



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-13002-PRE/8279**

**PROPAGAÇÃO DA ATITUDE DE SATÉLITES ARTIFICIAIS  
COM QUATERNIONS E TORQUE MAGNÉTICO DEVIDO AS  
CORRENTES DE FOUCAULT**

Joyce Evania da Costa Toledo Teixeira\*

\*Bolsista FEG/ UNESP

Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq/INPE), orientado pelo  
Dr. Valcir Orlando



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

## **PROPAGAÇÃO DA ATITUDE DE SATÉLITES ARTIFICIAIS COM QUATERNIONS E TORQUE MAGNÉTICO DEVIDO AS CORRENTES DE FOUCAULT**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Joyce Evania da Costa Toledo Teixeira (FEG/UNESP, Bolsista  
PIBIC/CNPq)

E-mail: [j.evania@zipmail.com.br](mailto:j.evania@zipmail.com.br)

Dr. Valcir Orlando (CCS/INPE, Orientador)

E-mail: [valcir@ccs.inpe.br](mailto:valcir@ccs.inpe.br)

### **COLABORADORES**

Dra. Maria Cecília Zanardi (DMA/FEG/UNESP)

Junho de 2005

# SUMÁRIO

## **CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO**

- 1.1 Comentários iniciais
- 1.2 Objetivos
- 1.3 Metodologia

## **CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

- 2.1 Representação da atitude em termos dos quaternions
- 2.2 Equações do Movimento Rotacional
  - 2.2.1 Equações de Euler
  - 2.2.2 Equações Cinemáticas em termos dos quaternions

## **CAPÍTULO 3 – TOQUE MAGNETICO DEVIDO AS CORRENTES DE FOUCAULT**

- 3.1 Características do Campo Magnético Terrestre
- 3.2 Componentes do Campo Magnético Terrestre no sistema equatorial
- 3.3 Componentes do Campo Magnético Terrestre no sistema do satélite
- 3.4 Componentes do torque magnético devido as correntes de Foucault no sistema do satélite

## **CAPÍTULO 4 – RESULTADOS E ANÁLISES**

- 4.1 Características do satélites
  - 4.1.1 Resultados para o SCD1
    - A) Simulações para um intervalo de tempo de 20s
    - B) Simulações para um intervalo de tempo de 3000s
  - 4.1.2 Resultados para o SCD2
    - A) Simulações para um intervalo de tempo de 20s
    - B) Simulações para um intervalo de tempo de 3000s
    - C) Simulações para um intervalo de tempo de 6000s
- 4.2 Análise dos resultados

## **CAPÍTULO 5 – COMENTÁRIOS FINAIS**

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

## **CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO**

### **1.1 COMENTÁRIOS INICIAIS**

A interação entre fontes de campo magnético presentes no satélite e o campo magnético terrestre tem sido, desde o advento dos satélites artificiais, objeto de vários estudos relacionados com a análise da atitude de satélites artificiais. O enfoque principal deste trabalho é a determinação das componentes do torque magnético devido às correntes de Foucault, utilizando o modelo de dipolo para o campo geomagnético e a matriz de atitude em termos dos quatérnios, para o caso de satélite estabilizado por rotação. O torque magnético devido às correntes de Foucault ocorre devido ao movimento de rotação do satélite e às correntes induzidas de Foucault que circulam pelas superfícies metálicas do satélite. O principal efeito deste torque é o decaimento do módulo de velocidade de rotação do satélite. As equações do movimento serão descritas pelas equações cinemáticas dos quatérnios e pelas equações de Euler, onde são incluídas as componentes do torque magnético devido às correntes de Foucault. Uma solução numérica das equações é fornecida pelo método de Kunge Kutta de 8ª ordem.

Na seqüência de apresentação deste relatório, no Capítulo 2 são introduzidas as fundamentações teóricas necessárias para o desenvolvimento do projeto, relacionadas com a representação de atitude de satélites artificiais e com as equações do movimento. No Capítulo 3 é introduzido o torque magnético devido às correntes de Foucault, sendo determinadas as componentes deste torque no sistema de eixos principais de inércia do satélite. No Capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos nas simulações realizadas. O Capítulo 5 apresenta a discussão dos resultados e comentários finais sobre o trabalho.

Este projeto foi inicialmente desenvolvido pelo bolsista Domingos Sávio dos Santos Rodrigues (de agosto de 2004 até fevereiro de 2005).

### **1.2 OBJETIVO**

O objetivo deste projeto é propagar a atitude de satélites artificiais estabilizados por rotação incluindo as componentes do torque magnético devido às correntes de Foucault nas equações do movimento rotacional, utilizando o modelo de dipolo para o campo geomagnético. A atitude do satélite é representada pelos quatérnios. O decaimento do módulo da velocidade de rotação, devido ao torque magnético devido às correntes de Foucault, deve ser verificado pelos resultados obtidos.

### 1.3 METODOLOGIA

As ferramentas básicas necessárias para o desenvolvimento do projeto foram estudadas pela bolsista com a supervisão dos orientadores. Inicialmente foi feito o estudo do campo magnético terrestre e do torque magnético devido às correntes de Foucault (Wertz, 1978; Kuga e al, 1986; Quirelli, 2002) através de discussões e referências fornecidas pelos orientadores. As componentes do torque no sistema de eixos principais do satélite foram também determinadas, utilizando-se a matriz de atitude (que relaciona o sistema equatorial com o sistema de eixos principais) descrita em termos dos quatérnios. A seguir as componentes do torque foram incluídas nas equações de Euler.

Na segunda etapa uma integração numérica das equações do movimento rotacional (equações de Euler e equações cinemáticas) com inclusão do torque magnético devido às correntes de Foucault foi realizada. O programa numérico foi inicialmente desenvolvido pelo bolsista Domingos Sávio dos Santos Rodrigues.

A terceira etapa consta da comparação dos resultados obtidos para as equações do movimento com a inclusão do torque devido as correntes de Foucault e as soluções do movimento livre de torques externos. A etapa final consta da análise dos resultados e confecção do relatório final sobre o trabalho.

## CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEORICA

### 2.1 -REPRESENTAÇÃO DA ATITUDE EM TERMOS DOS QUATERNIOS

A *Atitude* é a maneira como o veículo espacial se orienta no espaço. Para analisar a orientação do veículo espacial relacionamos um sistema de coordenadas fixo no centro de massa (CM) do satélite (o qual acompanha a rotação do satélite em torno de seu CM) e um sistema inercial, utilizando a matriz de rotação que relaciona estes dois sistemas. Neste trabalho, o sistema que acompanha a rotação do satélite é o sistema de eixos principais de inércia do satélite, *Oxyz*, denominado de **sistema do satélite**, e o sistema inercial é o sistema equatorial, *OXYZ*.

Os elementos da matriz de rotação podem ser obtidos por diferentes parametrizações como ângulos de Euler, variáveis de Andoyer e quaternios (Moore & Pisacane, 1994; Shuster, 1993; Zanardi, 2000).

Para evitar as singularidades nas equações cinemáticas geradas nos Ângulos de Euler, podemos utilizar os quaternios, que são definidos a seguir. O quaternio  $q$  é um vetor  $4 \times 1$ , sendo as três primeiras componentes vetoriais, e a quarta escalar, conforme a definição a seguir:

$$q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^t = [\bar{q} \ q_4]^t \quad (01)$$

As componentes vetoriais ( $\bar{q}$ ) e escalar ( $q_4$ ) podem ser expressas em função do ângulo de rotação ( $\Phi$ ) e do eixo de rotação  $\bar{n}$  através de:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \text{sen}\left(\frac{\Phi}{2}\right) \bar{n} \quad \text{e} \quad q_4 = \text{cos}\left(\frac{\Phi}{2}\right) \quad (02)$$

É possível facilmente provar que o módulo do quaternio é 1, visto que  $\hat{n}$  é um vetor unitário na direção do vetor velocidade de rotação. A matriz de atitude em termo dos quaternios é representada por (Shuster, 1993):

$$A = (q_4^2 - |\bar{q}|^2)I + 2\bar{q}\bar{q}^T - 2q_4[[\bar{q}]] \quad (03)$$

$$A = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_4q_3) & 2(q_3q_1 - q_4q_2) \\ 2(q_2q_1 - q_4q_3) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_3q_2 + q_4q_1) \\ 2(q_3q_1 + q_4q_2) & 2(q_3q_2 - q_4q_1) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (04)$$

$$\text{em que } [[\bar{q}]] = \begin{bmatrix} 0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Conhecendo-se os elementos  $A(i, j)$  da matriz de atitude  $A$ , para  $q_4 \neq 0$ , cada elemento do quaternio pode ser determinado por (Shuster, 1993):

$$\begin{aligned}
 q_4 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + A(1,1) + A(2,2) + A(3,3)} \\
 q_1 &= \frac{1}{4q_4} [A(2,3) - A(3,2)] \\
 q_2 &= \frac{1}{4q_4} [A(3,1) - A(1,3)] \\
 q_3 &= \frac{1}{4q_4} [A(1,2) - A(2,1)]
 \end{aligned} \tag{05}$$

Caso  $q_4 = 0$ , podem-se obter as componentes do quaternio de outras maneiras, visto que as equações (05) não são válidas (Tréz, 1998; Shuster, 1993).

## 2.2 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO ROTACIONAL

O movimento rotacional de um veículo espacial é descrito por equações dinâmicas e cinemáticas. As equações dinâmicas são também denominadas de equações de Euler e apresentam relações entre as componentes dos torques externos e a variação das componentes da velocidade de rotação (ou outras variáveis a elas relacionadas). As equações cinemáticas apresentam as relações entre as componentes da velocidade e o quaternio de atitude (ou os ângulos de Euler), que determinam a orientação do satélite no espaço.

Para determinar a variação da atitude com o tempo é necessário integrar estas equações. Os torques atuantes sobre o satélite dependem de uma forma não linear da orientação deste no espaço e assim estes dois grupos de equações se interagem, dificultando sua integração analítica. Os torques ambientais atuantes sobre o veículo espacial são de pequena magnitude e como atuam permanentemente sobre o satélite precisam ser considerados e modelados cuidadosamente, de modo a melhor representar as condições ambientais as quais os veículos estão sujeitos. Neste trabalho o torque externo a ser incluído é o torque magnético devido às correntes de Foucault.

### 2.2.1 - EQUAÇÕES DE EULER

As taxas de variação das componentes da velocidade de rotação podem ser obtidas a partir das equações de Euler (Zanardi, 1990; Wertz, 1978):

$$\dot{p} = \frac{M_x}{I_x} + \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) \cdot q \cdot r \tag{06a}$$

$$\dot{q} = \frac{M_y}{I_y} + \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) \cdot p \cdot r \tag{06b}$$

$$\dot{r} = \frac{M_z}{I_z} + \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right) \cdot p \cdot q \tag{06c}$$

em que:

$I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  são os momentos principais de inércia do satélite,

$M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  são as componentes dos torques externos atuantes no satélite no sistema do satélite e

$p$ ,  $q$  e  $r$  são as componentes da velocidade de rotação no sistema do satélite.

## 2.2.2 - EQUAÇÕES CINEMÁTICAS EM TERMOS DOS QUATERNIOS

As equações cinemáticas que descrevem a taxa de variação das componentes do quaternio de atitude, devido à rotação do satélite, são dadas por (Moore e Pisacane, 1994):

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2}[p \cdot q_4 - q \cdot q_3 + r \cdot q_2] \quad (07a)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{2}[q \cdot q_4 - r \cdot q_1 + p \cdot q_3] \quad (07b)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{2}[r \cdot q_4 - p \cdot q_2 + q \cdot q_1] \quad (07c)$$

$$\dot{q}_4 = \frac{1}{2}[p \cdot q_1 + q \cdot q_2 + r \cdot q_3] \quad (07d)$$

Nas equações cinemáticas com o quaternio, não existe a possibilidade de ocorrer um denominador nulo, o que evita as singularidades, como as que ocorrem nos Ângulos de Euler (Rodrigues, 2002, Shuster, 1993).

Como será visto no item seguinte, o torque magnético residual dependerá dos elementos da matriz de atitude que relaciona o sistema de eixos principais e o sistema equatorial. Deste modo, as equações (06) e (07) se interagem, formando um sistema de sete equações diferenciais. Na determinação da solução destas equações será considerado o movimento orbital descrito pelo movimento kepleriano (Bate, 1971).

Quando não se consideram os torques externos atuantes no satélite artificial, as equações (06) e (07) tornam-se desacopladas. Neste caso, observa-se que o vetor velocidade de rotação descreve um movimento cônico em torno do eixo de simetria do veículo espacial. Quando o satélite não é simétrico, a componente da velocidade angular de rotação em Oz também terá uma variação periódica.

### CAPÍTULO 3 - TORQUE MAGNÉTICO DEVIDO ÀS CORRENTES DE FOUCAULT

Aqui será analisado o torque magnético atuante sobre o satélite. Inicialmente discutem-se algumas características do campo magnético terrestre e a seguir analisa-se o torque magnético residual, obtendo-se as componentes deste torque no sistema do satélite Oxyz. Neste trabalho, o processo de integração das equações de Euler utilizará apenas o torque magnético residual médio, cujo cálculo similar para as componentes foi realizado analiticamente em Quirelli (2002).

O torque de origem magnética atuante em um satélite artificial resulta da interação entre o campo magnético do satélite e o campo geomagnético. As principais fontes causadoras do torque magnético são o momento magnético do satélite, as correntes de Foucault e a histerese, sendo o momento magnético do satélite usualmente a fonte dominante. Em geral no projeto do satélite é selecionado um material estrutural adequado de modo que as demais fontes resultem em torques magnéticos negligenciáveis.

O torque magnético pode ser subdividido em:

a) Torque Magnético Residual: este torque ocorre principalmente devido ao momento magnético ao longo do eixo de rotação do satélite (Wertz, 1978) que contribui para uma lenta precessão do eixo de rotação e pode ser obtido por:

$$\vec{N}_r = \vec{M} \times \vec{B} \quad (08)$$

em que  $\vec{B}$  é o campo magnético terrestre local e  $\vec{M}$  é a soma dos momentos magnéticos individuais do satélite.

b) Torque devido às correntes de Foucault: este torque ocorre devido ao movimento de rotação do satélite e às correntes induzidas de Foucault que circulam pelas superfícies metálicas do satélite causando um decaimento de perfil exponencial da velocidade de rotação. Tal torque pode ser descrito por (Wertz, 1978):

$$\vec{N}_i = p \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{W}) \quad (09)$$

em que  $\vec{W}$  é a velocidade angular de rotação,  $\vec{B}$  é o campo magnético terrestre local, e  $p$  é um coeficiente que depende da geometria do satélite e da condutividade do material.

c) Torque de Histerese: este torque é causado pela energia perdida na forma de calor durante o movimento de rotação do satélite, devido ao atrito com o campo geomagnético, sendo que os efeitos deste torque são apreciáveis apenas em materiais nos quais variações no campo magnético local causam grandes variações no momento magnético do satélite.

Neste trabalho é considerada apenas a influência do torque magnético às correntes de Foucault sobre o satélite estabilizado por rotação. Antes da discussão acerca o torque

magnético, são apresentadas algumas características do campo magnético terrestre, uma vez que a modelagem das componentes do campo geomagnético são necessárias no cômputo das componentes do torque magnético devido às correntes de Foucault.

### 3.1 - CARACTERÍSTICAS DO CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE

O primeiro tratado científico acerca do campo magnético terrestre foi escrito pelo físico e médico inglês William Gilbert (1544-1603) em sua obra “Magneto”, publicado em Londres em 1600. Em 1701, o físico e astrônomo Edmund Halley (1656-1742) também inglês, publicou a primeira carta de declinações magnéticas, que havia preparado, realizando trabalhos e pacientes medições nas águas do Atlântico.

No século XIX, o químico e físico Michael Faraday (1791-1867) elaborou a difícil noção de campo e empregou pela primeira vez, o termo “Campo Magnético”. Em 1838, Karl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático, astrônomo e físico alemão, encontrou uma representação matemática aproximada para o campo magnético terrestre, que assumiu a forma de uma soma de termos conhecida como harmônicos esféricos. Como o campo magnético gira com a Terra, sendo uma indicação clara que o campo se origina da Terra, e devido à natureza esférica da Terra, o potencial magnético terrestre passou a ser convenientemente expresso em harmônicos esféricos como (Wertz, 1978):

$$V(r, \theta, \phi) = R_T \sum_{n=1}^k \left( \frac{R_T}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) P_n^m(\theta) \quad (10)$$

em que  $R_T$  é o raio equatorial da Terra;  $g_n^m, h_n^m$  são os coeficientes Gaussianos;  $P_n^m(\theta)$  são polinômios associados de Legendre;  $r, \theta, \phi$  representam a distância geocêntrica, a co-latitute e a longitude a leste de um ponto no espaço, respectivamente.

O truncamento no desenvolvimento da série de harmônicos esféricos da equação acima estabelece o modelo a ser considerado para o campo geomagnético, isto é, se  $n$  vale 1 ou 2, o potencial é denominado modelo de dipolo ou quadripolo, respectivamente, sendo que a partir de  $n$  igual a 3 o potencial é denominado de múltiplos pólos. Os coeficientes gaussianos são determinados empiricamente pelo método de mínimos quadrados para medidas do campo e são encontrados no Internacional Geomagnetic Reference Field, sendo que vários valores destes coeficientes são apresentados em Wertz (1978), para a época de 1975.

O Campo Geomagnético pode ser expresso como o gradiente de um potencial escalar  $V$  (Wertz, 1978), ou seja:

$$\vec{B} = -\nabla V \quad (11)$$

Neste trabalho consideraremos que o potencial escalar ( $V$ ) de um dipolo magnético pode ser expresso por (Thomas & Capellari, 1963):

$$V = \frac{-\ell}{4\pi\mu_0} \frac{\hat{k}_m \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (12)$$

em que  $\mu_0$  é a permeabilidade do espaço livre igual a  $4\pi \times 10^{-7}$  Weber/ampere metro (Thomas & Capellari, 1964);  $\vec{\ell}$  é o vetor do momento magnético do campo terrestre cuja magnitude é igual a  $10^{17}$  Weber-metro (Thomas & Capellari, 1964);  $\hat{k}_m$  é o vetor unitário que descreve a direção do momento geomagnético;  $\vec{r}$  é o vetor posição do centro de massa do satélite ao centro de massa da Terra (coincidente com o centro do dipolo do campo geomagnético). Nestas unidades a parcela  $\frac{\ell}{4\pi\mu_0}$  é dada em

Ampere-metro quadrado, mas nas equações do movimento é necessário que seja dada em Weber-metro. De acordo com WERTZ (1978), esta parcela assume o valor de  $7.943 \times 10^{15}$  Weber- metro.

### 3.2 - COMPONENTES DO CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE NO SISTEMA EQUATORIAL

Consideremos o vetor posição do satélite  $\vec{r}$  expresso no sistema magnético ( sistema associado com o vetor de dipolo, que se relaciona com o sistema equatorial através dos ângulos  $\beta$  e  $\eta$  que definem a orientação do vetor de dipolo, sendo  $\beta$  a inclinação do vetor de dipolo em relação ao eixo equatorial OZ e  $\eta$  o argumento do nodo ascendente do equador geomagnético, como mostra a Figura 1):

$$\vec{r} = x_m \hat{i}_m + y_m \hat{j}_m + z_m \hat{k}_m \quad (13)$$

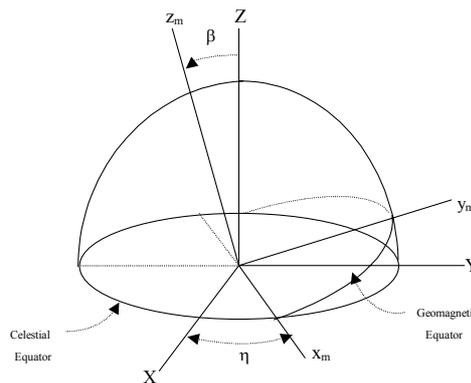


FIGURA 1 - Sistema Magnético ( $Ox_m y_m z_m$ ) e sistema Equatorial (OXYZ).

(Fonte: Adaptado de Quirelli(2002))

Substituindo o potencial do dipolo geomagnético, dado por (12), em (11) o campo magnético da Terra é obtido por:

$$\vec{B} = \frac{-\ell}{4\pi\mu_0} \nabla \cdot \left( \frac{\vec{z}_m}{r^3} \right) \quad (14)$$

em que:

$$r^3 = \left( x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 \right)^{3/2} \quad (15)$$

Substituindo (15) em (14) e evoluindo os cálculos obtemos:

$$\vec{B} = \frac{-\ell r^2}{4\pi\mu_0 r^5} \left[ 3x_m z_m \hat{i}_m + 3y_m z_m \hat{j}_m + (3z_m^2 - r^2) \hat{k}_m \right] \quad (16)$$

Sejam as coordenadas normalizadas das componentes do vetor posição  $\vec{r}$ :

$$\frac{x_m}{r} = r_x ; \quad \frac{y_m}{r} = r_y ; \quad \frac{z_m}{r} = r_z \quad (17)$$

Substituindo (17) em (16), o campo magnético  $\vec{B}$  pode ser expresso no sistema magnético por:

$$\vec{B} = \frac{-\ell}{4\pi\mu_0 r^3} \left[ 3r_x r_z \hat{i}_m + 3r_y r_z \hat{j}_m + (3r_z^2 - 1) \hat{k}_m \right] \quad (18)$$

Das equações (13) e (17) tem-se que:

$$3(r_x \hat{i}_m + r_y \hat{j}_m + r_z \hat{k}_m) r_z = \frac{3\vec{r} z_m}{r^2} \quad (19a)$$

Se  $\hat{i}_s$  é o vetor unitário ao longo do vetor posição, então;

$$\vec{r} = r \hat{i}_s \quad (19b)$$

$$z_m = \vec{r} \cdot \hat{k}_m = r (\hat{i}_s \cdot \hat{k}_m) \quad (19c)$$

e substituindo (19b) e (19c) em (19a) temos:

$$3(r_x \hat{i}_m + r_y \hat{j}_m + r_z \hat{k}_m) = 3(\hat{i}_s \cdot \hat{k}_m) \hat{i}_s \quad (20)$$

Assim, utilizando (20), a equação (18) pode ser re-escrita como:

$$\vec{B} = \frac{\ell}{4\pi\mu_0 r^3} \left[ \hat{k}_m - 3(\hat{i}_s \cdot \hat{k}_m) \hat{i}_s \right] \quad (21)$$

Os vetores unitários  $\hat{i}_s$  e  $\hat{k}_m$  podem ser expressos no sistema equatorial. A Figura 2 apresenta o sistema equatorial (OXYZ), o sistema orbital (Ox<sub>s</sub>y<sub>s</sub>z<sub>s</sub>) e os elementos orbitais: longitude do nodo ascendente,  $i$  inclinação orbital,  $w$  argumento do pericentro. Para se obter o vetor unitário  $\hat{i}_s$  no sistema equatorial é utilizado os ângulos

de Euler, num conjunto de três rotações consecutiva ( ZXZ), necessárias para se passar de um sistema de coordenadas para outro:

- rotação  $\Omega$  em OZ ;
- rotação I em OX' ;
- rotação  $(\omega + \nu)$  OZ.

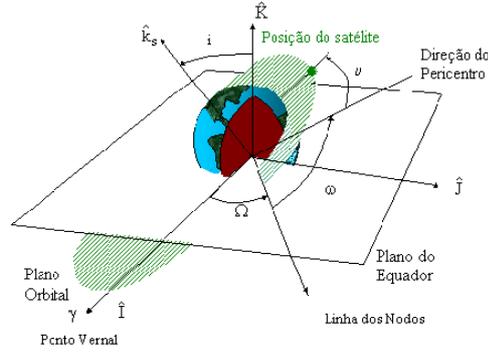


Figura 2 - Sistema Equatorial ( $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ ) e Sistema Orbital ( $\hat{i}_s, \hat{j}_s, \hat{k}_s$ ).  
( Fonte: Adaptado de Bate et al ( 1971))

Deste modo, utilizando a matriz de rotação entre estes dois sistemas, temos:

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_s \\ \hat{j}_s \\ \hat{k}_s \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \\ \hat{K} \end{pmatrix} \quad (22)$$

onde  $R_1 = R_Z(\omega + \nu)R_X(I)R_Z(\Omega)$

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos(\omega + \nu) & \text{sen}(\omega + \nu) & 0 \\ -\text{sen}(\omega + \nu) & \cos(\omega + \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & \text{sen} I \\ 0 & -\text{sen} I & \cos I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega & \text{sen} \Omega & 0 \\ -\text{sen} \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} c(\omega + \nu)c\Omega - s\Omega s(\omega + \nu)cI & c(\omega + \nu)s\Omega + s(\omega + \nu)cIc\Omega & s(\omega + \nu)sI \\ -s(\omega + \nu)c\Omega - c(\omega + \nu)cIs\Omega & -s(\omega + \nu)s\Omega + c(\omega + \nu)cIc\Omega & c(\omega + \nu)sI \\ sIs\Omega & -sIc\Omega & cI \end{bmatrix} \quad (24)$$

onde: c= cosseno ; s = seno

Substituindo a equação (24) na equação (22) obtemos:

$$\begin{aligned}\hat{i}_s &= [c(\omega + \nu) c\Omega - s\Omega s(\omega + \nu) cI] \hat{I} + [c(\omega + \nu) s\Omega + s(\omega + \nu) cI c\Omega] \hat{J} + [s(\omega + \nu) sI] \hat{K} \\ \hat{j}_s &= [-s(\omega + \nu) c\Omega - c(\omega + \nu) cI s\Omega] \hat{I} + [-s(\omega + \nu) s\Omega + c(\omega + \nu) cI c\Omega] \hat{J} + [c(\omega + \nu) sI] \hat{K} \\ \hat{k}_s &= (sI s\Omega) \hat{I} + (-sI c\Omega) \hat{J} + cI \hat{K}\end{aligned}\quad (25)$$

Para se obter o vetor unitário  $\hat{k}_m$  no sistema equatorial, é utilizado um conjunto de duas rotações:

- rotação de um ângulo  $\eta$  em torno de  $O'Z$ , tal que  $R_Z(\eta)$ ;
- rotação de um ângulo  $\beta$  em torno de  $O'x_m$ , tal que  $R_X(\beta)$

Deste modo utilizando a matriz de rotação que relaciona os sistemas temos:

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_m \\ \hat{j}_m \\ \hat{k}_m \end{pmatrix} = R_2 \begin{pmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \\ \hat{K} \end{pmatrix}\quad (26)$$

em que  $R_2 = R_X(\beta)R_Z(\eta)$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (27)$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ -\cos \beta \sin \eta & \cos \beta \cos \eta & \sin \beta \\ \sin \beta \sin \eta & -\sin \beta \cos \eta & \cos \beta \end{bmatrix}\quad (28)$$

Substituindo a equação (28) na equação (26), obtemos:

$$\begin{aligned}\hat{i}_m &= \cos \eta \hat{I} + \sin \eta \hat{J} \\ \hat{j}_m &= -\cos \beta \sin \eta \hat{I} + \cos \beta \cos \eta \hat{J} + \sin \beta \hat{K} \\ \hat{k}_m &= \sin \beta \sin \eta \hat{I} - \sin \beta \cos \eta \hat{J} + \cos \beta \hat{K}\end{aligned}\quad (29)$$

Os vetores  $\hat{i}_s$  e  $\hat{k}_m$ , dados por (25) e (29), respectivamente, podem ser representados na forma:

$$\hat{i}_s = as\hat{I} + bs\hat{J} + cs\hat{K} \quad (30)$$

$$\hat{k}_m = am\hat{I} + bm\hat{J} + cm\hat{K} \quad (31)$$

em que

$$as = c(\omega + \nu)c\Omega - s\Omega s(\omega + \nu)cI \quad (32a)$$

$$bs = c(\omega + \nu)s\Omega + s(\omega + \nu)cIc\Omega \quad (32b)$$

$$cs = s(\omega + \nu)sI \quad (32c)$$

$$am = \text{sen } \beta \text{sen } \eta \quad (32d)$$

$$bm = -\text{sen } \beta \text{cos } \eta \quad (32e)$$

$$cm = \text{cos } \beta \quad (32f)$$

Assim o produto escalar de  $\hat{i}_s$  e  $\hat{k}_m$  é dado por:

$$(\hat{i}_s \circ \hat{k}_m) = (as.am) + (bs.bm) + (cs.cm) = IsKm \quad (33)$$

O campo magnético terrestre  $\vec{B}$  pode ser computado pela equação (21), utilizando (30), (31) e (33), e é expresso no sistema equatorial OXYZ por:

$$\vec{B} = B_X\hat{I} + B_Y\hat{J} + B_Z\hat{K} \quad (34)$$

em que:

$$B_X = \frac{\ell}{4\pi\mu_o r^3} [am - (3IsKm)as] \quad (35a)$$

$$B_Y = \frac{\ell}{4\pi\mu_o r^3} [bm - (3IsKm)bs] \quad (35b)$$

$$B_Z = \frac{\ell}{4\pi\mu_o r^3} [cm - (3IsKm)cs] \quad (35c)$$

com am, bm, cm e IsKm dados em (32) e (33).

### 3.3 - COMPONENTES DO CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE NO SISTEMA DO SATÉLITE

Como os vetores unitários do sistema equatorial se relacionam com os vetores unitários do sistema do satélite através da matriz de rotação em termos dos quatérnions, dada por (04), as componentes do campo geomagnético no sistema do satélite podem

ser determinadas. Deste modo, utilizando a matriz de rotação que relaciona os sistemas temos:

$$\begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \\ \hat{K} \end{bmatrix} = A^t \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix}$$

$$\hat{I} = (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)\hat{i} + 2(q_1q_2 - q_3q_4)\hat{j} + 2(q_1q_3 + q_2q_4)\hat{k}$$

$$\hat{J} = 2(q_1q_2 + q_3q_4)\hat{i} + (-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)\hat{j} + 2(q_2q_3 - q_1q_4)\hat{k}$$

$$\hat{K} = 2(q_1q_3 - q_2q_4)\hat{i} + 2(q_2q_3 + q_1q_4)\hat{j} + (-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)\hat{k}$$

sendo que denotaremos:

$$\hat{I} = q_A\hat{i} + q_B\hat{j} + q_C\hat{k}$$

$$\hat{J} = q_D\hat{i} + q_E\hat{j} + q_F\hat{k}$$

$$\hat{K} = q_G\hat{i} + q_H\hat{j} + q_I\hat{k}$$

(36)

com

$$q_A = (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \quad (37a)$$

$$q_B = 2(q_1q_2 - q_3q_4) \quad (37b)$$

$$q_C = 2(q_1q_3 + q_2q_4) \quad (37c)$$

$$q_D = 2(q_1q_2 + q_3q_4) \quad (37d)$$

$$q_E = (-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \quad (37e)$$

$$q_F = 2(q_2q_3 - q_1q_4) \quad (37f)$$

$$q_G = 2(q_1q_3 - q_2q_4) \quad (37g)$$

$$q_H = 2(q_2q_3 + q_1q_4) \quad (37h)$$

$$q_I = (-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) \quad (37i)$$

Substituindo (36) em (34), determina-se as componentes do campo geomagnético no sistema do satélite Oxyz:

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \quad (38)$$

em que:

$$\begin{aligned} B_x &= [(B_X q_A) + (B_Y q_D) + (B_Z q_G)] \\ B_y &= [(B_X q_B) + (B_Y q_E) + (B_Z q_H)] \\ B_z &= [(B_X q_C) + (B_Y q_F) + (B_Z q_I)] \end{aligned} \quad (39)$$

com  $B_x$ ,  $B_y$  e  $B_z$  dados em (35).

### 3.4 - COMPONENTES DO TORQUE MAGNÉTICO DEVIDO ÀS CORRENTES DE FOUCAULT NO SISTEMA DO SATÉLITE

O torque devido às correntes de Foucault é dado por (09). Seja a velocidade de rotação dada no sistema do satélite por:

$$\vec{W} = p \hat{i} + q \hat{j} + r \hat{k} \quad (40)$$

Substituindo o campo geomagnético velocidade de rotação no sistema do satélite, dados por (38) e (40), respectivamente, na equação (09) e evoluindo os cálculos, este torque é dado por:

$$\vec{M} = M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} M_x &= [B_y (B_x q - B_y p) - B_z (B_z p - B_x r)] \\ M_y &= [B_z (B_y r - B_z q) - B_x (B_x q - B_y p)] \\ M_z &= [B_x (B_z p - B_x r) - B_y (B_y r - B_z q)] \end{aligned} \quad (42)$$

com  $B_x$ ,  $B_y$  e  $B_z$  são dados em (39).

As parcelas do torque  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  deverão ser substituídas nas equações de Euler, dadas por (06), para se determinar uma solução numérica pelo método de Kunge Kutta de 8ª ordem.

## CAPÍTULO 4 - RESULTADOS E ANÁLISES

As equações cinemáticas em termos dos quaternions são dadas por (07) e as equações dinâmicas associadas com as taxas de variações das componentes da velocidade de rotação ( $p$ ,  $q$ ,  $r$ ), são dadas pelas equações (06). Devido à complexidade dessas equações apenas uma abordagem numérica é realizada, através do método de Runge-Kutta de oitava ordem. Neste capítulo, são comparadas as soluções numéricas obtidas para os quaternions e velocidade de rotação, com e sem a inclusão do torque devido às correntes de Foucault. São considerados dados reais dos satélites SCD1 e SCD2. A seguir são apresentados os resultados obtidos para o comportamento dos quaternions e da velocidade de rotação nas simulações realizadas para as condições iniciais dadas na tabela 1, vinculadas as componentes da velocidade angular de rotação  $p_0$ ,  $q_0$  e  $r_0$ , a ascensão reta ( $\alpha$ ) e declinação ( $\delta$ ) do eixo de rotação do satélite. As condições iniciais para os quaternions  $q_{10}$ ,  $q_{20}$ ,  $q_{30}$  e  $q_{40}$  são obtidas a partir da matriz de rotação, determinada em termos da ascensão reta e declinação do eixo de rotação no instante inicial. Os resultados estão apresentados em gráficos e tabelas que mostram a comparação entre os resultados obtidos para o movimento rotacional livre de torques externos e para o caso em que o torque magnético devido às correntes de Foucault está incluído nas equações do movimento. Foram considerados intervalos de tempo de 6000s (aproximadamente 1 período orbital) e de 20s, para mostrar as variações de curto período nas variáveis.

### 4.1- Características dos Satélites

Para as simulações foram utilizadas características físicas e dados de atitude e órbita dos satélites SCD1, do dia 31 de agosto de 1993, e SCD2, do dia 12 de Março de 2002, como mostra a Tabela 01, a qual também apresenta os dados iniciais, o parâmetro de Foucault ( $P$ ), os períodos de rotação e de translação dos satélites.

TABELA 01- Características de SCD1 e SCD2

	SCD1	SCD2
$I_x$	$1,106 \cdot 10^1 \text{ kg m}^2$	$1,233 \cdot 10^1 \text{ kg m}^2$
$I_y$	$1,067 \cdot 10^1 \text{ kg m}^2$	$1,235 \cdot 10^1 \text{ kg m}^2$
$I_z$	$1,300 \cdot 10^1 \text{ kg m}^2$	$1,450 \cdot 10^1 \text{ kg m}^2$
$\alpha$	$278,34^\circ$	$267,84^\circ$
$\delta$	$77,78^\circ$	$56,77^\circ$
$\Omega$	$27,85^\circ$	$209,015^\circ$
$\omega$	$299,48^\circ$	$339,798^\circ$
$I$	$24,96^\circ$	$24,994^\circ$
$e$	0,00453	0,00178
$a$	$7139606,13 \text{ m}$	$7133368,57 \text{ m}$
$r_0$	$85,4 \text{ rpm}$	$33,4 \text{ rpm}$
$p_0 = q_0$	$0 \text{ rpm}$	$0 \text{ rpm}$
$P$	$217,8 \text{ m}^4/\text{ohm}$	$-326,68 \text{ m}^4/\text{ohm}$
Período orbital	6003,75s	5995,93 s
Período rotação	0,703 s	1,799 s

#### 4.1.1- Resultados Obtidos para SCD1

##### A ) Tempo de simulação de 20s

As Figuras 3 a 12 apresentam o comportamento das componentes do quaternion e da velocidade de rotação para um intervalo de tempo de 20 s, enquanto as Figuras 13 a 19 apresentam as diferenças entre as soluções de cada variável sem torque externo e com a inclusão do torque devido às correntes de Foucault.

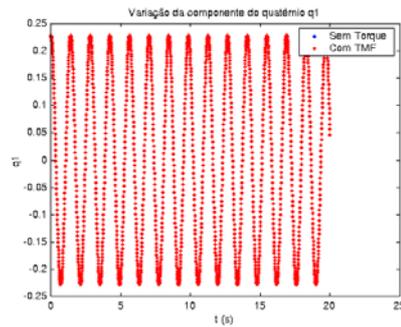


FIGURA 03 – Comportamento da componente do quaternion  $q_1$  com e sem torque.

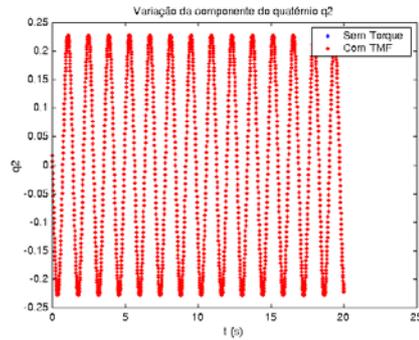


FIGURA 04 - Comportamento da componente do quaternion  $q_2$ , com e sem torque.

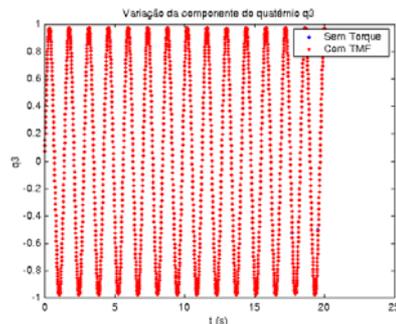


FIGURA 05 - Comportamento da componente do quaternion  $q_3$ , com e sem torque.

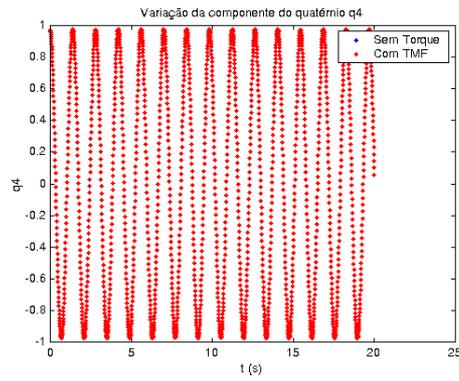


FIGURA 06 - Comportamento da componente do quatérnio  $q_4$ , com e sem torque.

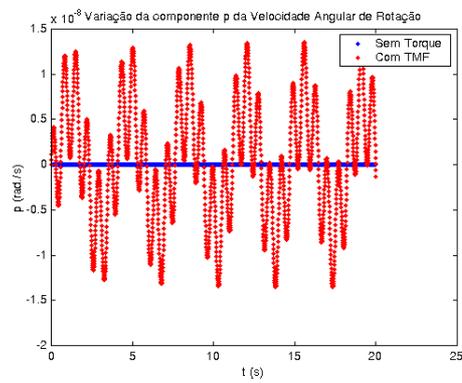


FIGURA07 - Comportamento da componente p da velocidade angular de rotação.

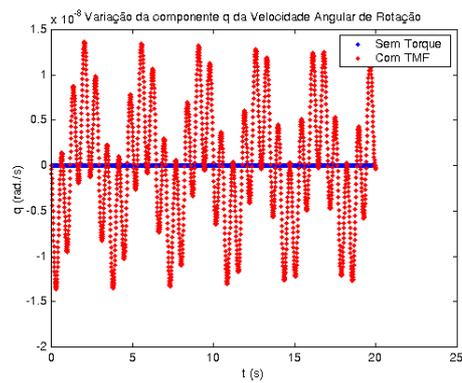


FIGURA 08 - Comportamento da componente q da velocidade angular de rotação.

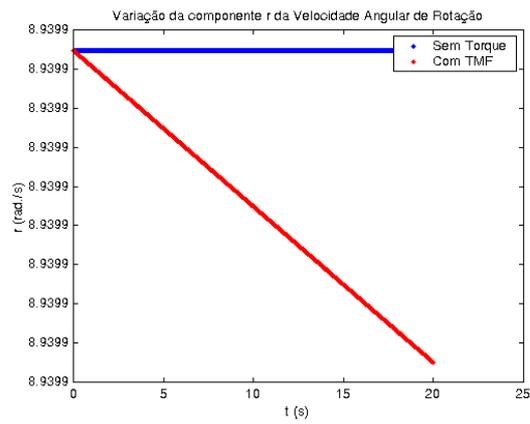


FIGURA 09 - Comportamento da componente r da velocidade angular de rotação.

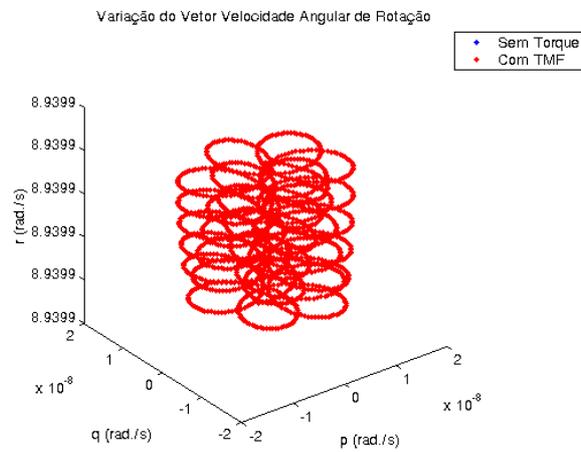


FIGURA 10 – Visualização espacial do vetor velocidade de rotação, com e sem torque.

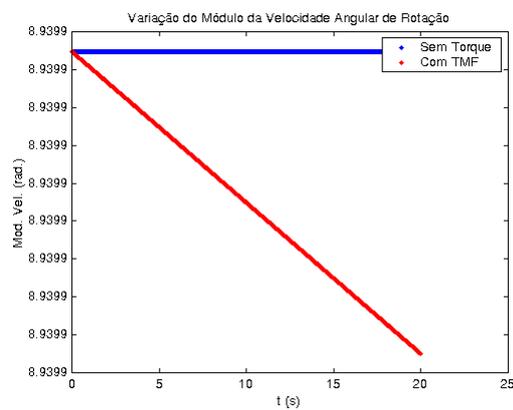


FIGURA 11 – Variação do módulo da velocidade angular de rotação, com e sem torque.

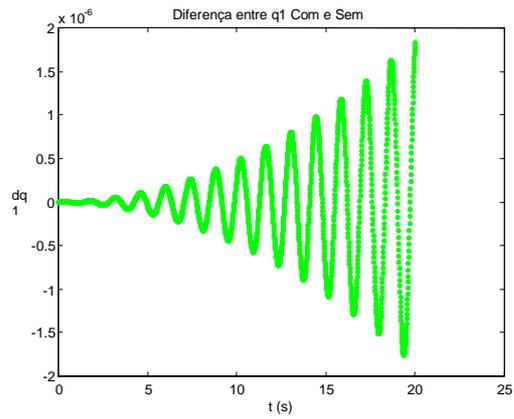


FIGURA 12 – Diferença entre as soluções com e sem torque para o quatérnion  $q_1$ .

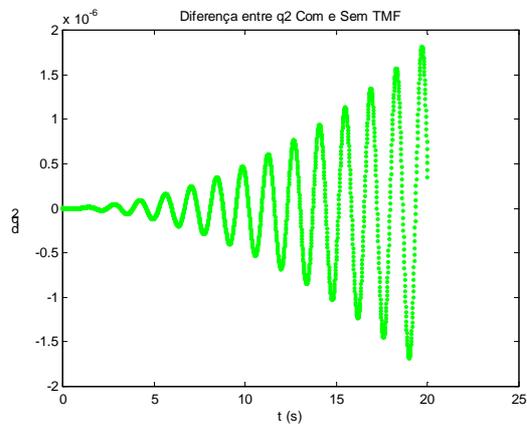


FIGURA 13 - Diferença entre as soluções com e sem torque para o quatérnion  $q_2$ .

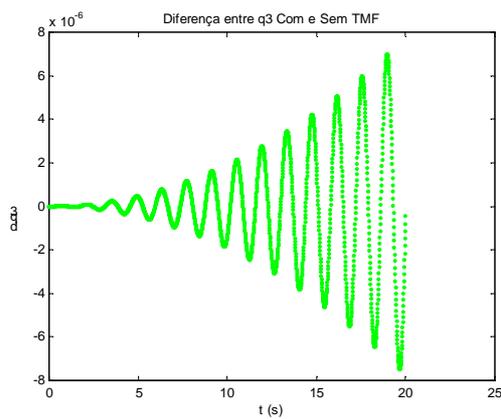


FIGURA 14 – Diferença entre as soluções com e sem torque para o quatérnion  $q_3$ .

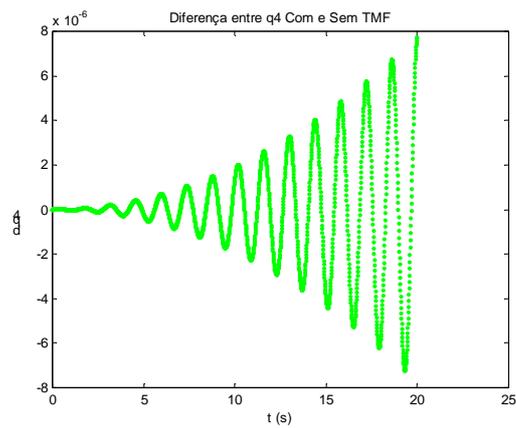


FIGURA 15 - Diferença entre as soluções com e sem torque para o quatérnio  $q_4$ .

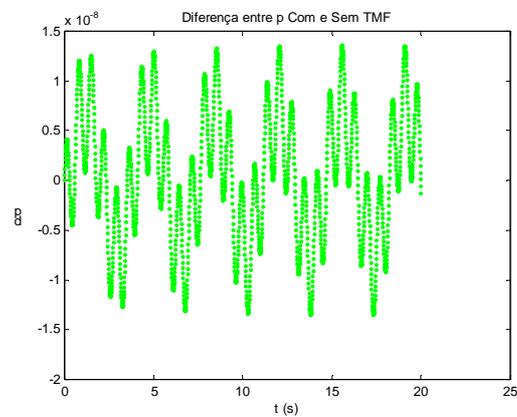


FIGURA 16 – Diferença entre as soluções com e sem torque para a componente  $p$  da velocidade angular de rotação.

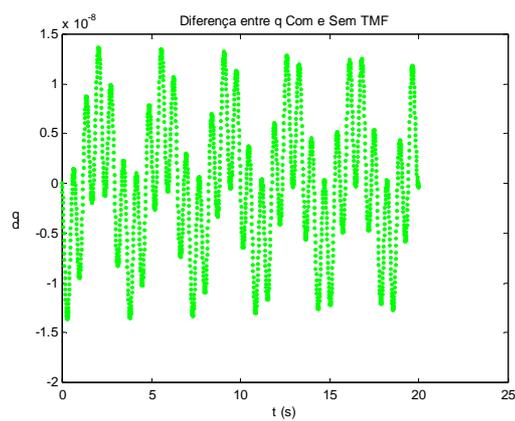


FIGURA 17 – Diferença entre as soluções com e sem torque para a componente  $q$  da velocidade angular de rotação.

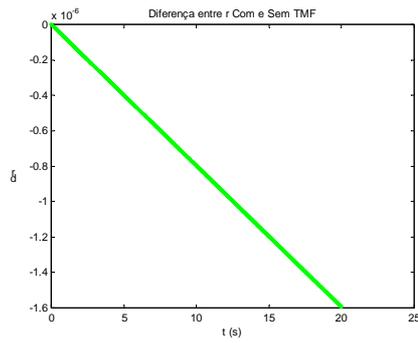


FIGURA 18 – Diferença entre as soluções com e sem torque para a componente r da velocidade angular de rotação.

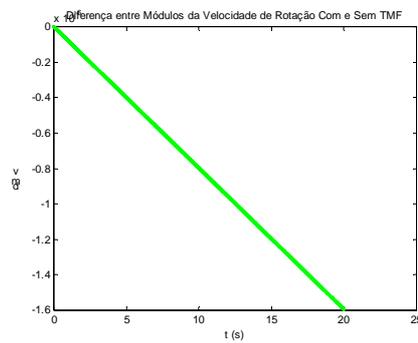


FIGURA 19 – Diferença entre o módulo da velocidade angular de rotação com e sem torque.

### B) Tempo de simulação de 3000s

As Figuras 20 a 24 apresentam o comportamento das componentes da velocidade de rotação para um intervalo de tempo de 3000 s, enquanto as Figuras 25 a 32 apresentam as diferenças entre as soluções de cada variável sem torque externo e com a inclusão do torque devido às correntes de Foucault. Para valores específicos do tempo (entre 0 e 3000s), as Tabelas 02, 03 e 04 apresentam, respectivamente, os valores de cada variável para o movimento livre de torque, para o movimento com o torque devido às correntes de Foucault e a diferença entre a solução sem torque e com torque.

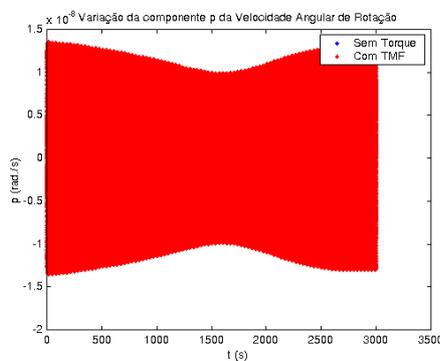


FIGURA 20 - Comportamento da componente p da velocidade angular de rotação.

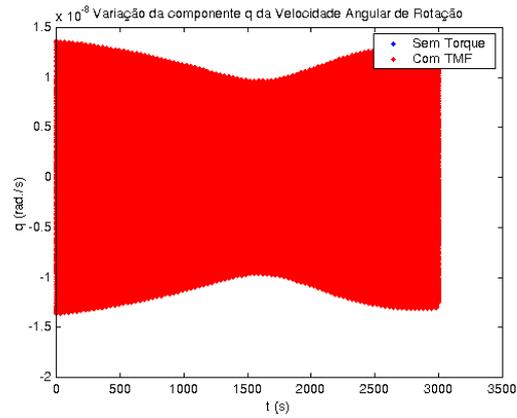
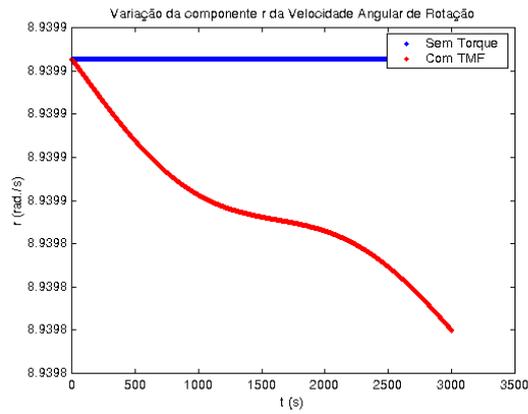


FIGURA 21 - Comportamento da componente q da velocidade angular de rotação.



IGURA 22 - Comportamento da componente r da velocidade angular de rotação.

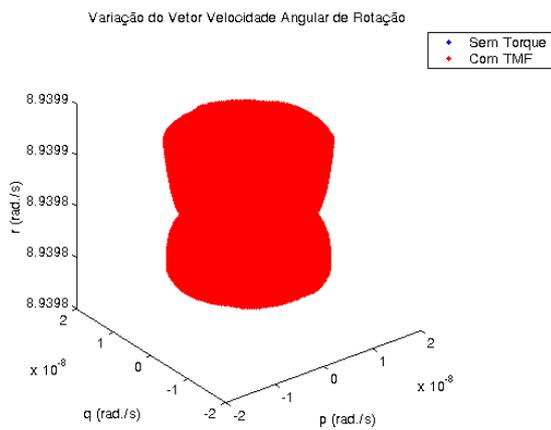


FIGURA 23 – Visualização espacial do vetor velocidade de rotação, com e sem torque.

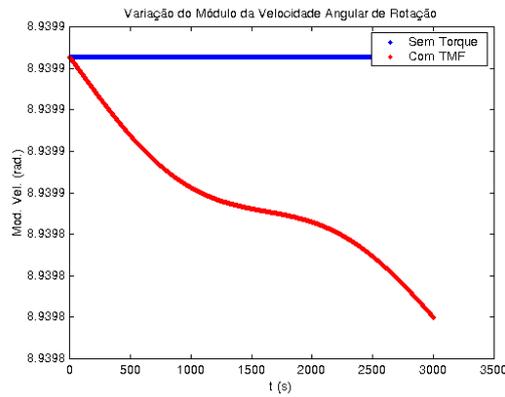


FIGURA 24 – Variação do modulo da velocidade angular de rotação, com e sem torque.

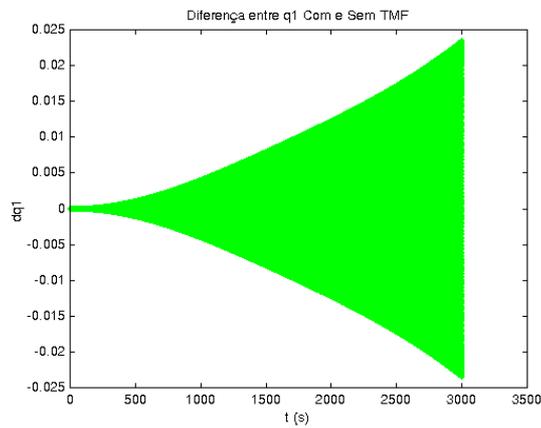


FIGURA 25 – Diferença entre as soluções com e sem torque para o quatérnio  $q_1$  .

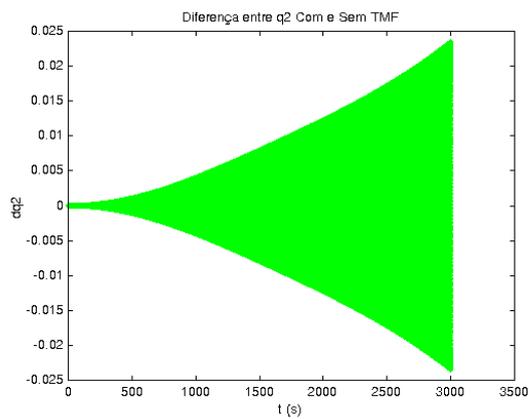


FIGURA 26 - Diferença entre as soluções com e sem torque para o quatérnio  $q_2$  .

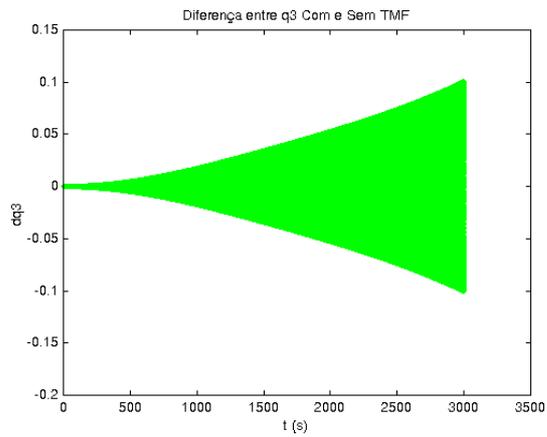


FIGURA 27 – Diferença entre as soluções com e sem torque para o quatérnio  $q_3$ .

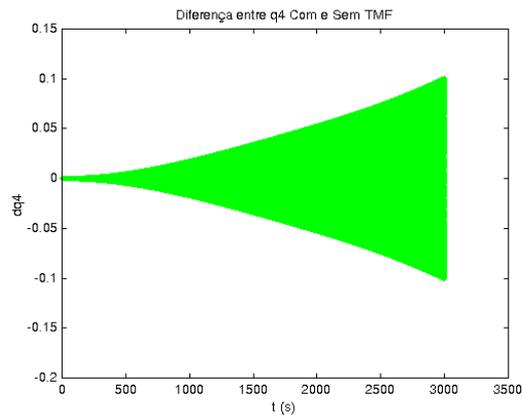


FIGURA 28 - Diferença entre as soluções com e sem torque para o quatérnio  $q_4$ .

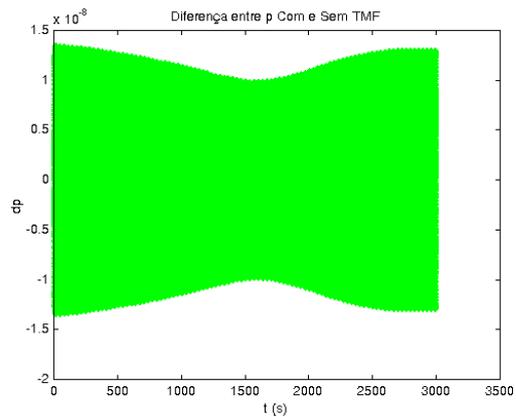


FIGURA 29 – Diferença entre as soluções com e sem torque para a componente  $p$  da velocidade angular de rotação.

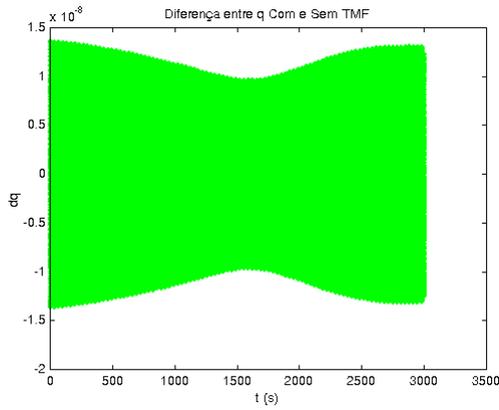


FIGURA 30 – Diferença entre as soluções com e sem torque para a componente q da velocidade angular de rotação.

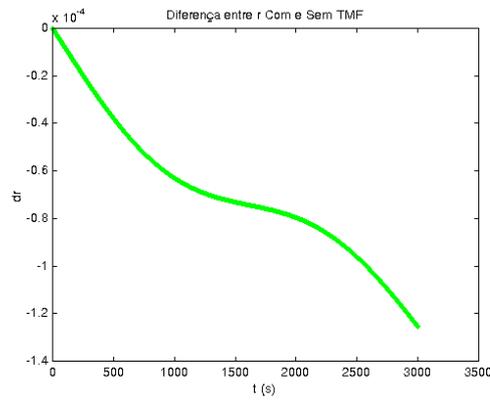


FIGURA 31 – Diferença entre as soluções com e sem torque para a componente r da velocidade angular de rotação.

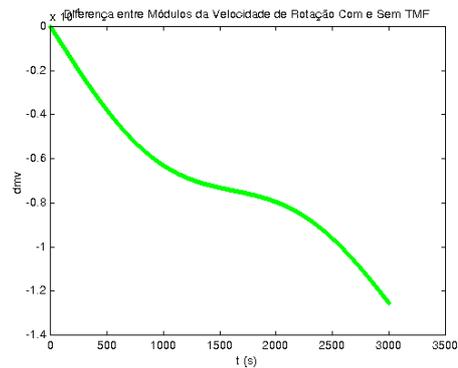


FIGURA 32 – Diferença entre o módulo da velocidade angular de rotação com e sem torque.

TABELA 02: Valores dos quatérnions e do modulo da velocidade de rotação e de suas componentes, para o movimento livre de torques externos, para o SCD1, com as condições iniciais do dia 31 agosto de 1993.

SIMULAÇÃO PARA 3000s						
TEMPO (s)	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	q <sub>4</sub>	p= q (rad/s)	r (rad/s)
0	0.2269	0.01654	0.708	0.9712	0	8.939
300	-0.2019	-0.10479	0.318432	-0.9202	0	8.939
600	0.1441	0.176010	-0.65593	0.7197	0	8.939
900	-0.0629	-0.21862	0.886815	-0.40224	0	8.939
1200	-0.0285	0.225708	-0.97359	0.01939	0	8.939
1500	0.115	-0.19611	0.902131	0.36661	0	8.939
1800	-0.1834	0.134641	-0.68407	-0.6930	0	8.939
2100	0.2216	-0.5129	0.354827	0.9068	0	8.939
2400	-0.2239	-0.4039	0.32078	-0.9732	0	8.939
2700	0.1897	0.125516	-0.41377	0.8814	0	8.939
3000	-0.1248	-0.19024	0.728212	-0.6464	0	8.939

TABELA 03: Valores dos quatérnions e do modulo da velocidade de rotação e de suas componentes com o torque devido às correntes de Foucault, para o SCD1, com as condições iniciais do dia 31 de agosto de 1993.

SIMULAÇÃO PARA 3000s							
TEMPO (s)	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	q <sub>4</sub>	px10 <sup>8</sup> (rad/s)	qx10 <sup>8</sup> (rad/s)	r (rad/s)
0	0.22689	0.016542	0.070809	0.97119	0	0	8.939
300	-0.2017	-0.10515	0.32007	-0.9196	-0.170	1.154	8.939901
600	0.14292	0.177006	-0.66089	0.715165	-0.507	-0.875	8.939988
900	-0.0596	-0.21953	0.892659	-0.3891	-0.107	-0.158	8.939866
1200	-0.0340	0.224943	-0.97376	-0.0043	-0.693	-0.584	8.939857
1500	0.1221	-0.19194	0.888	0.39802	-0.528	0.794	8.939852
1800	-0.1894	0.126007	-0.6512	-0.7239	-0.335	-0.533	8.939849
2100	0.22424	-0.03832	0.3015	0.9259	-0.445	-0.165	8.939843
2400	-0.2204	-0.05619	0.101122	-0.9685	1.199	0.181	8.939833
2700	0.17827	0.141338	-0.4878	0.842739	-0.802	0.519	8.939818
3000	-0.1044757	-0.202094	0.791006	-0.567936	0.079	0.349	8.939799

TABELA 04: Diferença entre o comportamento dos quatérnions e do modulo da velocidade de rotação e de suas componentes, com o torque devido às correntes de Foucault, e sem a influencia do toque, para o SCD2, com as condições iniciais do dia 31 de agosto de 1993

SIMULAÇÃO PARA 3000s							
TEMPO (s)	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	q <sub>4</sub> x 10 <sup>3</sup>	px10 <sup>8</sup> (rad/s)	qx10 <sup>8</sup> (rad/s)	r (rad/s)
0	0	0	0	0	0	0	0
300	0.00018766	-0.00036159	0.001643593	0.00057046	-0.170	1.154	-0.00002
600	-0.0012245	0.000996133	-0.00497219	-0.00456313	-0.507	-0.875	-0.00004
900	0.0032385	-0.00090624	0.005844666	0.013142569	-0.107	-0.158	-0.00005
1200	-0.0055058	-0.00076453	-0.00018341	-0.0237798	-0.693	-0.584	-0.00006
1500	0.00680889	0.004167477	-0.01341288	0.031414848	-0.528	0.794	-0.00007
1800	-0.0060353	-0.00863424	0.032808532	-0.0309180	-0.335	-0.533	-0.00007
2100	0.00260503	0.01296588	-0.05328513	0.019083486	-0.445	-0.165	-0.00008
2400	0.00343520	-0.01580188	0.06904736	0.004736394	1.199	0.181	-0.00009
2700	-0.0114720	0.015822126	-0.07412101	-0.03876014	-0.802	0.519	-0.00010
3000	0.02028805	-0.01185584	0.062794334	0.078554704	0.079	0.349	-0.00012

## 4.1.2- Resultados Obtidos para SCD2

### A) Tempo de simulação de 20s

As Figuras 33 a 41 apresentam o comportamento das componentes do quaternion e da velocidade de rotação para um intervalo de tempo de 20 s, enquanto as Figuras 42 a 48 apresentam as diferenças entre as soluções de cada variável sem torque externo e com a inclusão do torque devido às correntes de Foucault.

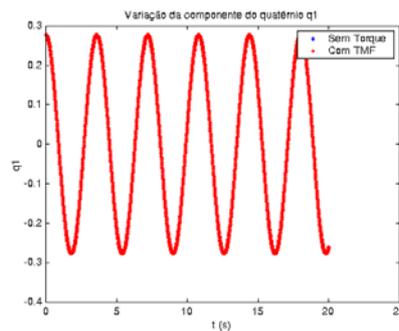


FIGURA 33 – Comparação entre as soluções com e sem torque para o quatérnio  $q_1$ .

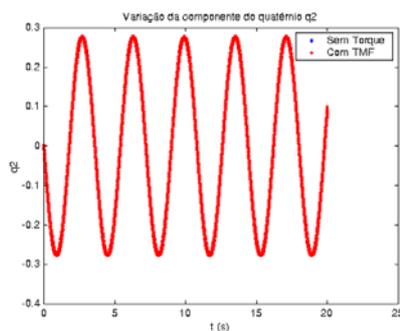


FIGURA 34 - Comparação entre as soluções com e sem torque para o quatérnio  $q_2$ .

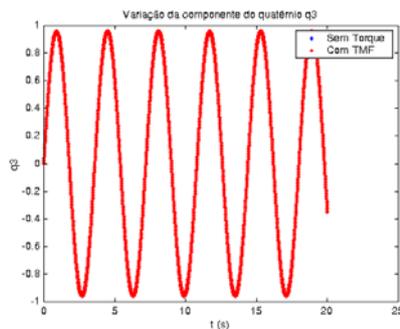


FIGURA 35 - Comparação entre as soluções com e sem torque para o quatérnio  $q_3$ .

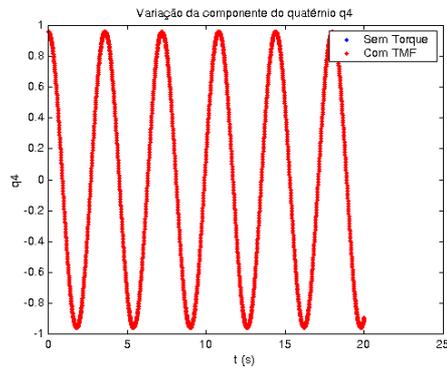


FIGURA 36 - Comparação entre as soluções com e sem torque para o quatérnio  $q_4$ .

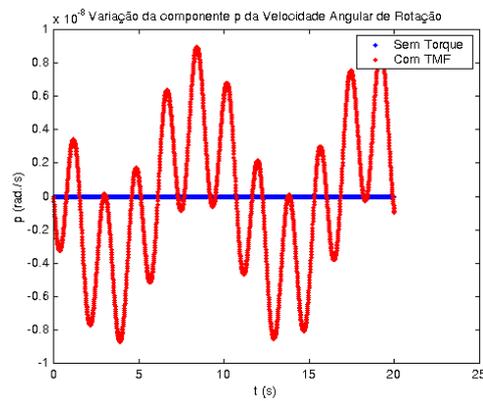


FIGURA 37 - Comparação entre as soluções com e sem torque para a componente p da velocidade angular de rotação.

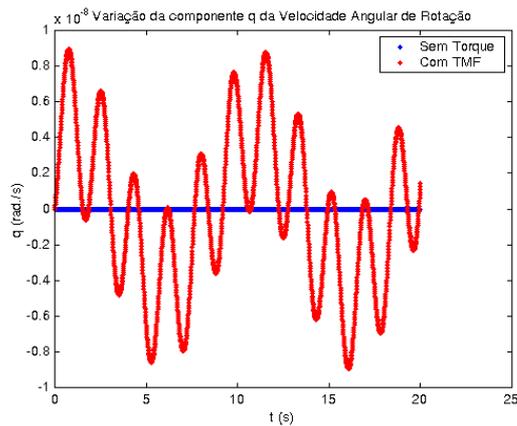


FIGURA 38 - Comparação entre as soluções com e sem torque para a componente q da velocidade angular de rotação.

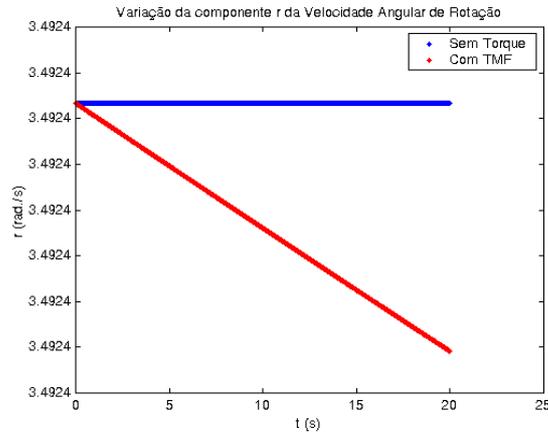


FIGURA 39 - Comparação entre as soluções com e sem torque para a componente r da velocidade angular de rotação.

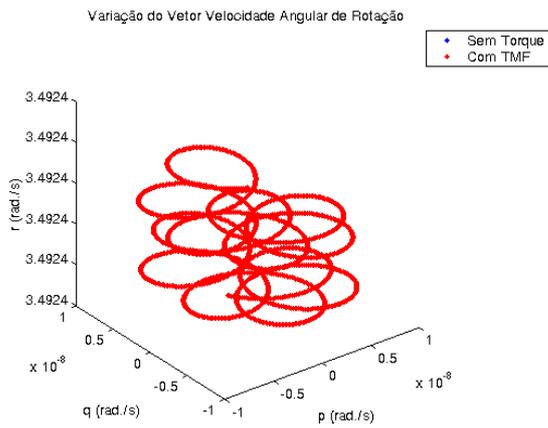


FIGURA 40 – Visualização espacial do vetor velocidade de rotação, com e sem torque.

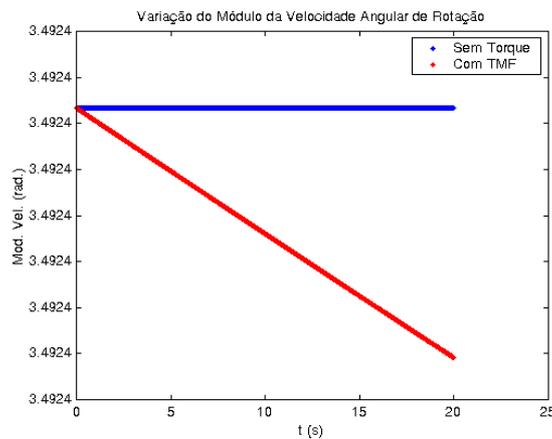


FIGURA 41 – Variação do módulo da velocidade angular de rotação, com e sem torque.

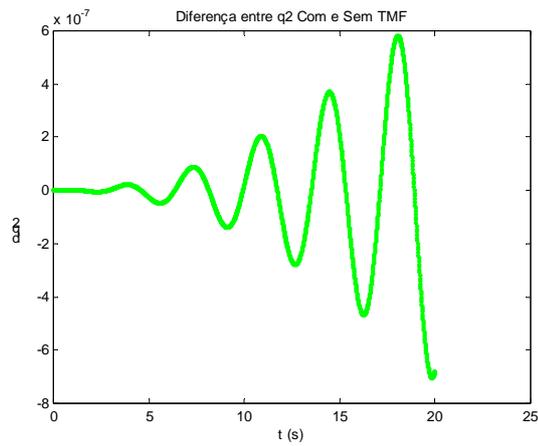


FIGURA 42 - Diferença entre as soluções com e sem torque para o quatérnion  $q_2$ .

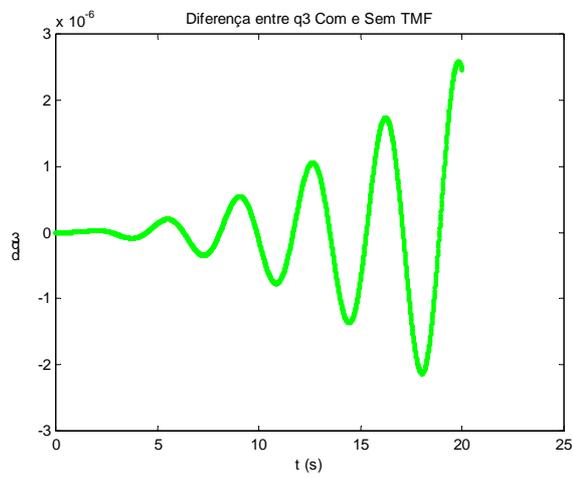


FIGURA 43 – Diferença entre as soluções com e sem torque para o quatérnion  $q_3$ .

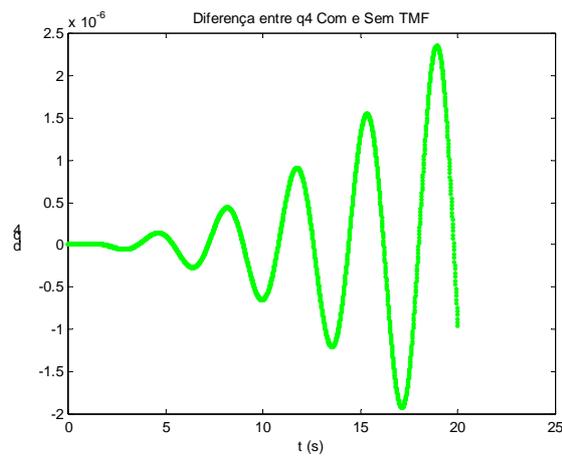


FIGURA 44 - Diferença entre as soluções com e sem torque para o quatérnion  $q_4$

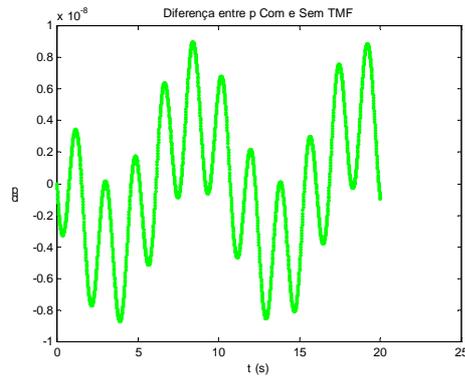


FIGURA 45 – Diferença entre as soluções com e sem torque para a componente p da velocidade angular de rotação.

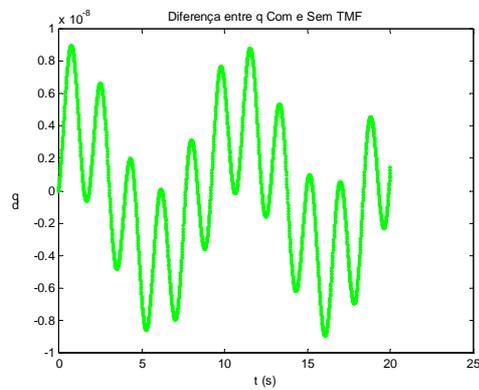


FIGURA 46 – Diferença entre as soluções com e sem torque para a componente q da velocidade angular de rotação.

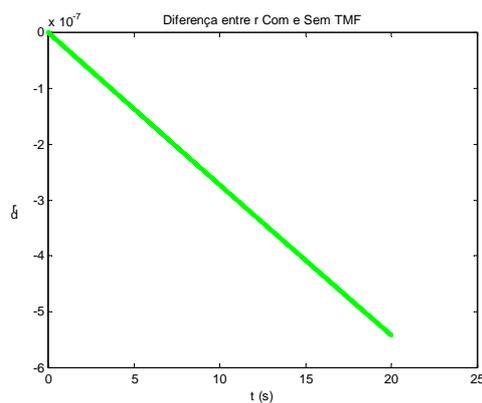


FIGURA 47 – Diferença entre as soluções com e sem torque para a componente r da velocidade angular de rotação.

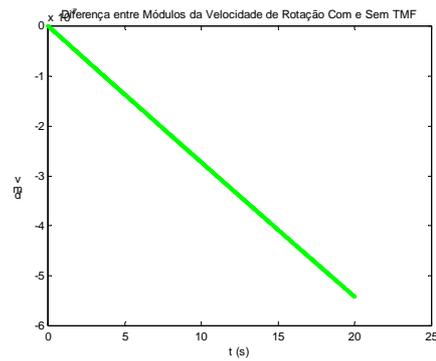


FIGURA 48 – Diferença entre o módulo da velocidade angular de rotação com e sem torque.

**B) Tempo de simulação de 3000s**

As Figuras 49 a 53 apresentam o comportamento das componentes da velocidade de rotação para um intervalo de tempo de 3000 s, enquanto as Figuras 54 a 61 apresentam as diferenças entre as soluções de cada variável sem torque externo e com a inclusão do torque devido às correntes de Foucault.

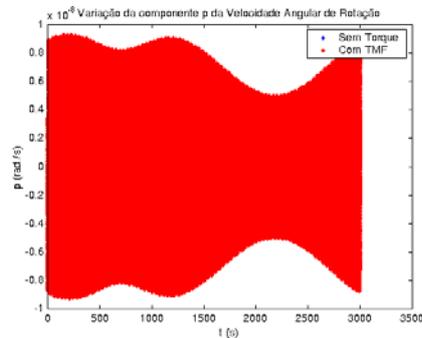


FIGURA 49 - Comparação entre as soluções com e sem torque para a componente p da velocidade angular de rotação.

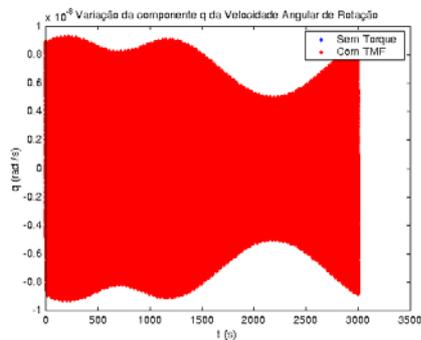


FIGURA 50- Comparação entre as soluções com e sem torque para a componente q da velocidade angular de rotação.

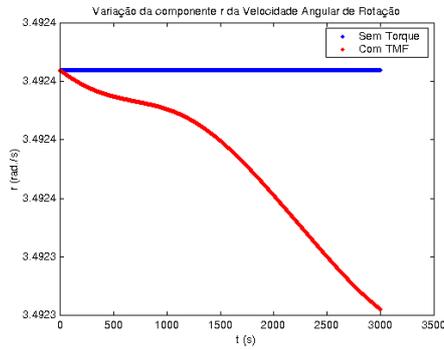


FIGURA 51 - Comparação entre as soluções com e sem torque para a componente r da velocidade angular de rotação.

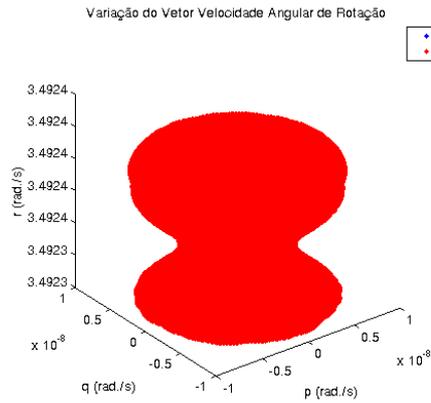


FIGURA 52 – Visualização espacial do vetor velocidade de rotação, com e sem torque.

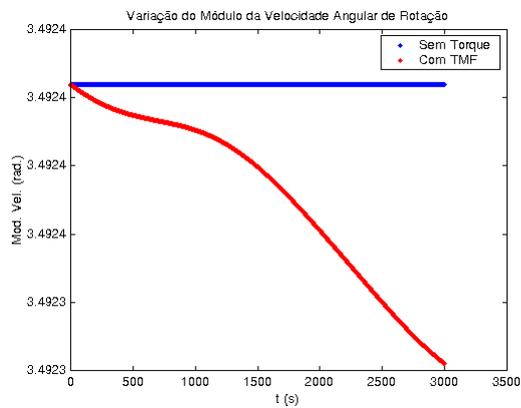


FIGURA 53 – Variação do módulo da velocidade angular de rotação, com e sem torque.

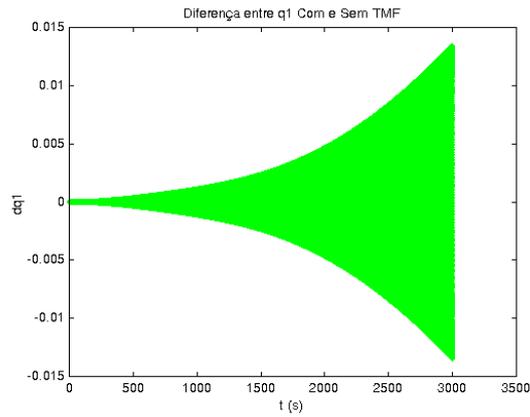


FIGURA 54 – Diferença entre as soluções com e sem torque para o quatérnio  $q_1$ .

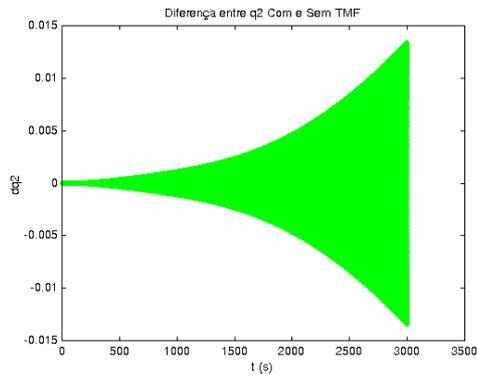


FIGURA 55 - Diferença entre as soluções com e sem torque para o quatérnio  $q_2$ .

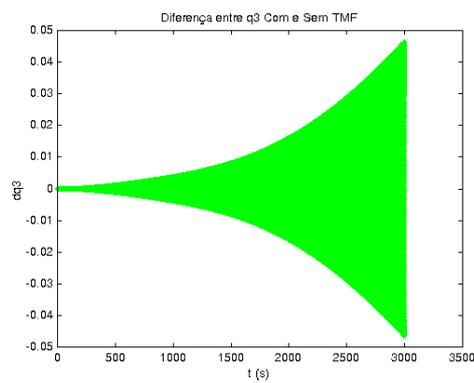


FIGURA 56 – Diferença entre as soluções com e sem torque para o quatérnio  $q_3$ .

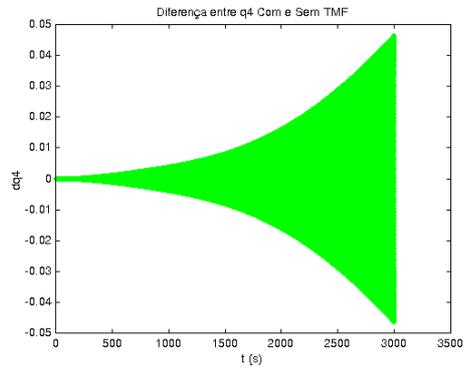


FIGURA 57 - Diferença entre as soluções com e sem torque para o quaternião  $q_4$ .

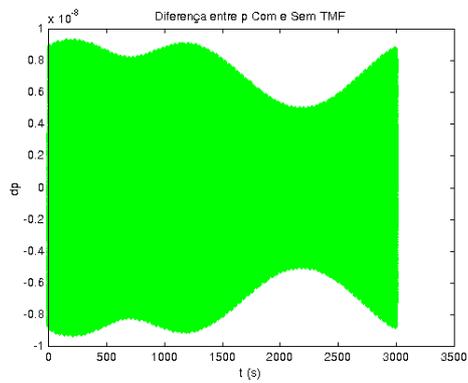


FIGURA 58 – Diferença entre as soluções com e sem torque para a componente  $p$  da velocidade angular de rotação.

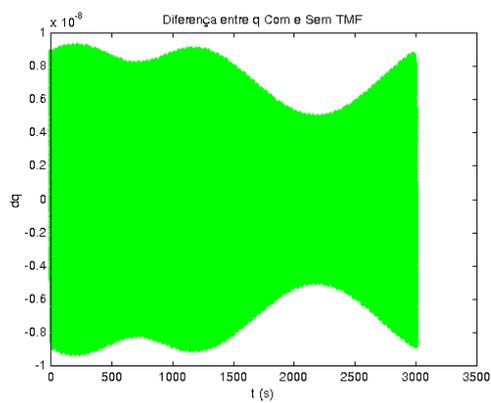


FIGURA 59 – Diferença entre as soluções com e sem torque para a componente  $q$  da velocidade angular de rotação.

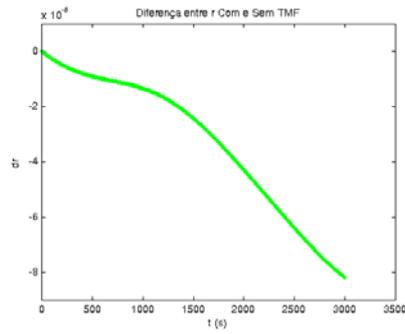


FIGURA 60 – Diferença entre as soluções com e sem torque para a componente r da velocidade angular de rotação

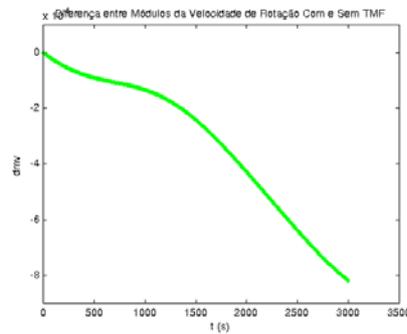


FIGURA 61 – Diferença entre o módulo da velocidade angular de rotação com e sem torque

### C) Tempo de simulação de 6000s

Para valores específicos do tempo (entre 0 e 6000s), as Tabelas 05, 06 e 07 apresentam, respectivamente, os valores de cada variável para o movimento livre de torque, para o movimento com o torque devido às correntes de Foucault e a diferença entre a solução sem torque e com torque

TABELA 05: Valores dos quaternions e do modulo da velocidade de rotação e de suas componentes, para o movimento livre de torques externos, para o SCD2, com as condições iniciais do dia 12 març o de 2002.

SIMULAÇÃO PARA 6000s						
TEMPO (s)	$q_1 \times 10^{-1}$	$q_2 \times 10^{-1}$	$q_3 \times 10^{-1}$	$q_4 \times 10^{-1}$	p= q (rad/s)	r (rad/s)
0	2.7773	0.015269	0.052815	9.6064	0	3.4924
300	-1.9607	-1.9670	6.7288	-6.8564	0	3.4924
600	0.0063814	2.7773	-9.6057	0.12770	0	3.4924
900	1.9517	-1.9760	6.9086	6.6751	0	3.4924
1200	-2.7772	0.028032	-0.20258	-9.6044	0	3.4924
1500	1.9912	1.9362	-6.6210	6.9605	0	3.4924
1800	-0.049680	-2.7769	9.6026	-0.27744	0	3.4924
2100	-1.9206	2.0062	-7.0119	-6.5666	0	3.4924
2400	2.7764	-0.071326	0.35229	9.6001	0	3.4924
2700	-2.0211	-1.9049	6.5117	-7.0628	0	3.4924
3000	0.0929670	2.7758	-9.5971	0.42711	0	3.4924
3300	7.2532	-6.8755	0.11912	0.32296	0	3.4923
3600	-9.9867	-0.38374	0.14777	-0.31089	0	3.4923
3900	6.7042	7.4118	-0.32565	0.11155	0	3.4923
4200	0.61686	-9.9750	0.30736	0.15499	0	3.4923
4500	-7.5663	6.5293	-0.10391	-0.32817	0	3.4923
4800	9.9579	0.84964	-0.16213	0.30366	0	3.4923
5100	-6.3508	-7.7168	0.33051	-0.096221	0	3.4923
5400	-1.0820	9.9353	-0.29979	-0.16918	0	3.4923
5700	7.8630	-6.1689	0.088476	0.33266	0	3.4923

TABELA 06: Valores dos quaternions e do modulo da velocidade de rotação e de suas componentes, para o movimento com o torque devido as correntes de Foucault, para o SCD2, com as condições iniciais do dia 12 març o de 2002.

SIMULAÇÃO PARA 6000s							
TEMPO (s)	$q_1 \times 10^{-1}$	$q_2 \times 10^{-1}$	$q_3 \times 10^{-1}$	$q_4 \times 10^{-1}$	$p \times 10^{-9}$ (rad/s)	$q \times 10^{-9}$ (rad/s)	r (rad/s)
0	2.7773	0.015269	0.052815	9.6064	0	0	3.4924
300	-1.9597	-1.9680	6.7324	-6.8528	1.3367	1.1875	3.492393
600	0.0014255	2.7773	-9.6059	0.11052	-1.3155	1.2116	3.492390
900	1.9584	-1.9693	6.8856	6.6988	-0.83776	-0.38218	3.492388
1200	-2.7773	0.012603	-0.14917	-906054	-0.66175	-1.5810	3.492383
1500	1.9745	1.9532	-6.6804	6.9035	3.2663	-0.74482	3.492375
1800	-0.013696	-2.7773	9.6054	-0.15295	0.42980	4.5462	3.492365
2100	-1.9585	1.9692	-6.8853	-6.6992	-4.6976	0.95720	3.492352
2400	2.7773	0.0039020	0.092079	9.6061	-2.8003	-4.6206	3.492340
2700	-1.9493	-1.9783	6.7684	-6.8173	5.1028	-4.8985	3.492328
3000	-0.041800	2.7770	-9.6065	-0.039037	5.9950	5.3976	3.492318
3300	7.2566	-6.7720	0.11897	0.32301	-0.031306	-0.72127	3.492290
3600	-9.9861	-0.40020	0.14827	-0.31065	1.8053	0.53292	3.492290
3900	6.6814	7.4324	-0.32598	0.11055	-1.2228	4.1119	3.492290
4200	0.6219	-9.9721	0.30665	0.15637	-7.1401	-0.96082	3.492290
4500	-7.6064	6.4826	-0.10190	-0.32879	-0.95912	-9.3574	3.492281
4800	9.9505	0.93226	-0.16463	0.30231	9.3188	-3.9184	3.492281
5100	-6.2615	-7.7894	0.33159	-0.092433	6.4851	7.0360	3.492272
5400	-1.2430	9.9165	-0.29703	-0.17400	-3.8058	7.9073	3.492269
5700	8.0003	-5.9897	0.080978	0.33458	-8.3286	-0.6478	3.492251
6000	-9.8626	-1.6155	0.18505	-0.29027	-2.1590	-7.9839	3.492248

TABELA 07: Valores dos quatérnions e do modulo da velocidade de rotação e de suas componentes, para a diferença dos valores obtidos para o movimento sem a influencia do torque externo e com a influencia do torque devido as correntes de Foucault, para o SCD2, com as condições iniciais do dia 12 março de 2002.

SIMULAÇÃO PARA 6000s							
TEMPO (s)	$q_1 \times 10^{-4}$	$q_2 \times 10^{-4}$	$q_3 \times 10^{-4}$	$q_4 \times 10^{-4}$	$p \times 10^{-9}$ (rad/s)	$q \times 10^{-9}$ (rad/s)	$r \times 10^{-6}$ (rad/s)
0	0	0	0	0	0	0	0
300	1.0433	-1.0351	3.6442	3.5770	1.3367	1.1875	-6.4940
600	-4.9559	0.00029141	-0.21499	-17.183	-1.3155	1.2116	-9.8669
900	6.7707	6.7268	-23.012	23.740	-0.83776	-0.38218	-0.12252
1200	-0.094745	-15.429	53.409	-0.98318	-0.66175	-1.5810	-0.16504
1500	-16.669	16.961	-59.396	-56.976	3.2663	-0.74482	-0.24173
1800	35.984	-0.38242	2.7976	124.49	0.42980	4.5462	-0.34804
2100	-37.911	-37.035	126.61	-132.65	-4.6976	0.95720	-0.47031
2400	0.88279	75.228	-260.21	6.0292	-2.8003	-4.6206	-0.59718
2700	71.813	-73.379	256.65	245.55	5.1028	-4.8985	-0.71829
3000	-134.77	1.2073	-9.4302	-466.15	5.9950	5.3976	-0.81835
3300	-3.3333	-3.5179	0.15215	-0.051934	-0.031306	-0.72127	5.9913
3600	-0.64580	16.461	-0.49930	-0.24737	1.8053	0.53292	9.0390
3900	22.840	-20.596	0.32708	0.99534	-1.2228	4.1119	9.7443
4200	-45.333	-2.9065	0.71139	-1.3803	-7.1401	-0.96082	9.9400
4500	40.021	46.666	-2.0095	0.62475	-0.95912	-9.3574	0.11946
4800	7.3954	-82.625	2.5012	1.3455	9.3188	-3.9184	0.17321
5100	-89.309	72.642	-1.0888	-3.7883	6.4851	7.0360	0.26073
5400	161.07	18.864	-2.7582	4.8218	-3.8058	7.9073	0.36886
5700	-137.38	-179.23	7.4989	-1.9180	-8.3286	-0.6478	0.47929
6000	-44.718	301.82	-8.9140	-5.4805	-2.1590	-7.9839	0.57479

## 4.2- ANÁLISE DOS RESULTADOS

Pelos resultados apresentados nas tabelas e gráficos dos itens 4.1.1 e 4.1.2 para os satélites SCD1 e SCD2, respectivamente, observam-se:

1) nas simulações para um intervalos de tempo de 20s, variações periódicas de curto período nas componentes dos quatérnions, de acordo com as figuras 3-6 para SCD1 e figuras 33-36 para o SCD2.

2) nas simulações para um intervalo de tempo de 20s e 3000s, respectivamente:

2.1) variações periódicas nas componentes da velocidade de rotação nos eixos x e y, de acordo com as figuras 7-9 e 20-22 para o SCD1 e figuras 37-39 e 49-51 para o SCD2.

2.2) decaimento do módulo da velocidade de rotação causado pelo torque magnético devido às correntes de Foucault, de acordo com a figuras 11 e 24 para SCD1 e figuras 41 e 53 para SCD2.

2.3) a amplitude das diferenças entre as soluções com torque e sem torque para as componentes do quatérnion aumentam com o tempo, de acordo com as figuras 12-15 e 25-28 para o SCD1 e 42 –44 e 54-57 para o SCD2.

2.4) comportamento periódicos nas diferenças entre as soluções com e sem torque para as componente da velocidade de rotação e para o modulo da velocidade de rotação, de acordo com as figuras 16-19 e 29-32 para o SCD1 e figuras 45-47, 58-61 e 71-74 para o SCD2 .

3) Para o instante de 6000s para o SCD2, a ordem de grandeza da influência do torque é de  $10^{-3}$  para  $q_1$ ,  $10^{-2}$  para  $q_2$  e  $10^{-4}$  para  $q_3$  e  $q_4$ , enquanto para p e q é da ordem de  $10^{-9}$  rad/s e para r é da ordem de  $10^{-5}$  rad/s, de acordo com tabelas 06 e 07.

4) Para o instante de 3000s para o SCD1, a ordem de grandeza da influência do torque é de  $10^{-3}$  para  $q_1$ ,  $10^{-2}$  para  $q_2$ ,  $q_3$  e  $q_4$ , enquanto para p é ordem de  $10^{-10}$  rad/s, para q é da ordem de  $10^{-9}$  rad/s e para r é da ordem de  $10^{-4}$  rad/s, de acordo com tabelas 03 e 04.

5) o movimento de precessão e nutação do eixo de rotação nas figuras 10 e 23 para o SCD1 e 40 e 52 para o SCD2, com a visualização espacial da velocidade de rotação.

# CAPÍTULO 5 - COMENTÁRIOS FINAIS

As componentes do torque devido às correntes de Foucault foram determinadas em termos do quaternion de atitude e do campo geomagnético, descrito pelo modelo de dipolo inclinado. As equações do movimento foram integradas numericamente para um intervalo de tempo da ordem de um período orbital. Os resultados mostram o decaimento exponencial do módulo da velocidade de rotação e variações periódicas nas componentes do quaternion de atitude e nas componentes  $p$  e  $q$  da velocidade de rotação.

Outras simulações devem ser realizadas para um intervalo de tempo maior e os resultados a serem determinados devem ser comparados com os dados do Centro de Controle de Satélites do INPE, de modo a serem apresentados no SINCINPE/2005.

Deste modo as diversas fases propostas no cronograma do projeto foram realizadas, com o objetivo do trabalho sendo atingido.

Deve-se ressaltar que este projeto foi inicialmente desenvolvido por Domingos Sávio dos Santos Rodrigues, sendo que esta bolsista assumiu o projeto a partir de março de 2005.

Os resultados deste trabalho foram submetidos para apresentação no SINCINPE/2005, na Jornada de Iniciação Científica e Pós-graduação da FEG/UNESP e no Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional ( CNMAC2005).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BROUWER, O. ; CLEMENCE , G.M. Methods of celestial mechanics, Academic Press, New York, 1961.

KAPLAN, M. H., Modern spacecraft dynamics & control, John Wiley & sons, New York, 1976.

KUGA, H. K. Operações de dinâmica de vôo do centro de controle do INPE In. I CBCG (1º colóquio brasileiro de ciências geodésicas), 1999, Curitiba Resumos do Primeiro CBCG (1º Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas) , 1999, p. 4.

KUGA, H. K.; FERREIRA, L. D. D. ; GUEDES, U. T. V. Simulação de atitude e de manobras para o satélite brasileiro estabilizado por rotação, Relatório Técnico do INPE, INPE-4271-PRE/1143, 1987.

KUGA, H. K.; SILVA, W. C. C.; GUEDES, U. T. V. Dinâmica de atitude para satélites estabilizados por rotação, Relatório Técnico do INPE, INPE-4403-NTE/275, 1987b.

ORLANDO, V. Controle de satélites no INPE, Anais da 6ª Escola de Verão em Dinâmica Orbital e Planetologia, FEG/UNESP, pp. 118 –137, 2002.

PISACANE, V. L.; MOORE, R.C. Fundamentals of space systems, New York , Oxford University Press , 1994.

QUIRELLI, I. M. P. Propagação de Atitude de Satélites Estabilizados por Rotação, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia, UNESP – Guaratinguetá, SP, 2002.

REAL, F. F. Modelagem de torques ambientais atuantes em satélites artificiais, Trabalho de Graduação FEG/UNESP, 2002.

RODRIGUES, D. S. S., Propagação da atitude de satélites artificiais com diferentes representações – parte I, Relatório Final do PIBIC/CNPq, FEG/UNESP, Guaratinguetá, SP, 2002.

RODRIGUES, D. S. S., Propagação da atitude de satélites artificiais com diferentes representações – parte II, Relatório Final do PIBIC/CNPq, FEG/UNESP, Guaratinguetá, SP, 2003.

RODRIGUES, D. S. S., Propagação da atitude de satélites artificiais com quaternions e torque magnético residual, Relatório Final do PIBIC/CNPq, INPE, São José dos Campos, SP, 2004.

SHUSTER, M. D.; “A Survey of Attitude Representation”, Journ. of Astron. Sciences, v. 41, 4, 1993.

User’s Guide - MATLAB Edition for Students, MAT WORKS Inc, Massachusetts, USA, 1995.

WERTZ, J.R. Spacecraft attitude determination and control. London, Reidel, vol 73, 1978.

ZANARDI, M. C. & LOPES, R. V. F.; “Spacecraft attitude representation, propagation and determination: Theory and some applications on the Brazilian Space Program”, Advances in Space Dynamics, 503, 2000.

