
	T/20	148,5095	0,120091	0,6

TABELA 4.3

SISTEMA ESTABILIZADO PROPAGADO EM UM PREDITOR-CORRETOR DE OITAVA-ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta r(m/s)$	CPU
0,0	T/60	27,49179	0,002665	0,8
	T/40	28,03703	0,002718	0,7
	T/20	143,3596	0,010688	0,7
0,2	T/60	40,43765	0,005002	0,8
	T/40	40,97013	0,005067	0,6
	T/20	151,5033	0,015163	0,7
0,4	T/60	58,78611	0,010365	0,8
	T/40	59,28473	0,010452	0,6
	T/20	160,9574	0,024368	0,7
0,6	T/60	87,94303	0,026647	0,8
	T/40	88,38169	0,026777	0,6
	T/20	177,1439	0,048668	0,7
0,8	T/60	148,2551	0,119792	0,8
	T/40	148,5946	0,120054	0,6
	T/20	218,9923	0,168064	0,8

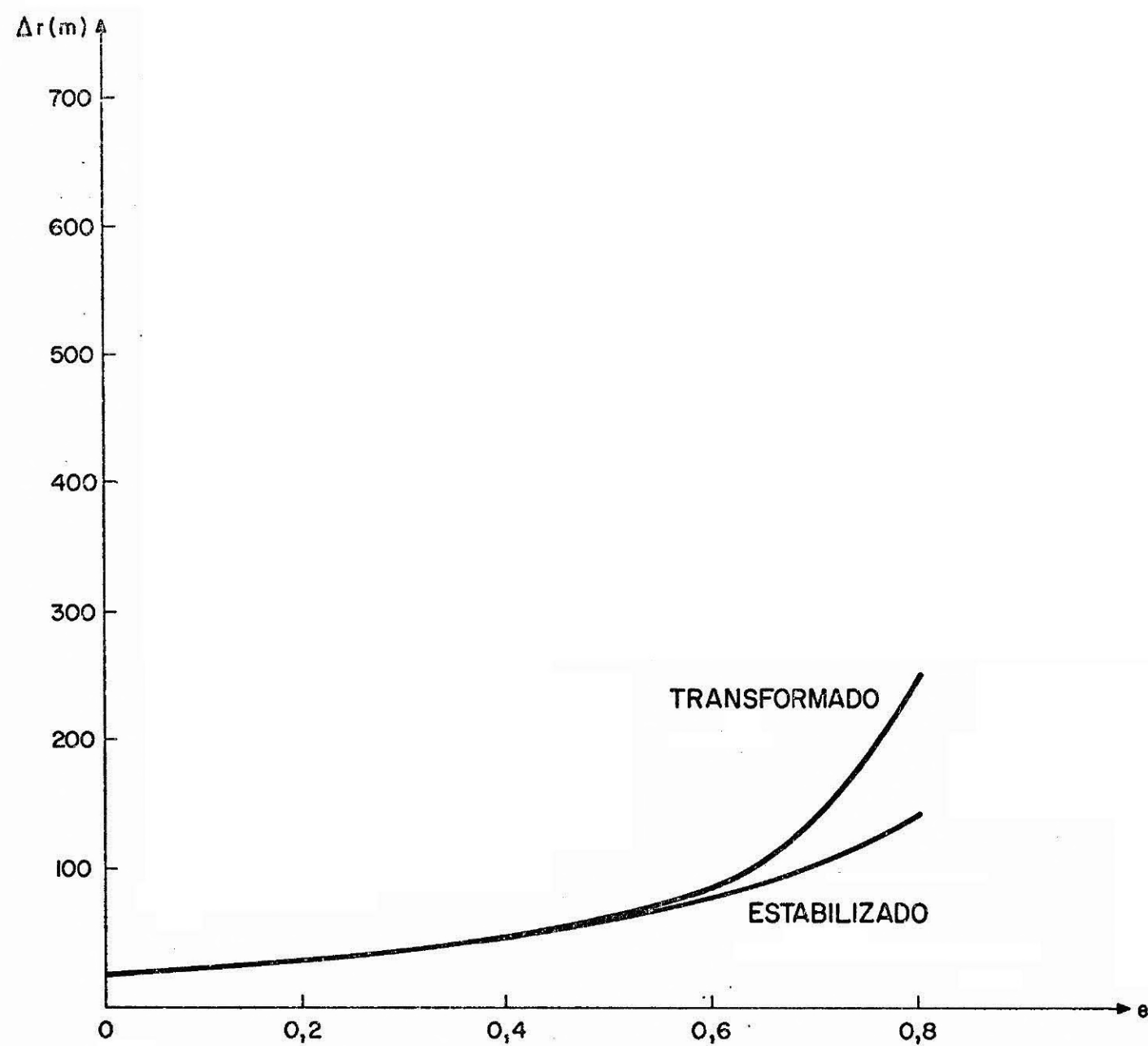


Fig. 4.4 - Sistema transformado e estabilizado, propagados em um Runge-Kutta de oitava ordem com um tamanho de passo equivalente ao período orbital sobre vinte ($T/20$).

Analisando-se as Tabelas 4.2 e 3.2, tem-se uma idéia do comportamento em termos de precisão entre os sistemas em tempo físico, transformado e estabilizado, integrados em um Runge-Kutta de oitava ordem. É perceptível que para tamanhos do passo iguais ou superiores a $T/40$, não há diferença entre os sistemas transformado e estabilizado. Os erros com o sistema estabilizado também crescem com a excentricidade. O tempo de processamento obtido quando se utiliza o sistema estabilizado, é ligeiramente maior do que o tempo obtido com o sistema apenas transformado. Em relação ao sistema em tempo físico, o sistema estabilizado apresentou resultados sempre superiores em termos de precisão.

A Tabela 4.3 refere-se a integração do sistema estabilizado utilizando-se um preditor-corretor de oitava ordem. Ao analisar-se a mesma em conjunto com a Tabela 3.3, percebe-se que de forma idêntica aos resultados obtidos com um Runge-Kutta de oitava ordem, não há diferença em termos de precisão entre os sistemas transformado e estabilizado quando se utiliza um tamanho do passo de integração igual ou superior a $T/40$. Para o tamanho de integração equivalente a $T/20$, o sistema estabilizado apresentou resultados melhores do que o sistema apenas transformado, sendo que esta melhoria se amplia à medida em que se aumenta a excentricidade.

A Figura 4.3 ressalta a diferença em termos de precisão entre os sistemas transformado e estabilizado propagados em um Runge-Kutta de oitava ordem, para um tamanho do passo equivalente ao período orbital sobre vinte ($T/20$). Percebe-se que a partir da excentricidade 0,4 já há uma pequena diminuição do erro utilizando-se o sistema estabilizado, diminuição esta que se amplia com o acréscimo da excentricidade da órbita.

Pode-se extrair algumas conclusões finais baseadas na análise das tabelas e do gráfico. O sistema de equações diferenciais do movimento orbital escrito matematicamente através de uma das formulações estudadas, acompanhado do seu respectivo método numérico de integração, ambos formam um conjunto que possui características específicas

cas. Portanto, mais correto seria falar sobre precisão dos resultados de uma formulação em relação a outra utilizando-se um determinado método numérico. Como os métodos de quarta ordem avaliam apenas quatro vezes as derivadas por passo de integração, o efeito da estabilização em relação ao sistema apenas transformado é mais perceptível em tais métodos.

Quando um conjunto está atuando, ou seja, integrador mais formulação, à medida em que se aumenta o tamanho do passo de integração, mais se aproxima de uma fronteira na qual a partir da mesma a solução seria divergente. Tal fronteira poderia ser chamada de limiar de estabilidade. O que ficou nitidamente perceptível é que com a estabilização, tal limiar foi expandido, o que significa dizer que pode-se trabalhar com um maior tamanho do passo de integração e ainda continuar na região de convergência, como pode ser comprovado a partir da análise da Figura 4.4.

Pode-se, finalmente, adiantar de forma preliminar uma conclusão só plenamente comprovada a posteriori, quando se apresentar testes com perturbações (ver Capítulo 6): É aconselhável a utilização do sistema apenas transformado quando se trabalha com um passo maior igual a $T/40$ em integradores de oitava ordem, enquanto aconselha-se a utilização do sistema estabilizado quando se trabalha com métodos de mais baixa ordem, segunda e quarta por exemplo, ou ainda quando se utiliza integradores de oitava ordem com tamanhos de passo maiores que $T/40$, principalmente em médias e altas excentricidades.

CAPÍTULO 5

REGULARIZAÇÃO

Nos dois últimos capítulos, estudou-se a transformação do tipo Sundman de tempo na versão da anomalia excêntrica e a estabilização, esta última possuindo o objetivo de melhorar o comportamento numérico da integração. No presente capítulo, o estudo será dirigido a uma outra formulação conhecida na literatura científica da área como regularização (Stiefel e Sheifele, 1971), que tem como objetivo tornar regular o sistema de equações diferenciais do movimento orbital, eliminando a singularidade do mesmo na origem do sistema de referência. A apresentação da formulação é feita em três etapas distintas. As duas primeiras serão a aplicação da regularização aos casos de movimento unidimensional e bidimensional, sendo a última a extrapolação ao caso tridimensional.

5.1 - REGULARIZAÇÃO EM MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL

No Capítulo 3 estudou-se a transformação de tempo na versão da anomalia excêntrica e obteve-se a seguinte equação para o sistema transformado:

$$\ddot{\vec{r}}' = (r'/r)\dot{\vec{r}}' - (u/r)\ddot{\vec{r}} + r^2(-\partial V/\partial \vec{r} + \ddot{\vec{P}}) \quad (5.1)$$

Observa-se entretanto, que o Sistema 5.1 é singular na origem ($r=0$). Em resumo, o objetivo da regularização é tornar o sistema não singular eliminando a variável r do denominador dos termos principais da Equação 5.1. Em caso de movimento kepleriano, a Equação 5.1 torna-se:

$$\ddot{\vec{r}}' = (r'/r)\dot{\vec{r}}' - (u/r)\ddot{\vec{r}} \quad (5.2)$$

Considerando-se movimento unidimensional, a Equação 5.2 assumirá a forma:

$$r'' = r'^2/r - u \quad (5.3)$$

A equação da energia do movimento kepleriano tendo o tempo fictício como variável independente possui a forma:

$$Hk = u/r - (1/2r^2)r'^2 \quad (5.4)$$

Adotando-se a transformação quadrática

$$r = U^2, \quad (5.5)$$

tem-se consequentemente as equações:

$$r'' = 2UU' \quad (5.6)$$

$$r'' = 2UU'' + 2U'^2 \quad (5.7)$$

Com as Equações 5.5 e 5.6, a equação da energia do movimento kepleriano assume então a forma:

$$Hk = (1/U^2) \cdot (u - 2U'^2) \quad (5.8)$$

Extraindo-se a velocidade U' da Equação 5.8 e substituindo-se na 5.6 tem-se:

$$r'^2 = 4U^2(1/2) \cdot (u - HkU^2) \quad (5.9)$$

Substituindo-se as Equações 5.9, 5.7 e 5.5 na Equação 5.3 tem-se a equação:

$$U'' + (Hk/2)U = 0 \quad (5.10)$$

que representa a dinâmica do movimento não perturbado unidimensional, com posição na forma paramétrica da variável U , e possuindo o tempo fictício como variável independente. Definindo-se:

$$W^2 = Hk/2 , \quad (5.11)$$

Pode-se escrever a Equação 5.10 na forma:

$$U'' + W^2 U = 0 \quad (5.12)$$

Com a Equação 5.12 percebe-se que o movimento não perturbado unidimensional originalmente não linear (Equação 5.3), passou a ser linear além de homogêneo, possuindo a forma, para $Hk > 0$, de um oscilador harmônico simples com frequência de oscilação igual a W .

5.2 - A REGULARIZAÇÃO EM MOVIMENTO BIDIMENSIONAL

Conseguiu-se de forma relativamente simples, a efetivação da regularização sobre a equação da dinâmica do movimento não perturbado unidimensional, tendo sido utilizado apenas as equações da dinâmica do movimento (Equação 5.3) e a equação da energia do movimento kepleriano em um processo de substituição direta desta última na primeira, levando-se em conta a transformação quadrática (Equação 5.5). Tal procedimento efetivamente não pode ser aplicado ao caso bidimensional uma vez que por ser a equação da dinâmica do sistema uma equação vetorial em duas dimensões, a substituição direta da equação da energia nesta não tem como resultado uma equação regular. Para contornar tal situação, Levi-Civita (Stiefel e Sheifele, 1971) propôs a seguinte transformação:

$$X_1 + iX_2 = (U_1 + iU_2)^2 \quad (5.13)$$

sendo:

$\vec{r} = (X_1 \ X_2)$, posição no plano físico.

$\vec{U} = (U_1 \ U_2)$, posição no plano paramétrico.

$i = \sqrt{-1}$, número imaginário.

A transformação 5.13 é semelhante à transformação quadrática 5.5 e possibilita que se escreva as relações:

$$X1 = U1^2 - U2^2 \quad (5.14)$$

$$X2 = 2U1U2 \quad (5.15)$$

As Equações 5.14 e 5.15 postas em forma matricial resultam:

$$\begin{Bmatrix} X1 \\ X2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U1 & -U2 \\ U2 & U1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U1 \\ U2 \end{Bmatrix}$$

Sendo

$$L(\vec{U}) = \begin{bmatrix} U1 & -U2 \\ U2 & U1 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

a matriz de Levi-Civita, pode-se construir a forma compacta:

$$\vec{r} = L(\vec{U})\vec{U} \quad (5.17)$$

Derivando-se as Equações 5.14 e 5.15 em relação ao tempo fictício S:

$$X1' = 2U1U1' - 2U2U2' \quad (5.18)$$

$$X2' = 2U1U2' + 2U2U1' \quad (5.19)$$

As Equações 5.18 e 5.19 podem ser escritas na forma compacta:

$$\vec{r}' = 2L(\vec{U})\vec{U}' \quad (5.20)$$

Derivando-se a Equação 5.20 com respeito ao tempo fictício:

$$\ddot{\vec{r}}' = 2\vec{L}(\vec{U})\ddot{\vec{U}}' + 2\vec{L}'(\vec{U})\dot{\vec{U}}' \quad (5.21)$$

Ao derivar-se a matriz de Levi-Civita (Equação 5.16) em relação ao tempo fictício, percebe-se que:

$$\vec{L}'(\vec{U}) = \vec{L}(\vec{U}') \quad (5.22)$$

A Equação 5.21 torna-se então:

$$\ddot{\vec{r}}' = 2\vec{L}(\vec{U})\ddot{\vec{U}}' + 2\vec{L}(\vec{U}')\dot{\vec{U}}' \quad (5.23)$$

A matriz de Levi-Civita é ortogonal, admitindo como verdadeira a expressão:

$$\vec{L}^T(\vec{U}) \cdot \vec{L}(\vec{U}) = \vec{U} \cdot \vec{U}(1) = r(1) \quad (5.24)$$

onde (1) é a matriz diagonal unitária. A Equação 5.24 permite que seja escrito:

$$r = \vec{U} \cdot \vec{U} \quad (5.25)$$

E conseqüentemente:

$$\dot{r}' = 2\dot{\vec{U}}' \quad (5.26)$$

Supondo-se que os vetores da Equação 5.1 possuem terceira componente nula, tal equação representa a dinâmica do movimento bidimensional. Substituindo-se as Equações 5.20, 5.23, 5.25 e 5.26 na Equação 5.1, a mesma passa a ser escrita com as variáveis de posição no plano paramétrico (U_1 e U_2), tendo o tempo fictício como variável independente:

$$\begin{aligned} 2\vec{L}(\vec{U})\ddot{\vec{U}}' + 2\vec{L}(\vec{U}')\dot{\vec{U}}' &= (2\dot{\vec{U}} \cdot \dot{\vec{U}}' 2\vec{L}(\vec{U})\dot{\vec{U}}' - u\vec{L}(\vec{U})\dot{\vec{U}}) / (\vec{U} \cdot \vec{U}) + \\ &+ (\vec{U} \cdot \vec{U})^2 (-\partial V / \partial \vec{r} + \vec{P}) \end{aligned}$$

Reagrupando-se termos:

$$2(\vec{U} \cdot \vec{U})L(\vec{U})\vec{U}' + 2(\vec{U} \cdot \vec{U})L(\vec{U}')\vec{U}' - 4(\vec{U} \cdot \vec{U}')L(\vec{U})\vec{U}' + uL(\vec{U})\vec{U} =$$

$$= (\vec{U} \cdot \vec{U})^3 (-\partial V / \partial \vec{r} + \vec{p}) \quad (5.27)$$

Verifica-se como verdadeira a seguinte igualdade:

$$((L^T(\vec{U}) \cdot L(\vec{U}') - 2(\vec{U} \cdot \vec{U}')(1))\vec{U}' = -(\vec{U}' \cdot \vec{U}')\vec{U}$$

Ou ainda:

$$L^T(\vec{U}) \cdot L(\vec{U}')\vec{U}' - 2(\vec{U} \cdot \vec{U}')\vec{U}' + (\vec{U}' \cdot \vec{U}')\vec{U} = 0$$

Multiplicando-se a última equação por $L(\vec{U})$ e tendo-se em mente a Equação 5.24 resulta:

$$(\vec{U} \cdot \vec{U})L(\vec{U}')\vec{U}' - 2(\vec{U} \cdot \vec{U}')L(\vec{U})\vec{U}' + (\vec{U}' \cdot \vec{U}')L(\vec{U})\vec{U} = 0 \quad (5.28)$$

Multiplicando-se a Equação 5.28 por dois tem-se:

$$2(\vec{U} \cdot \vec{U})L(\vec{U}')\vec{U}' - 4(\vec{U} \cdot \vec{U}')L(\vec{U})\vec{U}' + 2(\vec{U}' \cdot \vec{U}')L(\vec{U})\vec{U} = 0 \quad (5.29)$$

Substituindo-se a Equação 5.29 na Equação 5.27 tem-se:

$$2(\vec{U} \cdot \vec{U})L(\vec{U})\vec{U}' - 2(\vec{U}' \cdot \vec{U}')L(\vec{U})\vec{U} + uL(\vec{U})\vec{U} = (\vec{U} \cdot \vec{U})^3 (-\partial V / \partial \vec{r} + \vec{p})$$

Multiplicando-se a esquerda a última equação por $L^{-1}(\vec{U})$ resulta:

$$2(\vec{U} \cdot \vec{U})\vec{U}' - 2(\vec{U}' \cdot \vec{U}')\vec{U} + u\vec{U} = (\vec{U} \cdot \vec{U})^2 (\vec{U} \cdot \vec{U})L^{-1}(\vec{U}) (\partial V / \partial \vec{r} + \vec{p}) \quad (5.30)$$

Da Equação 5.24 pode ser escrita a equação

$$L^T(\vec{U}) = (\vec{U} \cdot \vec{U})L^{-1}(\vec{U}) \quad ,$$

que substituída a Equação 5.30 resulta:

$$2(\vec{U} \cdot \vec{U})\vec{U}' + (u - 2(\vec{U}' \cdot \vec{U}'))\vec{U} = (\vec{U} \cdot \vec{U})^2 L^T(\vec{U}) (-\partial V / \partial \vec{r} + \vec{P})$$

Reagrupando-se termos:

$$\begin{aligned} \vec{U}' + (1/(\vec{U} \cdot \vec{U})) \cdot (u/2 - (\vec{U}' \cdot \vec{U}'))\vec{U} = (1/2)(\vec{U} \cdot \vec{U})L^T(\vec{U}) \cdot \\ \cdot (-\partial V / \partial \vec{r} + \vec{P}) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Considerando-se a Equação 5.20, pode-se escrever que:

$$|\vec{r}'|^2 = 4(L(\vec{U})\vec{U}' \cdot L(\vec{U})\vec{U}')$$

Ou ainda:

$$|\vec{r}'|^2 = 4(\vec{U}' L^T(\vec{U}) L(\vec{U}) \vec{U}')$$

Considerando-se a Equação 5.24, a última equação torna-se:

$$|\vec{r}'|^2 = 4(\vec{U} \cdot \vec{U})(\vec{U}' \cdot \vec{U}') = 4r|\vec{U}'|^2 \quad (5.32)$$

Com a Equação 5.32, a Equação 5.4 que representa a energia do movimento kepleriano torna-se:

$$H_k = u/r - (2/r)|\vec{U}'|^2$$

Lembrando-se que $r = \vec{U} \cdot \vec{U}$, a última equação assume a forma:

$$(H_k/2) = (1/(\vec{U} \cdot \vec{U})) \cdot (u/2 - (\vec{U}' \cdot \vec{U}')) \quad (5.33)$$

Substituindo-se a Equação 5.33 na Equação 5.31 tem-se:

$$\vec{U}' + (H_k/2)\vec{U} = (1/2)(\vec{U} \cdot \vec{U})L^T(\vec{U})(-\partial V / \partial \vec{r} + \vec{P}) \quad (5.34)$$

Percebe-se, com a Equação 5.34, que a dinâmica do movimento passou a ser representada por um sistema de equações diferenciais regulares, que no caso do movimento bidimensional possui ordem igual a seis, ou seja, quatro equações diferenciais referentes a posição e velocidade, mais as equações de tempo t' e da energia do movimento kepleriano H_k' .

Caso considere-se órbita kepleriana, a energia H_k torna-se constante, resultando no sistema:

$$\ddot{\vec{U}} + (H_k/2)\vec{U} = 0 \quad (5.35)$$

semelhante ao oscilador harmônico simples obtido para o caso unidimensional.

A aplicação da regularização ao caso bidimensional será extrapolada ao caso de se considerar o movimento tridimensional, apenas com a ressalva de que não será usado o mesmo caminho matemático. Em razão disto, um resumo sobre a atual aplicação é feito a seguir.

Dado o vetor posição no plano físico

$$\vec{r} = (x_1 \ x_2)^T ,$$

Definiu-se

$$x_1 + ix_2 = (u_1 + iu_2)^2 ,$$

obtendo-se a transformação quadrática na forma compacta,

$$\vec{r} = L(\vec{U})\vec{U} ,$$

sendo $L(\vec{U})$ a matriz de Levi-Civita.

A equação diferencial regular 5.34 deve-se à transformação quadrática apresentada, bem como a algumas propriedades da matriz de Levi-Civita implícitas no desenvolvimento anterior e reunidas a seguir.

1 - Ortogonalidade

$$L^T(\vec{U})L(\vec{U}) = L(\vec{U})L^T(\vec{U}) = (\vec{U}, \vec{U}) (1) = r(1)$$

2 - Seus elementos são funções lineares e homogêneas dos parâmetros U_j , $j=1,2$.

$$L'(\vec{U}) = L(\vec{U}')$$

3 - Verifica-se como verdadeiro:

$$(\vec{U}, \vec{U})L(\vec{U}')\vec{U}' - 2(\vec{U}, \vec{U}')L(\vec{U})\vec{U}' + (\vec{U}', \vec{U}')L(\vec{U})\vec{U} = 0$$

$$L(\vec{U})\vec{U}' = L(\vec{U}')\vec{U}$$

Concluiu-se que a essência da regularização no caso bidimensional está na transformação de Levi-Civita representada pela matriz $L(\vec{U})$, considerando-se todas as suas propriedades. Esta transformação conjuntamente com a substituição da equação da energia, fazem com que o sistema passe a ser regular, o que constitui o objetivo básico de todo o processo de regularização.

5.3 - REGULARIZAÇÃO EM MOVIMENTO TRIDIMENSIONAL

A regularização do sistema dinâmico que representa o movimento no espaço, está condicionada a existência de uma matriz de transformação que obedeça aos mesmos teoremas que a matriz de Levi-Civita obedece no caso bidimensional. Após verificar a impossibilidade

de se obter uma matriz em três dimensões com tais propriedades, P.Kustaaheimo propôs uma matriz de transformação em quatro dimensões, a matriz KS (Kustaanheimo, 1964).

$$L(\vec{U}) = \begin{bmatrix} U1 & -U2 & -U3 & U4 \\ U2 & U1 & -U4 & -U3 \\ U3 & U4 & U1 & U2 \\ U4 & -U3 & U2 & -U1 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Com a transformação através da matriz KS, Equação 5.36, o espaço passa a ter quatro dimensões, sendo a transformação:

$$\begin{Bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U1 & -U2 & -U3 & U4 \\ U2 & U1 & -U4 & -U3 \\ U3 & U4 & U1 & U2 \\ U4 & -U3 & U2 & -U1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U1 \\ U2 \\ U3 \\ U4 \end{Bmatrix}$$

Com consequentes equações:

$$X1 = U1^2 - U2^2 - U3^2 + U4^2 \quad (5.37)$$

$$X2 = 2(U1U2 - U3U4) \quad (5.38)$$

$$X3 = 2(U1U3 + U2U4) \quad (5.39)$$

As coordenadas dos espaços físicos e paramétricos em quatro dimensões estão dispostas nos respectivos vetores posição:

$$\vec{r} = (X1 \ X2 \ X3)^T$$

$$\vec{U} = (U1 \ U2 \ U3 \ U4)^T$$

A transformação possui então a forma compacta:

$$\vec{r} = L(\vec{U})\vec{U} \quad (5.40)$$

5.3.1 - CONSIDERAÇÕES SOBRE A MATRIZ KS

Das prioridades apresentadas no tópico anterior sobre a matriz de Levi-Civita, verifica-se que a matriz KS obedece às duas pri^{meiras}, ou seja,

$$1) \cdot L^T(\vec{U})L(\vec{U}) = L(\vec{U})L^T(\vec{U}) = (\vec{U} \cdot \vec{U})(1) = r(1)$$

$$2) \cdot L'(\vec{U}) = L(\vec{U}')$$

A propriedade 3 está condicionada a ocorrência da igualdade:

$$U_4U_1' - U_3U_2' + U_2U_3' - U_1U_4' = 0 \quad (5.41)$$

A Equação 5.41 é conhecida como relação bilinear, sendo que se ela for satisfeita, então garante-se que são válidas as equações da proprie^{dade} 3, a saber:

A. Equação 5.28 reescrita a seguir, e a 5.42.

$$(\vec{U} \cdot \vec{U})L(\vec{U}')\vec{U}' - 2(\vec{U} \cdot \vec{U}')L(\vec{U})\vec{U}' + (\vec{U} \cdot \vec{U})L(\vec{U})\vec{U}' = 0$$

$$L(\vec{U})\vec{U}' = L(\vec{U}')\vec{U} \quad (5.42)$$

A última das equações do sistema matricial 5.42 possui a forma:

$$U_4U_1' - U_3U_2' + U_2U_3' - U_1U_4' = -(U_4U_1' - U_3U_2' + U_2U_3' - U_1U_4')$$

Portanto, a condição de existência para a Equação 5.42 seria

$$U_4U_1' - U_3U_2' + U_2U_3' - U_1U_4' = 0$$

ou seja, a relação bilinear.

Até o presente desenvolvimento, sabe-se da necessidade da existência da relação bilinear, mas a comprovação da sua existência não foi obtida. Tal comprovação advém do seguinte formalismo:

Da Equação 5.20 pode ser escrito:

$$L(\vec{U})\vec{U}' = (1/2) \cdot \vec{r}' \quad (5.43)$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} U_1U_1' - U_2U_2' - U_3U_3' + U_4U_4' \\ U_2U_1' + U_1U_2' - U_4U_3' - U_3U_4' \\ U_3U_1' + U_4U_2' + U_1U_3' + U_2U_4' \\ U_4U_1' - U_3U_2' + U_2U_3' - U_1U_4' \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observando-se a quarta componente da equação matricial acima, percebe-se que a relação bilinear (Equação 5.42) é satisfeita para os vetores $\vec{U}$ e $\vec{U}'$. Portanto, a matriz KS obedece a todas as propriedades que a matriz de Levi-Civita também obedece.

5.3.2 - EQUAÇÕES REGULARES DO MOVIMENTO NO ESPAÇO

Considerando-se o fato de que a matriz KS obedece a todas as propriedades da matriz de Levi-Civita, o sistema de equações regulares para o movimento perturbado tridimensional terá a mesma forma do sistema encontrado para o movimento em duas dimensões, dado pela Equação 5.34, a saber:

$$\vec{U}' + (Hk/2)\vec{U} = (1/2)(\vec{U} \cdot \vec{U})L^T(\vec{U})(-\partial V/\partial \vec{r} + \vec{P}) \quad (5.44)$$

sendo $\vec{U}$ o vetor posição do espaço paramétrico a quatro dimensões e $L(\vec{U})$ a matriz KS.

Parte da Equação 5.44 continua em função de $\vec{r}$ devido a presença da derivada parcial do potencial perturbador conservativo. Tal potencial não possui o tempo físico ou fictício de forma explícita em sua expressão, ou seja:

$$V = V(X_1, X_2, X_3)$$

Após a transformação de espaço, obteve-se:

$$\vec{r} = L(\vec{U})\vec{U}$$

Pode-se então escrever:

$$\partial V / \partial \vec{U} = \partial V / \partial \vec{r} \cdot \partial \vec{r} / \partial \vec{U}$$

Ou ainda:

$$\partial V / \partial U_j = \sum_{i=1}^3 \partial V / \partial X_i \cdot \partial X_i / \partial U_j, \quad (5.45)$$

com $j=1, \dots, 4$.

Considerando-se as Equações 5.37, 5.38 e 5.39, pode-se compor as Equações 5.45:

$$\partial V / \partial \vec{U} = 2 \begin{bmatrix} (U_1 \partial V / \partial X_1 + U_2 \partial V / \partial X_2 + U_3 \partial V / \partial X_3) \\ (-U_2 \partial V / \partial X_1 + U_1 \partial V / \partial X_2 + U_4 \partial V / \partial X_3) \\ (-U_3 \partial V / \partial X_1 - U_4 \partial V / \partial X_2 + U_1 \partial V / \partial X_3) \\ (U_4 \partial V / \partial X_1 - U_3 \partial V / \partial X_2 + U_2 \partial V / \partial X_3) \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

A parcela $L^T(\vec{U}) \partial V / \partial \vec{r}$ possui a forma:

$$L^T(\vec{U}) \partial V / \partial \vec{r} = \begin{bmatrix} (U_1 \partial V / \partial X_1 + U_2 \partial V / \partial X_2 + U_3 \partial V / \partial X_3) \\ (-U_2 \partial V / \partial X_1 + U_1 \partial V / \partial X_2 + U_4 \partial V / \partial X_3) \\ (-U_3 \partial V / \partial X_1 - U_4 \partial V / \partial X_2 + U_1 \partial V / \partial X_3) \\ (U_4 \partial V / \partial X_1 - U_3 \partial V / \partial X_2 + U_2 \partial V / \partial X_3) \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Comparando-se as Equações 5.46 e 5.47 pode-se escrever:

$$L^T(\vec{U}) \partial V / \partial \vec{r} = (1/2) \partial V / \partial \vec{U} \quad (5.48)$$

Inserindo-se a Equação 5.48 na 5.44 tem-se:

$$\vec{U}'' = -(H_k/2) \vec{U} + (|\vec{U}|^2/2) (-(1/2) \partial V / \partial \vec{U} + L^T(\vec{U}) \vec{P}) \quad (5.49)$$

Percebe-se que a Equação 5.49 é regular e representa a dinâmica do movimento orbital físico tridimensional, representado em um espaço de quatro dimensões e desenvolvido em um tempo que varia de forma não linear com o tempo físico, inclusa todas as perturbações de ordem secundária de natureza conservativa ($\partial V / \partial \vec{U}$) e não conservativa ($\vec{P}$).

Considerando-se que

$$H_k = H + V ,$$

A Equação 5.49 é então escrita na forma:

$$\vec{U}'' = -(1/2)(H+V) \vec{U} + (|\vec{U}|^2/2) (-(1/2) \partial V / \partial \vec{U} + L^T(\vec{U}) \vec{P}) \quad (5.50)$$

onde H é o negativo da energia total do movimento. Analisando-se a equação regularizada do movimento perturbado (Equação 5.49), percebe-se que para pequenas perturbações, a energia do movimento kepleriano (H_k) varia suavemente com o tempo fictício ou físico e o lado direito do sistema é aproximadamente nulo, o que faz com que a Equação 5.49 assuma a forma aproximada de um oscilador harmônico simples.

A energia total passou a ser uma coordenada generalizada do sistema regularizado, sendo a equação da sua derivada obtida da seguinte forma:

$$H' = -(\vec{p} \cdot \vec{r}')$$

$$\vec{r}' = 2L(\vec{U})\vec{U}'$$

Logo:

$$H' = -\vec{p} \cdot (2L(\vec{U})\vec{U}') = -2(L^T(\vec{U})\vec{p} \cdot \vec{U}') \quad (5.51)$$

A variável independente do sistema regularizado é o tempo fictício. A conhecida necessidade de se parar a integração em um tempo físico final desejado obriga a integração da equação da derivada do tempo físico em relação ao fictício, fazendo com que o tempo físico passe a ser uma coordenada generalizada do sistema.

Após a regularização, o sistema de equações diferenciais orbitais assume a forma:

$$\dot{\vec{U}}' = -(1/2)(H+V)\vec{U} + (|\vec{U}|^2/2)(-(1/2)\partial V/\partial \vec{U} + L^T(\vec{U})\vec{p})$$

$$H' = -2(L^T(\vec{U})\vec{p} \cdot \vec{U}') \quad (5.52)$$

$$t' = r$$

com oito equações diferenciais referentes à posição e velocidade no espaço de quatro dimensões, mais as equações de energia e de tempo.

5.4 - CONSIDERAÇÕES SOBRE A INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

O sistema regularizado (Equação 5.52) pode ser ajustado para ser integrado a partir de um sistema de equações diferenciais

de primeira ordem com a seguinte transformação:

$$U1 = Y1 \quad ; \quad U2 = Y2 \quad ; \quad U3 = Y3 \quad ; \quad U4 = Y4$$

$$U1' = Y5 \quad ; \quad U2' = Y6 \quad ; \quad U3' = Y7 \quad ; \quad U4' = Y8$$

Considerando-se que,

$$L^T(\vec{U}) \cdot \vec{P} = \begin{bmatrix} U1P1 + U2P2 + U3P3 \\ -U2P1 + U1P2 + U4P3 \\ -U3P1 - U4P2 + U1P3 \\ U4P1 - U3P2 + U2P3 \end{bmatrix}$$

pode-se escrever então:

$$\begin{aligned} Y1' &= Y5 \\ Y2' &= Y6 \\ Y3' &= Y7 \\ Y4' &= Y8 \\ Y5' &= DY1 + F(-(1/2)\partial V/\partial Y1 + Y1P1 + Y2P2 + Y3P3) \\ Y6' &= DY2 + F(-(1/2)\partial V/\partial Y2 - Y2P1 + Y1P2 + Y4P3) \\ Y7' &= DY3 + F(-(1/2)\partial V/\partial Y3 - Y3P1 - Y4P2 + Y1P3) \\ Y8' &= DY4 + F(-(1/2)\partial V/\partial Y4 + Y4P1 - Y3P2 + Y2P3) \\ H' &= -2(Y5(Y1P1+Y2P2+Y3P3) + Y6(-Y2P1+Y1P2+Y4P3) + \\ &\quad + Y7(-Y3P1-Y4P2+Y1P3) + Y8(Y4P1-Y3P2+Y2P3)) \\ t' &= |\vec{U}|^2 \end{aligned} \tag{5.63}$$

onde:

$$D = -(1/2)(H+V) \text{ e}$$

$$F = (|\vec{U}|^2/2)$$

5.4.1 - CONDIÇÕES INICIAIS DA INTEGRAÇÃO

Os valores iniciais dos vetores $\vec{U}$ e $\vec{U}'$ devem ser obtidos a partir dos vetores posição e velocidade física $\vec{r}$ e $\dot{\vec{r}}$ no tempo físico inicial, que fica a critério do programador. Das Equações 5.37, 5.38, 5.39 e considerando-se que

$$|\vec{r}| = r = (\vec{U} \cdot \vec{U}) = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 ,$$

pode-se escrever:

$$U_1^2 + U_4^2 = (1/2)(X_1 + r) \quad (5.54)$$

Uma vez que X_1 e r são conhecidos, atribui-se um valor para U_1 por exemplo, encontrando-se conseqüentemente U_4 .

Ainda das últimas equações citadas, pode-se obter as duas outras coordenadas do espaço paramétrico na forma:

$$U_2 = (X_2 U_1 + X_3 U_4) / (X_1 + r) \quad (5.55)$$

$$U_3 = (X_3 U_1 - X_2 U_4) / (X_1 + r) \quad (5.56)$$

Uma vez determinado o vetor posição inicial $\vec{U}$, determina-se o vetor velocidade inicial da seguinte forma:

Da Equação 5.20 pode-se escrever:

$$L^T(\vec{U})\dot{\vec{r}} = 2L^T(\vec{U})L(\vec{U})\vec{U}'$$

Ou ainda:

$$\vec{U}' = (1/2|\vec{U}|^2)L^T(\vec{U})\dot{\vec{r}} \quad (5.57)$$

Como $\dot{\vec{r}}$ inicial é conhecido, $\vec{U}'$ inicial também o será.

Caso despreze-se perturbações, o sistema regularizado em órbita kepleriana assume a forma:

$$\begin{aligned}Y1' &= Y5 \\Y2' &= Y6 \\Y3' &= Y7 \\Y4' &= Y8 \\Y5' &= (-H/2)Y1 \\Y6' &= (-H/2)Y2 \\Y7' &= (-H/2)Y3 \\Y8' &= (-H/2)Y4 \\t' &= |\vec{U}|^2\end{aligned}\tag{5.58}$$

onde $H=H_k$ (CTE).

5.5 - RESULTADO DE TESTES COMPUTACIONAIS E CONCLUSÕES

A exemplo dos capítulos anteriores, os testes do atual capítulo também serão efetuados em órbitas keplerianas, sobre as mesmas órbitas e utilizando-se os mesmos tamanhos de passo com integradores de quarta e oitava ordem. Os resultados dos testes estão dispostos nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3. A Figura 5.1 ajuda a compreensão dos efeitos das formulações.

TABELA 5.1

SISTEMA REGULARIZADO PROPAGADO EM UM RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	13,75266	0,011321	0,4
	T/40	42,11121	0,004059	0,3
	T/20	1031,933	0,099160	0,3
0,2	T/60	26,96708	0,003335	0,4
	T/40	27,75792	0,003404	0,3
	T/20	994,6468	0,122280	0,3
0,4	T/60	46,18399	0,008143	0,4
	T/40	5,502590	0,000843	0,3
	T/20	907,4823	0,159344	0,3
0,6	T/60	76,94116	0,023313	0,4
	T/40	32,50795	0,009834	0,3
	T/20	754,2040	0,227917	0,3
0,8	T/60	140,0028	0,113125	0,4
	T/40	106,6441	0,086167	0,4
	T/20	482,6298	0,389338	0,3

TABELA 5.2

SISTEMA REGULARIZADO PROPAGADO EM UM RUNGE-KUTTA DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	27,44943	0,002661	1,4
	T/40	27,45302	0,002661	1,0
	T/20	27,46585	0,002663	0,6
0,2	T/60	40,39545	0,004997	1,4
	T/40	40,39966	0,004997	1,0
	T/20	40,41197	0,004999	0,6
0,4	T/60	58,74710	0,010358	1,4
	T/40	58,75075	0,010359	1,0
	T/20	58,76221	0,010361	0,6
0,6	T/60	87,90845	0,026636	1,5
	T/40	87,91128	0,026637	1,0
	T/20	87,92179	0,026641	0,6
0,8	T/60	148,2282	0,119719	1,4
	T/40	148,2313	0,119774	1,0
	T/20	148,2387	0,119780	0,7

TABELA 5.3

SISTEMA REGULARIZADO PROPAGADO EM UM PREDITOR-CORRETOR DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	27,46724	0,002663	0,8
	T/40	27,46671	0,002663	0,6
	T/20	27,91454	0,002706	0,7
0,2	T/60	40,41228	0,004999	0,7
	T/40	40,47292	0,004999	0,6
	T/20	40,85161	0,005053	0,7
0,4	T/60	58,76251	0,010361	0,7
	T/40	58,76314	0,010361	0,6
	T/20	59,17371	0,010433	0,7
0,6	T/60	87,92245	0,026641	0,7
	T/40	87,92288	0,026641	0,6
	T/20	88,28012	0,026749	0,7
0,8	T/60	148,2386	0,119780	0,7
	T/40	148,2400	0,119781	0,6
	T/20	148,5075	0,119997	0,7

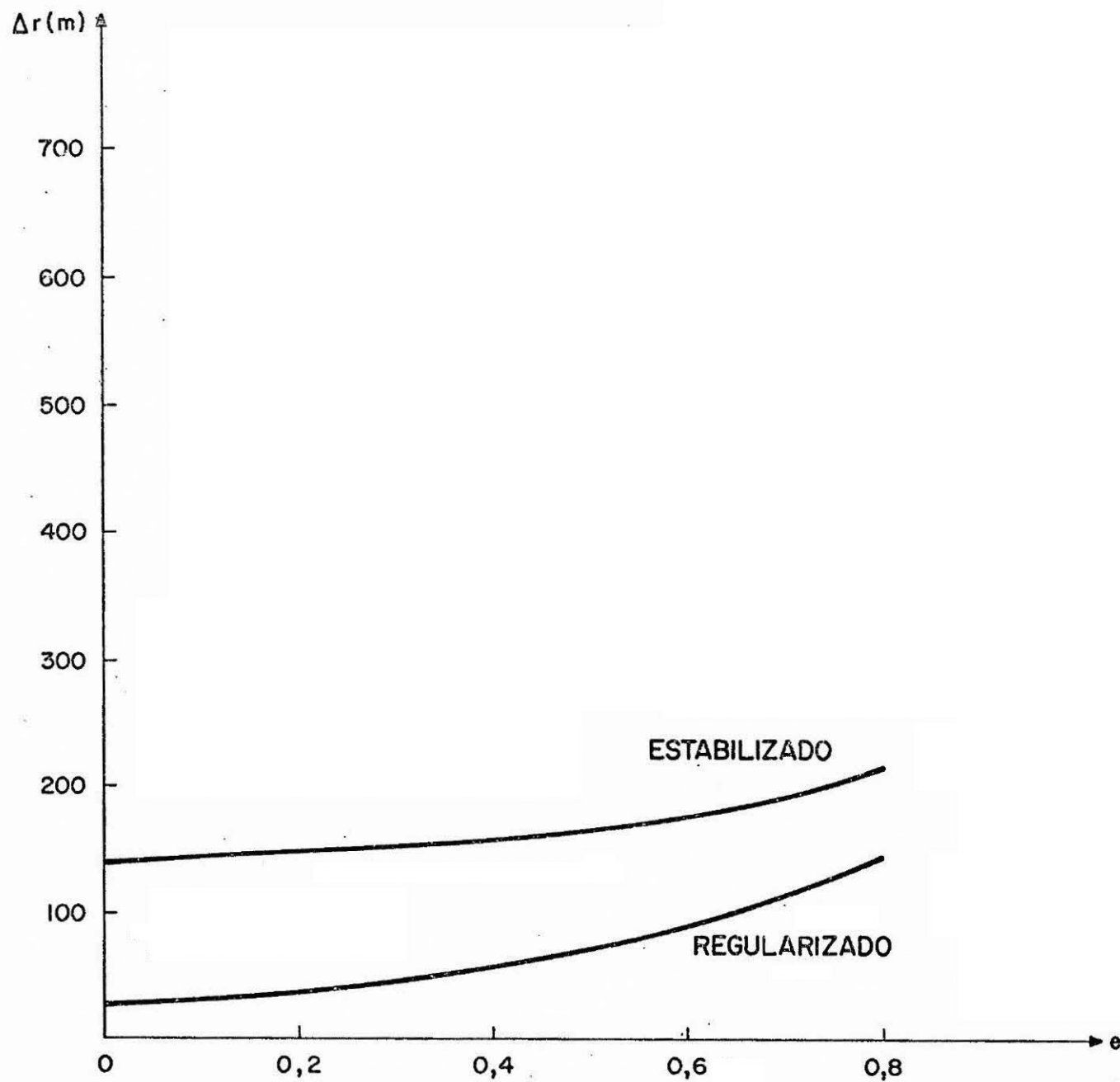


Fig. 5.1 - Sistemas estabilizado e regularizado, propagados em um predi-
tór-corretor de oitava ordem e com $T/20$ para tamanho do passo.

A Tabela 5.1 contém os resultados das propagações em um Runge-Kutta de quarta ordem. É perceptível que para o tamanho do passo igual a $T/60$, os erros em posição começam pequenos e se ampliam gradativamente com o acréscimo da excentricidade. Já para $T/40$, os erros diminuem até um limite próximo a 0,4 de excentricidade, crescendo a partir de então. Tal efeito é idêntico ao encontrado com o sistema estabilizado (Tabela 4.1) completando agora de certa forma a sua verificação. No caso atual, a distância entre a curva com os pontos discretos obtidos numericamente e a curva solução analítica tende a diminuir à medida em que se aproxima de um determinado valor de excentricidade, voltando a crescer a partir deste limite. Deve ser lembrado o fato de que o sistema regularizado também é estabilizado uma vez que a dinâmica do movimento kepleriano é representada por uma equação de um oscilador harmônico simples (Equação 5.35) com H_k constante, daí, a mesma tendência nos resultados apresentados pelas Tabelas 4.1 e 5.1.

A Tabela 5.2 refere-se à propagação em um Runge-Kutta de oitava ordem. Seus resultados deixam transparecer a regularidade da saída do sistema em função da excentricidade, o que é uma característica dos integradores de oitava ordem atuando sobre as diferentes formulações estudadas. Os erros em posição e velocidade aumentam com a excentricidade e são idênticos para todos os tamanhos de passo. Percebe-se também que com este integrador, não há diferença em termos de precisão entre as formulações estabilizado (Tabela 4.2) e regularizado (Tabela 5.2). Com o RK8 o sistema regularizado apresentou melhores resultados que o apenas transformado para o tamanho de passo $T/20$.

A Tabela 5.3 refere-se à propagação em um preditor-corretor de oitava ordem. Seus resultados são idênticos aos obtidos com o Runge-Kutta de oitava ordem (Tabela 5.2), porém, com a vantagem de possuir em média um menor tempo de processamento, justamente porque este integrador avalia um menor número de vezes as derivadas. Observa-se também que o sistema propagado em um preditor-corretor de oitava ordem, possui um melhor comportamento em relação ao sistema estabilizado

propagado no mesmo integrador (Tabela 4.3), que por sua vez já possui comportamento melhor que o apenas transformado, tudo isso considerando-se o tamanho do passo $T/20$.

O gráfico contido na Figura 5.1 ressalta a diferença de comportamento dos sistemas regularizado e estabilizado propagados em um preditor-corretor de oitava ordem, com um tamanho de passo igual a $T/20$. Nele observa-se que com a regularização, a fronteira que separa as regiões de convergência e divergência, intitulada no capítulo anterior de limiar de estabilidade, foi expandida, possibilitando assim a integração do sistema com maiores tamanhos de passo.

Podem ser extraídas algumas conclusões finais a respeito das formulações estudadas até este capítulo, algumas delas já obtidas no capítulo anterior. Continua verdadeiro o fato de que as diferenças em termos de precisão entre as formulações, são mais evidentes quando se utiliza integradores de mais baixa ordem, segunda ou quarta por exemplo, devendo-se ter o cuidado de identificar efeitos que surgem quando se utiliza órbita kepleriana com tais integradores que não se verificam de maneira geral, ou seja, também para movimento perturbado. Caso a integração for efetuada em métodos de quarta ordem, o sistema deve ser regularizado e com $T/60$ para o tamanho de passo. Caso utilize-se um preditor-corretor de oitava ordem, o sistema deve ser regularizado para $T/20$, podendo ser estabilizado para $T/40$ e apenas transformado para $T/60$, conferindo dessa forma o mesmo nível de precisão com o menor tempo de processamento possível. Se a integração for efetuada em um Runge-Kutta de oitava ordem, o sistema pode ser apenas transformado para órbitas com excentricidades menores ou iguais a 0,4, devendo ser estabilizado ou regularizado para órbitas com excentricidades maiores que 0,4. Tais conclusões são de âmbito preliminar uma vez que baseiam-se em resultados obtidos com órbitas keplerianas. Conclusões mais completas advirão dos testes com órbitas perturbadas, assunto do próximo capítulo.

CAPÍTULO 6

ESTUDO EM MOVIMENTO PERTURBADO

Até o presente momento, os testes apresentados estiveram restritos a órbitas keplerianas. Tais resultados são importantes para dar uma primeira visão sobre o efeito das diferentes formulações, principalmente porque as soluções analíticas são conhecidas e tem-se uma noção exata do erro após a integração. Entretanto, a partir deste capítulo o estudo se fará sobre o movimento perturbado justamente por ser esta a realidade física do fenômeno. Algumas dificuldades surgem naturalmente e a primeira delas é o desconhecimento de uma solução exata para a integração das equações do movimento perturbado, solução esta que seria utilizada na obtenção do erro apresentado pelas diferentes formulações após a integração. Adotou-se então no presente trabalho uma solução obtida também de forma numérica para ocupar o lugar da solução tida como exata. Utilizou-se para tanto o pacote de "software" de propagação numérica de órbita do Departamento de Mecânica Espacial e Controle do INPE (Kuga e Silva, 1984), constituindo-se basicamente em um integrador numérico que além de trabalhar ajustando o tamanho do passo de integração, varia também a ordem do método, propagando evidentemente o sistema de equações do movimento em tempo físico. No presente capítulo, órbitas perturbadas são propagadas com os sistemas em tempo físico, transformado, estabilizado e regularizado, tabelas e gráficos são montados e apresenta-se no final uma análise conclusiva sobre os resultados.

6.1 - PERTURBAÇÃO EM MOVIMENTO ORBITAL

Foram vistos no Capítulo 2, os tipos de forças às quais o satélite está submetido no espaço. A principal diz respeito a atração gravitacional da terra como se esta fosse perfeitamente esférica e com distribuição homogênea de massa. Tal força está relacionada ao harmônico zero do geopotencial. Os demais harmônicos são ditos perturbadores de vez que o gradiente dos mesmos em relação ao sistema iner

cial, dá origem a uma força da ordem mil vezes menor, para o segundo harmônico, do que a originada do harmônico zero, sendo no mínimo um milhão de vezes menor, para os demais harmônicos. Os efeitos das demais perturbações tais como arrasto atmosférico, pressão de radiação e marés terrestres são significativamente menores do que o efeito do segundo harmônico, conforme pode ser verificado através da Tabela 2.1. Tendo em vista a importância de tal efeito na composição das perturbações, considerou-se apenas o zonal 2 como efeito perturbador do movimento. O potencial perturbador considerado possui então a expressão:

$$V = (1/2) \cdot \omega J_2 R_t^2 (3Z^2 - r^2) r^5 \quad (6.1)$$

Onde:

R_t é o raio equatorial terrestre.

$J_2 = 1,08264 \cdot 10^{-3}$, é o coeficiente zonal 2.

O raio vetor r é naturalmente função das coordenadas inerciais de posição, X , Y e Z . O gradiente do potencial V com respeito a r dá origem às forças perturbadoras de natureza conservativa, nas direções X , Y e Z .

$$\begin{aligned} \partial V / \partial \vec{r} = & (\partial V / \partial r \cdot \partial r / \partial X) \hat{i} + (\partial V / \partial r \cdot \partial r / \partial Y) \hat{j} + \\ & + (\partial V / \partial r \cdot \partial r / \partial Z) \hat{k} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_p &= \partial V / \partial r \cdot \partial r / \partial X \\ \ddot{Y}_p &= \partial V / \partial r \cdot \partial r / \partial Y \\ \ddot{Z}_p &= \partial V / \partial r \cdot \partial r / \partial Z \end{aligned} \quad (6.3)$$

As Equações 6.3 são as forças específicas perturbadoras oriundas do segundo harmônico, onde o índice p designa-as como tal.

Após a obtenção das derivadas parciais tem-se:

$$\begin{aligned}\ddot{X}_p &= (3/2)\omega J_2 R_t^2 (r^2 - 5Z^2)X/r^7 \\ \ddot{Y}_p &= (Y/X)\dot{X}_p \\ \ddot{Z}_p &= (3/2)\omega J_2 R_t^2 (3r^2 - 5Z^2)Z/r^7\end{aligned}\tag{6.4}$$

As Equações 6.4 modificam a forma da órbita no espaço e quando introduzidas nas equações diferenciais do movimento orbital, fazem com que não exista solução analítica exata para a integração. Estas equações formam as perturbações consideradas nos testes deste capítulo.

6.2 - MECANISMO DE PARADA NO TEMPO FÍSICO FINAL

Os sistemas transformado, estabilizado e regularizado desenvolvem-se em um tempo que varia de forma não linear com o tempo físico, o tempo fictício. Quando trabalhou-se com órbitas keplerianas nos capítulos anteriores, determinou-se uma solução analítica para a equação diferencial da coordenada de tempo físico, ficando assim o problema de se parar a integração no tempo físico final resolvido. Tal procedimento não pode ser aplicado em movimento perturbado uma vez que não existe solução analítica para a equação de tempo. Uma maneira de contornar parcialmente tal situação, reside na possibilidade de se fazer convergir a solução do sistema através de sucessivas iterações utilizando-se para tanto a própria equação diferencial da coordenada de tempo físico:

$$dt/ds = r\tag{6.5}$$

A Figura 6.1 tenta ilustrar uma situação de convergência.

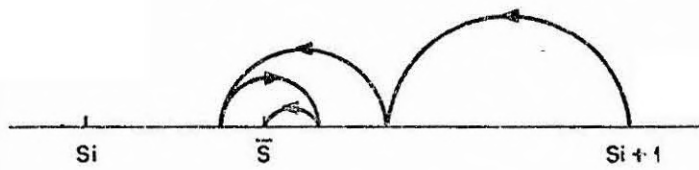


Fig. 6.1 - Situação de convergência.

O intervalo de integração compreendido entre os tempos fictícios S_i e S_{i+1} corresponde ao último passo de integração. O tempo fictício $\bar{S}$ é correspondente ao tempo físico T_f no qual a saída é desejada. Obviamente o $\bar{S}$ é desconhecido e sabe-se apenas quando se passa desse valor durante o processamento, justamente porque a cada passo se obtém o tempo físico a partir da integração da Equação 6.5, podendo-se sempre testar o tempo físico obtido com o final desejado.

Da Equação 6.5 pode-se escrever:

$$dS = (1/r)dt \quad (6.6)$$

Ou ainda:

$$\Delta S = (1/r) \cdot (T_f - t), \quad (6.7)$$

onde o ΔS será o novo tamanho do passo de integração a cada iteração, o T_f é o tempo físico final que naturalmente é conhecido e o t é o tempo físico obtido a cada iteração. O processo iterativo cessa quando o t converge para o T_f , extraíndo-se nesse ponto a solução desejada. Tal critério constitui-se em um dos possíveis mecanismos de parada existentes e será adotado para todas as formulações que trabalham com o tempo fictício. Sua eficiência será julgada em um capítulo posterior de vez que no momento, ele será utilizado de igual forma em todas as

formulações, não comprometendo assim a veracidade dos resultados relativos entre as mesmas.

6.3 - RESULTADO DE TESTES COMPUTACIONAIS E CONCLUSÕES

Os sistemas de equações diferenciais obtidos nos três últimos capítulos, serão a partir de agora integrados considerando-se como perturbação o efeito do achatamento polar (zonal 2), com forças específicas perturbadoras correspondentes às Equações 3.4.

6.3.1 - O SISTEMA EM TEMPO FÍSICO EM ÓRBITA PERTURBADA

O sistema de equações diferenciais do movimento orbital, possuindo o tempo físico como variável independente tem a forma:

$$\ddot{\vec{r}} = -(u/r^3)\vec{r} - \partial V / \partial \vec{r} + \vec{P} \quad (6.8)$$

Considerando-se o zonal 2 como perturbação, as equações nas coordenadas inerciais ficam na forma:

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= -(u/r^3)X - \ddot{X}_p \\ \ddot{Y} &= -(u/r^3)Y - \ddot{Y}_p \\ \ddot{Z} &= -(u/r^3)Z - \ddot{Z}_p \end{aligned} \quad (6.9)$$

Adotando-se a transformação:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X ; \quad Y_2 = Y ; \quad Y_3 = Z \\ Y_4 &= \dot{X} ; \quad Y_5 = \dot{Y} ; \quad Y_6 = \dot{Z} , \end{aligned}$$

O Sistema 6.7 de equações diferenciais de segunda ordem transforma-se em um equivalente de seis equações diferenciais de primeira ordem, na forma:

$$Y1 = Y4$$

$$Y2 = Y5$$

$$Y3 = Y6$$

$$Y4 = -(u/r^3)Y1 - (3/2)\omega J_2 R_t^2 (r^2 - 5Y3^2)Y1/r^7 \quad (6.10)$$

$$Y5 = -(u/r^3)Y2 - (3/2)\omega J_2 R_t^2 (r^2 - 5Y3^2)Y2/r^7$$

$$Y6 = -(u/r^3)Y3 - (3/2)\omega J_2 R_t^2 (3r^2 - 5Y3^2)Y3/r^7$$

Onde,

$$r = \sqrt{Y1^2 + Y2^2 + Y3^2}$$

O Sistema 6.10 foi propagado por um período de tempo físico equivalente a 18 horas, aproximadamente um período de revolução. As órbitas iniciais são as mesmas dos capítulos anteriores, estando os resultados dispostos nas Tabelas 6.1, 6.2 e 6.3.

TABELA 6.1

SISTEMA EM TEMPO FÍSICO, COM PERTURBAÇÃO, PRO
PAGADO EM UM RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM.

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	1058,37170	0,096933	0,5
	T/40	1628,33994	0,150004	0,4
	T/20	58032,7004	5,456520	0,3
0,2	T/60	4511,98103	0,421866	0,6
	T/40	2758,00877	0,172029	0,4
	T/20	10573,4617	17,51164	0,3
0,4	T/60	4575,75525	1,534572	0,6
	T/40	88763,0427	17,95155	0,5
	T/20	2930550,94	537,8870	0,3
0,6	T/60	936637,616	292,0787	0,7
	T/40	5926625,37	1785,386	0,5
	T/20	42880230,7	8766,886	0,3
0,8	T/60	32151301,5	12275,95	0,6
	T/40	9837972,64	7056,616	0,4
	T/20	429930914,	3900,539	0,4

TABELA 6.2

SISTEMA EM TEMPO FÍSICO, COM PERTURBAÇÃO, PRO
PAGADO EM UM RUNGE-KUTTA DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	1833,6166	0,174159	1,6
	T/40	1652,1405	0,154877	1,2
	T/20	1606,8616	0,152350	0,7
0,2	T/60	4425,5622	0,485559	2,0
	T/40	4358,9822	0,474818	1,2
	T/20	4428,0676	0,499191	0,7
0,4	T/60	7000,4468	1,125744	1,9
	T/40	6967,3445	1,120878	1,4
	T/20	7975,9994	1,304890	0,8
0,6	T/60	9907,6160	2,895819	2,1
	T/40	11427,570	3,362805	1,6
	T/20	823223,65	247,2377	0,8
0,8	T/60	1553906,7	1095,710	2,4
	T/40	56705527,	9807,945	1,7
	T/20	204076600,	7544,882	1,0

TABELA 6.3

SISTEMA EM TEMPO FÍSICO, COM PERTURBAÇÃO, PRO
PAGADO EM PREDITOR-CORRETOR DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	109,887143	0,010714	0,8
	T/40	106,635535	0,010392	0,7
	T/20	858,157225	0,085525	0,6
0,2	T/60	143,996075	0,017177	0,9
	T/40	4540,97410	0,521064	0,7
	T/20	94916,8886	9,668741	0,6
0,4	T/60	27373,2672	4,586344	0,9
	T/40	5200,05571	2,307844	0,8
	T/20	705296,191	110,6459	0,6
0,6	T/60	722578,253	223,5509	0,9
	T/40	857244,962	236,6431	0,8
	T/20	16407996,3	4217,837	0,6
0,8	T/60	4408290,32	4114,580	0,9
	T/40	84460258,1	5315,350	0,9
	T/20	203881945,	7551,225	0,5

Analisando-se as Tabelas 6.1, 6.2 e 6.3, percebe-se que para órbitas com pequenas excentricidades, melhores resultados foram obtidos com o preditor-corretor de oitava ordem, utilizado com $T/60$ para tamanho de passo. A partir da excentricidade 0.2, o Runge-Kutta de oitava ordem o supera em precisão dos resultados. Conclui-se também que o sistema em tempo físico não deve ser utilizado com o Runge-Kutta de quarta ordem.

6.3.2 - O SISTEMA TRANSFORMADO EM ÓRBITA PERTURBADA

O sistema de equações diferenciais transformado escrito através de equações de primeira ordem, foi obtido no capítulo 3, constituindo-se das Equações 3.9. Após a introdução da perturbação referente ao zonal 2, tal sistema assume a forma:

$$Y1' = Y4$$

$$Y2' = Y5$$

$$Y3' = Y6$$

$$Y4' = (1/r)(r'Y4 - uY1) - (3/2)uJ_2R_t^2 (r^2 - 5Y3^2)Y1/r^5 \quad (6.11)$$

$$Y5' = (1/r)(r'Y5 - uY2) - (3/2)uJ_2R_t^2 (r^2 - 5Y3^2)Y2/r^5$$

$$Y6' = (1/r)(r'Y6 - uY3) - (3/2)uJ_2R_t^2 (3r^2 - 5Y3^2)Y3/r^5$$

$$t' = r$$

O sistema transformado com perturbação, foi propagado também por um tempo de 18 horas, nas mesmas órbitas iniciais dos testes anteriores, estando os resultados dispostos nas Tabelas 6.4, 6.5 e 6.6.

TABELA 6.4

SISTEMA TRANSFORMADO, COM PERTURBAÇÃO, PRO
PAGADO EM UM RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	161,90053	0,016522	1,0
	T/40	449,62558	0,045328	0,7
	T/20	4722,7142	0,492587	0,5
0,2	T/60	200,45483	0,025669	0,9
	T/40	371,48253	0,047544	0,7
	T/20	1942,2403	0,286584	0,4
0,4	T/60	231,50818	0,038452	0,7
	T/40	1659,7110	0,295576	0,7
	T/20	37248,844	6,488639	0,5
0,6	T/60	5524,0305	1,667633	0,9
	T/40	23320,994	7,049543	0,7
	T/20	396993,44	119,9690	0,5
0,8	T/60	94924,844	69,13908	1,1
	T/40	426380,74	312,9729	0,7
	T/20	6451536,8	4953,973	0,5

TABELA 6.5

SISTEMA TRANSFORMADO, COM PERTURBAÇÃO, PRO
PAGADO EM UM RUNGE-KUTTA DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	109,96993	0,010722	2,1
	T/40	109,97897	0,010723	1,8
	T/20	109,93451	0,010719	1,1
0,2	T/60	188,97048	0,023438	1,9
	T/40	188,98505	0,023438	1,9
	T/20	188,93483	0,023432	1,1
0,4	T/60	351,46023	0,062071	1,8
	T/40	351,46452	0,062072	1,8
	T/20	351,75003	0,062123	1,1
0,6	T/60	791,13939	0,239896	2,2
	T/40	791,16908	0,239905	1,9
	T/20	803,64048	0,243687	1,2
0,8	T/60	1357,5998	0,980717	2,1
	T/40	1360,5657	0,982873	2,0
	T/20	2478,0925	1,79500	1,2

TABELA 6.6

SISTEMA TRANSFORMADO, COM PERTURBAÇÃO, PROPAGADO
EM UM PREDITOR-CORRETOR DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	109,96041	0,010721	0,9
	T/40	108,79181	0,010606	0,9
	T/20	367,25654	0,034665	0,7
0,2	T/60	254,29674	0,031660	0,9
	T/40	252,72200	0,031465	0,9
	T/20	228,20596	0,026890	0,9
0,4	T/60	351,06907	0,062003	0,9
	T/40	348,83742	0,061619	0,9
	T/20	132,14829	0,020988	0,9
0,6	T/60	788,39850	0,239078	0,9
	T/40	813,28103	0,246850	0,9
	T/20	417,38471	0,127168	0,8
0,8	T/60	1639,1260	1,181933	1,1
	T/40	1507,3909	1,125595	1,1
	T/20	2474,1380	1,145268	0,9

Analisando-se as Tabelas 6.4, 6.5 e 6.6, percebe-se que melhores resultados de uma forma geral, foram obtidos com o Runge-Kutta de oitava ordem. O Runge-Kutta de quarta ordem não deve ser utilizado com o sistema transformado a não ser nos casos de órbita com baixa excentricidade e com T/60 para o tamanho de passo. Alguns tamanhos de passo ótimo foram encontrados de forma coincidente ao utilizar-se o preditor-corretor de oitava ordem, como é o caso do T/20 para órbita com excentricidade 0,4. Porém, a tendência mais geral indica os tamanhos de passo T/40 e T/60 como proporcionadores de resultados mais uniformes e precisos.

6.3.3 - O SISTEMA ESTABILIZADO EM ÓRBITA PERTURBADA

Após a introdução da perturbação referente ao zonal 2, o sistema estabilizado (Equação 4.39) assume a forma:

$$Y1' = Y4$$

$$Y2' = Y5$$

$$Y3' = Y6$$

$$\begin{aligned} Y4' = & (r'/r)Y4 - ((1/2r^2)r'^2 + V+H)Y1 + \\ & - (3/2)uJ2R_t^2 (r^2 - 5Y3^2)Y1/r^5 \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} Y5' = & (r'/r)Y5 - ((1/2r^2)r'^2 + V+H)Y2 + \\ & - (3/2)uJ2R_t^2 (r^2 - 5Y3^2)Y2/r^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y6' = & (r'/r)Y6 - ((1/2r^2)r'^2 + V+H)Y3 + \\ & - (3/2)uJ2R_t^2 (3r^2 - 5Y3^2)Y3/r^5 \end{aligned}$$

$$t' = r$$

As condições iniciais em posição e velocidade são idênticas às do sistema transformado (Capítulo 3), sendo que a coordenada da energia mecânica total inicial mantém-se constante, podendo ser avaliada a partir da Equação 4.32, que necessita do prévio conhecimento da Equação 6.1.

O sistema 6.12 foi propagado por 18 horas. As órbitas iniciais são as mesmas dos testes anteriores, estando os resultados das propagações dispostos nas Tabelas 6.7, 6.8 e 6.9.

TABELA 6.7

SISTEMA ESTABILIZADO, COM PERTURBAÇÃO, PROPAGADO
EM UM RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	141,29821	0,013761	1,0
	T/40	288,01526	0,027961	0,7
	T/20	2991,2508	0,288683	0,5
0,2	T/60	221,78820	0,027635	1,0
	T/40	383,22529	0,047916	0,7
	T/20	3414,2808	0,429301	0,5
0,4	T/60	311,49646	0,056059	1,0
	T/40	280,71500	0,053522	0,7
	T/20	1448,4716	0,214981	0,5
0,6	T/60	165,93329	0,054864	1,0
	T/40	1498,0275	0,435273	0,8
	T/20	38184,301	11,27418	0,5
0,8	T/60	6411793,6	3866,699	1,0
	T/40	6410046,0	3862,056	0,7
	T/20	6400734,8	3766,382	0,5

TABELA 6.8

SISTEMA ESTABILIZADO, COM PERTURBAÇÃO, PROPAGADO
EM RUNGE-KUTTA DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	109,98604	0,010724	3,7
	T/40	109,97878	0,010723	2,8
	T/20	109,97879	0,010723	1,4
0,2	T/60	188,98184	0,023438	4,2
	T/40	188,99081	0,023439	2,7
	T/20	188,98728	0,023438	1,4
0,4	T/60	351,45996	0,062071	2,2
	T/40	351,45727	0,062071	2,4
	T/20	351,46181	0,062071	1,4
0,6	T/60	791,14307	0,239897	3,9
	T/40	791,14615	0,239898	2,7
	T/20	791,56255	0,240023	1,6
0,8	T/60	1357,4646	0,980619	4,5
	T/40	1357,5968	0,980716	2,7
	T/20	1394,4373	1,007682	1,6

TABELA 6.9

SISTEMA ESTABILIZADO, COM PERTURBAÇÃO, PROPAGADO
EM UM PREDITOR-CORRETOR DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	109,98668	0,010724	1,0
	T/40	109,89873	0,010715	1,0
	T/20	93,336451	0,000362	0,8
0,2	T/60	188,98233	0,023438	0,9
	T/40	188,79853	0,023414	0,9
	T/20	108,71493	0,007938	0,9
0,4	T/60	351,37834	0,062056	1,0
	T/40	351,11253	0,039123	0,8
	T/20	227,83839	0,039123	0,8
0,6	T/60	790,74411	0,239772	1,0
	T/40	797,99535	0,242192	1,0
	T/20	642,89170	0,206503	1,0
0,8	T/60	1398,7844	1,006496	1,4
	T/40	1393,0950	1,032588	1,3
	T/20	1396,5204	0,753721	1,0

Analisando-se os resultados apresentados nas Tabelas 6.7, 6.8 e 6.9, percebe-se que o sistema estabilizado em conjunto com o Runge-Kutta de quarta ordem, só deve ser usado em casos de pequena e média excentricidade e com T/60 para tamanho de passo. É perceptível ainda, que o sistema estabilizado em conjunto com o Runge-Kutta de oitava ordem apresentou bons resultados, podendo ser usado inclusive, com T/20 para tamanho de passo, exceto em altas excentricidades, a partir de 0,8 por exemplo. Com a utilização do preditor-corretor de oitava ordem, o sistema estabilizado apresentou resultados idênticos aos obtidos com o Runge-Kutta de mesma ordem para os tamanhos de passo T/60 e T/40, superando-o no tamanho de passo T/20. Portanto, o sistema estabilizado utilizado com o preditor-corretor de oitava ordem, forma com tal integrador, o conjunto que melhor oferece resultados entre os demais conjuntos com o referido sistema.

6.3.4 - O SISTEMA REGULARIZADO EM ÓRBITA PERTURBADA

Foi obtido no capítulo anterior, o sistema regularizado de equações diferenciais do movimento orbital (Equação 5.44). Considerando-se o zonal 2 como efeito perturbador, o sistema regularizado assume a forma:

$$Y1' = Y5$$

$$Y2' = Y6$$

$$Y3' = Y7$$

$$Y4' = Y8$$

$$Y5' = -(Y9/2)Y1 - (1/2)r(Y1\ddot{x}_p + Y2\ddot{y}_p + Y3\ddot{z}_p) \quad (6.13)$$

$$Y6' = -(Y9/2)Y2 - (1/2)r(Y2\ddot{x}_p + Y1\ddot{y}_p + Y4\ddot{z}_p)$$

$$Y7' = -(Y9/2)Y3 - (1/2)r(-Y3\ddot{X}_p - Y4\ddot{Y}_p + Y1\ddot{Z}_p)$$

$$Y8' = -(Y9/2)Y4 - (1/2)r(Y4\ddot{X}_p - Y3\ddot{Y}_p + Y2\ddot{Z}_p)$$

$$Y9' = 2L^T(\vec{U})(\partial V/\partial \vec{r}) \cdot \vec{U}$$

$$Y10' = r$$

Sendo:

$$Y1 = U1 \quad ; \quad Y2 = U2 \quad ; \quad Y3 = U3 \quad ; \quad Y4 = U4$$

$$Y5 = \dot{U}1' \quad ; \quad Y6 = \dot{U}2' \quad ; \quad Y7 = \dot{U}3' \quad ; \quad Y8 = \dot{U}4'$$

$$Y9 = Hk$$

$$Y10 = t$$

$$r = \vec{U} \cdot \vec{U} = Y1^2 + Y2^2 + Y3^2 + Y4^2$$

$$\ddot{X}_p, \ddot{Y}_p, \ddot{Z}_p: \text{ já definidos (Equação 6.4)}$$

As condições iniciais em posição e velocidade são as mesmas obtidas no Capítulo 5, no qual realizou-se testes em órbita kepleriana. O valor inicial da coordenada da energia do movimento kepleriano (Y9) é obtido através da Equação 5.33, tendo-se obviamente o prévio conhecimento da posição e velocidade no espaço paramétrico a quatro dimensões, no ponto inicial.

A forma na qual foi escrito o Sistema 6.13, é a que mais facilidade apresenta para efeito da realização de integrações numéricas, uma vez que não há a obrigatoriedade de se encontrar as perturbações em função das coordenadas do espaço paramétrico a quatro dimensões.

As propagações com o sistema regularizado 6.13 foram efetuadas sobre as mesmas órbitas iniciais dos testes anteriores, por um tempo físico também de 18 horas, estando os resultados dispostos nas Tabelas 6.10, 6.11 e 6.12.

TABELA 6.10

SISTEMA REGULARIZADO, COM PERTURBAÇÃO PROPAGADO
EM UM RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\dot{\Delta r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	114,70095	0,011181	1,1
	T/40	135,86808	0,013234	0,9
	T/20	436,64560	0,042393	0,5
0,2	T/60	195,17266	0,024204	1,1
	T/40	220,22344	0,027303	0,8
	T/20	602,02954	0,074537	0,6
0,4	T/60	359,30099	0,063454	1,1
	T/40	391,08815	0,069060	0,8
	T/20	884,32862	0,156047	0,6
0,6	T/60	802,57787	0,243362	1,2
	T/40	845,04361	0,256231	0,8
	T/20	1531,0337	0,464067	0,6
0,8	T/60	1379,6109	0,996680	1,5
	T/40	1485,6177	1,073526	1,1
	T/20	3051,5608	2,207566	0,6

TABELA 6.11

SISTEMA REGULARIZADO, COM PERTURBAÇÃO, PROPAGADO
EM UM RUNGE-KUTTA DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	109,98175	0,010723	4,9
	T/40	109,97282	0,010723	2,9
	T/20	109,97952	0,010723	1,6
0,2	T/60	188,97701	0,023437	4,1
	T/40	188,98963	0,023439	2,9
	T/20	188,98756	0,023438	1,6
0,4	T/60	351,45984	0,062071	4,1
	T/40	351,44445	0,062068	2,9
	T/20	351,45034	0,062069	1,7
0,6	T/60	791,13173	0,239894	4,2
	T/40	791,13202	0,239894	2,9
	T/20	791,13381	0,239894	1,7
0,8	T/60	1357,4798	0,980630	5,0
	T/40	1357,4877	0,980636	3,1
	T/20	1357,2724	0,980474	1,8

TABELA 6.12

SISTEMA REGULARIZADO, COM PERTURBAÇÃO, PROPAGADO
EM UM PREDITOR-CORRETOR DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	109,97215	0,010723	1,1
	T/40	109,97508	0,010723	1,0
	T/20	109,59322	0,010723	1,1
0,2	T/60	188,98044	0,023437	1,1
	T/40	188,92935	0,023431	1,0
	T/20	178,43644	0,022097	0,9
0,4	T/60	351,42844	0,062065	1,1
	T/40	351,60546	0,062095	1,0
	T/20	319,00345	0,057006	0,9
0,6	T/60	791,44663	0,239987	1,1
	T/40	796,62067	0,241637	1,1
	T/20	711,42685	0,224004	1,0
0,8	T/60	1386,2640	0,999143	1,3
	T/40	1276,8878	0,933939	1,1
	T/20	1268,0424	0,829221	1,1

Da análise das Tabelas 6.10, 6.11 e 6.12, é perceptível que o Runge-Kutta de quarta ordem pode ser usado em conjunto com o sistema regularizado, preferivelmente com $T/60$ para tamanho de passo, uma vez que o mesmo obteve erros ligeiramente maiores do que os obtidos com o Runge-Kutta de oitava ordem, mas com a vantagem de um menor tempo de processamento. O conjunto sistema regularizado-Runge-Kutta de oitava ordem mostrou-se indiferente a variação do tamanho de passo em todos os valores de excentricidade entre 0, e 0,8, tornando dessa forma mais viável a integração com $T/20$ para o tamanho de passo. Já o sistema regularizado utilizado em conjunto com o preditor-corretor de oitava ordem (Tabela 6.12), apresentou resultados idênticos aos apresentados com o Runge-Kutta de mesma ordem para os tamanhos de passo $T/60$ e $T/40$, superando-o em termos de precisão para $T/20$. Dessa forma, o conjunto sistema regularizado-preditor-corretor de oitava ordem apresentou o melhor comportamento de um modo geral.

6.4 - ANÁLISES GRÁFICAS E CONCLUSÕES FINAIS

Os gráficos contidos nas Figuras 6.2, 6.3 e 6.4 auxiliam a visualização do comportamento relativo em termos de precisão entre as diferentes formulações, inclusive em tempo físico. Os mesmos foram montados a partir de cinco pontos discretos referentes a cinco valores de excentricidade e a união entre tais pontos serão feita por retas, embora se saiba que existem formas de concordâncias que variam suavemente em torno das respectivas retas.

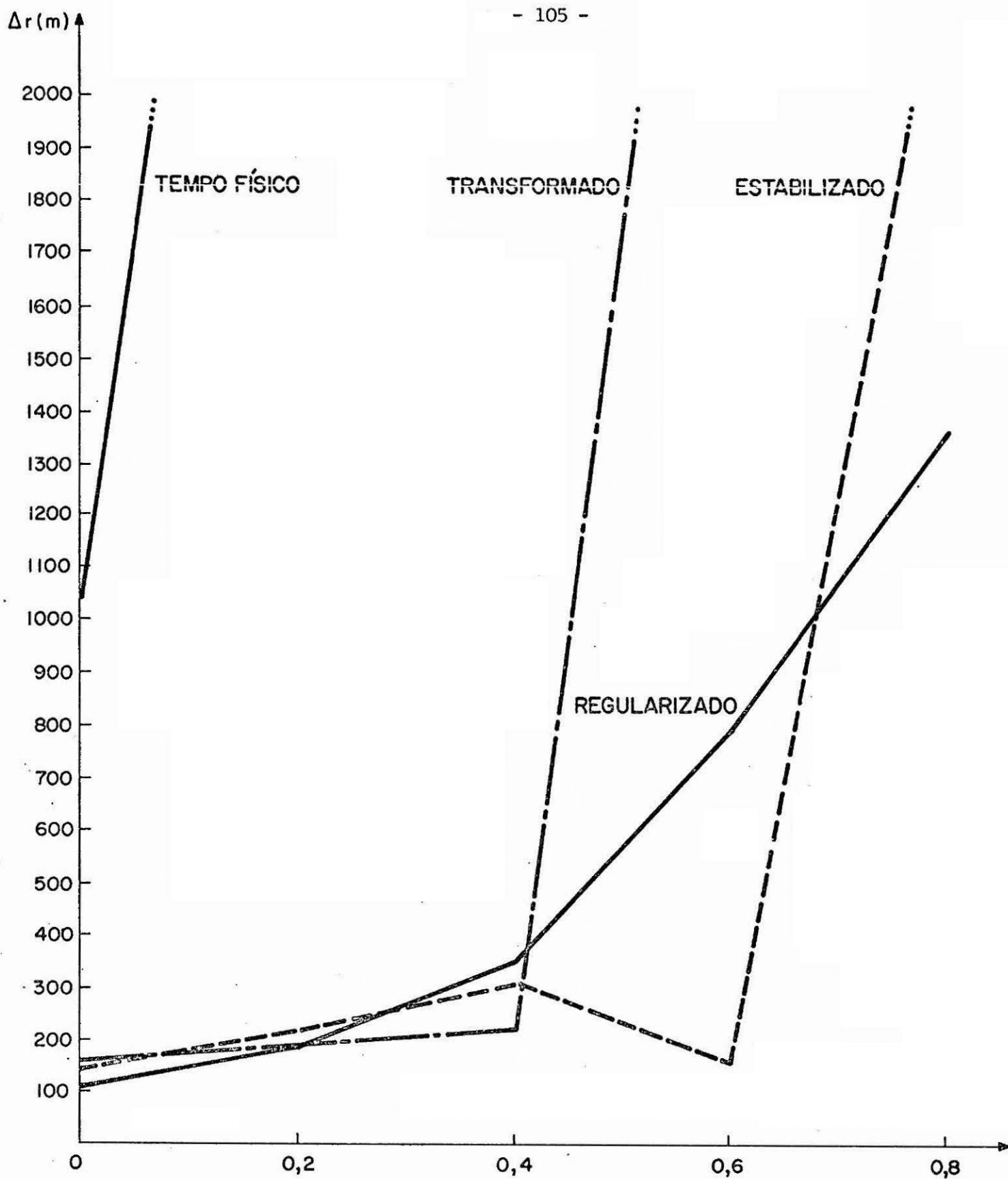


Fig. 6.2 - Sistemas em tempo físico, transformado, estabilizado e regularizado, propagados em um Runge-Kutta de quarta ordem e com $T/60$ para tamanho de passo.

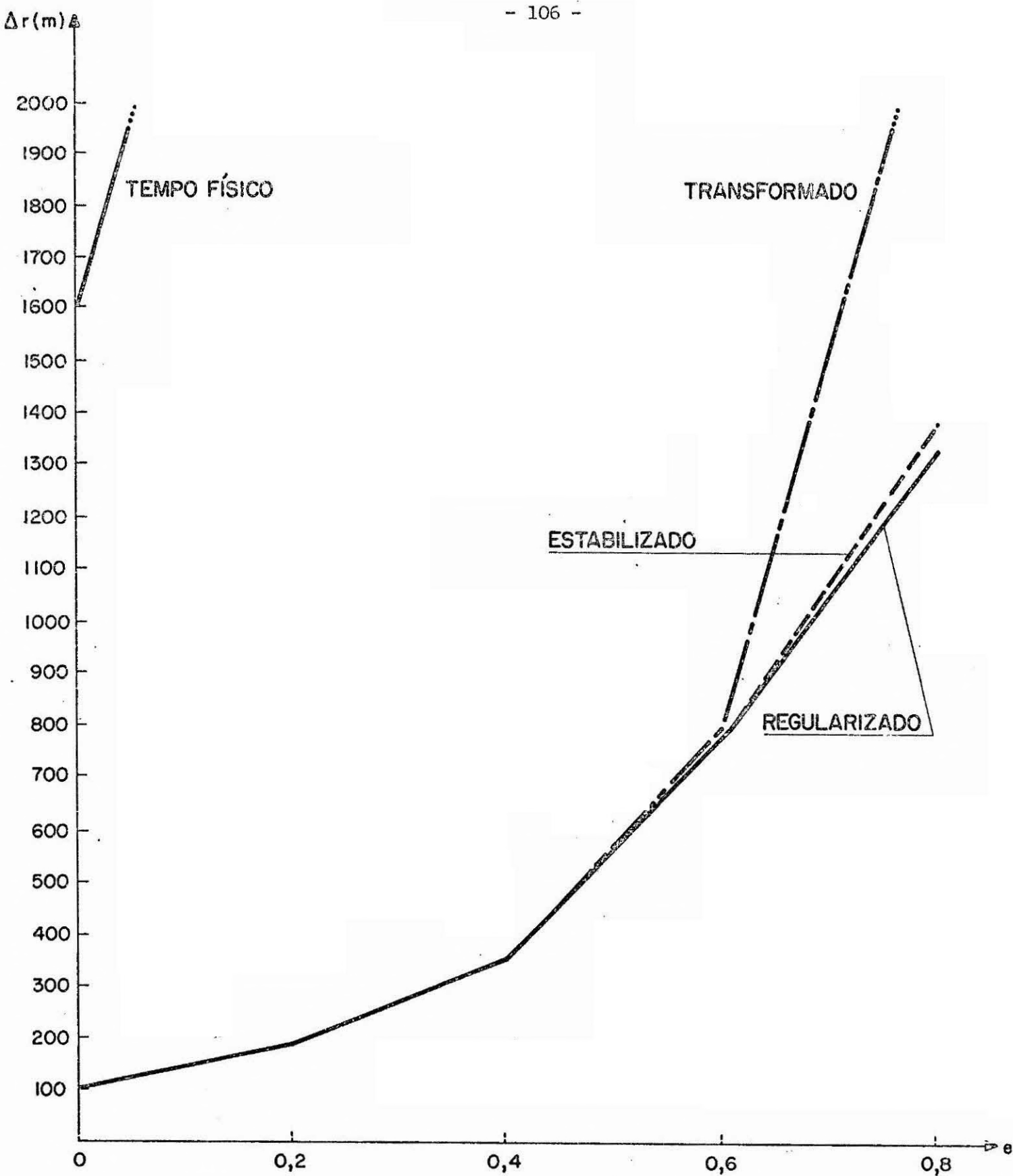


Fig. 6.3 - Sistemas em tempo físico, transformado, estabilizado e regularizado, propagados em um Runge-Kutta de oitava ordem e com $T/20$ para tamanho de passo.

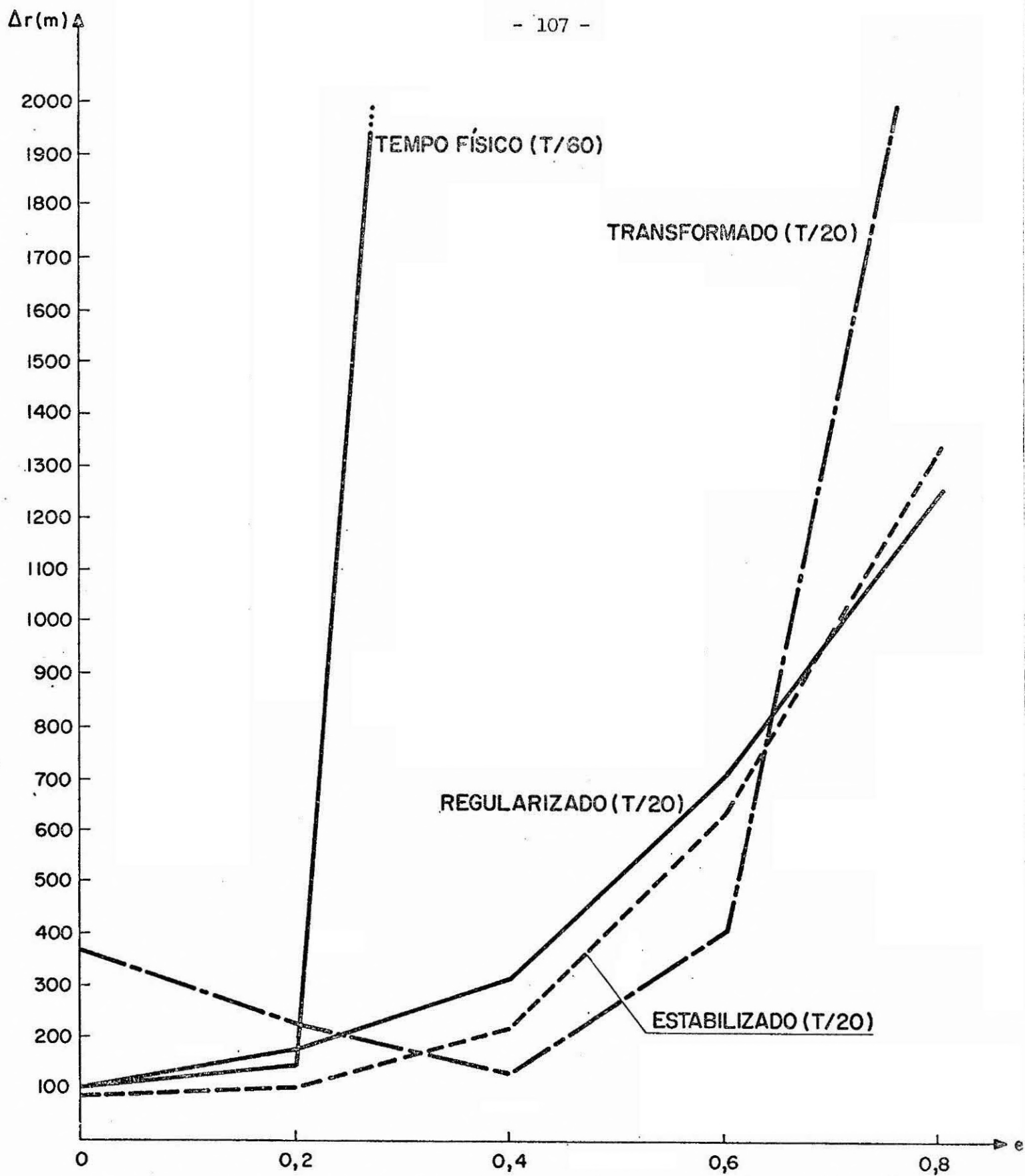


Fig. 6.4 - Sistemas em tempo físico (T/60), transformado, estabilizado e regularizado, propagados em um preditor-coretor de oitava ordem e com T/20 para tamanho de passo.

Da Figura 6.2 percebe-se que não se deve utilizar o sistema em tempo físico com o Runge-Kutta de quarta ordem. Deve-se trabalhar preferivelmente com $T/60$ para tamanho de passo sendo que se a excentricidade estiver contida entre $[0, 0,2]$, deve-se trabalhar com o sistema regularizado. Para excentricidades entre $]0,2, 0,4]$, o sistema deve ser apenas transformado. Valores entre $]0,4, 0,6]$, o sistema deve ser estabilizado, sendo que para excentricidades superiores a 0,6, novamente deve-se usar o sistema regularizado.

Da Figura 6.3, percebe-se que o sistema em tempo físico também deve ser evitado quando utiliza-se um Runge-Kutta de oitava ordem. Para excentricidades entre $[0, 0,4]$, o sistema pode ser o transformado, que coincide em tal caso com os sistemas estabilizado e regularizado, mas que deve ser utilizado por possuir o menor tempo de processamento. Valores entre $]0,4, 0,6]$, o sistema pode ser o estabilizado que coincide com o regularizado em tal intervalo. Em altas excentricidades (superior a 0,6), o sistema deve ser o regularizado.

Da análise da Figura 6.4, percebe-se que o sistema em tempo físico pode ser utilizado em conjunto com o preditor-corretor de oitava ordem, desde que a órbita tenha pequena excentricidade e trabalhe-se com $T/60$ para tamanho do passo. Ainda assim, caso a excentricidade esteja entre $[0, 0,3]$, o sistema estabilizado deve ser usado. Para valores médios de excentricidades, $]0,3, 0,6]$, o sistema deve ser o transformado. Para altas excentricidades, acima de 0,6, o sistema deve ser regularizado.

Como conclusões finais sobre o presente capítulo, poder-se-ia ressaltar inicialmente o fato de que a análise anterior em baseada nos gráficos, esteve restrita à comparação em termos de precisão entre as diferentes formulações utilizando-se um determinado integrador, ou seja, quatro conjuntos numéricos para cada integrador, formando assim uma das três figuras. Não foi apresentada uma análise global até o momento por estar a mesma reservada à parte final do trabalho, mas po

de-se adiantar que a justaposição dos três gráficos apresentaria os conjuntos numéricos (integrador mais formulação) que melhores resultados apresentaram para excentricidades compreendidas entre 0 e 0,8. A introdução de perturbação a órbita kepleriana elevou a dimensão dos erros, mantendo porém de forma aproximada, a mesma tendência de relação, em termos de precisão entre as diferentes formulações, obtida com os testes em órbita kepleriana, principalmente quando considera-se o Runge-Kutta de oitava ordem, integrador este que apresentou sempre os resultados mais uniformes. É cada vez mais consistente a necessidade de se tratar não uma formulação isolada, mas sim o conjunto numérico (integrador mais formulação empregada), que deve ser visto como um único ente matemático possuindo características específicas. Uma última e importante conclusão está no fato de que a coordenada de tempo físico das formulações transformado, estabilizado e regularizado, é obtida obviamente com o seu erro numérico. O mecanismo de parada no tempo físico final não corrige esse erro e acredita-se, ainda de forma intuitiva, que o vetor de estado do satélite na saída não corresponde exatamente ao tempo físico final desejado, mas ao tempo físico com seu erro numérico embutido, fato que contribui para a ampliação dos erros em posição e velocidade obtidos nos testes computacionais com órbitas perturbadas.

CAPÍTULO 7

PROPOSTA DE TRANSFORMAÇÃO DE TEMPO

Em todas as formulações apresentadas até o último capítulo, o tempo fictício no qual se desenvolvia o sistema durante a propagação era o tempo na versão da anomalia excêntrica, apresentado no Capítulo 3. Tal tempo foi originado através de uma transformação do tipo Sundman na qual o módulo do vetor posição era elemento básico, servindo como moderador da velocidade física ao longo de uma revolução. No atual capítulo, enfocamos o fato de que outras transformações podem dar origem a outros tempos fictícios, constituindo-se assim em diferentes formas de se propagar numericamente uma órbita. Inicialmente propõe-se uma outra transformação de tempo em conjunto com a sua motivação, apresentando-se em seguida testes computacionais e análises gráficas, finalizando-se com uma conclusão sobre o comportamento, em termos de precisão, da transformação proposta em relação às outras formulações.

7.1 - MOTIVAÇÃO DA FORMULAÇÃO PROPOSTA

A transformação do tipo Sundman de tempo na versão da anomalia excêntrica, possui a forma,

$$\vec{r}' = r \cdot \dot{\vec{r}} \quad (7.1)$$

sendo $\vec{r}'$ a velocidade fictícia.

É perceptível que o módulo do vetor posição r funciona como um moderador da velocidade física, fazendo com que a velocidade fictícia assuma valores mais uniformes durante uma revolução. Os comprimentos de arco correspondentes a cada passo de integração, tendem a diminuir em regiões próximas ao perigeu, bem como a aumentar em regiões próximas ao apogeu, de tal sorte que em relação a órbita propagada em tempo físico, a órbita em tempo fictício assume comprimentos de arcos mais uniformes (Figura 7.1).



Fig. 7.1 - Órbitas com os sistemas em tempo físico e transformado, com seus respectivos comprimentos de arco.

A motivação da formulação proposta no presente capítulo surgiu a partir da possibilidade de se distribuir de forma ainda mais equitativa os comprimentos de arco ao longo de uma revolução, protegendo um pouco mais a região próxima ao perigeu, proteção esta que viria a facilitar a saída em um tempo físico final em tal região.

7.2 - A FORMULAÇÃO PROPOSTA

Acredita-se que a formulação proposta seja uma transformação de tempo também do tipo Sundman, só que multiplicada por termos não constantes, mas que variam ao longo da órbita. Em essência, a transformação possui a forma:

$$d\vec{r}/ds = r(1-e\cos(E))d\vec{r}/dt \quad , \quad (7.2)$$

sendo s o novo tempo fictício, e a excentricidade e E a anomalia ex cêntrica.

Nota-se que o termo $(1-e\cos(E))$ assume valores no intervalo $]0, 2[$, para excentricidades no intervalo $[0, 1[$. Para regiões próximas ao perigeu, o termo de ajuste $(1-e\cos(E))$ tende a 0 à medida em que a excentricidade tende a 1, diminuindo assim um pouco mais a velocidade fictícia em relação à obtida com a transformação do tipo Sundman na versão da anomalia ex cêntrica. É notável também que o termo de ajuste $(1-e\cos(E))$ é sensível ao crescimento da excentricidade, tornando-se mais influente com o aumento desta.

Da Equação 7.2 pode ser escrito o seguinte operador:

$$d/dt = (1/(r(1-e\cos(E))))d/ds \quad (7.3)$$

São conhecidas as equações:

$$r = a(1-e\cos(E)) \quad (7.4)$$

$$H_k = u/2a \quad , \quad (7.5)$$

sendo a o semi-eixo orbital, u a constante terrestre e H_k o negativo da energia mecânica do movimento kepleriano.

Substituindo-se as Equações 7.4 e 7.5 na 7.3 tem-se:

$$d/dt = (u/2H_k r^2)d/ds \quad (7.6)$$

O operador 7.6 é utilizado para escrever o sistema de equações diferenciais do movimento orbital originalmente em tempo físico,

$$d^2\vec{r}/dt^2 = -(u/r^3)\vec{r} - \partial V/\partial \vec{r} + \vec{P} \quad , \quad (7.7)$$

em função da nova variável independente, tempo fictício da formulação proposta.

Inicialmente aplica-se o operador 7.6 a ele próprio:

$$d^2/dt^2 = (u/2H_k r^2)d/ds((u/2H_k r^2)d/ds) \quad (7.8)$$

No caso de movimento perturbado a energia de kepler H_k varia com o tempo físico ou fictício. Após a obtenção da derivada contida no segundo membro da Equação 7.8, a mesma torna-se:

$$d^2/dt^2 = (u/2H_k r^2)^2(-(2r'/r + H_k'/H_k)d/ds + d^2/ds^2) \quad (7.9)$$

onde o carater ' significa derivada com respeito ao novo tempo fictício. Aplicando-se o vetor $\vec{r}$ ao operador de segunda ordem 7.9 e considerando-se a Equação 7.7, tem-se:

$$(u/2Hkr^2)^2(-(2r'/r + Hk'/Hk)d\vec{r}/ds + d^2\vec{r}/ds^2) = - (u/r^3)\vec{r} - \partial V/\partial \vec{r} + \vec{P} \quad (7.10)$$

Reagrupando-se termos tem-se:

$$\vec{r}'' = (2r'/r + Hk'/Hk)\vec{r}' - (4Hk^2r/u)\vec{r} - (2Hkr^2/u)^2(\partial V/\partial \vec{r} - \vec{P}) \quad (7.11)$$

O sistema de equações diferenciais 7.11 constitui-se em uma forma alternativa de se propagar numericamente uma órbita, possuindo como variável independente um tempo que varia de forma acentuadamente não linear com o tempo físico.

A energia do movimento Kepleriano Hk , passou a ser uma coordenada generalizada do sistema, estando presente também na dinâmica do movimento perturbado a sua derivada com respeito ao novo tempo fictício, que pode ser obtida a partir do seguinte formalismo:

A Equação 4.30 expressa a derivada da energia do movimento kepleriano em relação ao tempo físico.

$$\dot{Hk} = \frac{1}{r} \cdot (\partial V/\partial \vec{r} - \vec{P}) \quad (4.30)$$

Com o operador transformação 7.6 pode-se escrever:

$$dHk/ds = (2Hkr^2/u)\frac{1}{r} \cdot (\partial V/\partial \vec{r} - \vec{P}) \quad (7.12)$$

$$\vec{r}' = (2Hkr^2/u)\frac{1}{r} \quad (7.13)$$

Portanto,

$$Hk' = \vec{r}' \cdot (\partial V / \partial \vec{r} - \vec{p}) \quad (7.14)$$

A conhecida e sempre presente necessidade de se parar a integração em um tempo físico final qualquer, torna obrigatória a integração numérica da equação,

$$dt/ds = 2Hkr^2/u \quad , \quad (7.15)$$

que foi originada do operador 7.6.

Portanto, as Equações 7.11, 7.14 e 7.15 formam um conjunto de oito equações diferenciais de primeira ordem, sendo três relativas a posição, três a velocidade, mais as equações das coordenadas da energia de kepler e tempo físico, já que ambas passaram a ser coordenadas generalizadas do sistema.

O sistema proposto (Equação 7.11) foi obtido a partir da transformação:

$$\vec{r}' = r(1-e\cos(E))\vec{r}$$

ou ainda,

$$\vec{r}' = (r^2/a)\vec{r} \quad .$$

O semi-eixo maior sofre variações em movimento perturbado e foi substituído pela energia do movimento kepleriano, que possui derivada com relação ao novo tempo fictício conhecida (Equação 7.14). Caso o tivessemos considerado constante, a transformação proposta seria a já conhecida transformação do tipo Sundman com o r^2 , a menos de uma multiplicação por uma constante.

A transformação do tipo Sundman de tempo em sua forma mais geral é escrita na forma:

$$\vec{r}' = c r^{\frac{n}{2}} \vec{r} \quad , \quad (7.16)$$

com c e n constantes. A transformação de tempo apresentada no Capítulo 3 possui $c=1$ e $n=1$, sendo conhecida como transformação de tempo na versão da anomalia excêntrica. Outras conhecidas transformações possuem $c=(u)^{-1/2}$ e $n=(3/2)$ (transformação na versão da anomalia intermediária), e $c=(ua(1-e^2))^{-1/2}$ e $n=2$ (transformação na versão da anomalia verdadeira). A mais conhecida e difundida é a transformação na versão da anomalia excêntrica (Capítulo 3), justamente porque os processos de estabilização (Capítulo 4) e regularização (Capítulo 5), são baseados no sistema já escrito com esta transformação. A relação em termos de precisão entre as diferentes transformações, pode variar com mudanças na órbita inicial ou nas perturbações consideradas (Nacozy, 1977). Devido a este fato é que atualmente há uma tendência de se fazer inúmeros testes com o n variando entre 0 e 2 nas mais diferentes situações. Pode ser dito entretanto, que com a proposta de transformação do presente capítulo, não se tentou explorar ainda mais o efeito da variação do expoente n , mas trabalhar com um c variável e sensível ao crescimento da excentricidade, redistribuindo sempre de forma mais equitativa os comprimentos de arco ao longo de uma revolução.

7.3 - O NOVO TEMPO FICTÍCIO

Tenta-se a partir de então, encontrar uma correlação analítica entre o novo tempo fictício e algum parâmetro orbital físico conhecido, a fim de se obter um significado dentro da realidade, dando-lhe sentido.

A anomalia média é dada por:

$$M = E - e \text{SEN}(E) \quad (7.17)$$

Considerando-se movimento kepleriano e derivando-se em relação ao novo tempo fictício:

$$dM/ds = (1-e\cos(E))dE/ds \quad (7.18)$$

Com o operador 7.3 pode-se escrever:

$$dM/dt = (1/a(1-e\cos(E))^2)dM/ds \quad (7.19)$$

$$dM/dt = \sqrt{u/a^3} \quad (7.20)$$

Substituindo-se as Equações 7.19 e 7.17 na 7.18 tem-se:

$$dE/ds = (1-e\cos(E)) \sqrt{u/a} \quad (7.21)$$

Ou ainda,

$$ds = \sqrt{a/u} dE/(1-e\cos(E)) \quad (7.22)$$

Com a Equação 7.22 percebe-se que o novo tempo fictício é igual ao tempo fictício na versão da anomalia excêntrica, para órbitas com excentricidade nula. Para órbitas com excentricidade no intervalo $]0, 1[$, o novo tempo fictício varia de forma não-linear com a anomalia excêntrica, ao contrário do tempo fictício na versão da anomalia excêntrica, que varia de forma linear com esta para órbita kepleriana.

As Figuras 7.2 e 7.3 contém os tamanhos dos intervalos de tempo físico em função da anomalia média, obtidos durante aproximadamente dois períodos de revolução em órbita perturbada, com excentricidade 0,2, utilizando-se os sistemas transformado (transformação na versão da anomalia excêntrica) e proposto (transformação proposta).

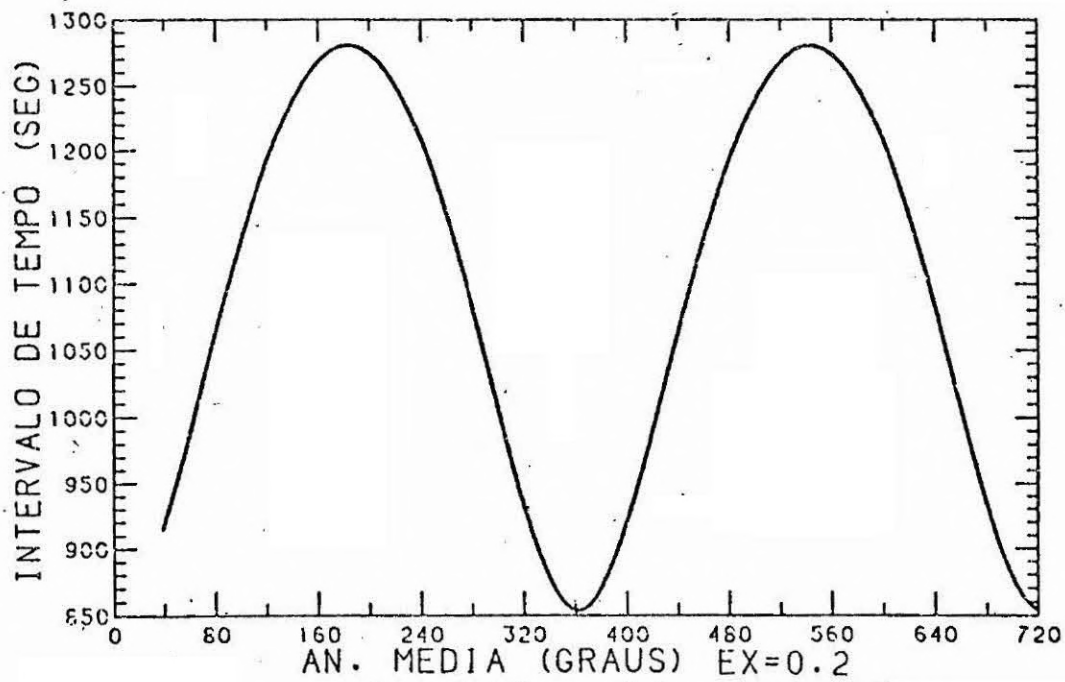


Fig. 7.2 - Variação do intervalo de tempo físico em função da anomalia média, obtida com um preditor-corretor de oitava ordem em conjunto com o sistema transformado.

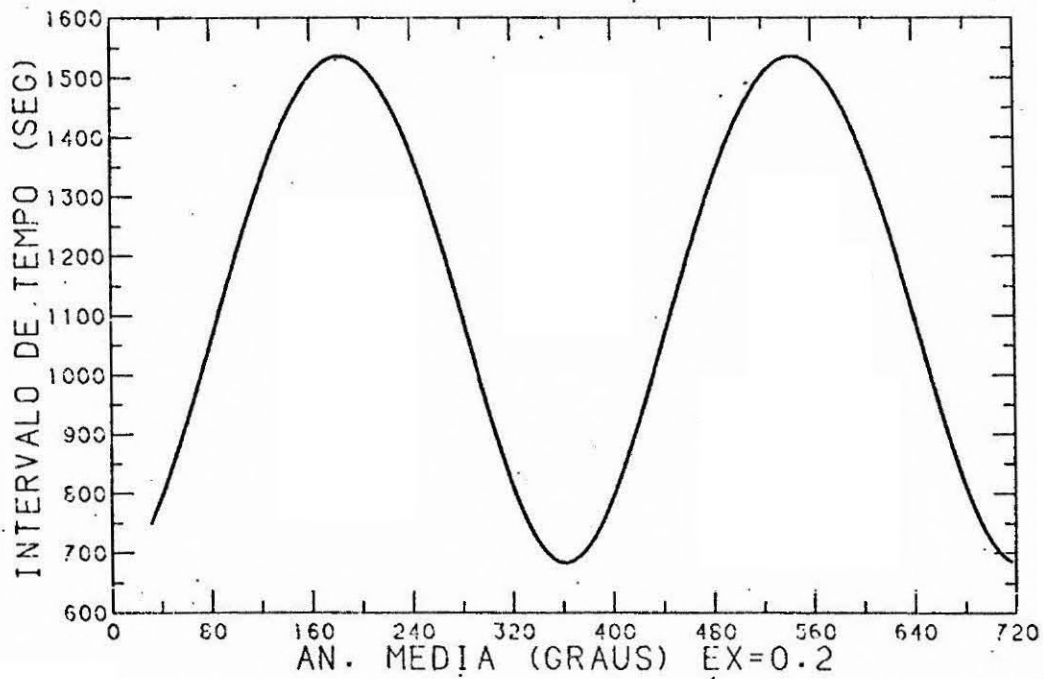


Fig. 7.3 - Variação do intervalo de tempo físico em função da anomalia média, obtida com um preditor-corretor de oitava ordem em conjunto com o sistema proposto.

Analisando-se os dois últimos gráficos, percebe-se que para ambas as formulações, o intervalo de tempo físico não mantém-se constante para cada intervalo de integração, mas aumenta com a proximidade do apogeu e diminui com a proximidade do perigeu, sendo esta a causa da redistribuição dos comprimentos de arco ao longo de uma revolução. Deve-se ressaltar entretanto, que o sistema proposto protege um pouco melhor a região crítica do perigeu, haja visto o fato de que o valor mínimo do intervalo de tempo físico em tal região é de aproximadamente 680 segundos para o sistema proposto (Figura 7.3), sendo de aproximadamente 855 segundos para o sistema transformado. Efeito contrário é perceptível em uma região próxima ao apogeu, quando o valor máximo do intervalo de tempo físico obtido com o sistema proposto é um pouco maior do que o obtido com o sistema apenas transformado. Acredita-se contudo, que o efeito verificado nas duas últimas figuras é o responsável por uma redistribuição mais equitativa dos comprimentos de arco ao longo de uma revolução, trazendo como consequência, melhoramentos em termos de precisão principalmente em órbitas com altas excentricidade.

7.4 - RESULTADOS DE TESTES COMPUTACIONAIS E CONCLUSÕES

O sistema proposto (Equação 7.11) pode ser escrito em função das suas coordenadas inerciais tridimensionais, na forma:

$$\begin{aligned} X' &= (2r'/r + Hk'/Hk)X' - (4Hk^2r/u)X - (2Hkr^2/u)^2(\partial V/\partial X - P_x) \\ Y' &= (2r'/r + Hk'/Hk)Y' - (4Hk^2r/u)Y - (2Hkr^2/u)^2(\partial V/\partial Y - P_y) \\ Z' &= (2r'/r + Hk'/Hk)Z' - (4Hk^2r/u)Z - (2Hkr^2/u)^2(\partial V/\partial Z - P_z) \end{aligned} \quad (7.23)$$

Onde P_x , P_y e P_z são as projeções nas direções inerciais X , Y e Z , das forças específicas de natureza não conservativa. Adotando-se as já conhecidas transformações:

$$Y_1 = X, \quad Y_2 = Y, \quad Y_3 = Z, \quad Y_4 = X'$$

$$Y5 = Y' \quad , \quad Y6 = Z' \quad , \quad Y7 = Hk \quad , \quad Y8 = t$$

o Sistema 7.22 torna-se:

$$Y1' = Y4$$

$$Y2' = Y5$$

$$Y3' = Y6$$

$$Y4' = AY4 - B(u/r^3)Y1 - B(\partial V/\partial Y1 - PY1) \quad (7.24)$$

$$Y5' = AY5 - B(u/r^3)Y2 - B(\partial V/\partial Y2 - PY2)$$

$$Y6' = AY6 - B(u/r^3)Y3 - B(\partial V/\partial Y3 - PY3)$$

$$Y7' = \vec{r}' \cdot (\partial V/\partial \vec{r} - \vec{P})$$

$$Y8' = 2Hkr^2/u$$

onde,

$$A = (2r'/r + Hk'/Hk)$$

$$B = (4Hk^2 r^4 / u^2)$$

O Sistema 7.23 foi propagado considerando-se o zonal 2 do geopotencial como efeito perturbador. As mesmas órbitas dos testes anteriores foram consideradas e se propagou por um tempo físico de aproximadamente um período orbital, equivalente a 18 horas. As integrações foram efetuadas com os três integradores habitualmente presentes neste trabalho, com os tamanhos de passo equivalentes a $T/60$, $T/40$ e $T/20$, onde T é o período orbital aproximado, estando os resultados dispostos nas Tabelas 7.1, 7.2 e 7.3.

TABFLA 7.1

SISTEMA PROPOSTO, PROPAGADO EM UM RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	174,626708	0,016304	1,0
	T/40	455,143262	0,042485	0,7
	T/20	5767,10906	0,524501	0,5
0,2	T/60	974,069476	0,129490	0,7
	T/40	3322,12690	0,426863	0,7
	T/20	7489,68895	1,070147	0,4
0,4	T/60	319,836906	0,072634	0,8
	T/40	11688,0824	2,206447	0,5
	T/20	98477,1173	18,59051	0,4
0,6	T/60	886,989552	0,276525	1,0
	T/40	30598,7648	9,649974	0,5
	T/20	157148,038	49,60504	0,4
0,8	T/60	100585,869	73,45254	0,7
	T/40	49445,5168	36,12054	0,7
	T/20	7622085,77	4332,879	0,5

TABELA 7.2

SISTEMA PROPOSTO, PROPAGADO EM UM RUNGE-KUTTA DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	Δr (m)	$\Delta \dot{r}$ (m/s)	CPU
0,0	T/60	109,966859	0,017722	3,7
	T/40	109,998606	0,010725	2,5
	T/20	110,025574	0,010728	1,4
0,2	T/60	189,009728	0,023440	3,7
	T/40	189,006123	0,023440	2,9
	T/20	188,944837	0,0234433	1,5
0,4	T/60	351,459347	0,062072	3,6
	T/40	351,467923	0,062072	2,9
	T/20	351,375929	0,062056	1,6
0,6	T/60	791,164244	0,239904	3,7
	T/40	790,644073	0,239732	1,7
	T/20	768,486155	0,233187	2,0
0,8	T/60	1356,48218	0,980229	2,2
	T/40	1292,69026	0,945052	2,0
	T/20	1944,12632	1,436148	1,3

TABELA 7.3

SISTEMA PROPOSTO, PROPAGADO EM UM PREDITOR-CORRETOR DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	Δr (m)	$\Delta \dot{r}$ (m/s)	CPU
0,0	T/60	109,983641	0,010724	1,1
	T/40	110,294830	0,010755	1,1
	T/20	99,224569	0,016391	0,9
0,2	T/60	191,985078	0,023793	1,2
	T/40	296,288002	0,035977	1,1
	T/20	21525,3483	2,143774	0,9
0,4	T/60	348,460749	0,061551	1,2
	T/40	310,481190	0,055919	1,0
	T/20	300790,700	63,86046	1,0
0,6	T/60	712,159776	0,215855	1,3
	T/40	1318,05461	0,396551	1,2
	T/20	19271,0780	5,760428	1,2
0,8	T/60	31,9969850	0,055786	1,5
	T/40	1255037,24	1768,227	1,5
	T/20	DIVERGE	DIVERGE	-

O conjunto sistema proposto-preditor corretor de oitava ordem mostrou-se sensível à variação do tamanho de passo. Tal fato propiciou a formação de uma tabela com resultados obtidos com tamanhos ótimos de passo. Estes últimos foram obtidos por tentativas sucessivas para cada excentricidade, já que não se dispõe de um mecanismo automático para este fim, estando os resultados dispostos na Tabela 7.4.

TABELA 7.4

SISTEMA PROPOSTO PROPAGADO COM UM PREDITOR-CORRETOR, COM TAMANHO DE PASSO ÓTIMO

EXC.	PASSO ÓTIMO	$\Delta r(m)$
0,0	T/19	51,808255
0,2	T/68	189,97891
0,4	T/40	310,48119
0,6	T/45	13,954885
0,8	T/60	31,996985

Deve ser ressaltado que para uma órbita diferente, os tamanhos ótimos de passo podem assumir valores diferentes dos apresentados na Tabela 7.4. Porém, caso trabalhe-se com uma missão espacial cuja órbita inicial é conhecida, poder-se-ia encontrar o tamanho ótimo do passo de integração, que valeria por um longo tempo até que sofresse alguma alteração.

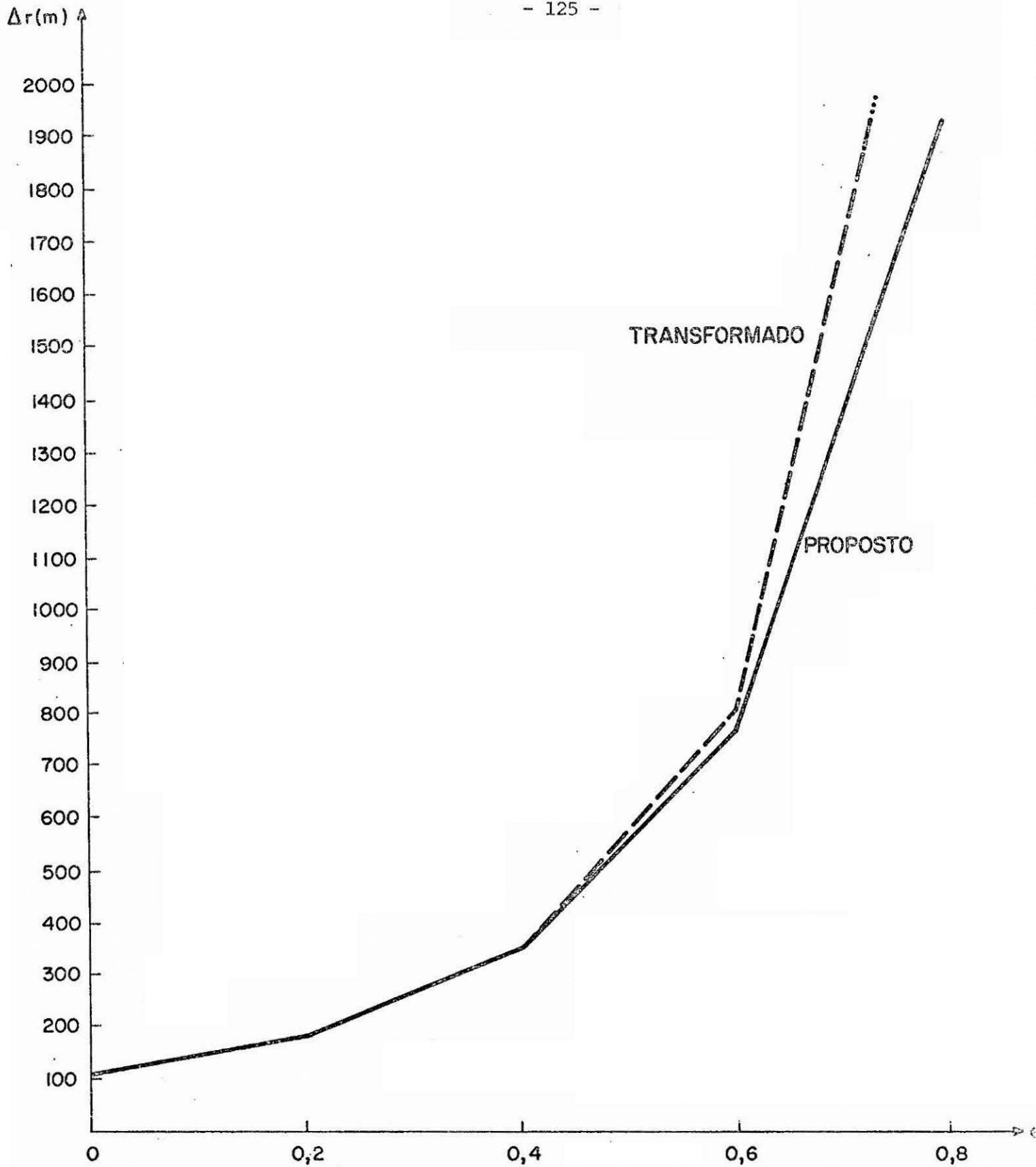


Fig. 7.4 - Erro em função da excentricidade para os sistemas transformado e proposto, propagados em um Runge-Kutta de oitava ordem, com $T/20$ para tamanho de passo.

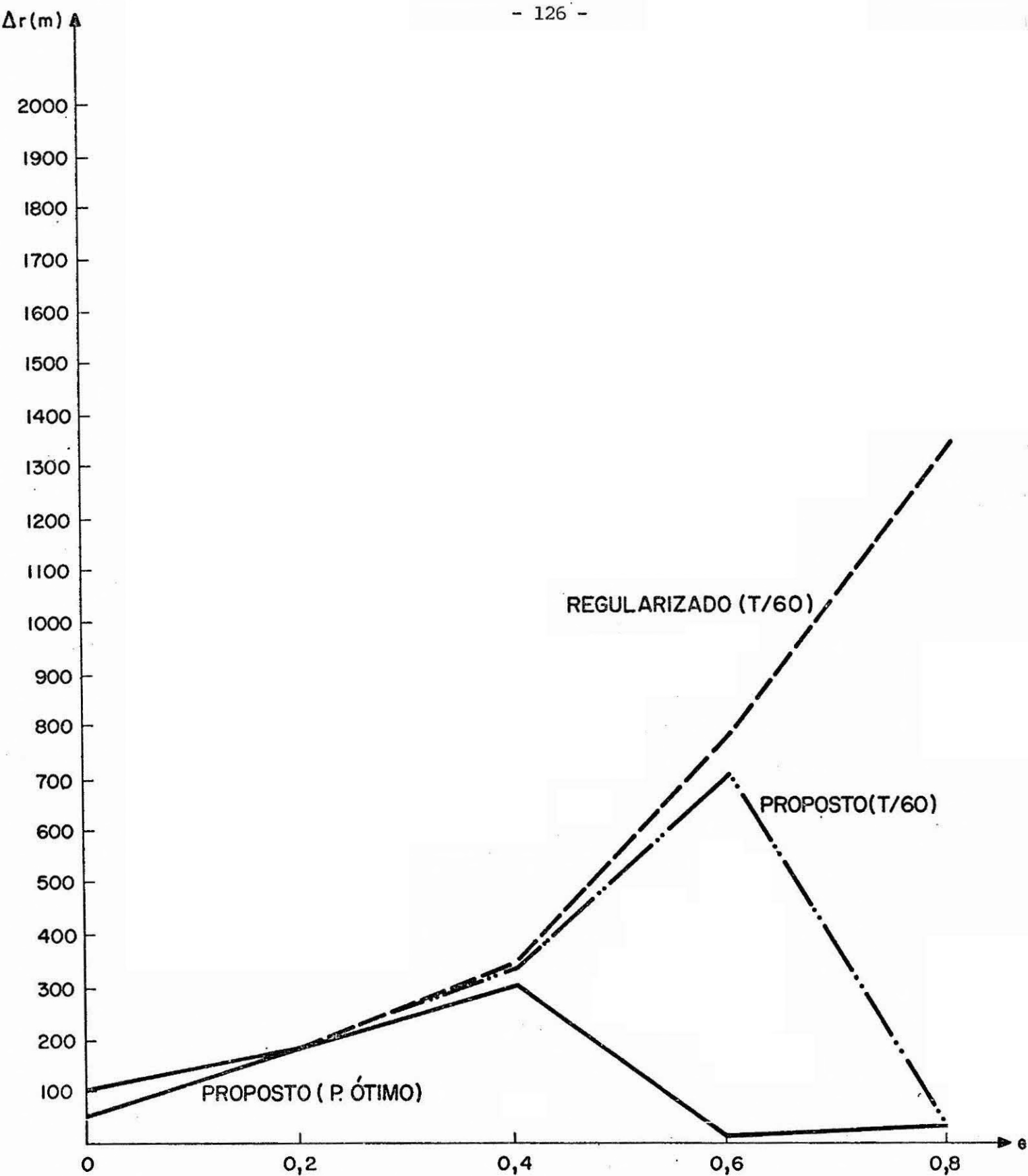


Fig. 7.5 - Erro em função da excentricidade para os sistemas regularizado e proposto, propagados em um preditor-corretor de oitava ordem com T/60 para tamanho de passo, mais a curva do sistema proposto com os tamanhos ótimos de passo.

Analisando-se as Tabelas 7.1, 7.2 e 7.3, percebe-se que o sistema proposto não deve ser utilizado com o Runge-Kutta de quarta ordem (Tabela 7.1), a exemplo do sistema apenas transformado com mesmo integrador. Já com o Runge-Kutta de oitava ordem, o sistema proposto (Tabela 7.2) apresentou comportamento idêntico ao apenas transformado com mesmo integrador nos tamanhos de passo $T/60$ e $T/40$, superando-o à medida em que a excentricidade aumenta, para $T/20$ como tamanho de passo. O conjunto sistema proposto-preditor-corretor de oitava ordem apresentou o melhor comportamento dentre os demais conjuntos com a mesma formulação, considerando-se para tanto o tamanho de passo $T/60$.

Os gráficos contidos nas Figuras 7.4 e 7.5 ressaltam o comportamento em termos de precisão entre o sistema proposto e as demais formulações. Na Figura 7.4 vê-se uma comparação em função da excentricidade entre os conjuntos sistema transformado-Runge-Kutta de oitava ordem, sistema proposto-Runge-Kutta de oitava ordem, ambos com $T/20$ para tamanho de passo. É perceptível que a medida em que a excentricidade cresce, o sistema proposto torna-se mais preciso em relação ao transformado.

A Figura 7.5 resalta uma particularidade do conjunto sistema proposto-preditor-corretor de oitava ordem, particularidade esta que se traduz como uma maior sensibilidade à variação do tamanho do passo, fato que não ocorre com o conjunto sistema proposto-Runge-Kutta de oitava ordem. Nela vê-se que o sistema proposto com $T/60$ possui melhor comportamento que o regularizado com $T/60$ e ambos com o predictor-corretor. Poder-se-ia propagar com o tamanho de passo ótimo para cada valor de excentricidade, já que o sistema proposto com o predictor-corretor de oitava ordem mostrou-se sensível nesse particular. Caso assim se procedesse, a curva encontrada seria a curva inferior da Figura 7.5, com resultados extraídos da Tabela 7.4. Sem dúvida, essa curva possui a melhor precisão dentre todas as formulações, quando se considera órbita perturbada.

Como conclusões finais, tem-se a acrescentar inicialmente o fato de que intenta-se com a proposta de transformação, dar uma contribuição a fim de se obter resultados mais precisos ao término da propagação. A transformação proposta não tem a pretensão de ser a melhor dentre as transformações possíveis, pois tal assunto é relativamente novo e longe se está de uma última palavra. O tempo físico continua sendo avaliado com o seu erro numérico embutido, o que contribui de forma significativa na obtenção dos erros em posição e velocidade quando se pára a propagação em um tempo físico final. E finalmente, deve-se salientar que a sensibilidade à variação do tamanho do passo, característica apresentada pelo conjunto sistema proposto-preditor-corretor de oitava ordem, deve ser aproveitada futuramente no que poderia vir a ser um mecanismo de escolha automática do tamanho do passo ótimo em função da órbita inicial.

CAPÍTULO 8

A COORDENADA DE TEMPO FÍSICO

Em capítulos anteriores, trabalhou-se com os sistemas transformado, estabilizado e regularizado. O tempo no qual estes sistemas se desenvolvem não é o físico, mas um tempo fictício que varia de forma não linear com o primeiro, fato que provoca uma redistribuição dos comprimentos de arco ao longo de uma revolução. A necessidade de se parar a propagação em um tempo físico final, obriga a integração da coordenada de tempo físico, que para órbita perturbada, não possui solução analítica. Este capítulo destina-se a estudar o comportamento da coordenada de tempo físico que é obtida numericamente, seu erro numérico e a consequente influência do mesmo sobre os vetores posição e velocidade obtidos ao término da propagação, no tempo físico final. Diversos gráficos ilustrativos são traçados e finaliza-se com uma conclusão sobre o estudo desenvolvido.

8.1 - ERRO NA COORDENADA DE TEMPO FÍSICO

A relação entre o tempo físico e o fictício oriunda da transformação do tipo Sundman de tempo na versão da anomalia excêntrica, foi obtida no Capítulo 3 e possui a forma:

$$dt/ds = r \quad , \quad (8.1)$$

onde r é o vetor posição e s o tempo fictício.

Esta equação possui solução analítica quando o movimento não é perturbado, o que faz com que a saída se verifique realmente no tempo físico final desejado. Em caso de órbita kepleriana, o tempo fictício s possui uma relação linear com a anomalia excêntrica, conforme demonstrado no Capítulo 3, possuindo a forma:

$$s = \sqrt{a/u} \quad E \quad (8.2)$$

onde considerou-se a propagação partindo do perigeu, sendo a o semieixo maior, μ a constante de gravitação terrestre e E a anomalia excêntrica.

Com a Equação 8.2, pode-se obter a anomalia excêntrica em cada ponto discreto da integração numérica e em assim procedendo-se, obtém-se o tempo físico exato até o presente ponto. Uma vez obtido o tempo físico exato, integra-se numericamente a Equação 8.1, confrontando-se o resultado com o valor exato do tempo físico no ponto da integração em questão. A diferença entre os dois tempos físicos obtidos analítica e numericamente constitui-se no erro global da coordenada de tempo físico quando trata-se com órbita kepleriana. Os gráficos seguintes mostram o erro global da coordenada de tempo físico e sua variação em função da anomalia excêntrica. As órbitas iniciais consideradas são as mesmas órbitas presentes nos testes anteriores, sendo que o erro foi obtido considerando-se obviamente, movimento não perturbado, propagado em um Runge-Kutta de oitava ordem em conjunto com o sistema transformado (transformação do tipo Sundman de tempo na versão da anomalia excêntrica), por um tempo físico equivalente a três períodos de revolução e com $T/60$ para tamanho do passo de integração.

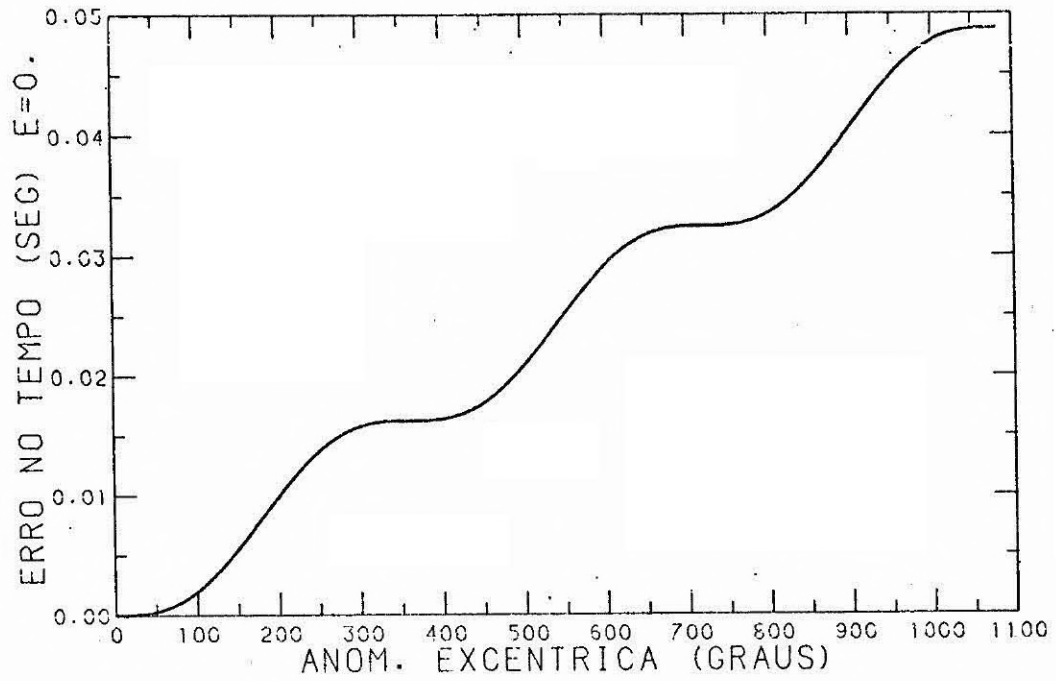


Fig. 8.1 - Erro global da coordenada de tempo físico em órbita com ex cêntrica nula.

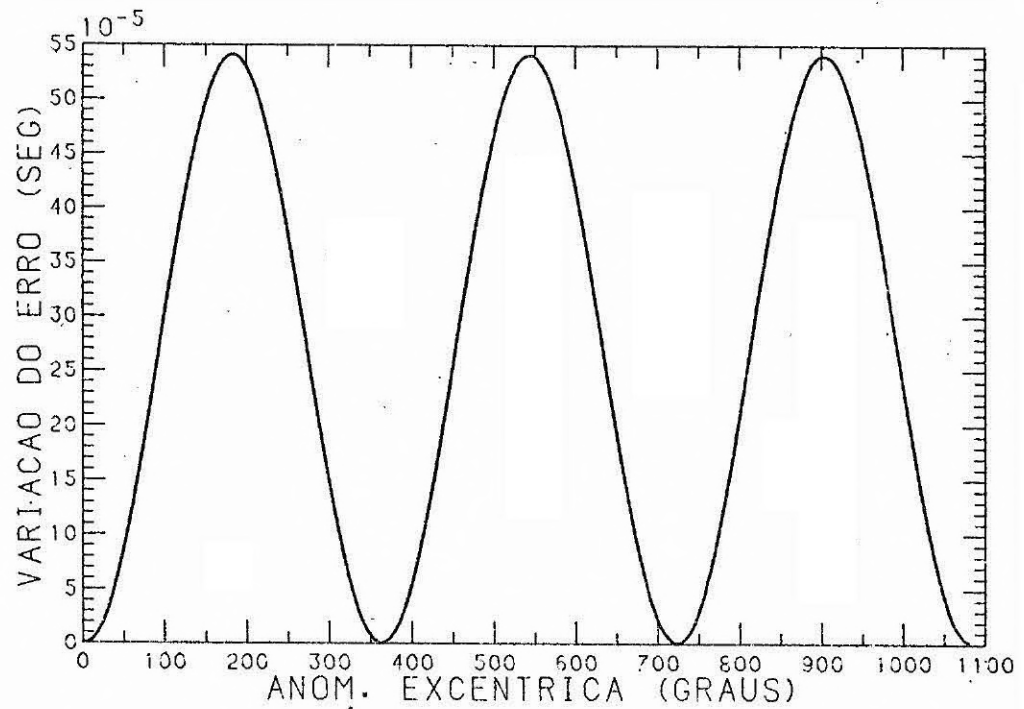


Fig. 8.2 - Variação do erro global da Figura 8.1.

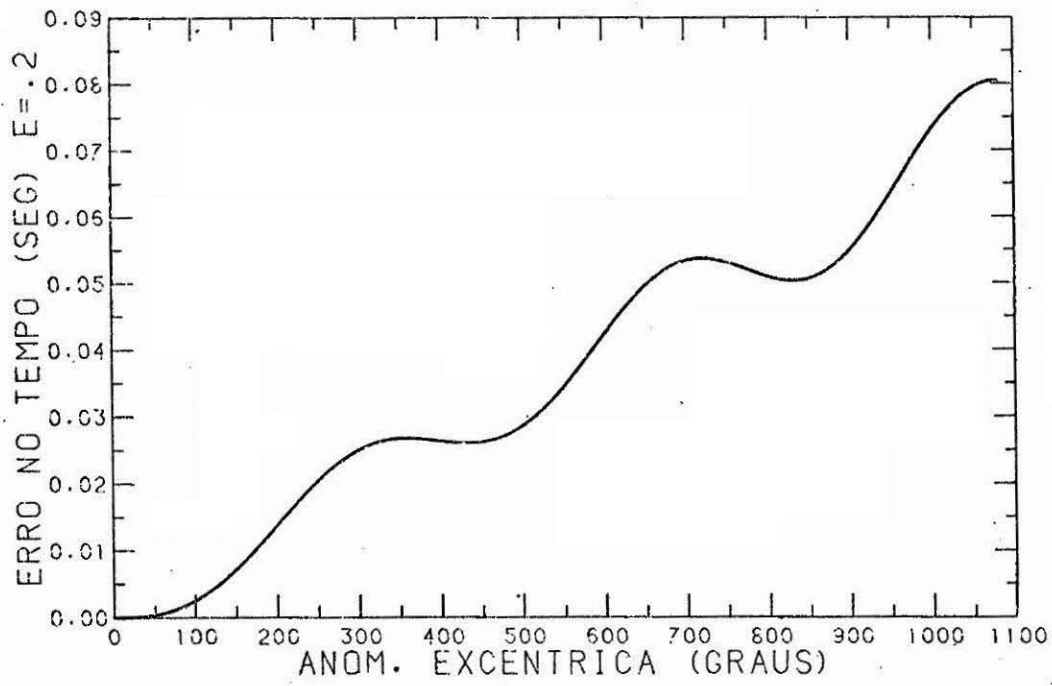


Fig. 8.3 - Erro global da coordenada de tempo físico em órbita com excentricidade 0,2:

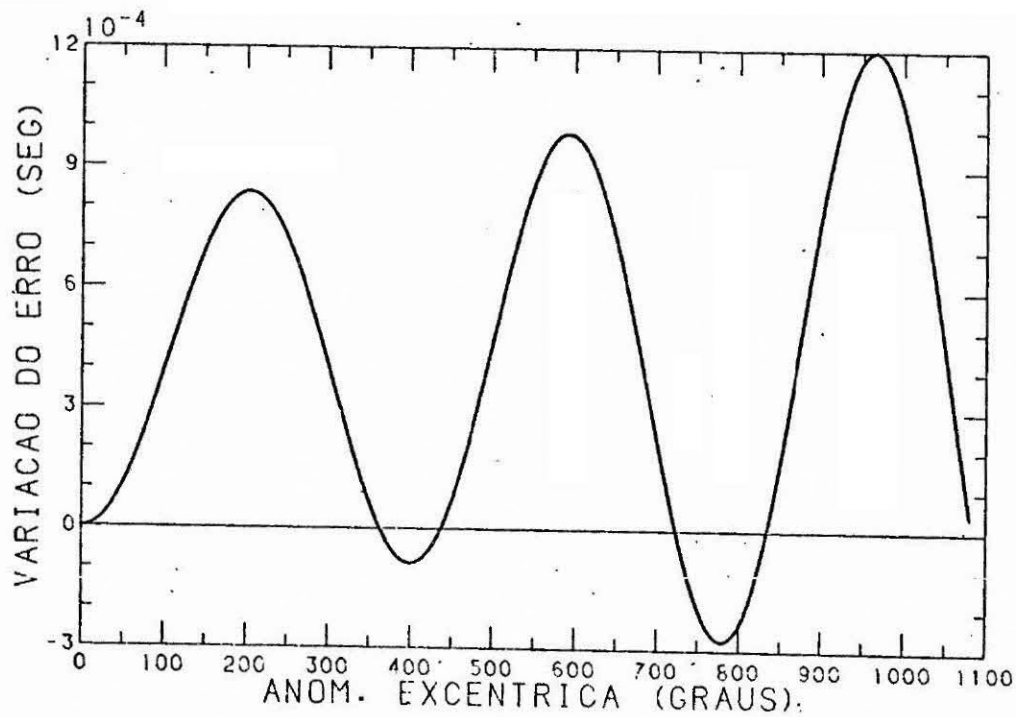


Fig. 8.4 - Variação do erro da Figura 8.3.

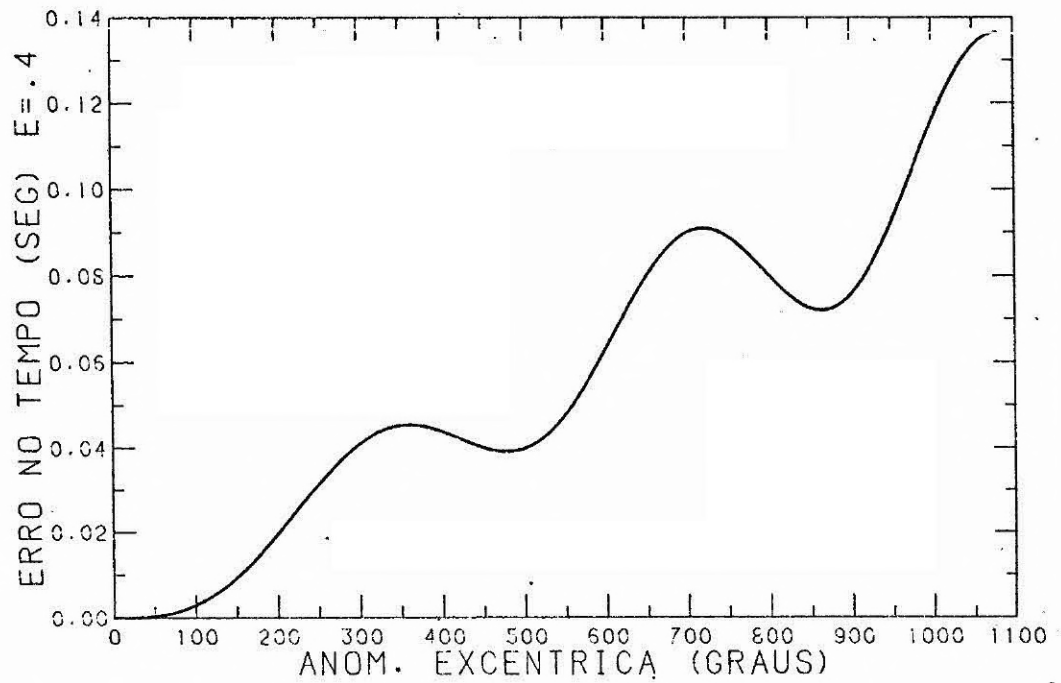


Fig. 8.5 - Erro global da coordenada de tempo físico em órbita com e_x centrividade 0,4.

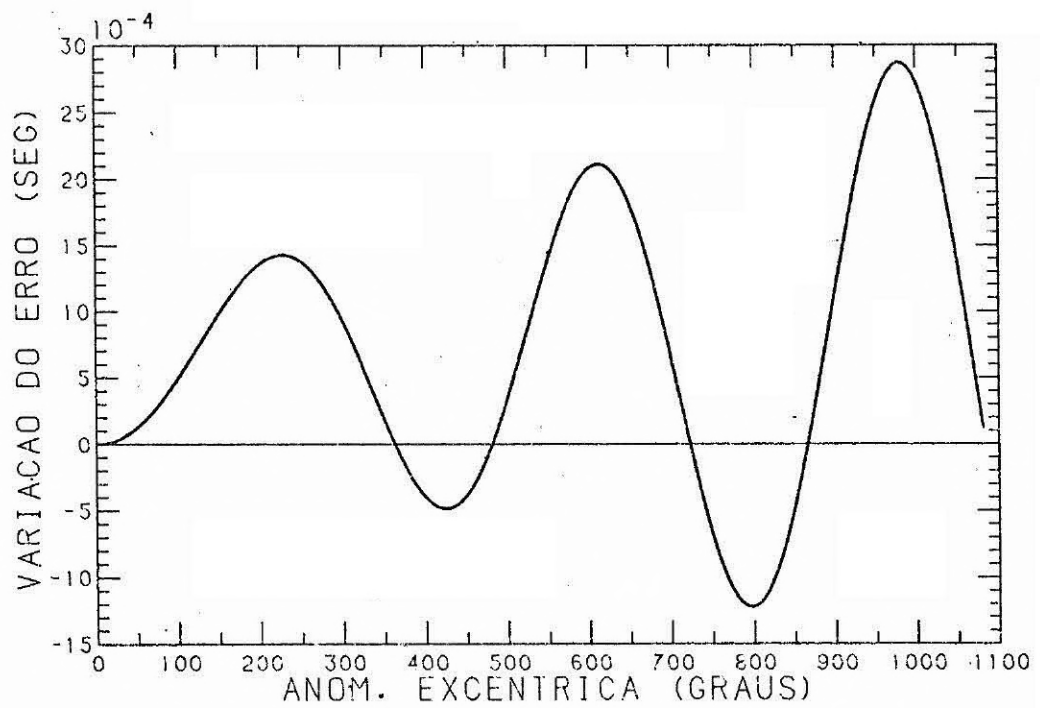


Fig. 8.6 - Variação do erro da Figura 8.5.

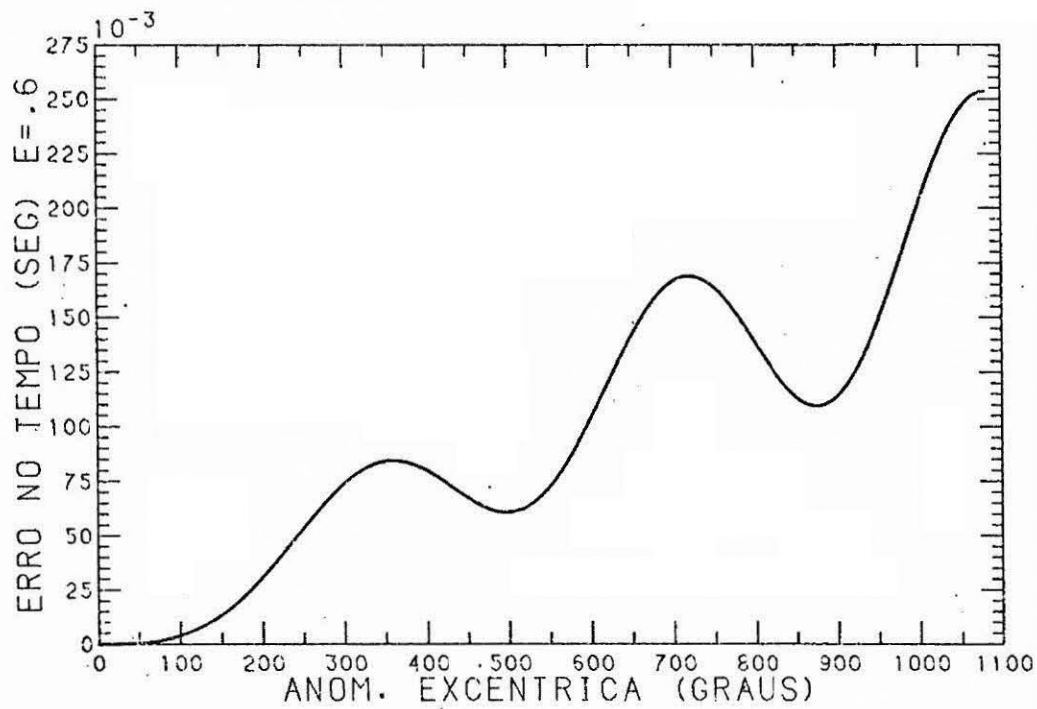


Fig. 8.7 - Erro global da coordenada de tempo físico em órbita com excentricidade 0,4.

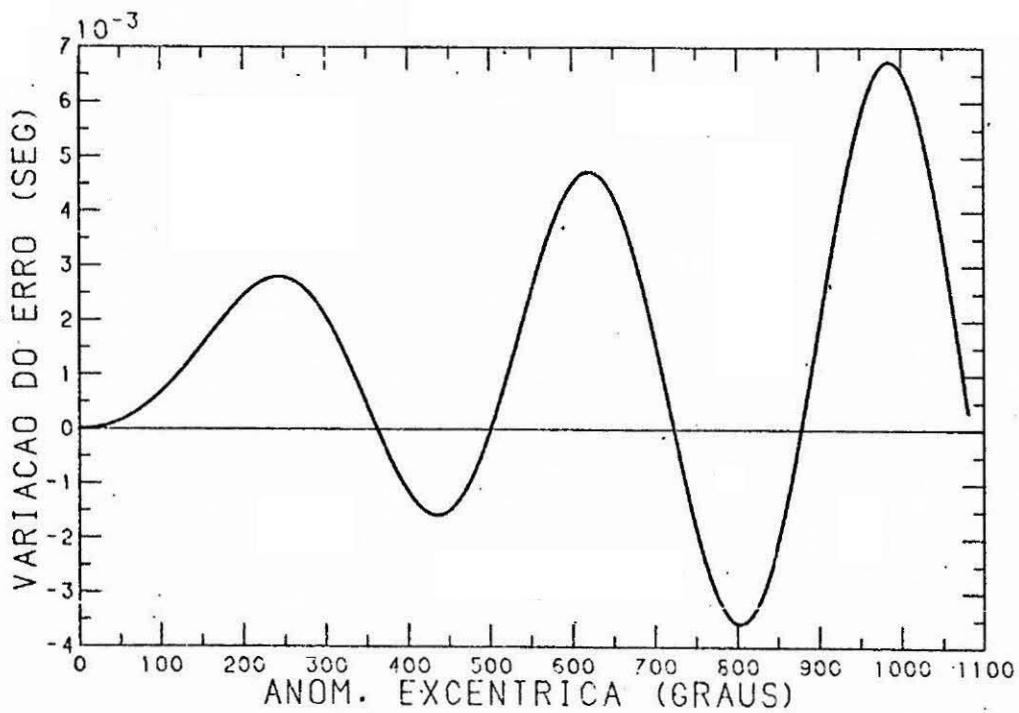


Fig. 8.8 - Variação do erro da Figura 8.7.

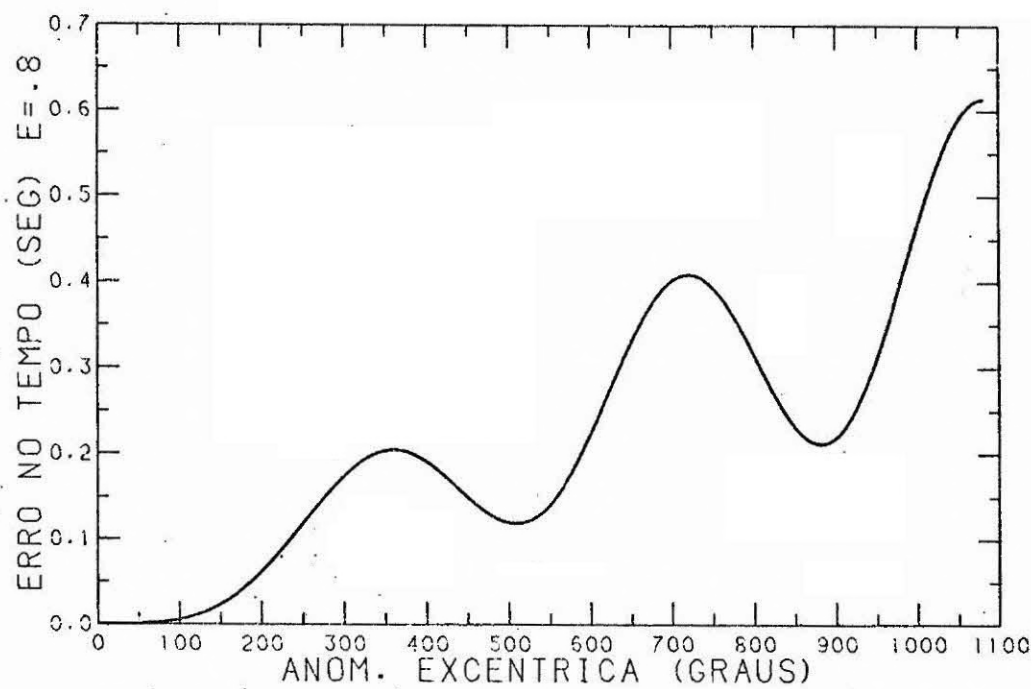


Fig. 8.9 - Erro global da coordenada de tempo físico em órbita com excentricidade 0,8.

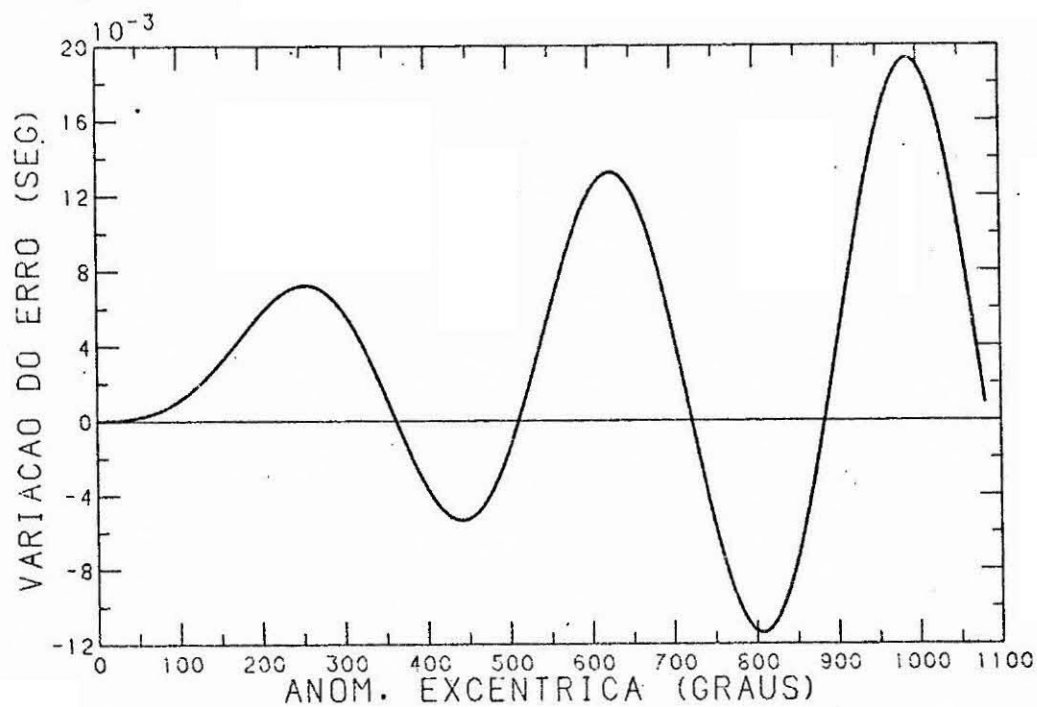


Fig. 8.10 - Variação do erro da Figura 8.9.

A análise dos gráficos permite algumas conclusões sobre o comportamento da coordenada de tempo físico obtida numericamente. A primeira e mais óbvia é que o erro global da coordenada de tempo físico cresce com o tempo de propagação, bem como com o acréscimo da excentricidade. Existe um crescimento secular e a curva real é uma ondulação em volta deste, sendo que a amplitude de oscilação cresce com a excentricidade da órbita. Os pontos de máximos da oscilação coincidem com a passagem pelo perigeu, região na qual a variação do erro torna-se nula. Para órbitas com excentricidade nula, o erro global sempre cresce, ou seja, sua variação chega a zero nos pontos de máximo mas nunca assume valores negativos. À medida em que a excentricidade cresce, surgem regiões físicas nas quais o erro global está diminuindo, fato assinalado pelo aparecimento de variação negativa, as oscilações ficam mais marcantes e surgem pontos de mínimo nos quais supõe-se obter erros em posição e velocidade menores. As amplitudes de oscilação crescem com o tempo de propagação, fazendo com que os pontos de mínimo tornem-se mais nítidos. Estas conclusões sugerem novos testes que são apresentados no próximo tópico, que concluirá a respeito da influência do erro global da coordenada de tempo físico sobre os erros em posição e velocidade obtidos ao término da propagação.

8.2 - TESTES COM O MECANISMO DE PARADA

No tópico anterior, foi enfatizado a existência do erro na coordenada de tempo físico quando esta é obtida de forma numérica. Não há dúvida quanto a influência marcante deste erro sobre os erros em posição e velocidade obtidos ao término da propagação. A fim de se verificar tal influência, um primeiro teste foi idealizado. Trata-se da propagação por um período orbital em movimento não perturbado, com término da propagação no tempo físico final obtido através do mecanismo de envolvido no Capítulo 6, ou seja, convergindo-se a saída para o tempo físico final obtido de forma numérica. Foram consideradas as mesmas órbitas iniciais e os erros em posição e velocidade encontrados foram confrontados com os erros obtidos parando-se no tempo físico final obtido de forma analítica. Os resultados deste primeiro teste estão dispostos

na Tabela 8.1, tendo sido utilizado o sistema transformado em conjunto com o Runge-Kutta de oitava ordem e com $T/60$ para tamanho de passo.

TABELA 8.1

ERROS COM PARADAS NO TEMPO FÍSICO FINAL OBTIDO
DE FORMAS ANALÍTICAS E NUMÉRICA

EXC.	TEMPO ANALÍTICO		TEMPO NUMÉRICO	
	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$
0,0	27,447065	0,002661	72,447119	0,007024
0,2	40,392916	0,004996	139,34972	0,017238
0,4	58,747033	0,010358	278,61010	0,049126
0,6	87,907361	0,026636	639,54950	0,193788
0,8	148,23037	0,119773	2193,8712	1,772697

Observando-se a Tabela 8.1, percebe-se a influência do erro na determinação numérica da coordenada de tempo físico sobre os erros em posição e velocidade ao término da propagação. Uma vez que o erro global da coordenada de tempo cresce com a excentricidade, os erros em posição e velocidade para uma saída em um tempo físico obtido numericamente também crescem. Portanto, as diferenças entre os erros verificados com saída nos tempos físicos obtidos de formas analítica e numérica (Tabela 8.1), devem-se à falta de precisão na determinação numérica da coordenada de tempo físico.

Os dez gráficos obtidos anteriormente permitem mais uma especulação. Trata-se da possibilidade de existirem regiões da órbita física nas quais o término da propagação apresentaria resultados mais precisos. Estas regiões seriam coincidentes com os pontos de mínimo das curvas do erro global para as diversas excentricidades. Tomou-se por

exemplo, a órbita inicial com excentricidade 0,6 (Figura 8.7), que apresenta um ponto de mínimo para uma anomalia excêntrica de aproximadamente 500 graus, comparando-se o resultado com o mesmo mecanismo de parada aplicado em um tempo físico final equivalente a 360 graus de anomalia excêntrica, estando os resultados dispostos na Tabela 8.2.

TABELA 8.2

ERROS EM POSIÇÃO E VELOCIDADE EM ÓRBITA KEPLERIANA

EXC.	E = 360 (GRAUS).		E = 500 (GRAUS)	
	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$
0,6	639,54950	0,193788	229,55109	0,018689

A Tabela 8.2 evidencia a influência do erro na coordenada de tempo físico sobre a saída, vetor de estado final. Nela percebe-se que quando este último diminui a um valor mínimo em E=500 graus, o erro na avaliação do vetor de estado também diminui.

Até o presente momento estudou-se o comportamento da coordenada de tempo físico quando obtida numericamente e sua influência na obtenção do vetor de estado no tempo físico final desejado. O estudo foi desenvolvido em órbita kepleriana tendo-se verificado a forte influência do erro na determinação do tempo físico sobre os erros na obtenção do vetor de estado, podendo ser dito que quanto maior o erro global da coordenada de tempo físico, maior será o erro obtido na determinação do vetor de estado, muito embora não seja a relação uma proporção.

O que precisa ainda ser verificado é se quando a órbita for perturbada, a coordenada de tempo teria a mesma tendência e influência sobre os erros na avaliação do vetor de estado. Para este fim, elaborou-se o último teste do presente capítulo, que consta da propa

gação com o conjunto sistema transformado-Runge-Kutta de oitava ordem com T/60 para tamanho de passo, na mesma órbita inicial do último teste, parando-se a integração nos mesmos pontos em anomalia excêntrica, $E=360$ graus e $E=500$ graus, correspondentes aproximadamente aos tempos físicos equivalentes a 64800 e 86020 segundos. Não mais considerou-se movimento kepleriano, mas perturbado com o segundo harmônico do geopotencial, estando os resultados dispostos na Tabela 8.3.

TABELA 8.3

ERROS EM POSIÇÃO E VELOCIDADE EM ÓRBITA PERTURBADA

EXC.	E = 360 (GRAUS)		E = 500 (GRAUS)	
	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$
0,6	791,13939	0,239896	287,69651	0,023399

Os resultados contidos na Tabela 8.3, deixam transparecer o fato de que a influência da coordenada de tempo físico na obtenção do vetor de estado final verificada para órbita não perturbada, também verificou-se em movimento perturbado, ou seja, as curvas do erro global absoluto da coordenada de tempo físico em movimento perturbado, se pudessem ser traçadas, teriam aproximadamente as mesmas formas das curvas em movimento não perturbado obtidas anteriormente.

8.3 - CONCLUSÕES

Como conclusões finais, tem-se a ressaltar o que de forma implícita já foi dito. O erro global da coordenada de tempo físico cresce com a excentricidade e com o tempo físico da propagação, comportamento verificado tanto em órbita kepleriana quanto em perturbada, já que as curvas do erro global da coordenada de tempo físico obtidas para movimento kepleriano, possuem aproximadamente as mesmas formas das curvas em movimento perturbado. Pode ser dito ainda e com base nas Tabe

las 8.1 e 8.3, que a maior parcela do erro obtido na avaliação do vetor de estado final em órbita perturbada, não é produto de deficiência da formulação, que promove um muito eficiente controle analítico do tamanho do passo de integração, mas sim da falta de precisão na obtenção da coordenada de tempo físico. Este fato permite que se faça uma sugestão para um futuro trabalho, que consistiria da construção de um estimador do erro global da coordenada de tempo físico, o que viria a possibilitar a utilização ótima das diferentes formulações.

TABELA 9.8

SISTEMA ESTABILIZADO, COM ELEMENTO DE TEMPO, PROPAGADO EM UM PRE
DITOR-CORRETOR DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	110,010521	0,010726	1,0
	T/40	110,718787	0,010794	1,0
	T/20	244,192269	0,020556	0,8
0,2	T/60	189,024997	0,023443	1,0
	T/40	189,880169	0,023548	1,0
	T/20	339,336102	0,039437	0,8
0,4	T/60	351,498785	0,062077	1,1
	T/40	352,582167	0,062264	1,0
	T/20	587,787257	0,101019	0,9
0,6	T/60	791,167122	0,239897	1,0
	T/40	791,349106	0,240266	1,0
	T/20	1212,82993	0,357372	1,0
0,8	T/60	1379,35675	0,991210	1,1
	T/40	1152,08741	0,872220	1,0
	T/20	3170,18423	2,579999	1,0

TABELA 9.7

SISTEMA TRANSFORMADO, COM ELEMENTO DE TEMPO, PROPAGADO EM UM PRE-
DITOR-CORRETOR DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	109,979202	0,010723	1,0
	T/40	109,892809	0,010711	0,9
	T/20	277,325424	0,014537	0,6
0,2	T/60	188,981888	0,023438	1,0
	T/40	188,792450	0,023412	0,9
	T/20	275,130782	0,024034	0,7
0,4	T/60	351,330382	0,062049	0,9
	T/40	351,007707	0,062000	0,7
	T/20	406,056615	0,064566	0,7
0,6	T/60	790,165206	0,239612	1,0
	T/40	799,370723	0,242720	1,0
	T/20	975,288174	0,282525	0,7
0,8	T/60	1464,04666	1,056181	1,2
	T/40	1071,07818	0,805138	1,0
	T/20	5982,69523	3,801632	1,0

TABELA 9.6

SISTEMA REGULARIZADO, COM ELEMENTO DE TEMPO, PROPAGADO EM UM
RUNGE-KUTTA DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	109,973396	0,010722	4,2
	T/40	109,981352	0,010723	2,9
	T/20	109,982183	0,010723	1,6
0,2	T/60	188,986372	0,023438	4,3
	T/40	188,989633	0,023439	2,9
	T/20	188,991043	0,023439	1,7
0,4	T/60	351,459020	0,062071	4,9
	T/40	351,471536	0,062073	2,9
	T/20	351,463946	0,062072	1,7
0,6	T/60	791,142891	0,239897	4,3
	T/40	791,148491	0,239899	4,3
	T/20	791,143442	0,239897	1,8
0,8	T/60	1357,50248	0,980647	4,3
	T/40	1357,49527	0,980641	3,1
	T/20	1357,55278	0,980677	2,0

TABELA 9.5

SISTEMA ESTABILIZADO, COM ELEMENTO DE TEMPO, PROPAGADO EM UM
RUNGE-KUTTA DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	109,973046	0,010722	3,8
	T/40	109,978788	0,010723	2,6
	T/20	109,977148	0,010723	1,5
0,2	T/60	188,985217	0,023438	3,7
	T/40	188,985684	0,023438	2,6
	T/20	188,990605	0,023439	1,5
0,4	T/60	351,460535	0,062071	3,8
	T/40	351,472398	0,062073	2,6
	T/20	351,461817	0,062071	1,5
0,6	T/60	1055,45177	0,320609	3,8
	T/40	1055,44475	0,320607	2,6
	T/20	1055,46207	0,320611	1,6
0,8	T/60	1357,50232	0,980646	3,9
	T/20	1357,50320	0,980648	2,7
	T/60	1357,00738	0,980502	1,8

TABELA 9.4

SISTEMA TRANSFORMADO, COM ELEMENTOS DE TEMPO, PROPAGADO EM UM
RUNGE-KUTTA DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	109,974555	0,010723	3,5
	T/40	109,970342	0,010722	2,0
	T/20	109,956119	0,010721	1,3
0,2	T/60	188,967299	0,023436	4,0
	T/40	188,986425	0,023438	2,5
	T/20	188,979398	0,023438	1,1
0,4	T/60	351,460235	0,062071	2,2
	T/40	351,468454	0,062073	2,1
	T/20	351,543240	0,062087	1,3
0,6	T/60	791,155256	0,239901	3,6
	T/40	791,155461	0,239901	2,5
	T/20	796,936008	0,241639	1,1
0,8	T/60	1357,57050	0,980696	4,0
	T/40	1358,37803	0,981284	2,7
	T/20	1835,92677	1,324431	1,3

TABELA 9.3

SISTEMA REGULARIZADO, COM ELEMENTO DE TEMPO, PROPACADO EM UM
RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	108,356019	0,010566	1,3
	T/40	101,245582	0,009877	0,9
	T/20	533,218643	0,051038	0,6
0,2	T/60	186,955341	0,023187	1,2
	T/40	178,291878	0,023187	0,9
	T/20	594,852322	0,073077	0,5
0,4	T/60	348,985459	0,061635	1,2
	T/40	338,558699	0,059797	0,9
	T/20	624,064817	0,109577	0,7
0,6	T/60	787,755812	0,238870	1,4
	T/40	773,314336	0,234498	1,0
	T/20	486,7399043	0,146841	0,6
0,8	T/60	1352,78015	0,977196	1,4
	T/40	1329,96718	0,960491	1,0
	T/20	516,828539	0,382749	0,6

TABELA 9.2

SISTEMA ESTABILIZADO, COM ELEMENTO DE TEMPO, PROPAGADO EM UM
RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

EXC.	PASSO	Δr (m)	$\Delta \dot{r}$ (m/s)	CPU
0,0	T/60	84,127232	0,008217	1,1
	T/40	533,13141	0,051043	0,7
	T/20	1659,3295	0,157769	0,5
0,2	T/60	155,37058	0,019426	1,1
	T/40	581,84867	0,071707	0,7
	T/20	2023,0426	0,023975	0,5
0,4	T/60	304,55233	0,054767	1,1
	T/40	564,08169	0,102401	0,7
	T/20	2453,2886	0,389647	0,5
0,6	T/60	708,54303	0,219363	1,0
	T/40	321,65627	0,124098	0,6
	T/20	3832,0349	0,959464	0,5
0,8	T/60	1337,6390	0,971283	1,2
	T/40	1247,8601	0,668761	0,8
	T/20	4473,8428	2,993391	0,6

TABELA 9.1

SISTEMA TRANSFORMADO, COM ELEMENTO DE TEMPO, PROPAGADO EM UM
RUNGE-KUITA DE QUARTA ORDEM

EXC.	PASSO	Δr (m)	$\Delta \dot{r}$ (m/s)	CPU
0,0	T/60	105,294670	0,010996	1,1
	T/40	136,553966	0,014955	0,7
	T/20	434,994960	0,077314	0,5
0,2	T/60	166,576467	0,021478	1,0
	T/40	149,845830	0,020386	0,8
	T/20	850,217385	0,059130	0,5
0,4	T/60	121,005854	0,022828	1,1
	T/40	467,863395	0,079275	0,8
	T/20	14457,8737	2,470213	0,5
0,6	T/60	1412,21680	0,421627	1,1
	T/40	7587,90417	2,281157	0,8
	T/20	137256,444	41,25958	0,5
0,8	T/60	31100,4147	22,60455	1,1
	T/40	141874,259	103,4373	0,8
	T/20	2165508,18	1640,373	0,6

$$T' = (1/2H) (u + (1/rH) \vec{r} \cdot \vec{r}' (\vec{P} \cdot \vec{r}') - r(\vec{r} \cdot (\partial V / \partial \vec{r} - \vec{P}) + 2V)) \quad (9.17)$$

sendo T o elemento de tempo segundo Stiefel.

Integrando-se uma primeira vez em relação ao tempo fictício a Equação 9.16, tem-se:

$$t + r'/2H = T \quad (9.18)$$

Ou ainda,

$$t = T - (1/2Hr) \vec{r} \vec{r}' \quad (9.19)$$

A Equação 9.19 relaciona o tempo físico com o elemento de tempo, que é obtido numericamente a partir da Equação 9.17, que deixa transparecer o fato de que se a órbita for kepleriana, o elemento de tempo será uma função linear do tempo fictício. No próximo tópico apresenta-se resultados de testes em órbita perturbada, utilizando-se as formulações com elemento de tempo.

9.2 - TESTES COMPUTACIONAIS E CONCLUSÕES

Os testes deste tópico foram efetuados sobre as mesmas órbitas iniciais dos testes anteriores, considerando-se movimento perturbado com o segundo harmônico do geopotencial. A coordenada generalizada do elemento de tempo é integrada numericamente, sendo seu valor inicial obtido a partir da Equação 9.19, ou seja:

$$T(0) = t(0) + (1/2H(0)r(0)) \vec{r}(0) \cdot \vec{r}'(0) \quad (9.20)$$

onde todas as variáveis do lado direito são conhecidas no tempo inicial, seja com a formulação transformado, estabilizado ou regularizado. As três formulações foram integradas com o elemento de tempo, utilizando-se os Runge-Kutta de quarta e oitava ordem e o preditor-corretor de oitava ordem, estando os resultados dispostos nas tabelas seguintes.

$$r'' + 2Ht' = u - r(\vec{r} \cdot (\partial V / \partial \vec{r} - \vec{P}) + 2V) \quad (9.11)$$

Adicionando-se a ambos os membros da Equação 9.11 o termo $-(r'H')/H$, tem-se:

$$r'' - r'H'/H + 2Ht' = u - r'H'/H + r(\vec{r} \cdot (\partial V / \partial \vec{r} - \vec{P}) + 2V) \quad (9.12)$$

Ou ainda,

$$t' + (1/2H)r'' - (1/2H^2)r'H' = (1/2H) \cdot (u - r'H'/H - 2rV - r\vec{r} \cdot (\partial V / \partial \vec{r} - \vec{P})) \quad (9.13)$$

A derivada da equação da energia total em relação ao tempo fictício foi obtido no Capítulo 4 e possui a forma:

$$H' = -\vec{P} \cdot \vec{r}' \quad (9.14)$$

onde considerou-se o potencial V idenpendente explicitamente do tempo físico ou fictício.

Substituindo-se a Equação 9.14 na 9.12 tem-se a equação:

$$t' + (1/2H)r'' - (1/2H^2)r'H' = (1/2H) \cdot (u + (1/rH)\vec{r} \cdot \vec{r}'(\vec{P} \cdot \vec{r}') - 2rV - r\vec{r} \cdot (\partial V / \partial \vec{r} - \vec{P})) \quad (9.15)$$

Assume-se então que o lado direito da Equação 9.15 é a derivada do elemento de tempo em relação ao tempo fictício, ou seja:

$$t' + (1/2H)r'' - (1/2H^2)r'H' = T' \quad (9.16)$$

onde

substituição ao tempo físico, que se relacionará com esta. A equação diferencial em tempo físico do movimento perturbado possui a forma:

$$\ddot{\vec{r}} = -u/r^3 \vec{r} - \partial V / \partial \vec{r} + \vec{P} \quad (9.2)$$

O elemento proposto por Stiefel (Stiefel e Sheifele, 1971) e citado por Baungarte (Baungarte, 1971), utiliza a equação da energia do movimento,

$$(1/2) |\dot{\vec{r}}|^2 - u/r + V + H = 0 \quad (9.3)$$

onde u é a constante de gravitação terrestre, V o potencial perturbador e H o negativo da energia total. Derivando-se duas vezes com relação ao tempo físico o termo $(1/2)\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$ tem-se:

$$d^2/dt^2((1/2)\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + |\dot{\vec{r}}|^2 \quad (9.4)$$

Substituindo-se as Equações 9.3 e 9.2 na 9.4 tem-se:

$$d^2/dt^2((1/2)\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = u/r - \dot{\vec{r}} \cdot (\partial V / \partial \vec{r} - \vec{P}) - 2(V+H) \quad (9.5)$$

Considerando-se o operador transformação de tempo:

$$d/dt = (1/r)d/ds, \quad (9.6)$$

pode-se obter a relação:

$$d^2/dt^2((1/2)\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = d/dt(r \cdot \dot{\vec{r}}) = (1/r) \cdot r'' \quad (9.7)$$

A Equação 9.5 pode ser escrita então na forma:

$$r'' + 2Hr = u - r(\dot{\vec{r}} \cdot (\partial V / \partial \vec{r} - \vec{P}) + 2V) \quad (9.10)$$

Considerando-se a Equação 9.1, a 9.10 torna-se:

CAPÍTULO 9

ELEMENTOS DE TEMPO

No capítulo anterior, ficou comprovada a forte influência do erro na determinação numérica da coordenada de tempo físico, sobre os erros na avaliação do vetor de estado. Neste capítulo, estuda-se os chamados elementos de tempo, que foram desenvolvidos com o intuito de diminuir os erros na avaliação da coordenada de tempo físico, diminuindo conseqüentemente o erro na obtenção do vetor de estado final. Pode ser dito que o elemento de tempo é um substituto da coordenada de tempo físico nos sistemas de equações diferenciais transformado, estabilizado ou regularizado, passando a ser ele próprio uma coordenada generalizada com a qual obtém-se o tempo físico com maior precisão. Diversos tipos de elementos de tempo têm surgido recentemente, como os apresentados pelos autores: Baungarte, 1972; Janin e Bond, 1981; Kwok e Nacozy, 1981; Stiefel e Sheifele, 1971; Zare, 1983. Não se pode, no momento, afirmar qual é o que melhor se adapta ao problema real de satélites artificiais terrestres e no presente capítulo, estuda-se o elemento de tempo proposto por Stiefel e Sheifele, que também foi apresentado por Baungarte, sendo talvez a mais conhecida e difundida formulação do tipo.

9.1 - O ELEMENTO DE TEMPO

A transformação do tipo Sundman de tempo na versão da anomalia excêntrica, permite que se obtenha o tempo físico em função do fictício através da seguinte equação diferencial:

$$t' = r \quad (9.1)$$

onde ' significa derivada com relação ao tempo fictício e r é o módulo do vetor posição. Após a introdução do elemento de tempo, a equação diferencial com a qual se obterá o tempo físico será a equação do elemento de tempo, que passará a ser a coordenada generalizada do sistema em

TABELA 9.9

SISTEMA REGULARIZADO, COM ELEMENTO DE TEMPO, PROPAGADO EM UM PRE
DITOR-CORRETOR DE OITAVA ORDEM

EXC.	PASSO	$\Delta r(m)$	$\Delta \dot{r}(m/s)$	CPU
0,0	T/60	109,973707	0,010723	1,1
	T/40	109,977554	0,010723	1,0
	T/20	110,698136	0,010788	0,8
0,2	T/60	188,991857	0,023439	1,0
	T/40	188,988506	0,023438	1,0
	T/20	189,749808	0,023587	0,8
0,4	T/60	351,456313	0,062070	1,1
	T/40	351,546151	0,062082	1,0
	T/20	349,232780	0,062324	0,9
0,6	T/60	791,216948	0,239910	1,1
	T/40	791,215756	0,239950	1,1
	T/20	799,733662	0,245481	0,8
0,8	T/60	1371,46606	0,987489	1,3
	T/40	1239,09845	0,915794	1,1
	T/20	1563,08036	1,293385	1,1

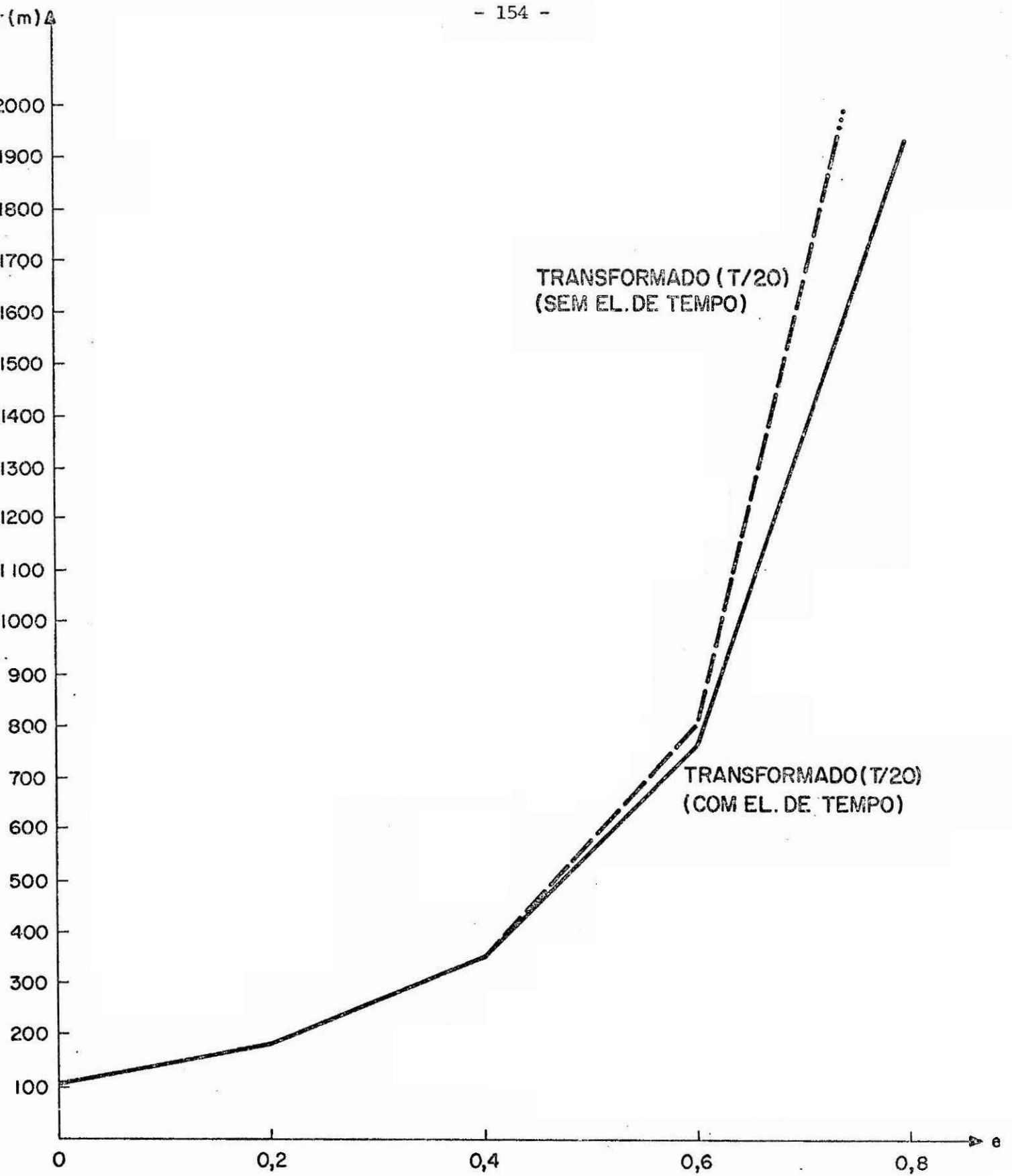


Fig. 9.1 - Sistemas transformado, com e sem elemento de tempo, propagados em um Runge-Kutta de oitava ordem e com $T/20$ para tamanho do passo.

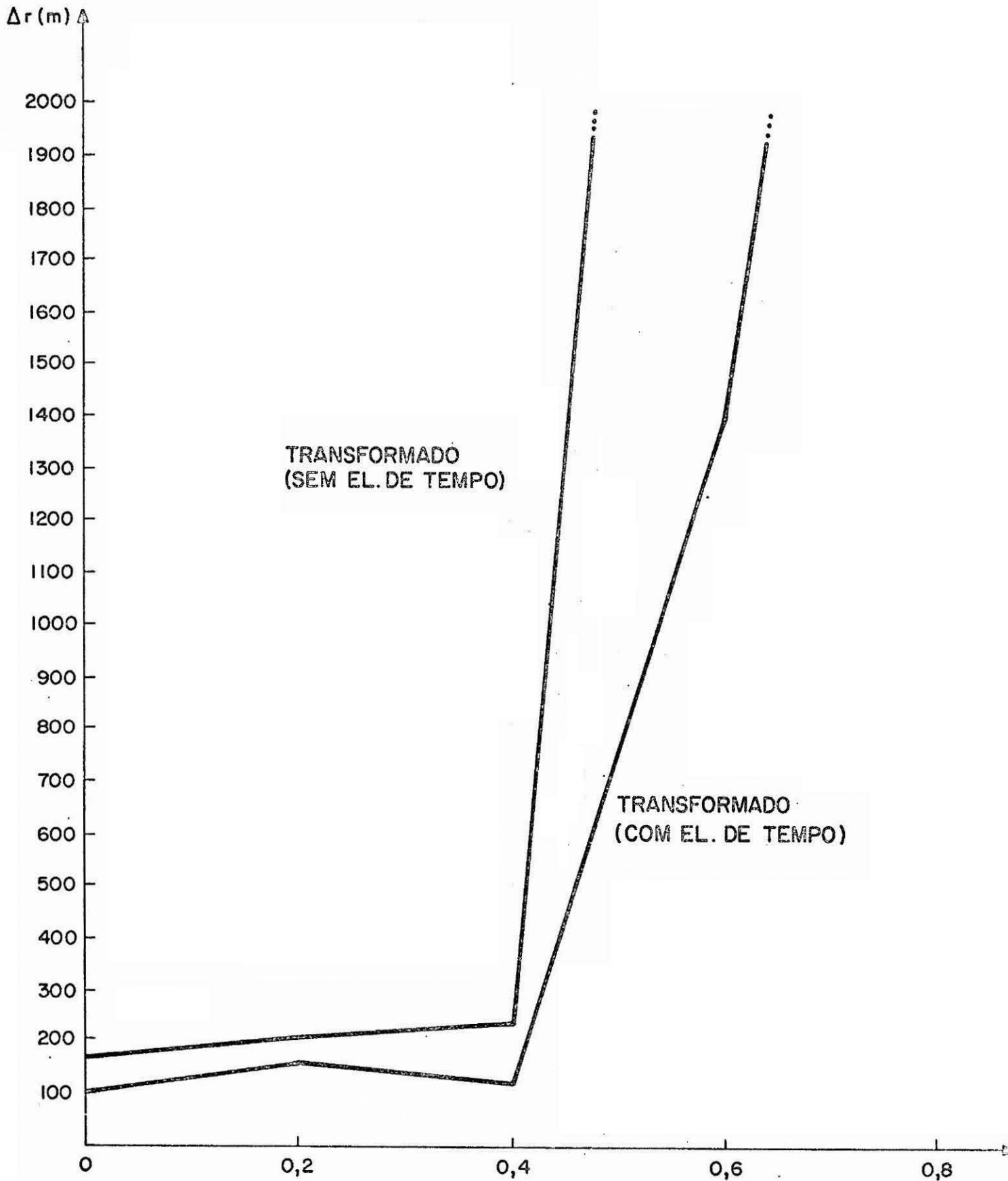


Fig. 9.2 - Sistemas transformado, com e sem elemento de tempo, propagados em um Runge-Kutta de quarta ordem e com $T/60$ para tamanho do passo.

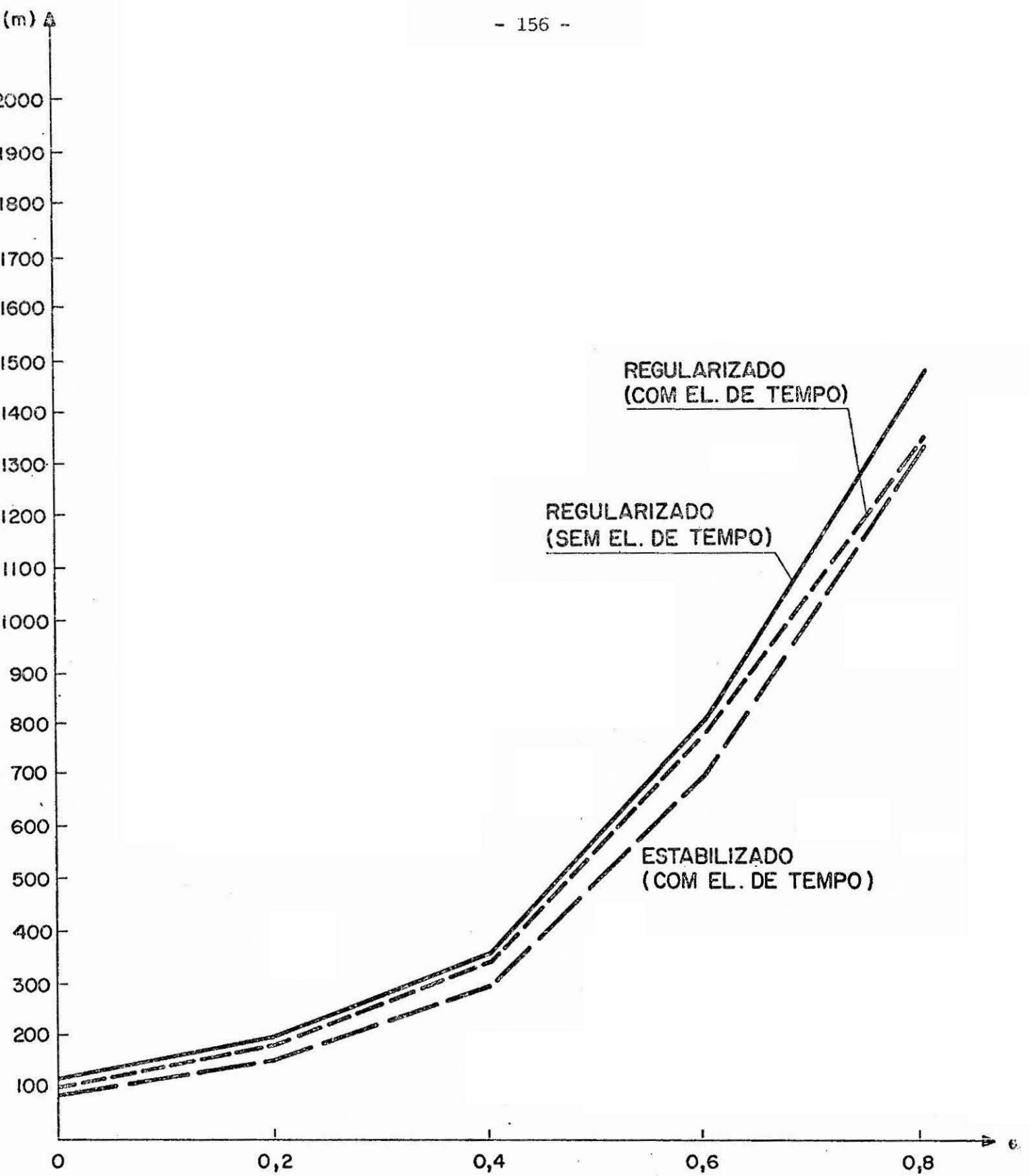


Fig. 9.3 - Sistemas regularizado sem elemento de tempo, regularizado com elemento de tempo e estabilizado com elemento de tempo, propagados em um Runge-Kutta de quarta ordem e com $T/60$ para tamanho do passo.

As conclusões seguintes são fruto da análise das nove tabelas e três gráficos, resultados dos testes computacionais do presente capítulo. As tabelas construídas neste capítulo foram confrontadas com as do Capítulo 6, nas quais encontram-se dispostos os resultados obtidos com as formulações sem o uso do elemento de tempo.

Inicialmente pode ser dito que quase não há ganho em precisão quando utiliza-se alguma formulação com elemento de tempo em conjunto com integradores de mais alta ordem, oitava por exemplo, embora possa haver outros tipos de elementos de tempo que apresentem ganhos em precisão com tais integradores, o que pode vir a ser confirmado em trabalhos futuros. O que verificou-se no presente trabalho é que as numerosas avaliações das derivadas em integradores de mais alta ordem, em especial o Runge-Kutta de oitava ordem, promovem melhoramentos em termos de precisão, elevando o nível do resultado ao término da propagação, tornando assim menos perceptível o efeito benéfico do elemento de tempo sobre a avaliação mais precisa da coordenada de tempo físico. Quando há algum ganho com o uso do elemento de tempo em integradores de oitava ordem, este ocorre geralmente com o tamanho de passo $T/20$ e em altas excentricidades, conforme pode ser verificado analisando-se a Figura 9.1, na qual contém a informação de que o sistema transformado com elemento de tempo em conjunto com o Runge-Kutta de oitava ordem, apresentou melhores resultados em termos de precisão do que a mesma formulação sem elemento de tempo e com o mesmo integrador, ambos com $T/20$ para tamanho de passo.

Quando utiliza-se alguma formulação com o elemento de tempo em integradores de mais baixa ordem, quarta por exemplo, obtém-se um mais perceptível ganho em precisão em comparação com as mesmas formulações sem o uso do elemento de tempo também com integradores de quarta ordem, conforme pode ser verificado a partir das Tabelas 9.1 a 9.3, comparadas com suas respectivas do Capítulo 6. As Figuras 9.2 e 9.3 auxiliam a visualização de tal efeito. A Figura 9.2 contém os erros em posição em função da excentricidade, obtidos com os sistemas transformado

com e sem elemento de tempo, propagados com o Runge-Kutta de quarta ordem e com $T/60$ para tamanho do passo. Nela vê-se que o sistema transformado e com elemento de tempo possui melhor comportamento em termos de precisão do que o apenas transformado. A Figura 9.3 contém os sistemas regularizado com e sem elemento de tempo e o estabilizado com elemento de tempo, todos propagados com o Runge-Kutta de quarta ordem e com $T/60$ para tamanho do passo. Da sua análise percebe-se que o sistema estabilizado mostrou-se ligeiramente superior ao regularizado, ambos com o elemento de tempo. Estes últimos apresentaram resultados melhores do que os obtidos com o sistema regularizado sem o elemento de tempo em conjunto com o Runge-Kutta de quarta ordem, que dentre os conjuntos sem elemento de tempo com tal integrador, foi o que melhores resultados apresentou.

Como conclusões finais, pode ser dito inicialmente que o elemento de tempo torna consistente a utilização de métodos de quarta ordem em problemas reais de satélites artificiais terrestres, ou seja, os resultados obtidos com tais integradores são compatíveis aos obtidos em integradores de oitava ordem sem o uso do elemento de tempo, chegando até a superá-los em alguns casos. Portanto, aconselha-se só utilizar integradores de quarta ordem se as formulações contiverem o elemento de tempo. As formulações utilizadas em conjunto com o Runge-Kutta de quarta ordem e com o elemento de tempo, mostraram-se sensíveis à variação do tamanho do passo. À medida em que se amplia o passo de forma gradativa entre $T/60$ e $T/20$, obtém-se variações nos erros verificados na avaliação do vetor de estado. Pode-se encontrar erros menores do que os obtidos com $T/60$, mas isto é casual, dependendo inclusive da órbita inicial. Caso trabalhe-se com uma missão espacial cuja órbita é conhecida e bem definida, pode-se utilizar a estrutura de testes desenvolvida e determinar assim o tamanho ótimo do passo, que valeria por um relativamente longo tempo até que sofresse alguma alteração. Caso deseje-se uma utilização mais rápida, aconselha-se o uso do $T/60$ sempre que se fizer uso de integradores de quarta ordem em conjunto com as formulações transformado, estabilizado e regularizado, todas com o elemento de tempo, apenas com a ressalva que para elevadas excentricidades, é desaconselhável a

utilização do sistema apenas transformado. Viu-se no Capítulo 8, que o erro na avaliação da coordenada de tempo físico influi de forma significativa na existência dos erros em posição e velocidade. O elemento de tempo desenvolvido por Stiefel-Sheifele e apresentado também por Boun garte, determina de forma mais precisa a coordenada de tempo físico, principalmente quando utilizado em integradores de quarta ordem, sendo esta a razão do ganho em precisão na avaliação do vetor de estado final, ganho este ressaltado pelas Figuras 9.1, 9.2 e 9.3.



CAPÍTULO 10

CONCLUSÕES

Nos últimos oito capítulos deste trabalho, estudou-se diferentes formas de se escrever as equações diferenciais do movimento orbital, bem como os efeitos de tais formulações sobre os parâmetros físicos da órbita. Habitua-se a medir os acontecimentos em intervalos de uma grandeza padrão, o tempo físico, assim como a se observar o universo pela óptica dos sentidos tridimensionais. Contrariando tais convenções, Sundman propôs um novo tempo para o desenvolvimento do sistema dinâmico do movimento orbital e o Kustaanheimo idealizou uma quarta dimensão. Tais fatos deixam a certeza de que o sistema propagado não tem vínculo com a realidade física, possuindo entretanto janelas de comunicações através das entradas e saídas do mesmo, nas primeiras foge-se a realidade, e nas segundas volta-se a esta. Este capítulo destina-se a formulação de conclusões finais sobre tudo o que foi estudado, numa tentativa de sintetizar na forma mais clara possível, todos os resultados oriundos dos testes computacionais efetuados no presente trabalho de dissertação.

10.1 - CONCLUSÕES GERAIS

O estudo teórico das diferentes formulações bem como os diversos testes computacionais efetuados, permitem que sejam dispostas conclusões de âmbito geral sobre tudo o que foi apresentado.

Inicialmente ressalta-se o fato de que cada formulação com algum integrador, forma um conjunto dinâmico que não deve ser dissociado para efeito de análise de resultados. Isto significa dizer que uma formulação que apresentou melhores resultados do que outra em um determinado integrador, pode apresentar resultado adverso em um outro integrador, ou seja, a eficiência do conjunto formulação e integrador é que deve ser julgada.

A transformação do tipo Sundman de tempo na versão da anomalia excêntrica promove um controle analítico, em tempo físico, do passo de integração, promovendo consequentemente uma redistribuição mais equitativa dos comprimentos de arco ao longo de uma revolução.

Podem existir outras transformações de tempo que melhor se adaptem ao problema real de satélites artificiais, que promovam uma distribuição de forma um pouco mais equitativa dos comprimentos de arco ao longo de uma revolução. No Capítulo 7 foi proposta uma transformação cujos resultados obtidos com o preditor-corretor de oitava ordem se mostraram superiores aos obtidos com a transformação do tipo Sundman de tempo na versão da anomalia excêntrica. Evidentemente não se falará de forma definitiva sobre a transformação proposta, visto a mesma ter sido criada recentemente, precisando-se de maturidade em testes computacionais a fim de se garantir uma última palavra.

A estabilização sugerida por Baungarte é feita sobre o sistema de equações diferenciais do movimento não perturbado. Como a mais influente parcela de termos da equação matemática do movimento perturbado é justamente a parcela estabilizada do movimento kepleriano, o efeito da estabilização faz-se presente também em movimento perturbado.

A regularização proposta por Stiefel e Sheifele torna regular o movimento kepleriano, ou seja, elimina por completo a singularidade do sistema de equações em tempo físico. Ela também estabiliza o movimento kepleriano, transformando-o em um oscilador harmônico simples de frequência constante, fazendo-o ao custo da introdução de mais uma dimensão ao movimento anteriormente tridimensional.

As formulações transformado, estabilizado e regularizado, utilizam como coordenada independente o tempo fictício oriundo da transformação do tipo Sundman na versão da anomalia excêntrica. Significa dizer que a estabilização, bem como a regularização são feitas sobre o sistema transformado.

A necessidade de se obter o vetor de estado em um tempo físico qualquer, obriga a integração da equação base da transformação de tempo, que para movimento perturbado só tem solução numérica. O tempo físico é então avaliado com um certo erro numérico embutido e este contribui de forma significativa na obtenção dos erros em posição e velocidade no tempo físico final.

O uso do elemento de tempo introduz melhoramentos em termos de precisão na avaliação da coordenada de tempo físico, sendo que seu efeito é mais perceptível quando propagações são efetuadas em integradores de mais baixa ordem, quarta por exemplo.

Deve ser ressaltado que embora os testes computacionais efetuados tenham sido feito sobre uma órbita padrão exceto quanto a excentricidade, a tendência de resultados apresentados nas tabelas e gráficos deste trabalho manter-se-ia caso a propagação se verificasse em uma órbita padrão diferente, embora pudessem ocorrer deslocamentos para mais ou para menos nas dimensões dos erros obtidos, deslocamentos estes relacionados principalmente ao semi-eixo orbital, ou seja, um semi-eixo menor implicaria em erros proporcionalmente menores de uma forma geral.

Segundo conclusões quanto ao erro global da coordenada de tempo físico obtidas no Capítulo 8, a região do perigeu é uma região crítica para se obter a saída do sistema ao término da propagação, pois é nela que estão localizados os pontos de máximo da curva de erro global. Esta região foi precisamente a escolhida para compor todos os testes deste trabalho, o que significa dizer que trabalhou-se com a pior das possíveis situações quanto ao término da propagação.

Finalizando-se este tópico, pode ser dito que as formulações apresentadas mostraram-se, de uma forma geral, superiores à formulação em tempo físico e ainda, quase não oneram em tempo de processamento, viabilizando assim suas utilizações em problemas reais de satélites artificiais.

10.2 - CONCLUSÕES QUANTO AO CUSTO E PRECISÃO DE RESULTADOS

Neste tópico, todos os conjuntos dinâmicos (integrador mais formulação empregada) são relacionados entre si quanto a precisão de resultados e quanto ao custo do processamento. As tabelas e os gráficos foram confrontados sucintamente e chegou-se a conclusões quanto a eficiência dos diversos conjuntos. Com o objetivo de se fazer uma síntese global, quatro tabelas contendo critérios que julgam a eficiência de cada conjunto foram criadas, correspondentes a quatro intervalos bem definidos de excentricidade. Adotou-se os seguintes símbolos representativos para o julgamento quanto a precisão de resultados:

(*** = ÓTIMO)
(** = BOM)
(* = REGULAR)
(- = INSUFICIENTE)

E quanto a eficiência em tempo de processamento:

(A = ÓTIMO)
(B = BOM)
(C = REGULAR)

As tabelas contém outros símbolos que são definidos a seguir:

CRIT = CRITÉRIO
PREC = PRECISÃO NA OBTENÇÃO DO VETOR DE ESTADO
CPU = CUSTO DE PROCESSAMENTO
C/ET = COM ELEMENTO DE TEMPO
S/ET = SEM ELEMENTO DE TEMPO
TF = SISTEMA EM TEMPO FÍSICO
RK4 = RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM
RK8 = RUNGE-KUTTA DE OITAVA ORDEM
PC8 = PREDITOR-CORRETOR DE OITAVA ORDEM

Além dos intervalos de excentricidade, as tabelas consideram também os diferentes tamanhos de passo $T/60$, $T/40$ e $T/20$ na avaliação da eficiência dos diversos conjuntos, sendo que considerou-se os testes com movimento perturbado devido ao segundo harmônico do geopotencial para a composição das tabelas, que são apresentadas a seguir.

TABELA 10.1

EFICIÊNCIA DOS DIFERENTES CONJUNTOS PARA
EXCENRICIDADES NO INTERVALO $[0, 0,2[$

INTEG.	PASSO	CRIT	TF	TRANSF.		ESTAB.		REGUL.	
				C/ET	S/ET	C/ET	S/ET	C/ET	S/ET
RK4	T/60	PREC	-	***	*	***	**	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/40	PREC	-	**	-	-	*	***	**
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/20	PREC	-	-	-	-	-	-	-
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
RK8	T/60	PREC	-	***	***	***	***	***	***
		CPU	B	C	B	C	C	C	C
	T/40	PREC	-	***	***	***	***	***	***
		CPU	A	B	B	B	B	C	C
	T/20	PREC	-	***	***	***	***	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	B	B
PC8	T/60	PREC	***	***	***	***	***	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/40	PREC	-	***	**	***	***	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/20	PREC	-	*	*	*	***	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A

TABELA 10.2

EFICIÊNCIA DOS DIFERENTES CONJUNTOS PARA
EXCENTRICIDADES NO INTERVALO [0,2 , 0,4[

INTEG.	PASSO	CRIT	TF	TRANSF.		ESTAB.		REGUL.	
				C/ET	S/ET	C/ET	S/ET	C/ET	S/ET
RK4	T/60	PREC	-	***	*	**	**	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/40	PREC	-	**	*	-	*	***	**
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/20	PREC	-	-	-	-	-	-	*
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
RK8	T/60	PREC	-	***	***	***	***	***	***
		CPU	B	C	B	C	C	C	C
	T/40	PREC	-	***	***	***	***	***	***
		CPU	A	B	B	C	C	C	C
	T/20	PREC	-	***	***	***	***	***	***
		CPU	A	A	A	B	B	B	B
PC8	T/60	PREC	-	***	***	***	***	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/40	PREC	-	***	***	***	***	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/20	PREC	-	*	***	*	***	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A

TABELA 10.3

EFICIÊNCIA DOS DIFERENTES CONJUNTOS PARA
EXCENRICIDADES NO INTERVALO $[0,4 \text{ , } 0,6]$

INTEG.	PASSO	CRIT	TF	TRANSF.		ESTAB.		REGUL.	
				C/ET	S/ET	C/ET	S/ET	C/ET	S/ET
RK4	T/60	PREC	-	*	-	***	***	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/40	PREC	-	-	-	**	*	***	**
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/20	PREC	-	-	-	-	-	***	*
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
RK8	T/60	PREC	-	***	***	**	***	***	***
		CPU	B	C	B	C	C	C	C
	T/40	PREC	-	***	***	**	***	***	***
		CPU	A	B	B	C	C	C	C
	T/20	PREC	-	***	***	**	***	***	***
		CPU	A	A	A	B	B	B	B
PC8	T/60	PREC	-	***	***	***	***	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/40	PREC	-	***	***	***	***	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/20	PREC	-	**	***	*	***	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A

TABELA 10.4

EFICIÊNCIA DOS DIFERENTES CONJUNTOS PARA
EXCÊNTRICIDADES NO INTERVALO [0,6 , 0,8 [

INTEG.	PASSO	CRIT	TF	TRANSF.		ESTAB.		REGUL.	
				C/ET	S/ET	C/ET	S/ET	C/ET	S/ET
RK4	T/60	PREC	-	-	-	***	-	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/40	PREC	-	-	-	***	-	***	**
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/20	PREC	-	-	-	-	-	***	*
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
RK8	T/60	PREC	-	***	***	**	***	***	***
		CPU	B	C	B	C	C	C	C
	T/40	PREC	-	***	***	**	***	***	***
		CPU	A	B	B	C	C	C	C
	T/20	PREC	-	**	*	**	***	***	***
		CPU	A	A	A	B	B	B	C
PC8	T/60	PREC	-	***	***	***	***	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/40	PREC	-	***	***	***	***	***	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A
	T/20	PREC	-	-	*	*	***	**	***
		CPU	A	A	A	A	A	A	A

As tabelas apresentadas neste tópico já são conclusivas e dispensam maiores comentários, devendo-se observar no entanto, que o critério de eficiência precisão é absoluto em cada intervalo de excentricidade, sendo relativo no geral, ou seja, a precisão ótima para a excentricidade 0,8 é insuficiente para a excentricidade nula. Já o critério de tempo de processamento é sempre absoluto, independentemente da excentricidade.

As quatro últimas tabelas permitem que se monte uma última tabela, que dará uma idéia global da eficiência de cada formulação. Nos testes deste trabalho, cada formulação foi propagada em três integradores e em cada integrador com três diferentes tamanhos de passo. Sendo quatro os intervalos de excentricidades contidos nas últimas tabelas, significa dizer que são trinta e seis resultados apresentados para cada formulação. Contou-se quantos foram os resultados para cada formulação, que apresentaram precisão ótima e tempo de processamento ótimo, estando os dados dispostos na tabela seguinte.

TABELA 10.5

QUANTIDADE DE RESULTADOS ÓTIMOS DAS DIFERENTES FORMULAÇÕES, EXTRAÍDOS DE UM TOTAL DE TRINTA E SEIS RESULTADOS APRESENTADOS

FORMULAÇÃO	RES. ÓTIMOS	% TOTAL
TF	1	2,77
TRANSF.	12	33,33
TRANSF. C/ET	13	36,11
ESTAB.	14	38,88
ESTAB. C/ET	14	38,88
REGUL.	17	47,22
REGUL. C/ET	21	58,33

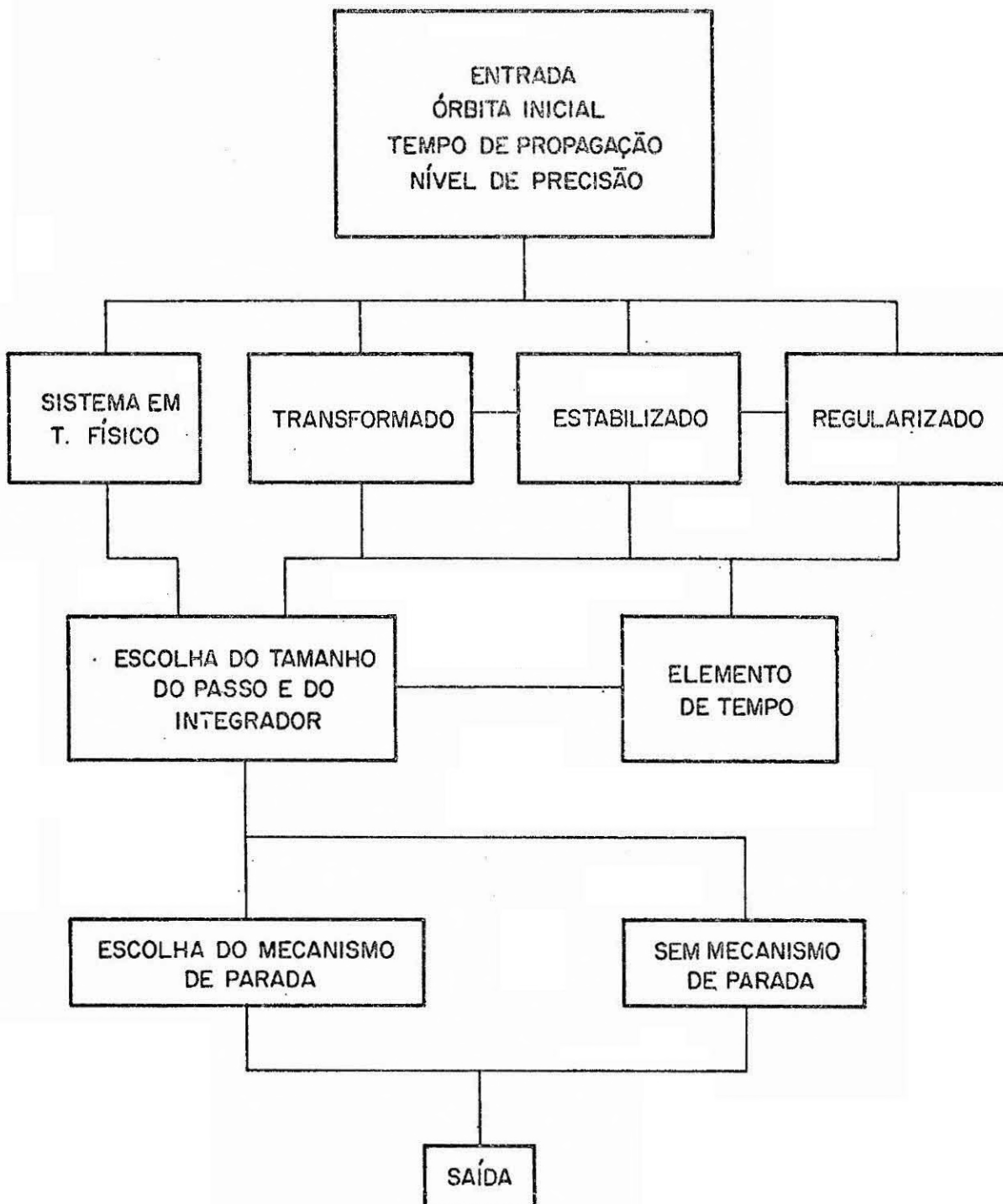
Percebe-se que a formulação regularizado com elemento de tempo foi a mais eficiente dentre as sete formulações pesquisadas neste trabalho, apresentando um rendimento ótimo de 58,33%.

10.3 - SUGESTÃO PARA FUTURAS APLICAÇÕES

As Tabelas 10.1 a 10.4 fornecem dados para a tomada de decisão em um possível "software" para propagação numérica de órbita. Este "software" teria um sistema de gerenciamento que seria autônomo para tomar decisões, tais como as escolhas da formulação, do integrador, do tamanho do passo e do mecanismo de parada no tempo físico final, tudo em função da órbita inicial, do tempo de propagação e de um nível de precisão desejável, que seriam os dados de entrada no sistema de gerenciamento. Um fluxograma simplificado é apresentado a seguir.

Os níveis de precisão seriam três, sendo representados por caracteres que os identificassem como níveis regular, bom e ótimo. Minimizar o tempo de processamento seria tarefa do gerenciador do "software". Os sistemas transformado, estabilizado e regularizado teriam as opções com e sem elemento de tempo, as escolhas do integrador e do tamanho do passo e a escolha do mecanismo de parada, que poderia inclusive ter um estimador do erro da coordenada de tempo físico ao término da propagação.

Nunca tem-se acesso a realidade plena de um fenômeno físico. Seja na previsão ou na observação, distorções ocorrem que a inibem parcialmente. Este trabalho tenta dar uma contribuição, ainda que pequena, para a ampliação do contato com a realidade física em uma propagação orbital, sendo que cada capítulo pode ser estudado de forma mais aprofunda no futuro, caracterizando assim possíveis continuações em trabalhos afins.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATE, R.R.; MUELER, D.D.; WHITE, J.F. Fundamentals of Astrodynamics. New York, N.Y., Dover, 1971.
- BAUMGARTE, J. Numerical Stabilization of Differential Equations of Keplerian Motion. Celestial Mechanics, 5(4):490-501, July 1972.
- BOND, V.R. A transformation of Two-Body Problem. Celestial Mechanics, 35(1):1-7, Jan. 1985.
- BROWER, D.; CLEMENCE, G.M. Methods of Celestial Mechanics. New York, N.Y., Academic, 1961.
- ESCOBAL, P.R. Methods of Orbit Determination. New York, N.Y., John Wiley, 1965.
- FERRER, S.; SEIN-ECHALUCE, M.E. Generalized Sundman's Transformation for the Perturbed Two-Body Problem. Celestial Mechanics, 32(4): 333-347, Apr. 1984.
- FERRONSKY, V.I.; DENISIK, S.A.; FERRONSKY, S.V. The Liapunov Stability of Motion. Celestial Mechanics, 35(1):23-43, Jan. 1985.
- HEINSKANEN, W.A.; MEINESZ, F.A.V. The Earth and Its Gravity Field. New York, N.Y., McGraw-Hill, 1958.
- HEINSKANEN, W.A.; MORITZ, H. Physical Geodesy. San Francisco, C.A., W.A. Freeman, 1967.
- HENRICI, P. Discrete Variables methods in Ordinary Differential Equations. New York, John Wiley, 1962.
- JANIN, G. Accurate Computation of Highly Eccentric Satellite Orbits. Celestial Mechanics, 10:451-467, 1974.
- JANIN, G.; BOND, V.R. A General Time Element for Orbit Integration in Cartesian Coordinates. Advances Space Research, 1:69-78, 1981.
- KAPLAN, M.H. Modern Spacecraft Dynamics and Control. New York, N.Y., John Wiley, 1976.
- KAULA, W.M. Theory of Satellite Geodesy. Blaisdell, 1966.

- KUGA, H.K.; SILVA, W.C.C. Gerador Numérico de Órbitas de Satélites Artificiais Terrestres. São José dos Campos, INPE, 1984. (INPE-3050-RPE/455).
- KUSTANHEIRO, P. Spinor Regularization of the Kepler Motion. Ann. Univ. Turkn., Ser. AI, 73, 1964).
- LALA, P. Perturbation of the Satellite Orbit Due to Solar Radiation Pressure. NASA, National Geodetic Satellite Program, Washington, 1977.
- LAMBERT, P. Computational Methods in Ordinary Differential Equation. New York, John Wiley, 1979.
- LAPIDUS, I.; SEINFELD, J.H. Numerical Solution of Ordinary Differential Equations. London, Academic, 1971.
- LAUTMAN, D.A. Perturbations of a Close-Earth Satellite Due to Sun Light Diffusely Reflected from the Earth. Celestial Mechanics, 15(4):387-420, Aug. 1977.
- NACOZY, P.E. A Discussion of Time Transformation and Local Truncation Errors. Celestial Mechanics, 13(4):495-501, 1976b.
- _____. The intermediate Anomaly. Celestial Mechanics, 16(2):309-314, Nov. 1977.
- _____. Time Element in Keplerian Orbital Elements. Celestial Mechanics, 23(2):173-198, Feb. 1981.
- _____. Time Elements. In: COSPAR-IAU-IUTAM. Satellite Dynamics, Symposium Held in São Paulo, June 19-21, 1974. Proceedings. New York, Springer-Verlag, 1975, p. 16-26.
- SHAMPINE, L.F.; GORDON, M.K. Computer Solution of Ordinary Differential Equations. San Francisco, C.A., W.H. Freeman, 1975.
- SILVA, W.C.C.; FERREIRA, L.D.D. Satélite Artificial - Movimento Orbital. São José dos Campos, INPE, 1984. (INPE-3163-RPE/458).
- STIEFEL, E.L.; SHEIFELE, G. Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin, Springer-Verlag, 1971.

- STOKS, A. General Time Elements for the Two-Body Problem. Celestial Mechanics, 17(2):137-144, Feb. 1978.
- VELEZ, C.E. Notions of Analitic Vs Numerical Stability as Aplied to the Numerical Calculation of Orbits. Celestial Mechanics, 10:405-422, 1974.
- _____. Stabilization and Real World Satellite Problem. New York, Springer-Verlag, 1975, p. 136-153.
- VELEZ, C.E.; HILINSK, S. The Transformation and Cowell's Method. Celestial Mechanics, 17(1):83-99, Jan. 1978.
- VELTE, W. Concerning the Regularizing KS-Transformation. Celestial Mechanics, 17(4):395-404, May 1978.
- ZARE, K. Time Element for General Anomaly. The Journal of Astronautical Sciences, 31(4):561-567, Oct./Dec. 1983.

