



Sistemas Dinâmicos Não-Autônomos e Aplicações Ambientais

Felipe Hikari Kawahama

Orientadores

Leonardo Bacelar Lima Santos

Elbert Einstein Nehrer Macau

São José dos Campos

2018

Resumo

O objetivo central desse projeto é modelar e analisar um processo de propagação de informação, com um estudo em epidemiologia, em escala local, a partir de sistemas de equações diferenciais não-lineares, acopladas e não-autônomas utilizando parâmetros que variam no tempo conforme dados hidrometeorológicos fornecidos pelo Centro Nacional de Monitoramento e Alertas de Desastres Naturais (CEMADEN). Os primeiros passos da pesquisa trataram da análise de estabilidade e bifurcações de modelos epidemiológicos simplificados. A segunda parte foi constituída no desenvolvimento de um modelo próprio, diferentes simulações variando os parâmetros e suas respectivas análises. Este projeto é desenvolvido com apoio de uma bolsa de Iniciação Científica pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE).

Introdução

Os anos de 2017 e 2018 configuram o Biênio da Matemática no Brasil, por isso, nesse período tão importante para a Matemática, é de suma importância, promover projetos na área que tenham uma grande relevância no âmbito científico, tecnológico e social.

Dessa maneira, analisando a atual conjuntura do mundo globalizado atualmente, podemos concluir que, dentre os muitos problemas em pauta, um dos mais discutidos é a questão da saúde. Mais especificamente, os riscos e consequências que uma epidemia iria causar. Levando em consideração, o constante fluxo de informação e pessoas ao redor do globo, uma doença infecciosa e transmissível pode rapidamente se espalhar a nível mundial em muito pouco tempo, gerando assim, um surto epidêmico. Exemplos de crises epidêmicas não faltam na história recente da humanidade: a peste bubônica, também conhecida como peste negra, que assolou o continente europeu durante o século XIV, dizimando cerca de um terço da população europeia da época; mais recentemente, a gripe

suína e o vírus ebola provocaram uma comoção no mundo inteiro, esse último atingindo majoritariamente, o continente africano entre 2013 e 2016 e causando mais de 11.000 mortes, segundo a OMS. Mais especificamente, no Brasil, o Zika vírus, notificado em território nacional pela primeira vez em 2015, trouxe consigo efeitos desastrosos para muitas famílias, causando complicações na gravidez que culminava na má formação do feto.

Outro problema, que a princípio não tem muita relação com contágios e epidemias, é o problema de escoamento de água nos grandes centros urbanos. O Brasil é um país com altos índices pluviométricos nas regiões Sul e Sudeste, onde estão concentrados esses grandes centros, assim, para onde vai esse excesso de água, é uma questão muito delicada. Um escoamento ineficiente pode gerar enchentes, prejudicando milhares de pessoas. Segundo o IBGE (2014), enchentes deixaram cerca de 1,4 milhão de desabrigados entre 2008 e 2012 Além disso, pode agravar problemas ambientais, causando deslizamentos de terra, culminando em prejuízos a estradas, e até mesmo a morte de moradores próximos a áreas de risco.

Dessa forma, um modelo matemático que modele os processos de propagação citados acima, se faz necessário para a análise e prevenção de eventos prejudiciais à sociedade.

O objetivo desse relatório é apresentar as atividades feitas referente ao projeto na segunda metade do ano de 2017 e no primeiro semestre de 2018.

Conceitos Estudados

A primeira parte do projeto foi constituída do estudo de conceitos diversos e abrangentes nas áreas de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias lineares e não-lineares e Epidemiologia.

1. Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

Começando a partir dos conceitos mais básicos de Sistemas de EDOs, foi dedicado

muito estudo ao estudo teórico dos Sistemas, com foco na parte Teoria Qualitativa de Sistemas Lineares, ou seja, desde a definição de pontos fixos, até a análise de diagramas de bifurcações. Começamos com o estudo de estabilidade linear a partir dos autovalores de sistemas lineares mais simples; depois foi-se analisado sistemas não lineares, mas que são localmente lineares, e como se pode associá-lo a um sistema linear mais fácil de se obter as características de suas soluções. Por último, o Método de Lyapunov para analisar a estabilidade de sistemas que não são localmente lineares.

Além disso, conceitos sobre estabilidade estrutural, com foco nas bifurcações de diferentes, assim como estabilidade de Sistemas Não-Lineares também foram amplamente discutidos, já que formam a base teórica fundamental para os modelos desenvolvidos.

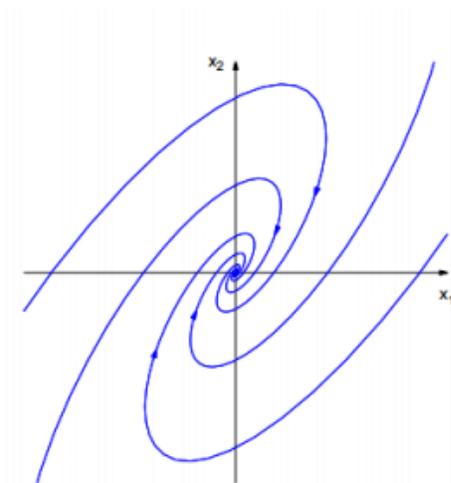


Figura 1: Retrato de Fase de um Sistema de EDOs assintoticamente estável, com autovalores complexos e parte real negativa.

2. Epidemiologia

Muito se foi estudado em relação aos Modelos Compartimentais clássicos, que deram origem à modelagem de processos epidemiológicos utilizando Sistemas de EDOs, SI, SIS e SIR, sendo realizado sua análise desde o início, achando os pontos fixos, até decidir sua estabilidade. Além disso, muitos outros modelos (Figura 2) de diferentes publicações foram discutidos em conjunto para melhor se decidir que tipo de modelo e para qual doença iríamos focar, todos com características singulares e levando em

consideração diversos tipos de parâmetros.

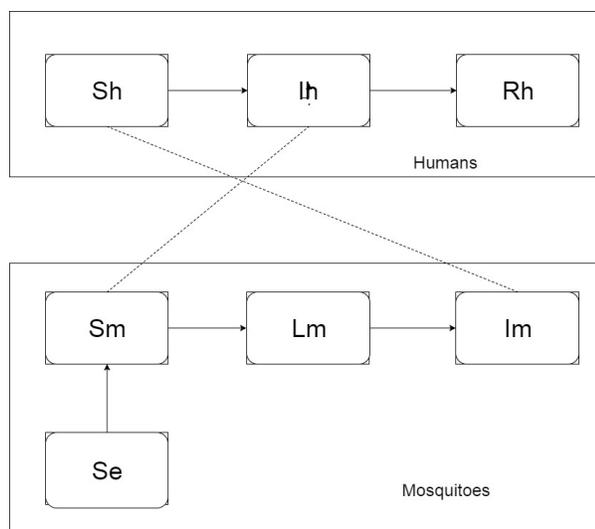


Figura 2: Diagrama de como funciona um modelo clássico de epidemia com transmissão por vetor. Em que a parte de cima representa as interações entre humanos e a de baixo, as dos vetores transmissores.

Modelos

Os modelos desenvolvidos levam em consideração a dinâmica da população de mosquitos propagadores (vetores) da Febre Amarela, e foram divididos nos seguintes compartimentos:

- $E(t)$: Representa a população de ovos, em um instante t .
- $L(t)$: Representa a população larval, em um instante t .
- $P(t)$: Representa a população de pupas (casulo), em um instante t .
- $M(t)$: Representa a população de mosquitos, em um instante t .

Baseado nesses compartimentos, seguem os diferentes modelos idealizados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE}{dt} = \phi_m \cdot M(t) - \sigma_e \cdot E(t) \\ \frac{dL}{dt} = \sigma_e \cdot E(t) - \sigma_l \cdot L(t) \\ \frac{dP}{dt} = \sigma_l \cdot L(t) - \sigma_p \cdot P(t) \\ \frac{dM}{dt} = \sigma_p \cdot P(t) - \mu_m \cdot M(t) \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE}{dt} = \phi_m \cdot M(t) - \sigma_e \cdot E(t) \\ \frac{dL}{dt} = \sigma_e \cdot E(t) - \sigma_l \cdot L(t) \\ \frac{dP}{dt} = \sigma_l \cdot L(t) - \sigma_p \cdot P(t) \\ \frac{dM}{dt} = \sigma_p \cdot P(t) \left(1 - \frac{M}{k_m}\right) - \mu_m \cdot M(t) \end{array} \right. \quad (2)$$

Em que os parâmetros são os seguintes:

Tabela 1: Resumo dos parâmetros.

Símbolo	Parâmetro	Unidade	Domínio
σ_e	Taxa de transição per-capita entre E e L	day^{-1}	$[0,1]$
σ_l	Taxa de transição per-capita entre L e P	day^{-1}	$[0,1]$
σ_p	Taxa de transição per-capita entre P e M	day^{-1}	$[0,1]$
μ_m	Taxa de mortalidade per-capita de M	day^{-1}	$[0,1]$
ϕ_m	Taxa de ovoposição de um mosquito fêmea	day^{-1}	$(0,\infty)$
k_m	Capacidade de suporte para a população M	-	$(0,\infty)$

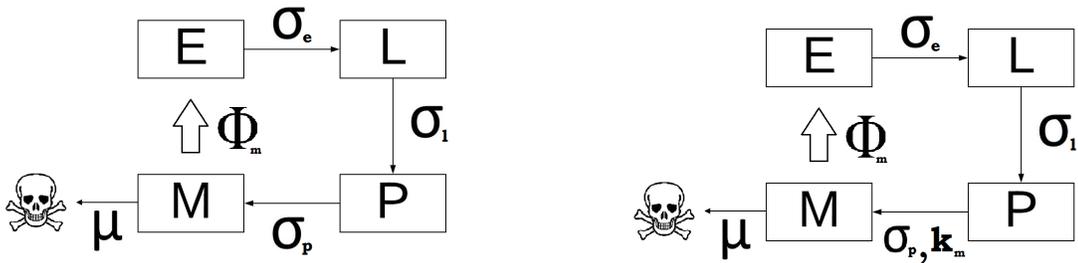


Figura 3: Diagrama representando os modelos acima. A imagem da esquerda representa o modelo (1), sem o parâmetro k_m e a da direita, o modelo (2).

Simulações & Resultados

As simulações e os gráficos mostrados abaixo foram feitos no software Berkeley Madonna.

Modelo 1

O modelo (1), como podemos notar, é um sistema de EDO linear, autônomo, não conservativo e acoplado que apresenta apenas um ponto fixo trivial, que seria o ponto $(E, L, P, M) = (0, 0, 0, 0)$, sem a presença de mosquitos.

Devido a sua linearidade, segue da resolução de Sistemas com coeficientes constantes que podemos supor que as soluções do sistema são da forma:

$$\mathbf{x}(t) = c_1(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14})^T \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2(x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24})^T \cdot e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n(x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, x_{n4})^T \cdot e^{\lambda_n t}$$

Em que λ_i é um autovalor da matriz dos coeficientes do sistema e $(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4})^T$ é um autovetor associado ao autovalor λ_i .

Para calcular os pontos fixos, assumimos $\phi_m \cdot f \neq \mu_m$, caso contrário, teríamos infinitas soluções para o sistema usado para calculá-los, assim como um autovalor nulo. Essa suposição, levou a simulações utilizando valores nos parâmetros encontrados em [9], e como resultado temos dois casos:

- Se $\phi_m < \mu_m$:

Todos os autovalores são negativos (ou têm parte real negativa), portanto, substituindo-os na solução geral do sistema, temos que a solução como um todo tende a 0, quando $t \rightarrow +\infty$, pois temos que cada fator separadamente tende a 0 (já que temos e elevado a um número negativo, ou pela fórmula de Euler, o produto de uma função limitada - seno e cosseno - por e elevado a um número negativo). O que condiz com os resultados esperados, já que o parâmetro $\phi_m \cdot f$ está relacionado com o nascimento de novos mosquitos e μ_m , com a morte, portanto, nesse caso, a população tende a voltar ao ponto de equilíbrio $(0,0,0,0)$, o que caracteriza um ponto estável.

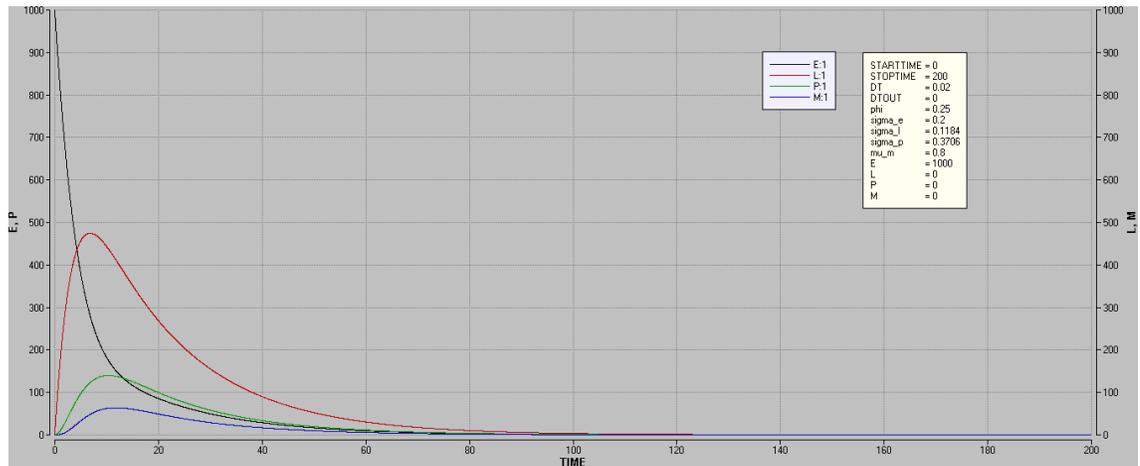


Figura 4: Simulação para o caso $\phi_m < \mu_m$.

- Se $\phi_m > \mu_m$:

Temos um autovalor positivo e outros três negativos (ou com parte real negativa), portanto, substituindo-os na solução geral do sistema, temos que a solução não converge (crescem indefinidamente) quando $t \rightarrow +\infty$, pois temos que os fatores que dependem de e elevado a um dos autovalores negativos (ou com parte real negativa) vão para 0, mas aquele que tem o autovalor positivo, faz com que a solução como um todo não convirja para 0. O que, novamente, condiz com os resultados esperados, já que nesse caso, a taxa de entrada de novos mosquitos (nascimento) é maior que a de saída (morte), o que faz com que a população cresça indefinidamente, caracterizando assim, um ponto de equilíbrio instável.

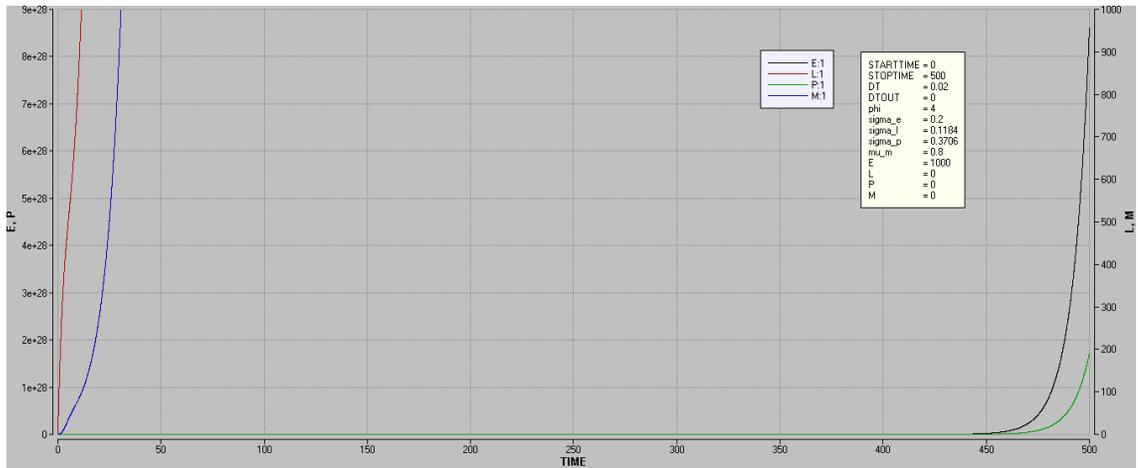


Figura 5: Simulação para o caso $\phi_m > \mu_m$

Assim, o diagrama abaixo representa o comportamento da população de M, de acordo com o parâmetro ϕ_m . A curva verde representa o ponto fixo trivial. Para o primeiro caso, as soluções do sistema são atraídas para esse ponto de equilíbrio. Para o segundo caso, a população de M (assim como a dos outros compartimentos do sistema) cresce indefinidamente.

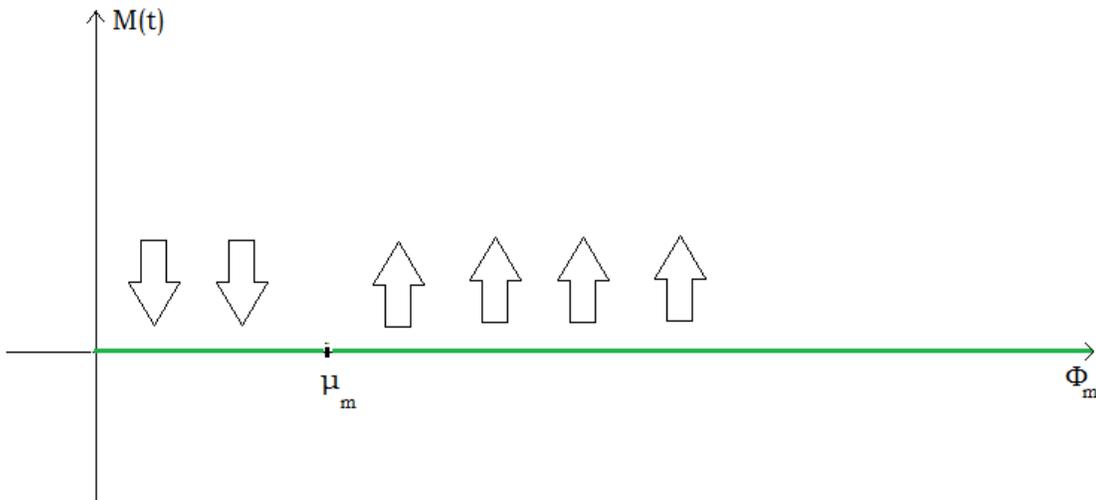


Figura 6: Diagrama de bifurcações para o Modelo 1.

Modelo 2

Para esse modelo, temos um sistema não-linear devido a quarta equação, O que torna a sua resolução de forma analítica mais complicada. Dois pontos de equilíbrio foram

encontrados: novamente o trivial, assim como no Modelo (1) e o ponto $(E, L, P, M) = k_m(\phi_m - \mu_m)\left(\frac{1}{\sigma_e}, \frac{1}{\sigma_l}, \frac{1}{\sigma_p}, \frac{1}{\phi_m}\right)$. Consideramos esse último apenas se $\phi_m > \mu_m$, já que, caso contrário, teríamos população negativa. No geral, é o modelo mais factível com a realidade. Analogamente, podemos dividir os resultados obtidos novamente em dois casos:

- Se $\phi_m < \mu_m$:

Análogo ao mesmo caso no Modelo 1, temos resultados consistentes com os esperados. Como o parâmetro de entrada do sistema é menor que o de saída e consideramos apenas um ponto de equilíbrio (o trivial), todas as soluções convergem para este e é estável. Como podemos ver na simulação a seguir para esse caso:

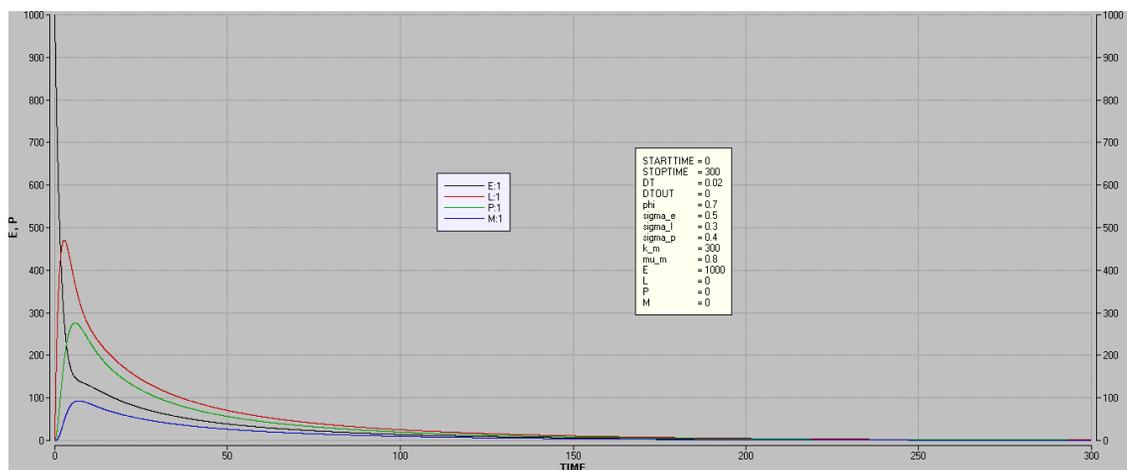


Figura 7: Simulação para o caso $\phi_m < \mu_m$.

- Se $\phi_m > \mu_m$:

Nesse caso, temos dois pontos de equilíbrio. Assim como na simulação para esse caso no Modelo 1, o ponto fixo trivial é instável, contudo, ao invés das populações crescerem indefinidamente, estas são atridas para o outro ponto de equilíbrio, o que já é um comportamento mais similar com o que pode acontecer no mundo real.

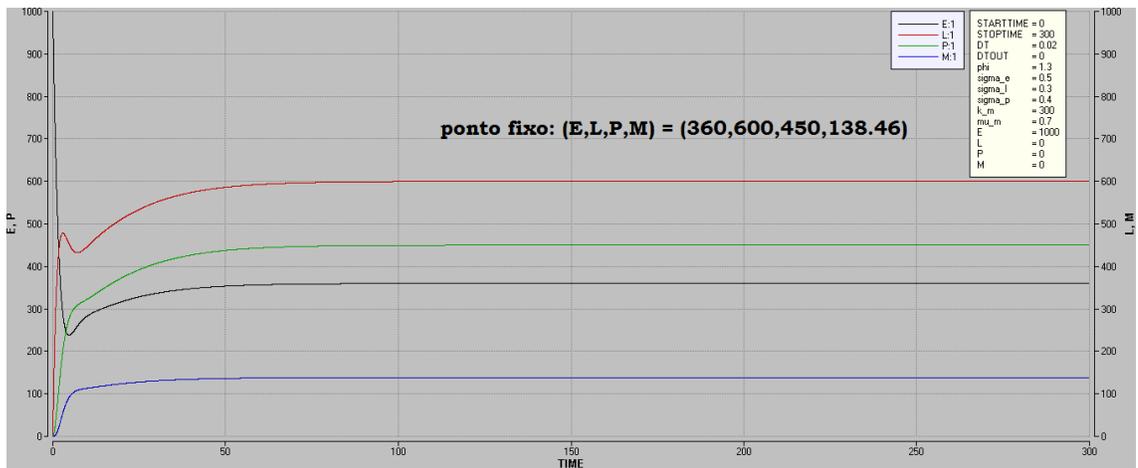


Figura 8: Simulação para o caso $\phi_m > \mu_m$.

Dessa forma, o diagrama a seguir representa novamente, o comportamento da população de M de acordo com o parâmetro ϕ_m e as duas curvas são os pontos de equilíbrio do sistema. Para o primeiro caso, temos que as soluções são atraídas pela curva do ponto fixo trivial enquanto que no segundo caso, a população de M são repelidas pelo ponto de equilíbrio trivial e atraídas pelo outro ponto de equilíbrio.

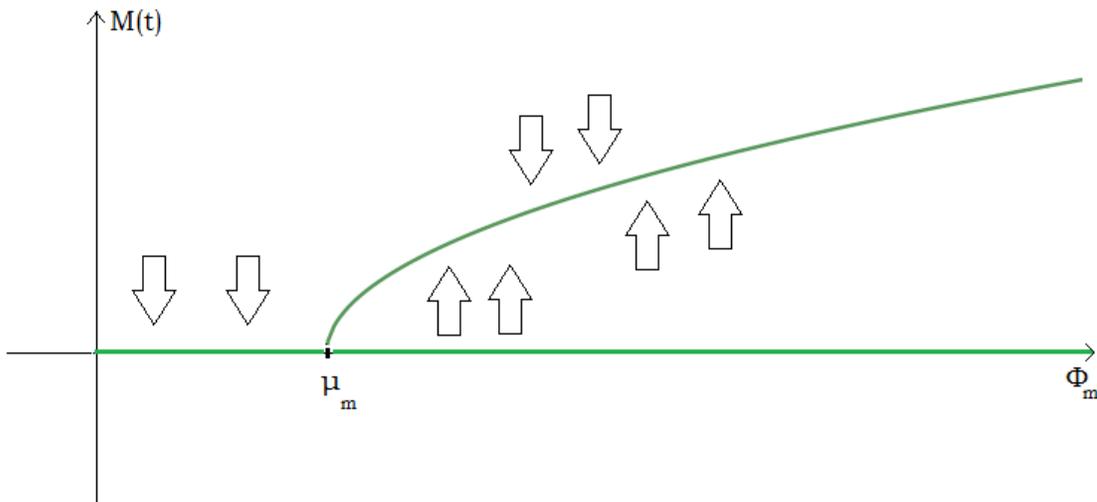


Figura 9: Diagrama de bifurcações para o Modelo 2.

Alterações

O projeto inicial previa modelar outros processos de propagação de informação, como problemas de escoamento e enchentes, contudo, devido a uma literatura ampla e diversificada sobre o assunto, o bolsista junto com seus orientadores decidiram fazer um modelo para um processo epidemiológico, apenas, mas com parâmetros que variam com o tempo, além de incorporar conceitos recentes relacionados a dinâmica do sistema. A alteração também se deve ao fato de que o Brasil atualmente passa por um surto de Febre Amarela, que já causou 81 mortes desde o começo de Julho de 2017, e mais de 200, desde 2016, segundo o Ministério da Saúde. Assim a mudança no projeto é pontual dada a situação do país.

Atividades Realizadas

O bolsista participou de dois grandes eventos no primeiro período da bolsa. O primeiro foi o XXXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional realizado entre os dias 19 e 22 de Setembro, nas dependências do Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, da FATEC e do Parque Tecnológico, na cidade de São José dos Campos, onde o bolsista participou como ouvinte e voluntário na organização do evento. O segundo foi o XVII Workshop de Computação Aplicada realizado entre os dias 20 e 22 de Novembro, nas dependências do INPE, no evento o bolsista apresentou um pôster intitulado "Modelagem Matemática em Epidemiologia".

O bolsista também interagiu com um bolsista de doutorado da Alemanha que veio ao Brasil e ficou entre Novembro e Dezembro de 2017, no âmbito de um projeto temático FAPESP em que os orientadores participam, e que foi de suma importância para o desenvolvimento do projeto e do bolsista, as reuniões em inglês realizadas entre os dois, sobre o uso de dados de mobilidade em modelos epidemiológicos.

Já no segundo semestre de 2018, o projeto foi apresentado no IV Congresso Acadêmico da Universidade Federal de São Paulo, realizado no campus São José dos Campos nos dias 11 e 12 de Junho de 2018 e agraciado com um certificado de Menção Honrosa na área de Matemática.

Conceitos estudados na IC também foram amplamente utilizados na Unidade Curricular "Modelagem Computacional" cursada na Universidade Federal de São Paulo.

Perspectivas

O modelo desenvolvido em [5] servirá de base para o trabalho – trata-se de um sistema dinâmico não linear, acoplado, não conservativo e não autônomo, premiado em Jornada de Iniciação Científica do IMPA, quando o orientador deste projeto era aluno de graduação.

O modelo (2) apresentado será, portanto, modificado para incluir parâmetros (taxa de oviposição, capacidade de suporte do ambiente) que dependem da chuva e temperatura (e portanto, do tempo), assim como termos não lineares para os outros compartimentos do modelo (representando a influência do ambiente na sua taxa de crescimento, similar à equação 4 dos mosquitos) e as equações representando os seres humanos (Suscetíveis, Infectados, etc).

O CEMADEN irá prover os dados de precipitação pluviométrica e temperatura que irão tornar o sistema não autônomo.

Para começar com essa nova etapa, considerando a média do acumulado de chuva dos últimos 80 anos da cidade de Campinas por mês obtemos a seguinte tabela em mm de chuva:

Tabela 2: Média do acumulado de chuva por mês de Campinas, nos últimos 80 anos.

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
251,24	191,43	159	69,75	61,26	51,18	32,99	30,69	63,66	122,69	145,75	207,88

Assim, precisamos aproximamos esses dados discretos para uma função contínua que depende do tempo, para podermos incorporar esses dados nas equações do Modelo (2). A função utilizada foi: $f(t) = 110,275 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 140,965$. Assim, a capacidade de suporte do ambiente (k_m) vai agora estar diretamente relacionada a essa função e como

podemos ver no gráfico a seguir, onde a curva pontilhada em vermelho representa os dados reais da Tabela (2) e a curva em azul a função f , para uma versão inicial, essa aproximação por f é satisfatória.

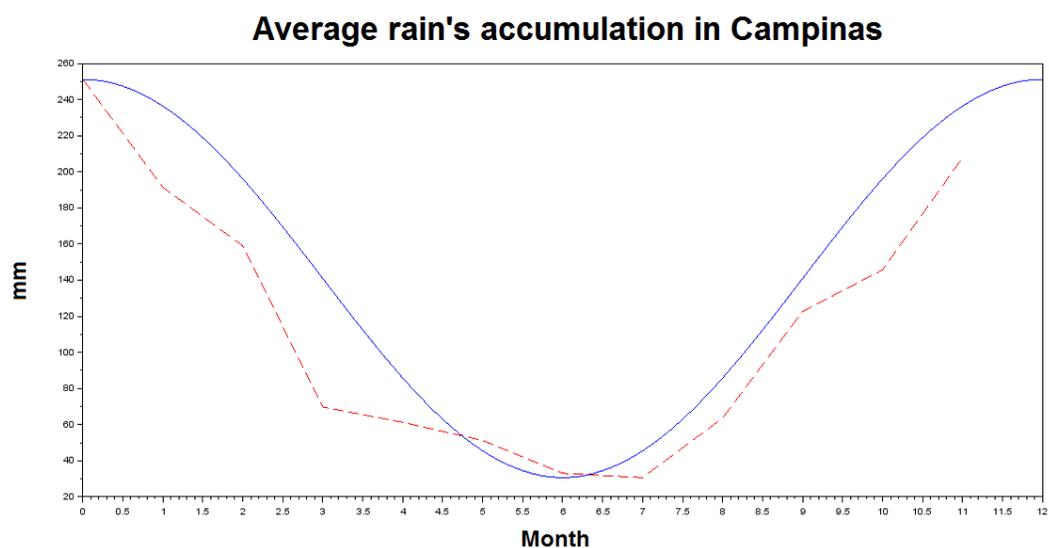


Figura 10: Gráfico comparativo entre os dados reais (vermelho) e a aproximação pela função considerada (azul).

Bibliografia

- [1] FIEDLER-FERRARA, Nelson; PRADO, Carmen P. C, *Caos: Uma Introdução*, São Paulo: EDGARD BLUCHER, 2011.
- [2] SANTOS, Bruna C., *Estudo qualitativo de um modelo de propagação de dengue*, São Paulo, 2016.
- [3] CARDOSO, Pedro G. S, *Modelagem de Processos Epidêmicos Via Equações Diferenciais Ordinárias*, Bahia, 2008.
- [4] DORN, Rejane, C, *Análise da Dinâmica de Dengue através do número de reprodutibilidade com base em dados epidemiológicos*, Bahia, 2016.
- [5] SANTOS, L.B.L; PINHO S.T.R, *Modelagem matemática e computacional da Dengue utilizando Autômatos Celulares interligados e sistema não autônomo de Equações Diferenciais*, Bahia, 2010
- [6] BROCKMANN, Dirk; HELBING, DIRK, *The Hidden Geometry of Complex, Network-Driven Contagion Phenomena*, Science, vol.342, issue 6164, pp. 1337-1342, 2013.
- [7] RAIMUNDO, Silvia, M.; AMAKU, Marcos; MASSAD, Eduardo, *Equilibrium Analysis of a Yellow Fever Dynamical Model with Vaccination*, 2015.
- [8] L. Z. Goldani, Yellow Fever outbreak in Brazil, 2017. In *The Brazilian Journal of Infectious Diseases*, volume 21, issue 2, pages 123-124, 2017.
- [9] H. Y. Yang, J. L. Boldrini, A. C. Fassoni, L. F. S. Freitas, M. C. Gomez, K. K. B.d Lima, *et al.* Fitting the Incidence Data from the City of Campinas, Brazil, Based on Dengue Transmission Modellings Considering Time-Dependent Entomological Parameters, PLoS ONE 11(3): e0152186. DOI:10.1371/journal.pone.0152186, 2016.