



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

## **ESTUDO DA DINÂMICA E DO SISTEMA DE CONTROLE DE UMA VIGA RÍGIDO-FLEXÍVEL**

### **RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (CNPq/INPE)**

**Cedéia Vieira de Araújo (UFABC, Bolsista CNPq)**  
E-mail: [cedeia.araujo@ufabc.edu.br](mailto:cedeia.araujo@ufabc.edu.br)

**Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza (DMC/INPE, Orientador)**  
E-mail: [gadelha@dem.inpe.br](mailto:gadelha@dem.inpe.br)

**Dr. André Fenili (CESC/UFABC, Co-orientador)**  
E-mail: [andré.fenili@ufabc.edu.br](mailto:andré.fenili@ufabc.edu.br)

**Junho de 2009**

## INDICE

|  |           |
|--|-----------|
| <b>RESUMO .....</b>                                      | <b>02</b> |
| <b>1. INTRODUÇÃO .....</b>                               | <b>03</b> |
| <b>2. MODELO MATEMÁTICO .....</b>                        | <b>04</b> |
| 2.1 Derivando as equações do sistema dinâmico .....      | 06        |
| <b>3. CONCEITOS DO MÉTODO DE ALOCAÇÃO DE POLOS .....</b> | <b>10</b> |
| <b>4. SIMULAÇÕES .....</b>                               | <b>13</b> |
| 4.1 Sistema em malha aberta .....                        | 13        |
| 4.2 Sistema em malha fechada .....                       | 16        |
| 4.2.1 Alocação dos pólos .....                           | 16        |
| 4.2.2 Seleção dos melhores pólos .....                   | 23        |
| 4.2.2 Critério de Nyquist .....                          | 23        |
| <b>5. CONCLUSÃO .....</b>                                | <b>30</b> |
| <b>6. BIBLIOGRAFIA .....</b>                             | <b>31</b> |

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo o estudo da dinâmica e do sistema de controle de uma viga rígido flexível. Para isso utiliza-se, como modelo matemático o equipamento *FlexGage* fabricado pela empresa *Quanser*, o qual possui uma parte central rígida ligada a um apêndice flexível. Utiliza-se a formulação Lagrangiana para desenvolver o modelo matemático do sistema, onde a configuração do tipo massa-mola é empregada para representar o acoplamento rígido e flexível do modelo. No projeto do sistema de controle prioriza-se investigar o comportamento dinâmico da viga rígido-flexível em função da posição dos pólos do sistema em malha fechada, para isso aplica-se a técnica de controle conhecida como Alocação de Pólos. O desempenho do controlador projetado é avaliado através de sua capacidade de reduzir o ângulo e a velocidade angular da parte central rígida e ao mesmo tempo amortecer rapidamente as vibrações do apêndice flexível. Portanto, os requisitos de desempenho estão relacionados a um tempo de resposta pequeno no controle da parte rígida e pouca sobre elevação no amortecimento das vibrações. Através de simulações, verificou-se que o bom controle da parte rígida nem sempre significa o mesmo no controle da parte flexível. Logo, uma seleção mais detalhada da localização dos pólos associados ao movimento da parte rígida é ponto fundamental para o bom desempenho da lei de controle. Como continuação deste trabalho, pretende-se realizar uma implementação experimental do mesmo modelo, através de uma montagem do tipo "hardware in the loop". Esta montagem permitirá uma investigação experimental do sistema de controle e sua comparação com os resultados das simulações computacionais.

## 1. INTRODUÇÃO

Satélites artificiais com múltiplas missões têm sido cada vez mais utilizados em missões espaciais. Com isso, a variedade de tarefas a cumprir aumenta e como consequência imediata, aumenta-se o número de instrumentos utilizados para o propósito da missão. O número de instrumentos está relacionado à potência elétrica consumida pelo satélite, portanto, cada vez mais os painéis solares têm aumentado o seu tamanho para suprir energia suficiente à requisitada pelos instrumentos de forma que os requisitos da missão sejam cumpridos. Como consequência, o aumento da área dos painéis solares acarreta em uma maior influência do efeito da flexibilidade sobre a dinâmica do satélite. Outro fator relevante está associado à limitação de peso da carga útil dos lançadores, que impõe a utilização de materiais mais leves, o que leva ao emprego de estruturas mais finas e flexíveis na construção do satélite. Devido à menor espessura, estas estruturas são mais suscetíveis à vibração.

Existem ainda estruturas espaciais com níveis de complexidade estrutural maiores que a de satélites artificiais, como é o caso de estações espaciais que, compostas de diversos links e até mesmo manipuladores robóticos, estão fortemente sujeitas à influência da flexibilidade em sua dinâmica. Este aumento na complexidade estrutural resulta em um aumento na complexidade do modelo matemático da dinâmica destas estruturas, o que leva muitas vezes à necessidade da simplificação destes modelos por parte do projetista.

No entanto, para satélites dotados de componentes flexíveis, o desprezo das vibrações induzidas pelos mesmos pode provocar uma degradação do desempenho do Sistema de Controle de Atitude e Órbita (SCAO), o que torna o estudo da influência da flexibilidade na dinâmica destes sistemas de suma importância.

O problema do controle de atitude de satélites artificiais com estruturas flexíveis é tema de diversos trabalhos de variados autores. Hooker (1975) deriva as equações da dinâmica de um sistema rotacional composto por corpos rígidos flexíveis interconectados em uma topologia chamada de árvore, onde as conexões dos corpos do sistema não possuem linhas fechadas. Para isso são utilizados os conceitos de energia cinética e momento angular além do efeito da força gravitacional para se chegar às equações diferenciais que representam a dinâmica do sistema. Assim, através de variáveis de estados, as forças e os torques são avaliados a partir das grandezas disponíveis.

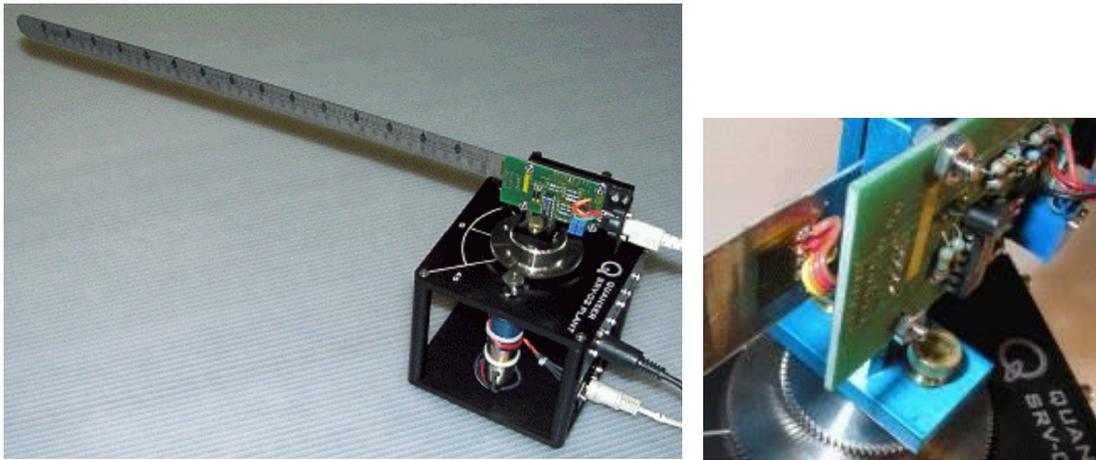
Meirovitch e Kwak (1990) investigam os efeitos da vibração sobre uma plataforma com um apêndice flexível em movimento, procurando estabilizar sua atitude e amenizar os efeitos da vibração. Uma abordagem Lagrangiana é utilizada para a dedução das equações do movimento, com o uso de quase-coordenadas, ou coordenadas formadas por combinações não integráveis de ângulos e velocidades angulares.

É sabido que uma das maiores dificuldades no controle do movimento de um sistema rígido flexível deve-se ao acoplamento entre o movimento flexível e o movimento rígido do satélite (JUNKINS 1993). Portanto, devido à sua relevância, vários problemas associados ao estudo da dinâmica e do controle de estruturas espaciais flexíveis têm sido investigados nos últimos anos. Exemplos desses estudos podem ser vistos em Souza e Silva (1999) onde é investigada a questão do desempenho de um SCAO quando este precisa realizar manobras de atitude predefinidas, manter sua posição de apontamento e/ou amortecer as vibrações estruturais remanescentes.

Neste trabalho, pretende-se desenvolver o modelo matemático da dinâmica de um satélite rígido-flexível e projetar seu sistema de controle de atitude. Na obtenção do modelo matemático, emprega-se uma configuração do tipo massa-mola, para representar a montagem conhecida como FlexGage da Quanser©R (Quanser, 2009), a qual é composta por um apêndice flexível acoplada a um servomotor, que é o atuador do sistema. O apêndice possui liberdade para girar em torno somente do eixo vertical o que implica que o modelo possui somente duas dimensões (movimento em um plano). Mais detalhes sobre o dispositivo FlexGage da Quanser© são apresentados na Seção 2. Ressalta-se o fato de que o equipamento utilizado não é capaz de simular um ambiente livre de torques oriundos do efeito gravitacional, apesar disso, é de grande auxílio na validação principalmente das técnicas de estabilização e amortecimento dos modos de vibração da haste flexível. O objetivo específico deste trabalho é a investigação da influencia da localização dos pólos em malha fechada sobre o comportamento dinâmico e no desempenho do sistema de controle de atitude de sistema rígido-flexível.

## 2 MODELO MATEMATICO

A figura 2.1 abaixo mostra o módulo da haste flexível acoplada ao SRV02 na planta de configuração correta. O módulo é ligado ao SRV02 por dois longos parafusos. A haste é firmemente ligada ao módulo e a base. Também na figura 2.1, em detalhe, vemos o "deflectometro" montado na base da haste. O aparelho é calibrado para a saída (output) em um volt por uma polegada de deflexão.



**FIGURA 2.1 SRV02 com o modulo FLEGGAGE**

Abaixo segue uma tabela de nomenclatura usadas neste trabalho.

TABELA 2.1 Nomenclatura.

| Símbolo    | Descrição  |
|------------|--|
| L          | Tamanho da haste                                 |
| M          | Massa da haste                                   |
| K_gage     | Calibração do output (1 volt/ inch)              |
| $\Theta$   | Ângulo da base ( radianos )                      |
| $\alpha$   | Deflexão em radianos                             |
| D          | Deflexão (comprimento do arco)                   |
| $\omega_c$ | Freqüência natural (experimentalmente calculado) |
| $J_{link}$ | Momento de inércia do modelo adotado             |

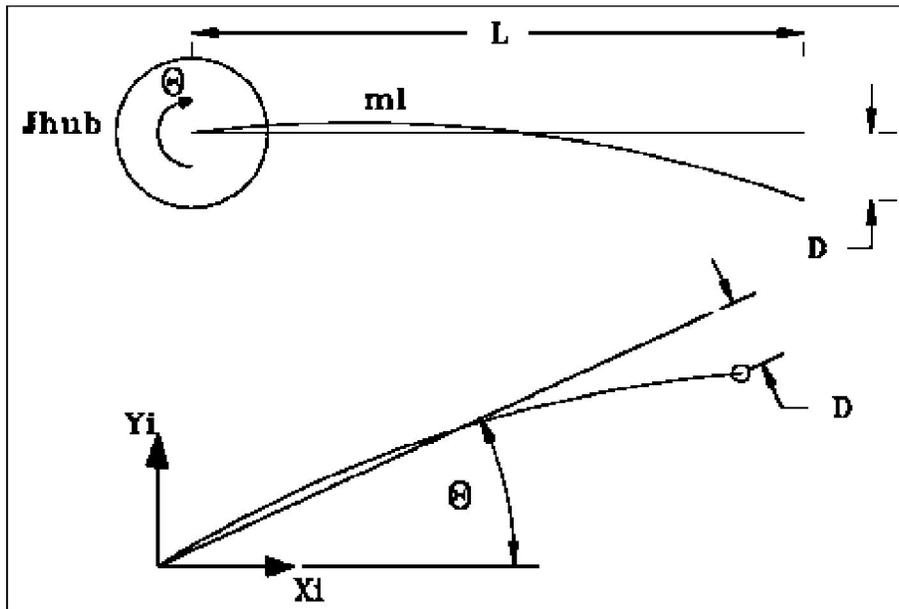


FIGURA 2.2 Esquema da haste flexível.

A figura 2.2 retrata o esquema da extremidade da haste quando ela sofre uma deflexão  $D$ , desta forma temos a equação:

$$\alpha = \frac{D}{L} \quad (2.1)$$

Para se estudar esse sistema podemos usar o modelo simplificado da figura 2.3 que descreve adequadamente o movimento da extremidade da haste.

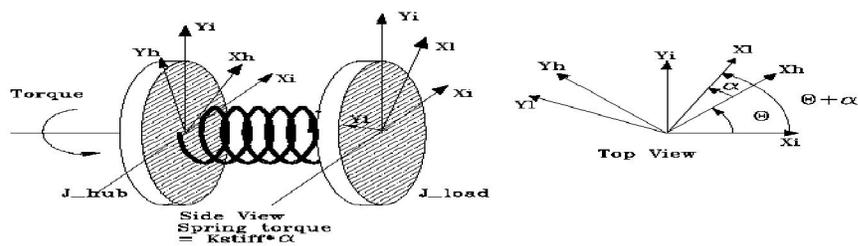


FIGURA 2.3 Modelo simplificado para haste

Da figura 2.3 a equação para a rotação da mola é:

$$J_{LINK} \ddot{\alpha} = -K_{STIFF} \alpha \quad (2.2)$$

Para obter uma estimativa da rigidez do modelo adotado ( $K_{STIFF}$ ) deve considerar uma condição inicial e medir a frequência natural da oscilação do sistema. Com o sistema determinado podemos escrever:

$$\ddot{\alpha} = -\omega_c^2 \alpha \quad (2.3)$$

Combinando as equações (2.2) e (2.3), temos a seguinte expressão:

$$K_{STIFF} = \omega_c^2 J_{LINK} \quad (2.4)$$

A partir do modelo adotado escrevemos o momento de inércia para o sistema:

$$J_{LINK} = \frac{ML^2}{3} \quad (2.5)$$

## 2.1 DERIVANDO AS EQUACOES DO SISTEMA DINAMICO

Uma vez já desenvolvido o modelo para a haste, resta agora escrever as equações do sistema dinâmico para isso a partir das energias: potencial e cinética montarmos a função lagrangiana.

Energia potencial - A única energia potencial no sistema é devido à mola:

$$V = \frac{K_{STIFF} \theta^2}{2} \quad (2.6)$$

Energia cinética - Tem uma parcela devido à haste e a base.

$$T = \frac{J_{eq} \dot{\theta}^2}{2} + \frac{J_{LINK} (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2}{2} \quad (2.7)$$

Escrevendo a lagrangiana:

$$L = T - V = \frac{J_{eq} \dot{\theta}^2}{2} + \frac{J_{LINK} (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2}{2} - \frac{K_{STIFF} \alpha^2}{2} \quad (2.8)$$

Como estamos trabalhando com duas coordenadas generalizadas  $\theta$  e  $\alpha$ , temos as duas equações:

$$\frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = T_{OUTPUT} - B_{eq} \dot{\theta} \quad (2.9)$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \quad (2.10)$$

Resolvendo a equação (2.9) :

$$\frac{\delta}{\delta t} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left( \frac{J_{eq} \dot{\theta}^2}{2} + \frac{J_{LINK} (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2}{2} - \frac{K_{STIFF} \alpha^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{J_{eq} \dot{\theta}^2}{2} + \frac{J_{LINK} (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2}{2} - \frac{K_{STIFF} \alpha^2}{2} \right) =$$

$$T_{OUTPUT} - B_{eq} \dot{\theta}$$

$$= \frac{\delta}{\delta t} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left( \frac{J_{eq} \dot{\theta}^2}{2} + \frac{J_{LINK} (\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\alpha} + \dot{\alpha}^2)}{2} - \frac{K_{STIFF} \alpha^2}{2} \right) \right] - 0 = T_{OUTPUT} - B_{eq} \dot{\theta}$$

$$= \frac{\delta}{\delta t} (J_{eq} \dot{\theta} + J_{ARM} (\dot{\theta} + \dot{\alpha})) = T_{OUTPUT} - B_{eq} \dot{\theta} = J_{eq} \ddot{\theta} + J_{ARM} (\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) = T_{OUTPUT} - B_{eq} \dot{\theta}$$

Obtemos a equação canônica do movimento em relação a coordenada generalizada  $\theta$ .

$$J_{eq} \ddot{\theta} + J_{ARM} (\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) = T_{OUTPUT} - B_{eq} \dot{\theta} \quad (2.11)$$

Resolvendo a equação 2.10:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} \left( \frac{J_{eq} \dot{\theta}^2}{2} + \frac{J_{LINK} (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2}{2} - \frac{K_{STIFF} \alpha^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{J_{eq} \dot{\theta}^2}{2} + \frac{J_{LINK} (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2}{2} - \frac{K_{STIFF} \alpha^2}{2} \right) &= 0 \\ \\ = \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} \left( \frac{J_{eq} \dot{\theta}^2}{2} + \frac{J_{LINK} (\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\alpha} + \dot{\alpha}^2)}{2} - \frac{K_{STIFF} \alpha^2}{2} \right) + K_{STIFF} \alpha &= 0 \\ \\ = J_{ARM} (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) + K_{STIFF} \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Obtemos a equação canônica do movimento em relação a coordenada generalizada  $\alpha$ .

$$J_{ARM} (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) + K_{STIFF} \alpha = 0 \quad (2.12)$$

Referindo ao experimento anterior - temos a saída do torque como sendo:

$$T_{OUTPUT} = \frac{\eta_m \eta_g K_T K_g (V_m - K_g K_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (2.13)$$

Subtraindo a equação(2.12) de (2.11) e substituindo o valor de (2.13) obtemos:

$$\ddot{\theta} = \left( \frac{-\eta_m \eta_g K_t K_g^2 K_m - B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m} \right) \dot{\theta} + \frac{K_{stiff} \alpha}{J_{eq}} + \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g V_m}{J_{eq} R_m} \quad (2.14)$$

Substituindo (2.14) em (2.12) obtemos:

$$\ddot{\alpha} = \frac{-K_{STIFF}(J_{ARM} + J_{eq})\alpha}{J_{eq}R_m} + \left( \frac{-\eta_m \eta_g K_T K_g^2 K_m - B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m} \right) \dot{\theta} - \frac{\eta_m \eta_g K_T K_g V_m}{J_{eq} R_m} \quad (2.15)$$

A partir dessas combinações e assumindo que:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta & x_2 &= \alpha \\ \dot{x}_1 &= \dot{\theta} = x_3 & \dot{x}_2 &= \dot{\alpha} = x_4 \\ \dot{x}_3 &= \ddot{\theta} & \dot{x}_4 &= \ddot{\alpha} \end{aligned}$$

Podemos montar a matriz de representação completa do sistema na forma de variáveis de estado ,  $\dot{x} = Ax + Bu$  :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_{STIFF}}{J_{eq}} & \frac{-\eta_m \eta_g K_T K_m K_g^2 + B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m} & 0 \\ 0 & \frac{-K_{STIFF}(J_{eq} + J_{ARM})}{J_{eq} J_{ARM}} & \frac{\eta_m \eta_g K_T K_m K_g^2 + B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\eta_m \eta_g K_T K_g}{J_{eq} R_m} \\ \frac{-\eta_m \eta_g K_T K_g}{J_{eq} R_m} \end{bmatrix} V_m \quad (2.16)$$

### 3 CONCEITOS DO MÉTODO DE ALOCAÇÃO DE POLOS

Este método basicamente funciona a partir da designação dos pólos em malha fechada em função da especificação da resposta temporal ou da resposta em frequência.

Podemos dizer que se os pólos estão em uma região genérica  $J$ , na qual escolhemos uma matriz ganho apropriada de realimentação de estado, é possível forçar o sistema a ter pólos de malha fechada nas posições desejadas, desde que o sistema seja de estado completamente controlável.

A maior limitação deste método é que para os pólos de malha fechada possam ser alocados em posições arbitrárias no plano, o estado do sistema precisa ser completamente controlável.

$$x = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \quad (2.17)$$

$$y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \quad (2.18)$$

Para verificar se o sistema é plenamente controlável é necessário observar a controlabilidade a partir das equações do sistema de controle ((3.16) e (3.17)), de forma que os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  não dependam de  $\mathbf{K}$ , pois senão os autovalores da matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  não poderão ser alocados de maneira aleatória (condição necessária).

Definindo uma matriz de transformação  $\mathbf{T}$  da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W} \quad (2.19)$$

De maneira que:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (2.20)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

onde os  $a_i$  são coeficientes do polinômio característico e a matriz  $\mathbf{M}$  é a de controlabilidade.

Admitindo a matriz  $\mathbf{M}$  como sendo de estado completamente controlável, podemos afirmar que a matriz  $\mathbf{T}$  possui inversa, pode ser modificada para:

$$x = \mathbf{T} \hat{x} \quad (2.22)$$

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \hat{x} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} u \quad (2.23)$$

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

A equação 3.21 representa um novo vetor de estado  $\hat{x}$ .

Adotando o conjunto de auto valores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  temos a seguinte equação característica:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \quad (2.26)$$

De onde temos:

$$\mathbf{K} \mathbf{T} = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1] \quad (2.27)$$

Quando  $u = -\mathbf{K} \mathbf{T} \hat{x}$  for usada para controlar o sistema temos;

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \hat{x} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{T} \hat{x} \quad (2.28)$$

Temos a equação característica;

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{T}| = 0 \quad (2.29)$$

Reescrevendo as equações 3.16 e 3.17 com  $u = -\mathbf{K}x$ ,

$$\dot{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})x \quad (2.30)$$

com equação característica da forma:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = |\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{T}| = |s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BK}\mathbf{T}| = 0 \quad (2.31)$$

Simplificando a equação característica do sistema na forma canônica controlável. Com relação às equações (3.23), (3.24) e (3.26), temos;

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BK}\mathbf{T}| = |s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a_n + \delta_n)s| = 0 \quad (2.32)$$

A equação (3.31) é a equação característica do sistema com realimentação de estado. Assim sendo ela deve ser igual a (3.25), igualando e resolvendo o sistema temos:

$$\mathbf{K} = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \dots \quad \delta_1]\mathbf{T}^{-1} = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1} \quad (2.33)$$

Desta forma todos os autovalores poderão ser arbitrariamente alocados escolhendo a matriz  $\mathbf{K}$  de acordo com a equação (3.32), isto se o sistema for de estado completamente controlável.

Assim provamos que a condição necessária e suficiente para uma alocação arbitrária de pólos: o estado do sistema é completamente controlável.

Em suma podemos dizer que este método consiste basicamente em verificar se o sistema é completamente controlável, analisar a matriz de transformação  $\mathbf{T}$  para poder usar os autovalores desejados e encontrar a matriz ganho  $\mathbf{K}$ . Uma vez efetuado esses processos pode se impor ao sistema a uma determinada condição inicial e ver o comportamento das variáveis de estado.

## 4. SIMULAÇÕES

As simulações foram feitas no software MATLAB, com a intenção de estudar o sistema da estrutura rígida-flexível da QUANSER, cuja dinâmica foi estudada no capítulo anterior.

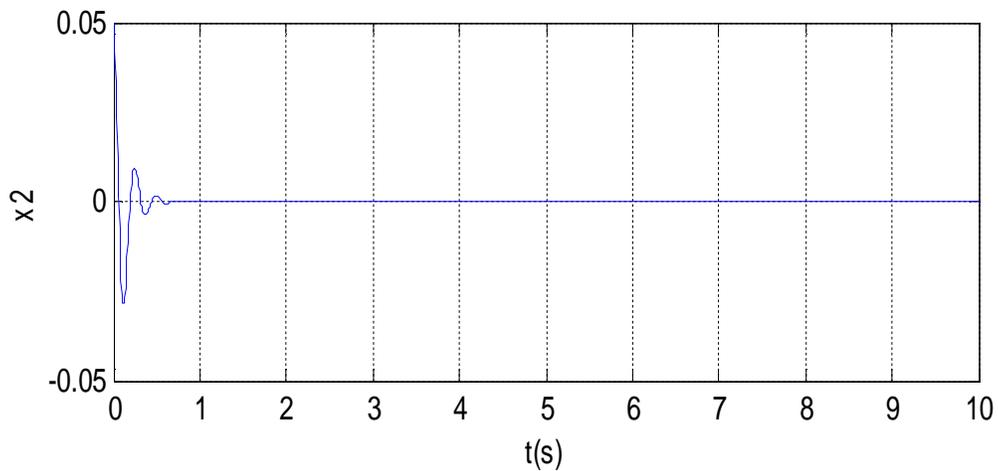
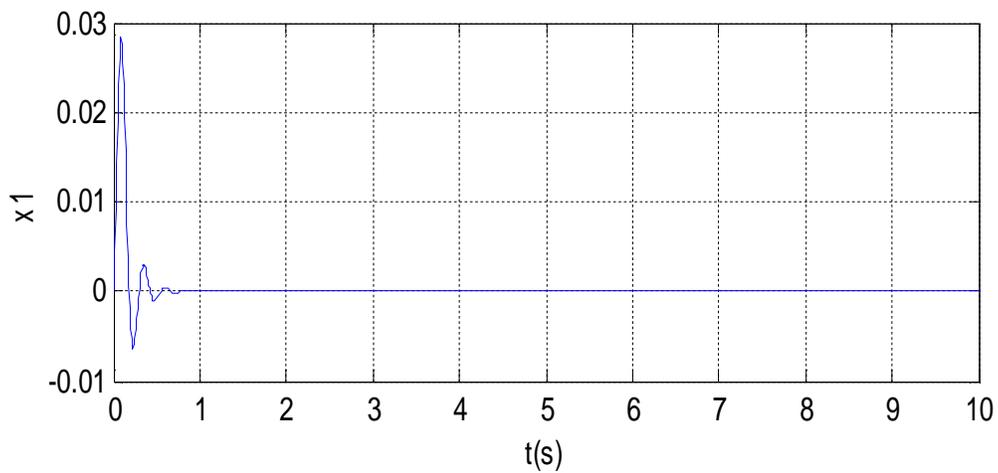
### 4.1 SISTEMA EM MALHA ABERTA

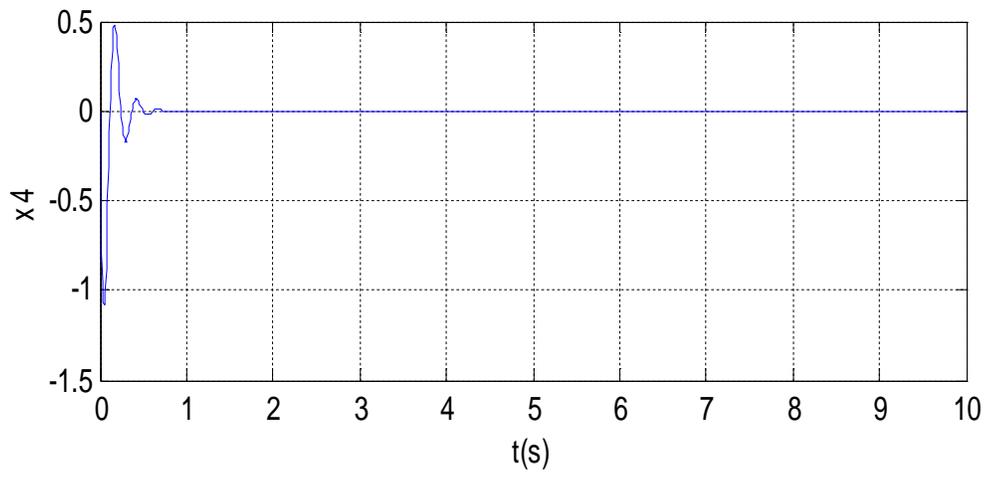
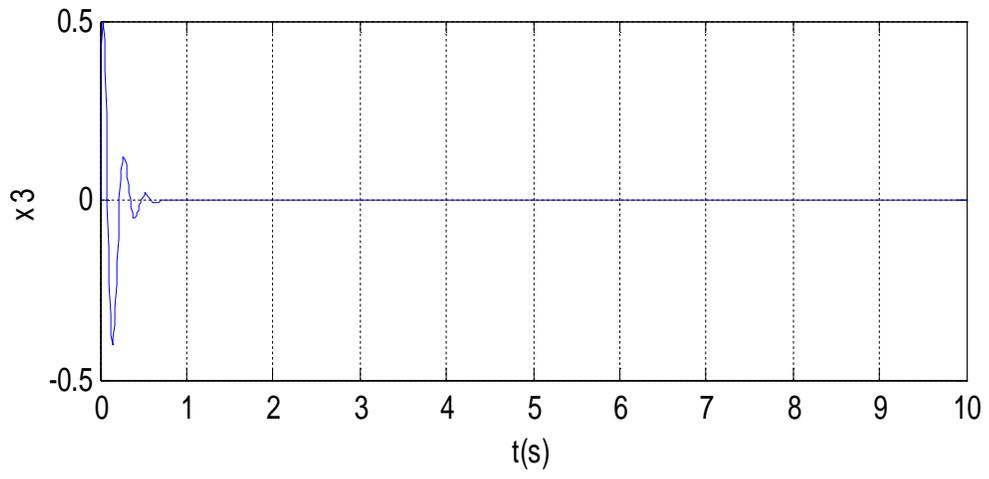
A partir da matriz de representação de estados 2.16, podemos observar que o sistema possui acoplamentos entre as variáveis de estado.

Para o sistema em malha aberta observou-se que o acoplamento é mais significativo para  $x_2$  e  $x_3$ :

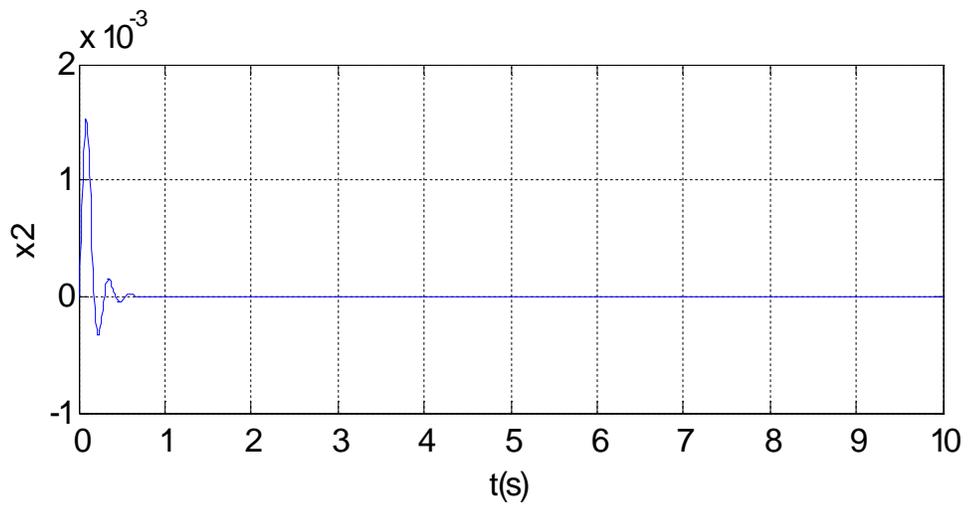
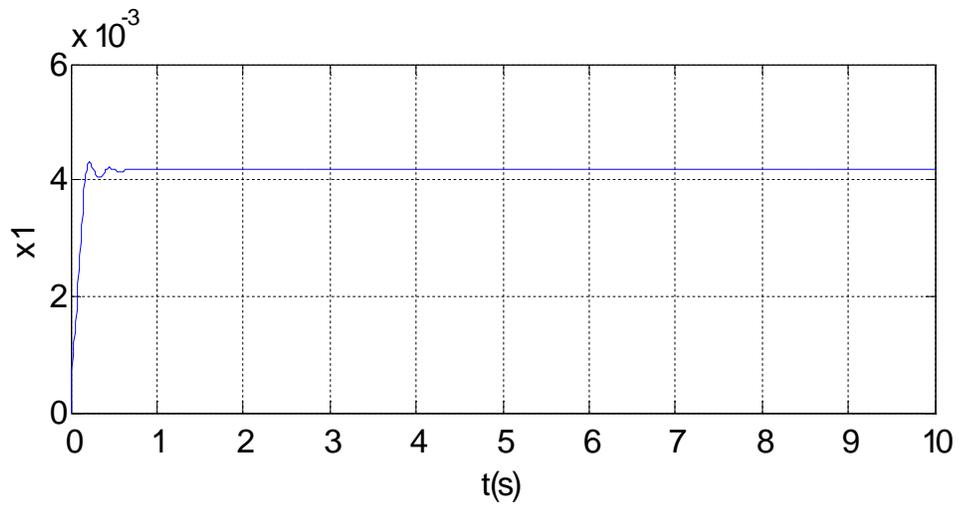
Condição inicial:

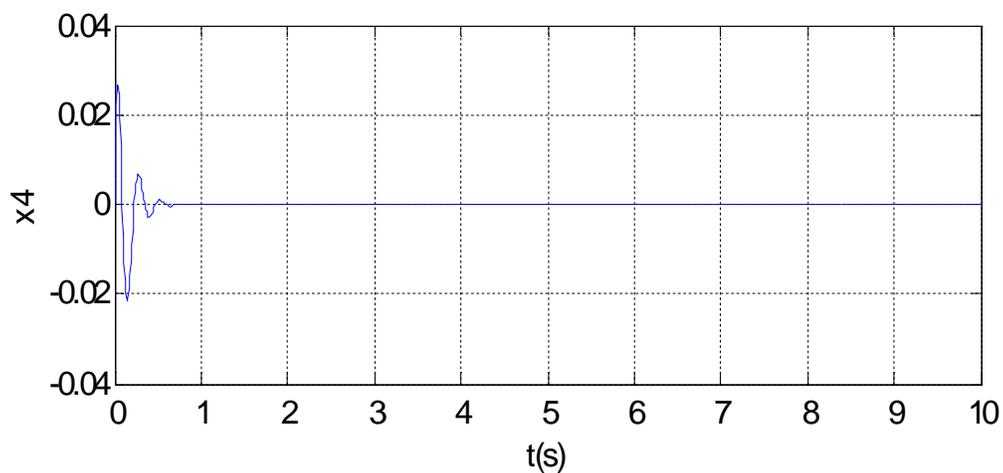
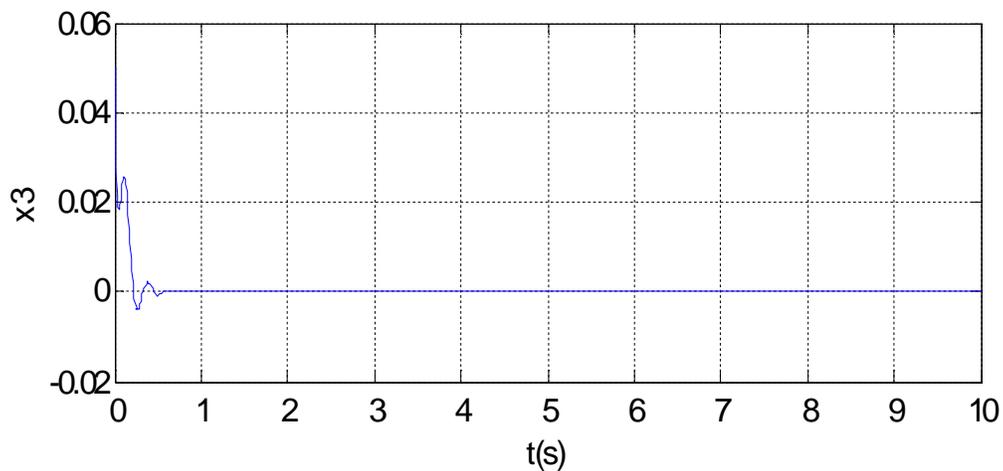
$$x = [0 \quad 0.05 \quad 0 \quad 0]$$





$$x = [0 \quad 0 \quad 0.05 \quad 0]$$





Devido ao acoplamento, as condições iniciais de  $x_2$  e  $x_3$  são refletidas em todo o sistema.

## 4.2 SISTEMA EM MALHA FECHADA

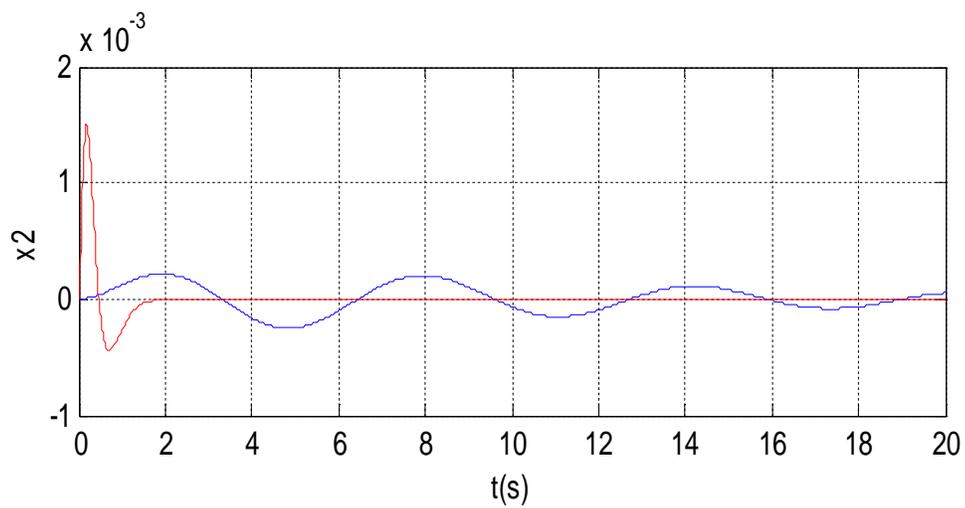
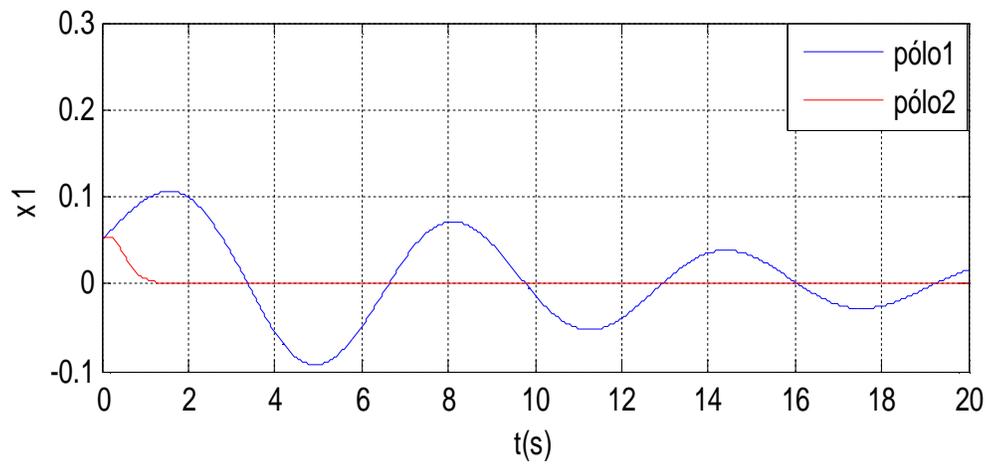
### 4.2.1 ALOCACÃO DOS PÓLOS

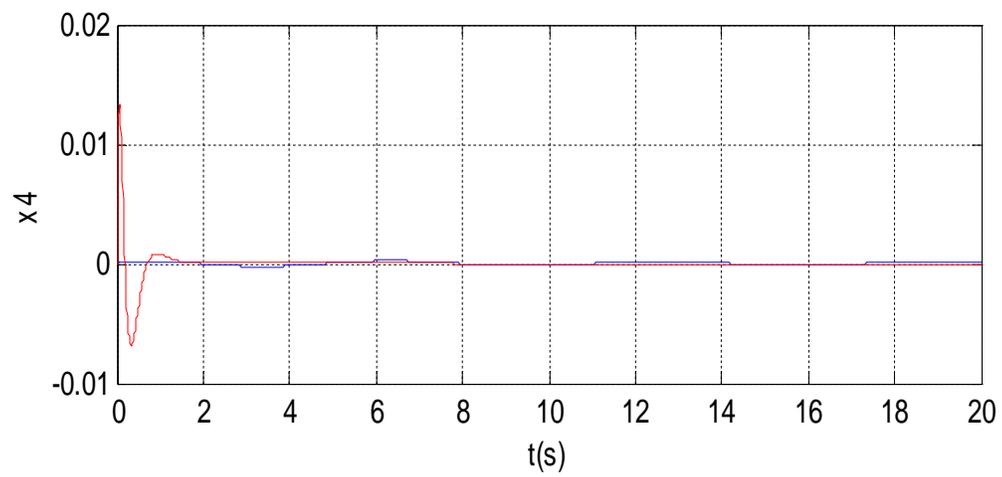
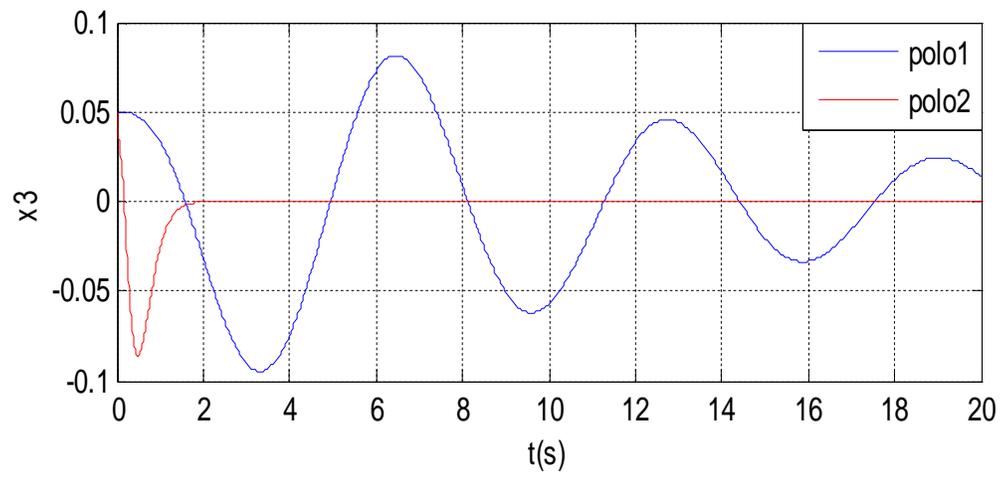
Considerando o sistema em malha fechada e de estado completamente controlado, a alocação dos pólos inicialmente foi feita de modo aleatório.

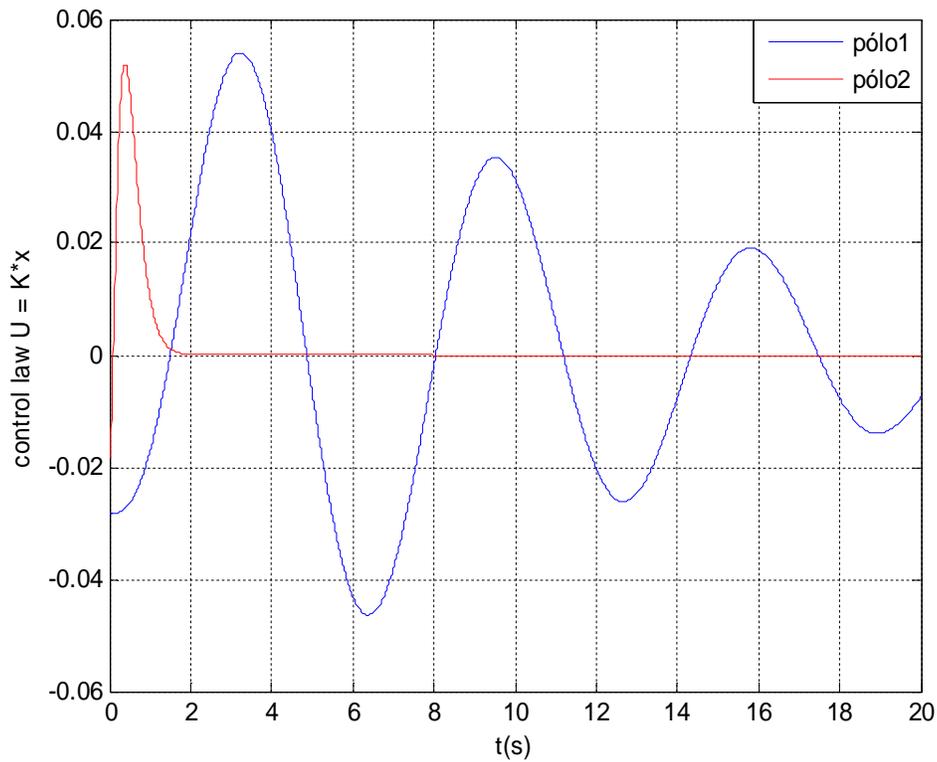
$$\rho_1 = [-0.5+j \quad -0.1+j \quad -0.5-j \quad -0.1-j]$$

$$\rho_2 = [-5 \quad -7+j \quad -7-j \quad -10]$$

As simulações com a alocação dos conjuntos de pólos  $\rho_1$  e  $\rho_2$  mostram o comportamento do sistema com realimentação de estado.







Podemos observar que quanto mais a esquerda num plano complexo se aloca os pólos, mais intensa é a ação de controle. O sistema apresenta pouca ou (nenhuma) oscilação.

Ao aproximarmos os pólos do valor zero, notamos que há pouco amortecimento e muita oscilação, o sistema não é totalmente controlado. Os autovalores caminham para posições extremas, comportamento indesejável para o sistema.

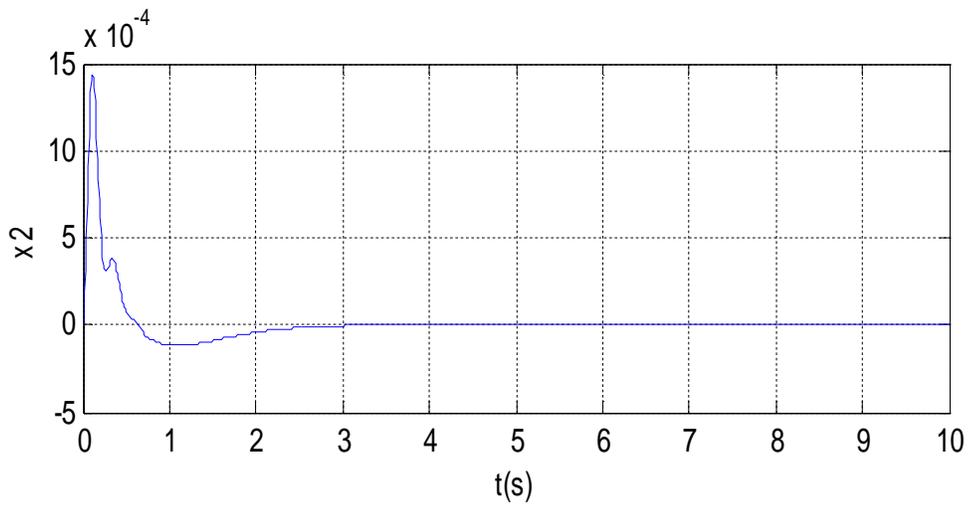
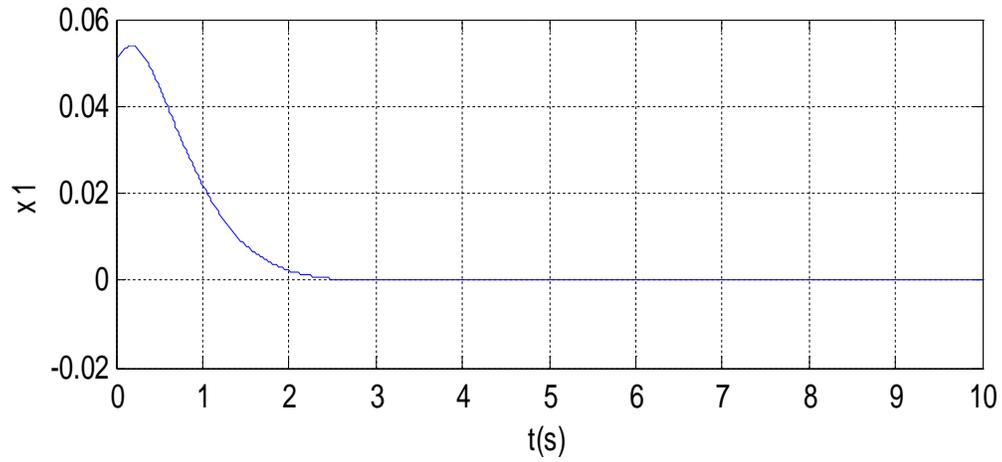
Matrizes dos ganhos de realimentação alocando os conjuntos de pólos  $\rho_1$  e  $\rho_2$

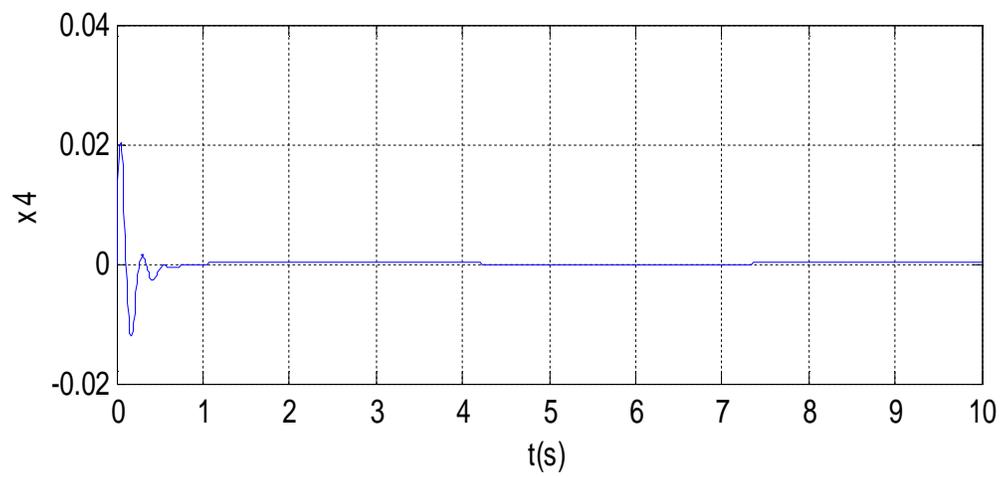
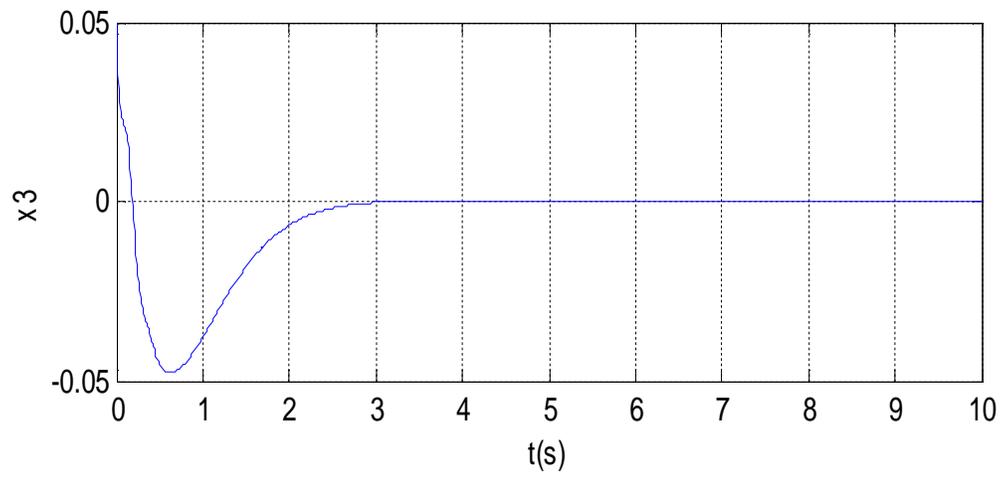
$$K_1 = [ 0.0001 \quad 16.8009 \quad -0.5685 \quad -0.0213 ]$$

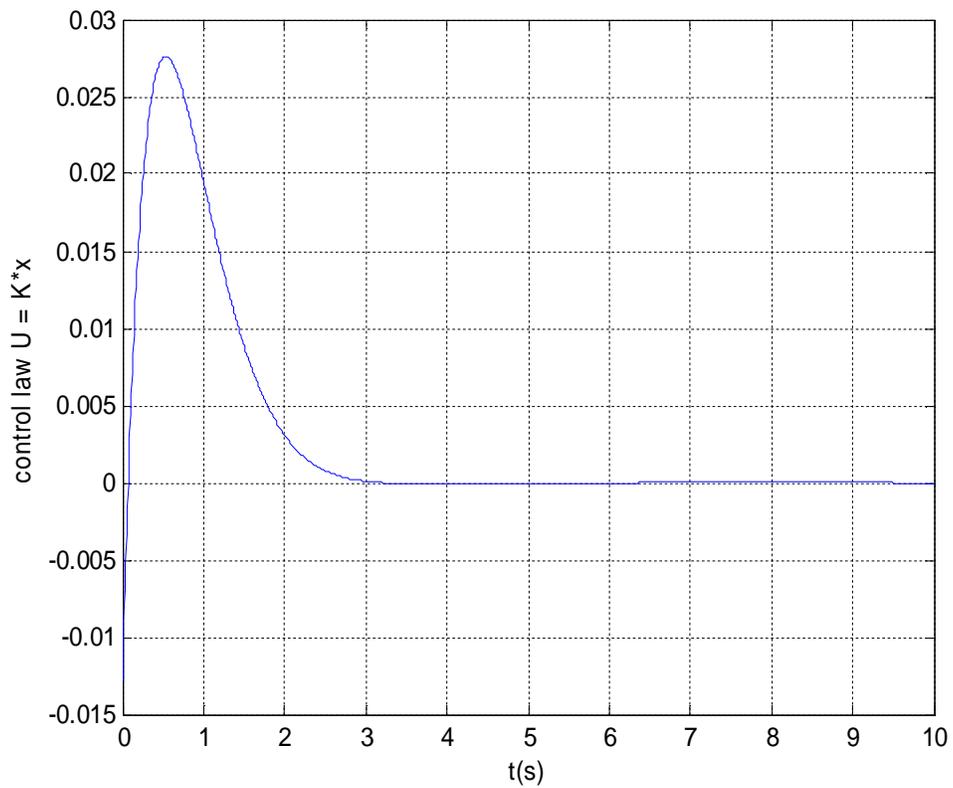
$$K_2 = [ 1.9178 \quad 0.2585 \quad 0.1424 \quad 0.0904 ]$$

Alocando os pólos em:

$$\rho_3 = [ 2+j \quad 7.7+25j \quad 7.7-25j \quad 2-j ]$$







Apesar de não termos estipulado valores específicos para um bom controle, podemos observar pela alocação no conjunto de pólos  $\rho_3$  que o bom controle da parte rígida não necessariamente implica num bom controle da parte flexível.

## 4.2.2 SELEÇÃO DOS MELHORES PÓLOS

A seleção dos melhores pólos será feita analisando as características de resposta do sistema em diversas simulações computacionais, escolhendo os que obtiverem a melhor performance, baseada nos critérios de tempo de estabelecimento, porcentagem de overshoot e valor dos ganhos de realimentação.

### 4.2.2.1 CRITÉRIO DE NYQUIST

O critério de Nyquist relaciona a estabilidade de um sistema à malha fechada a resposta de frequência e a localização dos pólos a malha aberta. Desta maneira, o conhecimento da resposta de frequência do sistema à malha aberta conduz a informação sobre a estabilidade do sistema em malha fechada. [8]

A fim de minimizar o esforço de controle e, portanto a manifestação de efeitos não lineares e dinâmica de alta frequência, os pólos de malha fechada devem estar localizados tão próximos quanto possível dos pólos de malha aberta . [9].

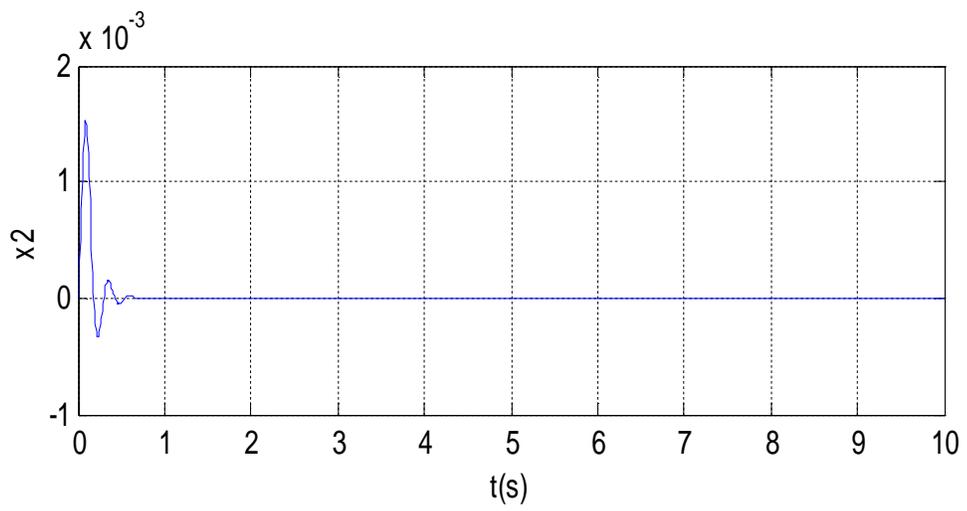
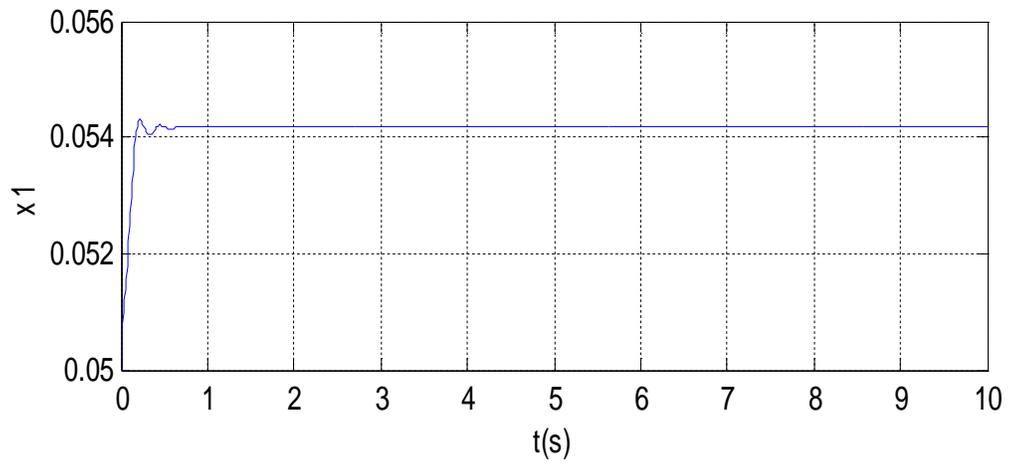
O sistema em malha aberta possui pólos em:

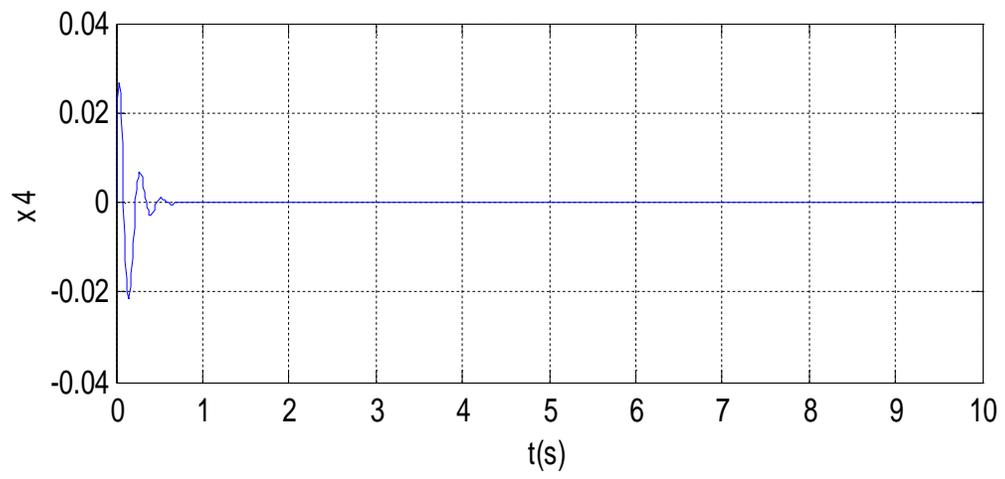
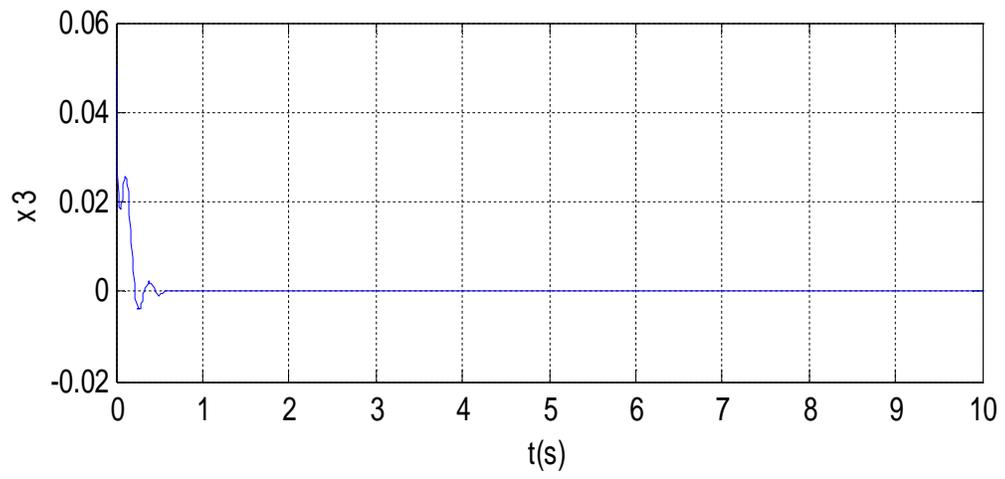
$$\rho_4 = [ 0 \quad -7.7771+25.1275j \quad -7.7771-25.1275j \quad -16.4202 ]$$

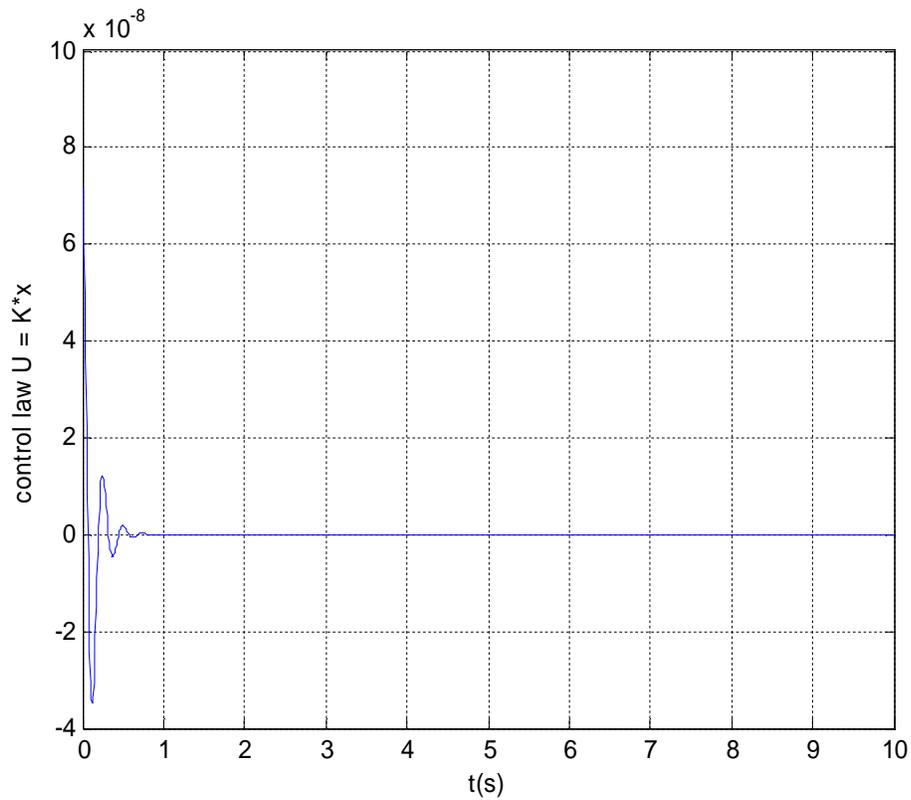
Utilizando a condição inicial:

$$x = [ 0 \quad 0.05 \quad 0 \quad 0 ]$$

Alocando-se os pólos em  $\rho_4$ , observamos que as respostas do sistema estão próximas as desejadas.





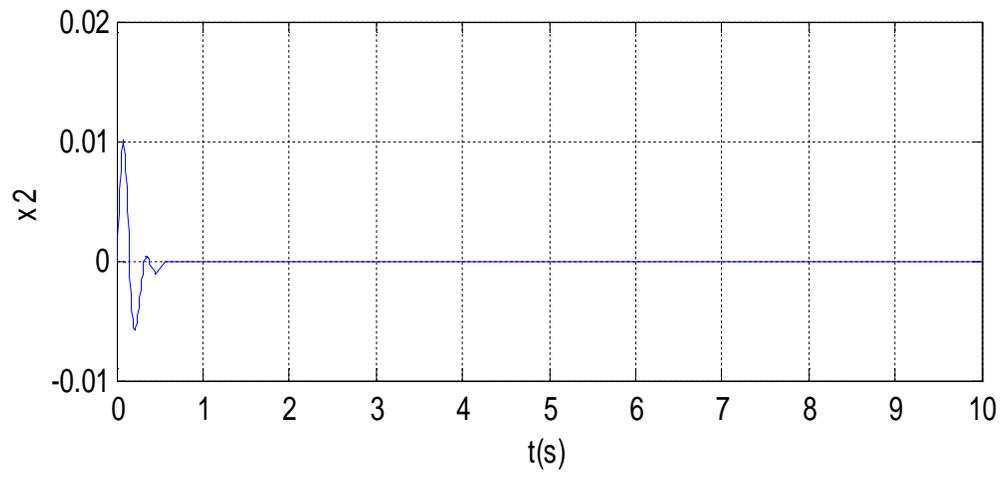
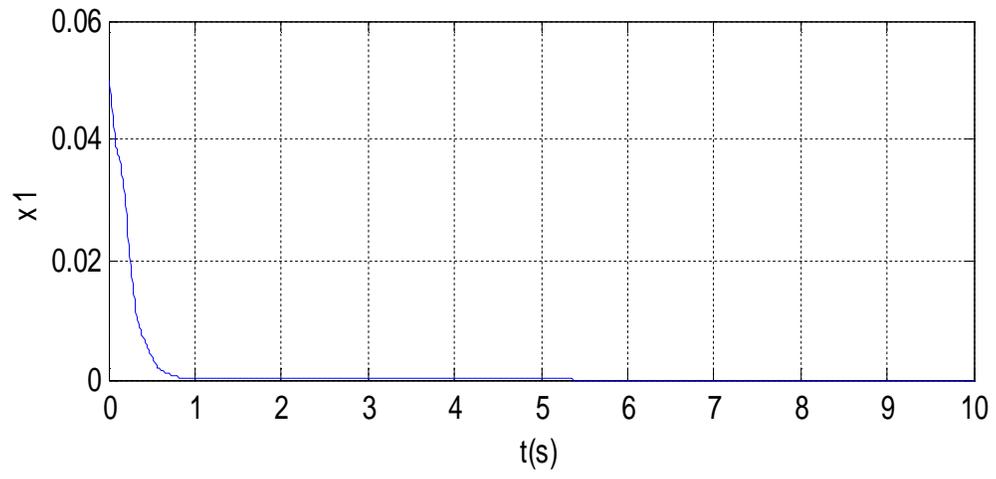


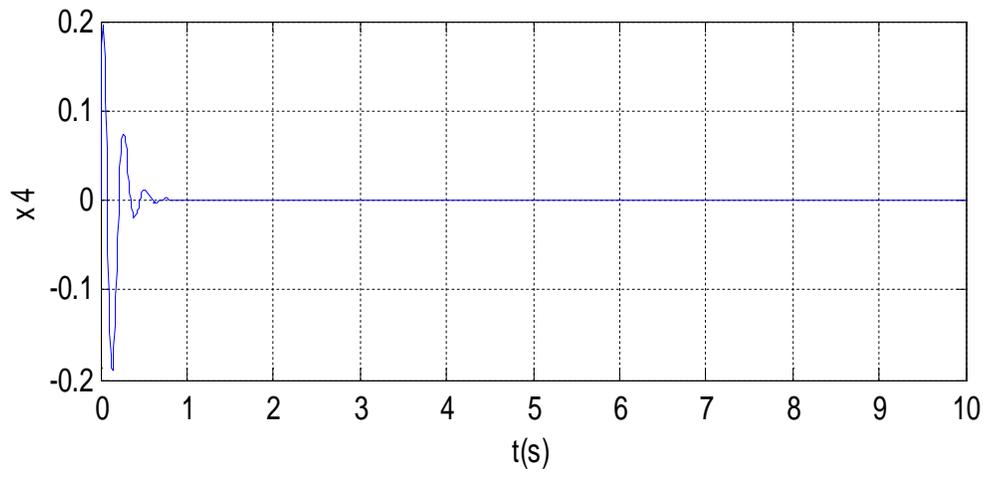
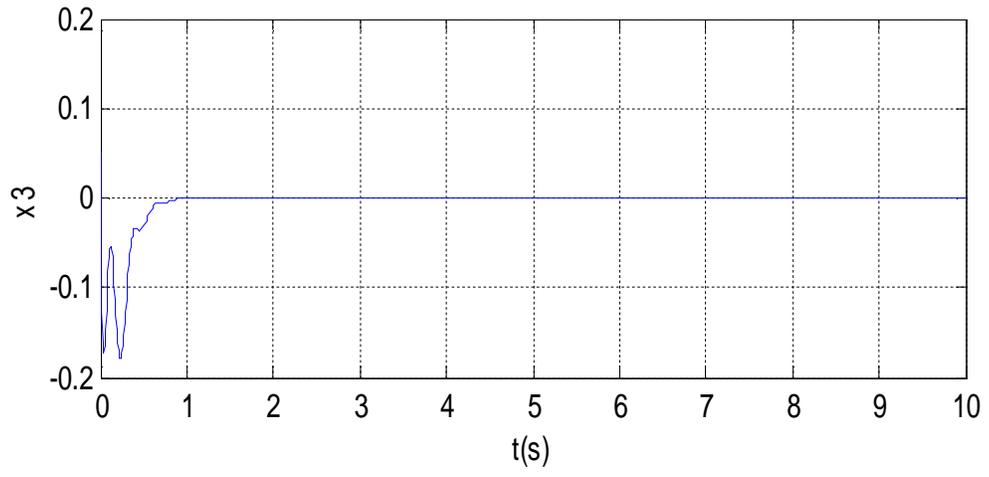
Matriz do ganho de realimentação alocando-se os pólos em  $\rho_4$ :

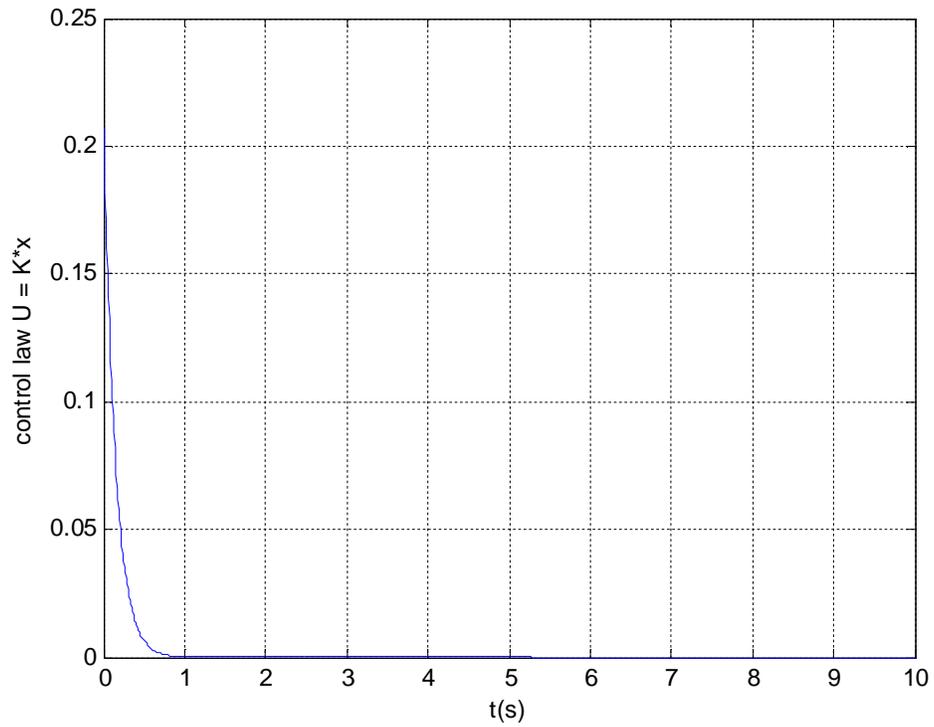
$$K = 1.0e-004 * [ 0 \quad -0.3762 \quad 0.0143 \quad 0.0143 ]$$

Após diversas simulações computacionais realizadas, mantendo os pólos o mais próximo possível de  $\rho_4$ , observou que a melhor resposta dinâmica é dada pelo conjunto de pólos:

$$\rho_5 = [ 7 \quad 7.7+25j \quad 7.7-25j \quad 16 ]$$







$$K = [ 3.8357 \quad 0.2221 \quad 0.3054 \quad 0.1912 ]$$

O conjunto de pólos  $\rho_5$  foi selecionado principalmente com relação ao tempo de estabelecimento e os módulos dos elementos de  $K$ .

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho desenvolveu-se o estudo da dinâmica e do sistema de controle de um satélite rígido flexível. O modelo matemático foi obtido empregando-se uma configuração do tipo massa-mola para representar o acoplamento rígido e flexível do modelo. As equações governantes do movimento foram deduzidas utilizando-se o formalismo lagrangeano. O sistema de controle foi projetado aplicando-se a técnica de Alocação de Pólos para o sistema de equações na forma de espaço de estados, assumindo que todos os estados estão disponíveis para a realimentação.

A partir da matriz de representação completa do sistema na forma de variáveis de estados podemos observar os acoplamentos existentes no sistema, o que facilitou a identificação dos pólos dominantes. O critério de Nyquist favoreceu a identificação da região de pólos favoráveis. De posse destas informações, não se encontrou muita dificuldade para aplicação do método de alocação de pólos.

Aplicou-se a lei de controle, empregando uma matriz de ganho de maneira que o sistema fosse controlado. Através de varias simulações observou-se que a melhor resposta dinâmica , principalmente com relação ao tempo de estabelecimento e os módulos dos elementos de [ K ] foram dadas pelo conjunto de pólos  $\rho_5$ .

## 6.BIBLIOGRAFIA

- [1] CRAIG, R. R.; SU, T. J. A review of model reduction methods for structural control design. **Dynamics and Control of Structure in Space**, p. 121-134, 1990.
- [2] HOOKER, W. W. Equations of motion for interconnected rigid and elastic bodies - a derivation independent of angular momentum. **Celestial Mechanics**, v. 11, p. 337-359, May 1975.
- [3] JUNKINS, J. L.; KIM, Y. **Introduction to dynamics and control of flexible structures**. Washington, D.C.: AIAA, 1993.
- [4] MEIROVITCH, L.; KWAK, M. K. Dynamics and control of spacecraft with retargeting flexible antennas. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 13, p. 241-248, 1990.
- [5] QUANSER homepage. jan 2009. Disponível em: <<http://www.quanser.com/>> .
- [6] OGATA, KATSUHIKO. **Engenharia de controle moderno**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007
- [7] QUANSER. **SRV02-Series (Flexible Link) Student Handout**.
- [8] Controle Dinamico – Disponível em:  
< [http://www.ene.unb.br/~egito/Controle\\_Dinamico/CDin13.pdf](http://www.ene.unb.br/~egito/Controle_Dinamico/CDin13.pdf)>
- [9] Prof. JMGomes –UFRGS : Disponível em:  
< <http://www.ece.ufrgs.br/~jmgomes/pid/Apostila/apostila/node44.html>:>