



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

AUTOFOCALIZAÇÃO DE FEIXES DE ELÉTRONS EM UM SISTEMA DE PLAMA

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Carlos Alberto Barbosa de Oliveira Filho (ITA, Bolsista PIBIC/CNPq)

E-mail: calberto@h8.ita.br

Joaquim José Barroso de Castro (LAP/INPE, Orientador)

E-mail: barroso@plasma.inpe.br

COLABORADORES

Dr. Mario Ueda (LAP/INPE)

Dr. Geraldo F. Gomes (LAP/INPE)

Junho de 2004

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – Introdução

CAPÍTULO 2 – Modelo simplificado para focalização de cargas

CAPÍTULO 3 – Análise numérica para a focalização de feixes de elétrons

CAPÍTULO 4 – Simulação de feixe de elétrons em um sistema de plasma

CAPÍTULO 5 – Conclusão

1. Introdução

A aplicação de pulsos rápidos de calor incidindo sobre uma superfície metálica a ser tratada resulta em um considerável aumento de dureza e redução de desgaste no material sem afetar suas propriedades internas. O tratamento térmico destes materiais por feixes de elétrons constitui-se um método eficiente e econômico com o qual se pode criar materiais amorfos não-cristalinos que possuem grande aplicabilidade na indústria. A utilização deste sistema ainda abre margens para aplicações em diversas outras áreas a serem ainda exploradas, relacionadas tanto a pesquisa quanto a indústria.

Nosso objetivo neste trabalho foi principalmente desenvolver e analisar um modelo teórico para a autofocalização de elétrons secundários em um ambiente de plasma que fosse condizente com experimentos já realizados e que nos poupasse de complicações matemáticas. Neste trabalho, a construção e avaliação do modelo foram feitas com base nos resultados obtidos nas simulações do software russo KARAT e nos resultados numéricos obtidos através do software Mathematica, além de ampla investigação de bases e conceitos teóricos que facilitassem o desenvolvimento do mesmo.

2. Modelo simplificado para autofocalização de cargas

Nós iniciamos nosso trabalho apresentando um modelo simplificado de um feixe de elétrons cilíndrico propagando-se em um tubo orientado. Assuma um feixe paralelo de partículas com densidade uniforme sendo injetado dentro de um tubo condutor orientado. Para pequenas correntes decrescentes, todas as partículas continuam com trajetórias paralelas ao eixo do feixe e o diâmetro do feixe continua constante. Com correntes crescentes, entretanto, as cargas espaciais produzirão uma força elétrica de repulsão e o feixe irá se espalhar radialmente, gerando um efeito de dispersão. Para altas velocidades, o feixe produz um campo magnético próprio que exerce uma força de atração que reduz esse efeito de dispersão. Se o feixe se propaga em uma região contendo um gás de baixa densidade, bem próximo do vácuo, o efeito da colisão dos íons resulta em uma neutralização parcial do feixe de cargas espaciais. Assim, no caso de um feixe de elétrons, os secundários, elétrons de baixa energia criados pelas colisões, são ejetados e os íons permanecem dentro do feixe. Devido as grandes massas desses íons, estes permanecem sempre estacionários comparados com os rápidos elétrons do feixe. Se f_e é a razão de cargas de íons positivos por cargas de elétrons por unidade de volume, o campo devido às cargas espaciais será reduzido de um fator $(1 - f_e)$. O campo magnético, entretanto, não é afetado, pois os íons estacionários não contribuem para o fluxo de corrente. Os íons, obviamente, também se movimentam radialmente dentro do feixe de elétrons, mas o período de oscilação é muito longo comparado com o período de oscilação dos elétrons. Por outro lado, se estamos trabalhando com um feixe de íons positivos, os íons da colisão

são ejetados e os elétrons secundários permanecem no feixe. Estes elétrons são muito móveis e oscilam rapidamente cruzando o feixe na direção transversal. O efeito resultante é uma neutralização parcial das cargas do feixe de íons que, como no caso de um feixe de elétrons, não afetam a corrente do feixe nem o campo magnético associado. Como veremos, a combinação dos efeitos de neutralização parcial das cargas com o do campo magnético associado não deve apenas balancear a força de repulsão elétrica, mas deve resultar em uma focalização dos elétrons, resultado que queremos alcançar.

Vamos agora listar as hipóteses que usaremos em nosso modelo de feixe uniforme:

1. O feixe tem uma secção circular transversal de raio a e propaga-se em um tubo orientado concêntrico de raio b . A variação do raio do feixe em relação à distância axial z é suficientemente lenta de tal forma que as componentes do campo elétrico axial E_z e do campo magnético radial B_r podem ser desprezadas.
2. A diferença de potencial $\Delta\phi$ entre os eixos do feixe e a parede do tubo orientado devido às cargas espaciais do feixe é muito pequeno comparado à tensão equivalente da energia cinética das partículas.
3. A densidade de partículas do feixe, bem como a densidade de cargas neutralizadas de partículas de polaridade oposta, é uniforme dentro do feixe e nula fora do feixe. Em vista da suposição 2, a velocidade axial de todo o feixe de partículas é aproximadamente o mesmo, e nos podemos então assumir que a densidade de corrente é uniforme.
4. O fluxo é laminar, ou seja, todo o feixe de partículas se move em trajetórias que não se cruzam.

5. Nós consideramos uma situação de estado estacionário, isto é, $\partial/\partial t = 0$ e a secção transversal em uma dada posição ao longo da direcção transversal não muda com o tempo.
6. A trajetória das partículas obedece à suposição que o ângulo com o eixo z (inclinação do feixe) é pequeno.

Para o tratamento matemático que apresentaremos, nós escreveremos a equação de movimento para uma carga positiva q . O fator f_e representa uma distribuição de cargas estacionárias de sinal oposto que resulta em uma parcial neutralização da carga espacial das partículas primárias. O resultado pode ser aplicado a elétrons tomando-se $q = -e$. A corrente não é afetada pelas partículas estacionárias. Deve-se apontar que, estritamente falando, a suposição de densidade uniforme de cargas é válida só quando não há partículas de neutralização presentes no feixe ($f_e = 0$). Para um feixe com gás de focalização por partículas secundárias de cargas de polaridade oposta, a densidade proveniente de ambas as espécies tende a ser não-uniforme. O modelo de densidade uniforme ainda é válido em descrever o comportamento médio do feixe neste caso.

Primeiro notemos que no estado de equilíbrio considerado aqui a densidade volumétrica de cargas ρ e a densidade de corrente J em algum ponto no interior do feixe, ou alternativamente, a densidade linear de cargas ρ_L e a corrente I , são descritas pela equação da continuidade, que é,

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \tag{2.1a}$$

$$I = \rho_L v \tag{2.1b}$$

Onde v é a velocidade de uma carga elementar naquela posição, e $v_z \approx v$ tem sido considerado em (2.1b). Devido à carga espacial do feixe, existe uma diferença de potencial entre o eixo do feixe ($r = 0$) e a superfície do feixe ($r = a$) e (para $b > a$) entre a borda do feixe e a parede do tubo orientado. Se a energia total das partículas é constante, a energia cinética de uma partícula no eixo será menor do que de uma partícula nas bordas do feixe. Assim, em geral, nós temos uma distribuição de velocidade $v(r)$, e se $\rho = \text{constante}$, J deve ser função do raio, ou vice-versa. Em princípio, nós poderíamos especificar qualquer uma das três funções, e as outras duas seriam determinadas consistentemente pela equação (2.1), pelas equações de Maxwell e pelas equações de movimento. Entretanto, em nosso modelo de feixe uniforme, nós abandonamos a esse método para evitar complexidades matemáticas. Enquanto a suposição de que o ângulo entre a trajetória das partículas e o eixo é suficientemente pequeno, isto é, $v_r \ll v$, $v_\theta \ll v$, $v_z \approx v$, e a diferença de energia potencial ao longo do feixe for pequena comparada a energia cinética das partículas, o erro será pequeno. Nosso maior objetivo neste ponto é ganhar percepção física com relação ao comportamento no interior do feixe com o mínimo de esforço matemático possível. Assim, nós iremos considerar que J , ρ , e $v_z \approx v$, são todos constante ao longo do feixe, isto é, independentem do raio r . Logo, com $\rho_0 = I / a^2 \pi v$ denotando a densidade de cargas do feixe primário de partículas, nós obtemos

$$J_z = J = \frac{I}{a^2 \pi} \quad (2.2a)$$

$$\rho = \rho_0(1 - f_e) = \frac{I(1 - f_e)}{a^2 \pi v} \text{ para } 0 \leq r \leq a \quad (2.2a)$$

E $J = 0$, $\rho = 0$ para $r > a$. Em vista da suposição 1, o campo elétrico tem apenas a componente radial, que é facilmente encontrada aplicando-se a lei de Gauss,

$$\int \varepsilon_0 E \cdot dS = \int \rho dV \quad \text{(Lei de Gauss)}$$

para um cilindro de raio r e unidade de comprimento na direção z :

$$E_r = \frac{\rho_0(1-f_e)r}{2\varepsilon_0} = \frac{I(1-f_e)r}{2\pi\varepsilon_0 a^2 v} \text{ para } r \leq a \quad (2.3a)$$

$$E_r = \frac{I(1-f_e)}{2\pi\varepsilon_0 vr} \text{ para } r > a \quad (2.3b)$$

Quando não há neutralização de cargas ($f_e = 0$), nós obtemos

$$E_r = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} = \frac{Ir}{2\pi\varepsilon_0 a^2 v} \text{ para } r \leq a \quad (2.3c)$$

e

$$E_r = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 vr} \text{ para } r > a \quad (2.3d)$$

O campo magnético que tem apenas a componente azimutal é obtido aplicando-se a lei circuital de Ampère,

$$\int B \cdot dl = \mu_0 \int J \cdot dS \quad \text{(Lei Circuital de Ampère)}$$

Que nos dá

$$B_\theta = \mu_0 \frac{Ir}{2\pi a^2} \text{ para } r \leq a \quad (2.4a)$$

$$B_\theta = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \text{ para } r > a \quad (2.4b)$$

Pela integração da equação (2.3), nós obtemos para a distribuição do potencial eletrostático com a condição inicial $\phi=0$ para $r=b$ e usando $v=\beta c$, c sendo a velocidade da luz no vácuo, encontramos:

$$\phi(r) = V_s \left(1 + 2 \ln \frac{b}{a} - \frac{r^2}{a^2} \right) \text{ para } r \leq a \quad (2.5a)$$

$$\phi(r) = 2V_s \ln \frac{b}{a} \text{ para } a \leq r \leq b \quad (2.5b)$$

onde

$$V_s = \frac{\rho_0(1-f_e)a^2}{4\epsilon_0} = \frac{I(1-f_e)}{4\pi\epsilon_0\beta c} \approx \frac{30I}{\beta}(1-f_e) \quad (2.6a)$$

e

$$V_s = \frac{\rho_0 a^2}{4\epsilon_0} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0\beta c} \approx \frac{30I}{\beta} \quad (2.6b)$$

quando não há neutralização de cargas ($f_e = 0$).

Das equações acima temos que o pico de potencial no eixo do feixe ($r=0$) e o máximo campo elétrico nas bordas do feixe são dados por:

$$\phi(0) = V_0 = V_s \left(1 + 2 \ln \frac{b}{a} \right) \quad (2.7)$$

e

$$E_a = \frac{2V_s}{a} \approx \frac{60I}{\beta a}(1-f_e). \quad (2.8)$$

Nós agora iremos examinar o movimento desse feixe de partículas neste campo usando a equação da força dada por:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{u}) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.9a)$$

Das hipóteses iniciais temos que $\vec{E} = (E_r, 0, 0)$, $\vec{B} = (0, B_\theta, 0)$ e considerando as componentes radial e axial das partículas, ou seja $\vec{v} = (\dot{r}, 0, \dot{z})$, as equações de movimento das cargas do feixe são:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{r}) = \gamma m \ddot{r} = q(E_r - \dot{z} B_\theta) \quad (2.10)$$

e

$$\gamma m \ddot{z} = B_\theta \dot{r} \quad (2.11)$$

onde nós deixamos de lado o termo da força $qr\dot{\theta}B_z$ devido ao fato de $r\dot{\theta}$ ser desprezível e usamos o fator relativístico γ com valor constante desde que não haja aceleração externa.

Substituindo na equação acima E_r da equação (2.3a) e B_θ da equação (2.4a), temos:

$$\ddot{r} = \frac{qI}{2\pi a^2 m \gamma \epsilon_0} \frac{r}{\dot{z}} (1 - f_e - \mu_0 \epsilon_0 \dot{z}^2) \quad (2.12)$$

e

$$\ddot{z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi m \gamma} r \dot{z} \quad (2.13)$$

Tomando $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ e $\dot{z} = v = \beta c$, temos para a equação (2.12):

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{r}) = \gamma m \ddot{r} = \frac{qIr}{2\pi \epsilon_0 a^2 \beta c} (1 - f_e - \beta^2) \quad (2.14)$$

Usando a transformação de variável

$$\ddot{r} = v_z^2 \frac{d^2 r}{dz^2} = \beta^2 c^2 r''$$

a equação (2.14) fica:

$$r'' = \frac{qIr(1 - f_e - \beta^2)}{2\pi \epsilon_0 a^2 m c^3 \beta^3 \gamma} \quad (2.15)$$

ou, com $(f_e = 0)$ e $(1 - \beta^2) = \gamma^{-2}$, teríamos:

$$r'' = \frac{qIr}{2\pi\epsilon_0 a^2 mc^3 \beta^3 \gamma^3} \quad (2.16)$$

Agora iremos introduzir alguns parâmetros usados na literatura em feixes com cargas espaciais. Primeiramente temos a *corrente característica* I_0 dada por:

$$I_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 mc^3}{q} \approx \frac{1}{30} \frac{mc^2}{q} \quad (2.17)$$

que é aproximadamente 17kA para elétrons e 31(A/Z) MA para íons de número de massa A e número atômico Z.

Vamos introduzir também o *parâmetro de Budker* v_B definido como o produto do número de partículas primárias do feixe por unidade de comprimento, $N_L = \rho_L/q$, e o raio clássico da partícula r_C . Este último é obtido pela equação da energia de repouso mc^2 e a energia potencial $q^2/4\pi\epsilon_0 r_C$ de uma carga pontual com massa m e carga q . Assim,

$r_C = q^2/4\pi\epsilon_0 mc^2$, e nós encontramos:

$$v_B = N_L r_C = \frac{I}{I_0 \beta} \quad (2.18)$$

Para partículas ultra-relativísticas $\beta \approx 1$, o parâmetro de Budker é simplesmente dado pela razão entre a corrente do feixe I e a corrente característica I_0 .

Um terceiro parâmetro físico do feixe, a *freqüência de plama*, é dado para um caso mais geral, em que a neutralização das cargas espaciais não é nula, considerando-se parâmetros relativísticos, pela expressão:

$$\omega_p^2 = \frac{q^2 n}{\epsilon_0 \gamma^3 m} (1 - \gamma^2 f_e) \quad (2.19)$$

Ou, em termos da corrente I ,

$$\omega_p^2 = \frac{qI}{\pi\epsilon_0 mc\gamma^3 a^2} (1 - \gamma^2 f_e) \quad (2.20)$$

Com isso temos que a equação (2.7) pode ser escrita na forma

$$\ddot{r} = \frac{\omega_p^2}{2} r \quad (2.21)$$

As vantagens dessa generalização para a frequência de plasma são visíveis: A equação (2.13) tem a mesma forma matemática seja o movimento relativístico ou não, e esteja a neutralização de cargas presente ou não. Da relação (2.12), podemos ver que para $\gamma^2 f_e < 1$ temos $\omega_p^2 > 0$, ou seja, a rede de cargas espaciais não é focalizada. Por outro lado, quando $\omega_p^2 < 0$, ou seja, quando o campo gerado produz uma força de focalização sobre feixe, temos:

$$f_e > \frac{1}{\gamma^2} \quad (2.22)$$

Esta relação é conhecida como *condição de autofocalização de Budker*. Esta relação é de particular importância para intensos feixes relativísticos de elétrons em que uma pequena fração de íons estacionários positivos é suficiente para focalizar o feixe. Como veremos nas análises seguintes, a condição de autofocalização de Budker serve não somente para nos dizer a densidade mínima de íons de neutralização necessária para a focalização do feixe de elétrons, mas também serve de parâmetro para o poder de focalização do feixe, pois quanto maior for o fator f_e em relação a $f_B = \frac{1}{\gamma^2}$, mais rápida será a focalização do feixe de elétrons.

3. Análise numérica para a focalização de feixes de elétrons

Neste ponto, faremos uma análise numérica das equações de movimento (2.12) , (2.13) deduzidas na parte anterior e verificaremos a influência da condição de autofocalização de Budker para a focalização do nosso feixe de elétrons.

As equações que descrevem o movimento das partículas dentro do feixe são:

$$\ddot{r} = \frac{eI}{2\pi R_0^2 m\gamma\epsilon_0} \frac{r}{\dot{z}} (1 - f_e - \mu_0\epsilon_0\dot{z}^2) \quad (3.1)$$

e

$$\ddot{z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi m\gamma} r \dot{z} \quad (3.2)$$

em que e é a carga do elétron e R_0 é o raio inicial do feixe.

Nosso objetivo principal é obter o ponto de focalização do feixe de elétrons e para tanto seria conveniente obtermos a variação do raio do feixe em função da distância axial z . As duas equações acima fornecem um sistema de equações diferenciais de segunda ordem com o tempo como variável independente. Para a resolução deste sistema de equações criamos um programa utilizando o software *Mathematica 4.0* em que obtemos graficamente tanto a variação da posição axial e radial das partículas do feixe, ambas em função do tempo, como também a variação do raio do feixe em função da posição axial z .

Para analisarmos a solução das equações de movimento das partículas do feixe escolhemos um anodo de raio $r(0) = R_0 = 3,75\text{ cm}$ e os elétrons do feixe sendo injetados

paralelamente ao eixo z , ou seja, $r'(0) = 0$. Como os elétrons partem todos inicialmente do anodo, temos $z(0) = 0$ e a velocidade inicial das partículas é dada em função da diferença

de potencial do ao longo do tubo V , logo $z'(0) = \sqrt{\frac{2eV}{mc^2}}$, em que adotamos $V = 22500V$

para uma corrente de feixe $I = 40A$.

Programa:

```

μ = 4. Pi 10^-7;
c = 3.0 10^8;
e = 1.602177 10^-19;
m = 9.1009390 10^-31;
R = 0.8375; (* beam initial radius/m *)
I0 = 40.; (* beam current/A *)
V = 22500.; (* beam voltage/V *)
γ = 1 +  $\frac{eV}{mc^2}$ ;
ωB =  $\frac{\mu I0}{2\pi R} \frac{e}{\gamma m}$ ; (* ωB.t = normalized time *)
u =  $\frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$ ; (* u=v/c = normalized velocity *)

```

NEUTRALIZATION FACTOR

```

f1 = 1/γ^2
0.917465
f = 1.;

```

NORMALIZATION LENGTH

```

Ln = c/ωB;
R0 = R/Ln; (* normalized initial radius *)
tot = 0.3; (* total integration time/normalized

```

solution =

```

NDSolve[{r''[t] ==  $\frac{r[t]}{R0} \frac{1}{z'[t]} (1 - f - z'[t]^2)$ , r[0] == R0, r'[0] == 0,
z''[t] == r'[t]  $\frac{r[t]}{R0}$ , z[0] == 0, z'[0] == u}, {z, r}, {t, 0., tot},
Method -> ExplicitRungeKutta, MaxSteps -> 1000];

```

```
ParametricPlot[Evaluate[{t/1, z[t]*Ln*100} /. solution], {t, 0, tot},
PlotPoints -> 200];
```

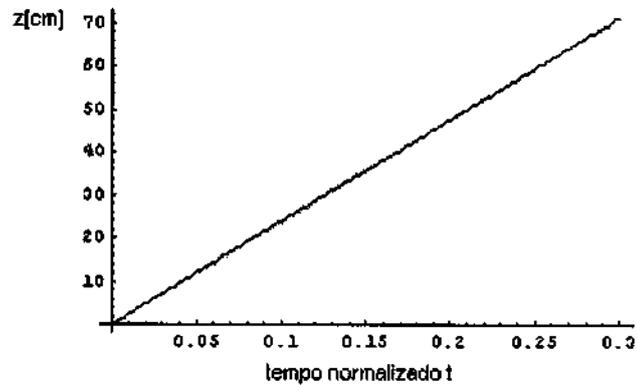


Fig.1:Gráfico da posição axial das partículas do feixe em função do tempo

```
ParametricPlot[Evaluate[{t/1, r[t]} /. solution], {t, 0, tot}, PlotPoints -> 200];
```

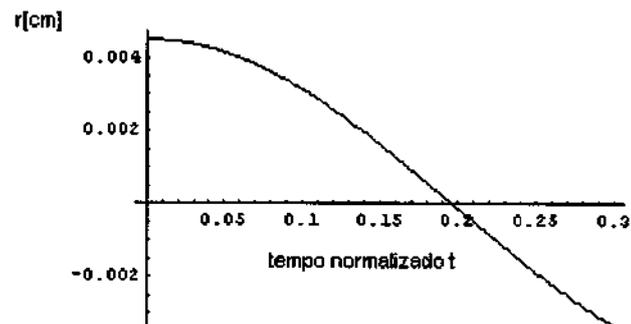


Fig.2:Gráfico da posição radial das partículas do feixe em função do tempo

```
zcm[t_] := z[t]*Ln*100 /. solution[[1]];
rcm[t_] := r[t]*Ln*100 /. solution[[1]];
```

```
rcm[t_] := r[t]*Ln*100 /. solution[[1]];
```

```
ParametricPlot[{zcm[t], Abs[rcm[t]]}, {t, 0., tot}, PlotPoints -> 200,
PlotRange -> {0, 1.2 R0*Ln*100}, AxesLabel -> {"z[cm]", "r[cm]"},
PlotStyle -> {Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]},
PlotLabel -> StyleForm["Beam Profile", FontFamily -> "Courier", FontSize -> 12,
FontWeight -> "Plain"]];
```

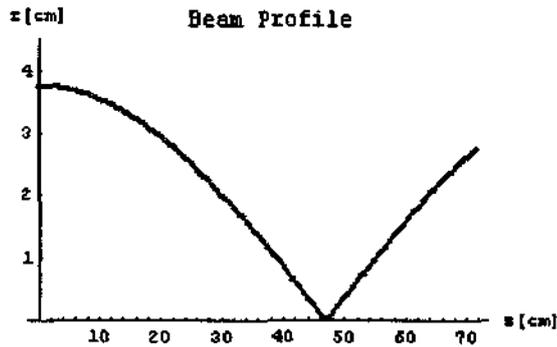


Fig.3:Gráfico da variação do raio r do feixe em função da distância axial z ($f_e = 1.0$).

3.1 Caso para $f_e > \frac{1}{\gamma^2}$

Como podemos observar, o valor da constante de neutralização do feixe f_e utilizada para a execução do programa satisfaz a condição de autofocalização de Budker, ou seja, $f_e = 1.0 > \frac{1}{\gamma^2} = 0.917465$. Para esta condição, como já havíamos dito, o feixe converge e encontra-se focalizado a uma distância $z \approx 47\text{cm}$. O gráfico de $z(t)$ como esperado é uma reta passando pela origem, mas o gráfico de $r(t)$ após a focalização assume valores negativos para o raio, o que pode ser analisado a partir da simetria axial do feixe. Para raio com valores negativos, temos partículas deslocando-se para uma região abaixo do plano que tomamos como referencial de observação do feixe. Devido à simetria axial do feixe temos simultaneamente partículas que estavam no plano inferior passando para o plano superior, plano inicial de observação do feixe. Logo, podemos continuar representando a variação do raio do feixe de maneira satisfatória tomando o módulo da função $r(t)$. Como resultado disso, temos o gráfico de $r(z)$ sempre com valores positivos de raio.

3.2 Caso para $f_e < \frac{1}{\gamma^2}$

Executando o programa novamente para os mesmos valores do item anterior variando-se apenas o valor do parâmetro de neutraliza do feixe de $f_e = 1.0$ para $f_e = 0.9$, obtemos o seguinte resultado:

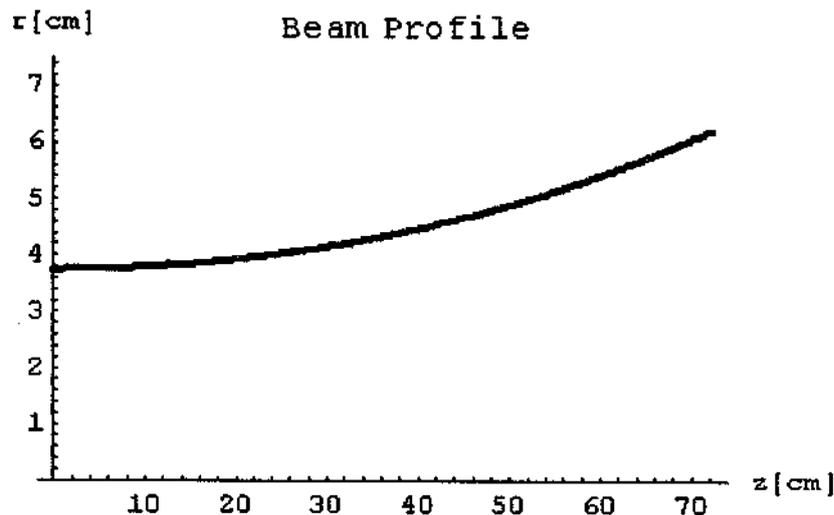


Fig. 4: Gráfico da variação do raio r do feixe em função da distância axial z ($f_e = 0.9$).

Podemos ver claramente que para valores menores do que $\frac{1}{\gamma^2}$ o feixe diverge.

Mesmo para valores muito próximos do valor de $\frac{1}{\gamma^2}$, iremos observar que o feixe diverge.

O fato de haver neutralização parcial das forças de repulsão das partículas do feixe, que são sempre mais intensas do que a força de focalização resultante do campo magnético gerado pelo próprio feixe, proporciona esse efeito de espalhamento do feixe, como já discutido na seção anterior.

É interessante analisarmos mais dois casos críticos para os valores assumidos por

f_e , são eles $f_e = \frac{1}{\gamma^2}$ e $f_e = \frac{1}{\gamma^2}$.

3.3 Caso para $f_e = \frac{1}{\gamma^2}$

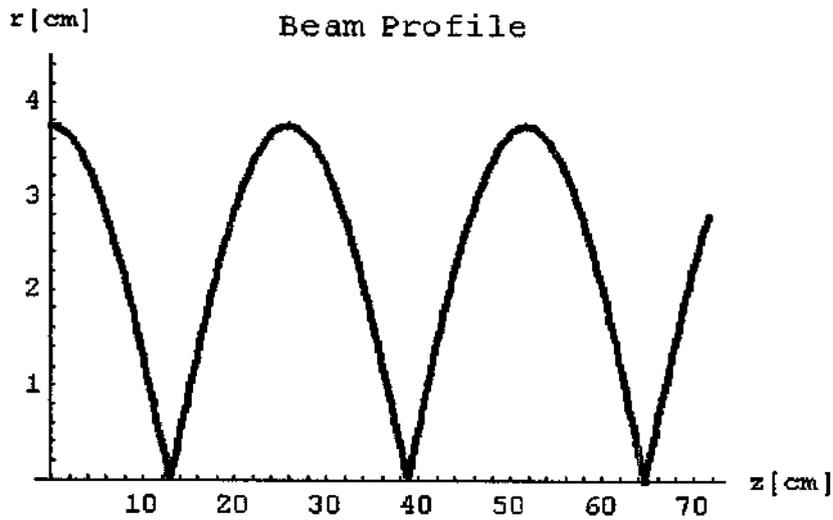


Fig. 5: Gráfico da variação do raio r do feixe em função da distância axial z ($f_e = 2.0$).

Podemos perceber que para valores de f_e muito maiores do que o valor necessário para a neutralização total das forças de repulsão das cargas espaciais, mais rápida é a convergência do feixe. Para o caso da Fig.5, em que utilizamos $f_e = 2.0$, temos o feixe convergindo a uma distância $z \approx 12.5\text{cm}$, cerca de quatro vezes menor do que para valores de $f_e = 1.0$. É importante observarmos que após a focalização, o raio do feixe volta novamente a ter seu valor inicial e depois volta a focalizar novamente, de forma periódica. Considerando um tubo finito e de comprimento bem maior do que o valor de z para a primeira focalização do feixe, pode-se perceber uma onda estacionária com $\lambda \approx 25\text{cm}$.

3.4 Caso para $f_e = \frac{1}{\gamma^2}$

Para esta condição, temos que as forças de repulsão dos elétrons são anuladas totalmente pelos íons no interior do feixe e pela força resultante do campo magnético gerado pelo feixe. Como resultado, temos partículas movendo-se paralelamente ao eixo do feixe :

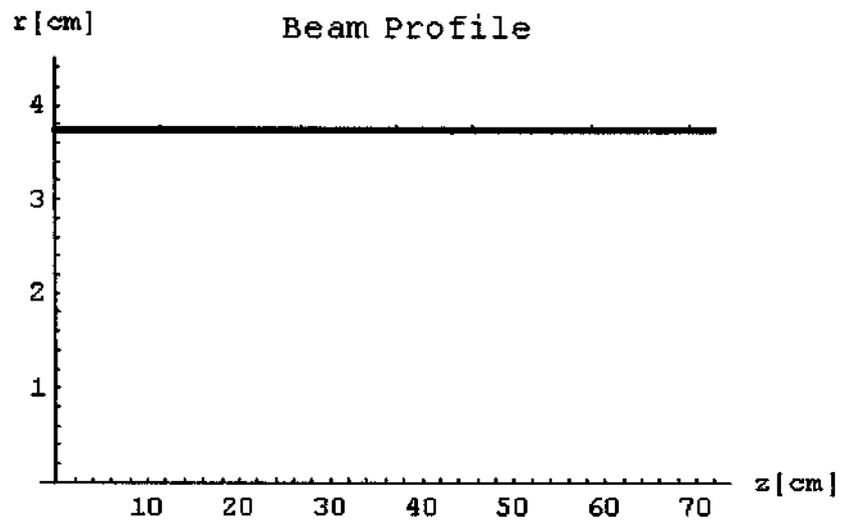


Fig. 6: Gráfico da variação do raio r do feixe em função da distância axial z ($f_e = f_l$).

4. Simulação de feixe de elétrons em um sistema de plasma

Após a abordagem teórica e a análise numérica das equações de movimento das partículas do feixe de elétrons do sistema de plasma em estudo, passamos agora para uma análise comparativa dos resultados já obtidos na análise numérica com os valores obtidos com o software russo KARAT. Este programa simula um número bastante grande de macro-partículas do sistema levando em consideração todas as forças de interação reais dessas partículas, o que nos dá resultados bastante confiáveis e bem próximos dos valores reais. Nosso objetivo neste ponto é verificar a consistência do nosso modelamento teórico e pra quais situações adicionais ele continua válido.

Antes de começarmos a análise, vamos calcular a quantidade de partículas por centímetros cúbicos n contidas no feixe de elétrons e, equivalentemente, a quantidade de íons suficiente para neutraliza as forças de repulsão dos elétrons no feixe, para tanto temos:

$$J = qnv \quad (4.1)$$

Logo, para $u = v/c = \sqrt{\frac{2eV}{mc^2}}$, $q = ee$ e $J = \frac{I}{\pi a^2}$ podemos escrever:

$$n = \frac{I}{\pi a^2} \frac{1}{e v} = \frac{I}{\pi a^2 e c} \sqrt{\frac{mc^2}{2eV}} \quad (4.2)$$

Para os valores de $I = 40A$, $V = 22500V$ e $a = 0.0375m$ utilizados na seção anterior para a obtenção dos resultados numéricos, temos:

$$n = 6.3 \cdot 10^8 \text{ partículas / cm}^3$$

A condição de autofocalização de Budker $f_e = \frac{n_{ions}}{n_e} > \frac{1}{\gamma^2} = 0.917465$ em termos da densidade de íons fica:

$$n_{ions} > n_e \cdot 0.917465 = 5.82517 \cdot 10^8 \text{ partículas / cm}^3$$

4.1 Tubo orientado aberto

O primeiro caso que iremos simular, é o caso em que temos um tubo cilíndrico com a outra extremidade aberta, ou seja, os elétrons podem continuar livremente os seus percursos como se o tubo fosse infinito. Nas imagens apresentadas abaixo, temos que o contorno vermelho representa as paredes do tubo metálico. O raio inicial do feixe é $R_0 = 3.75\text{cm}$ e os riscos azulados representam os elétrons do feixe.

Para o primeiro caso, tomamos um feixe em um sistema de plasma com densidade de ions $n = 1.0 \cdot 10^9 \text{ partículas/cm}^3$ o que corresponde a um parâmetro de neutralização do feixe $f_e = 1.6$.

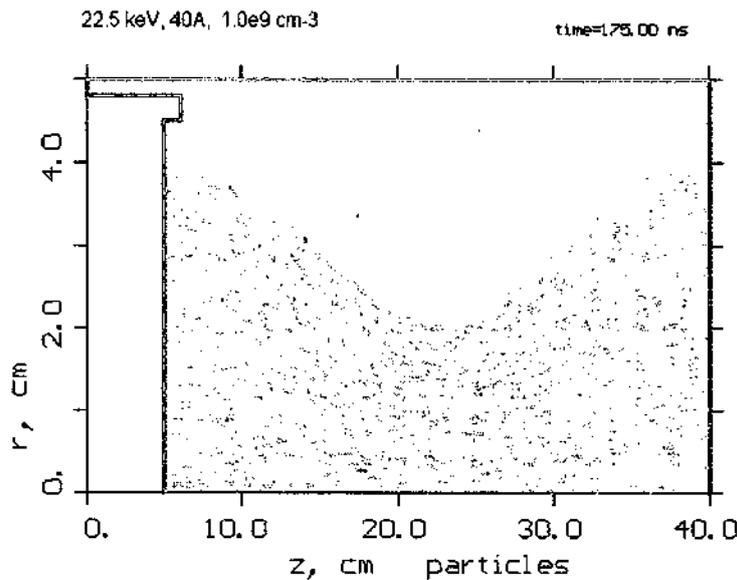


Fig.7: Simulação de feixe de elétrons em ambiente de plasma para $f_e = 1.6$.

Podemos perceber que o feixe de elétrons converge em uma distância aproximadamente $d = 19\text{cm}$ do anodo, o que corresponde a $z = 24\text{cm}$. Este resultado não concorda com o resultado que obtemos a partir da solução numérica das equações de movimento das partículas do feixe.

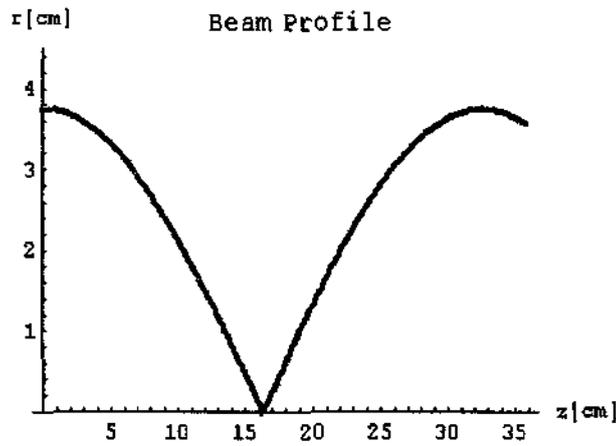


Fig. 8: Solução numérica para $f_e = 1.7$. Distância de focalização $d = 16\text{cm}$.

Para podermos entender a diferença de resultados, vamos analisar a distribuição de potencial no interior do feixe, ao longo do eixo z .

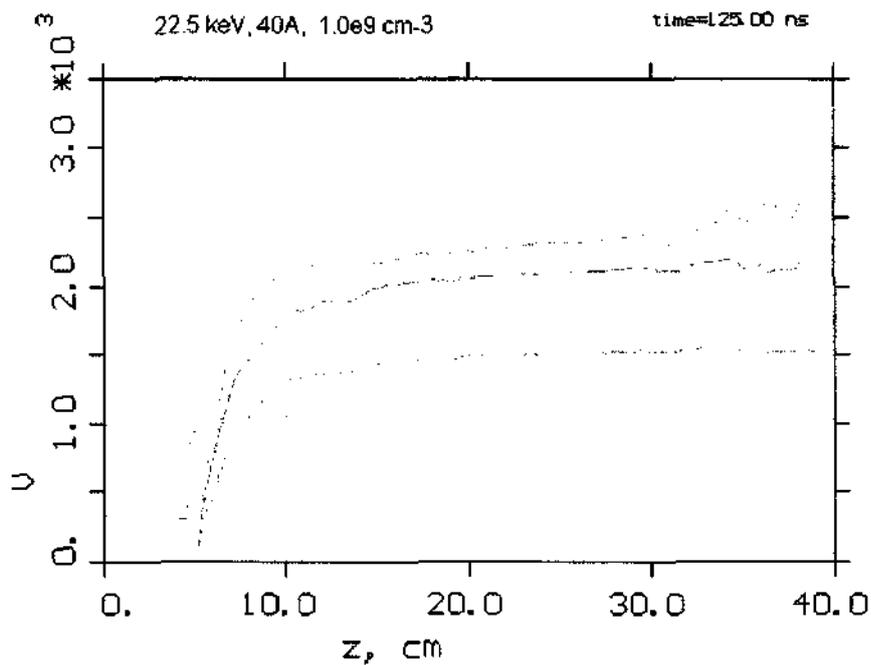


Fig. 9: Variação do potencial das partículas do feixe com relação ao anodo $f_e = 1.6$. A numeração das linhas de potencial refere-se à posição das partículas em relação ao raio do feixe.

A partir do gráfico apresentado, podemos ver que a variação de potencial é significativa nos primeiros centímetros de propagação do feixe até que o potencial ao longo do tubo passa a ser praticamente constante. A variação de potencial sofrida pelas partículas do feixe proporciona uma aceleração que foge ao modelamento proposto anteriormente, pois consideramos γ constante desde que o feixe não fosse acelerado. Medindo a distância de convergência do feixe a partir do instante em que temos potencial constante, cerca de 3cm do anodo, temos $d = 16\text{cm}$, o que concorda exatamente com o que foi calculado anteriormente.

Embora o ponto de focalização do feixe tenha sido bastante consistente com o modelamento apresentado fazendo-se as considerações devidas, podemos perceber a partir da Fig.7 que o raio do feixe no ponto de convergência não vai a zero, sendo de aproximadamente $r = 2\text{cm}$. Este fato deve-se ao aumento da densidade de cargas negativas numa única região, sendo a quantidade de íons insuficiente para neutralizar de maneira satisfatória as forças de repulsão das partículas do feixe.

Podemos verificar que para uma densidade de partículas positivas maior do que $n = 1.0 \cdot 10^9 \text{ partículas} / \text{cm}^3$, o raio do feixe no ponto de convergência tende a diminuir. Analisando a equação (4.2) podemos concluir que a densidade de partículas depende do raio do feixe a , logo teremos um ponto em que o raio do feixe é suficientemente pequeno e deixa de satisfazer a condição de autofocalização de Budker.

As figuras 10 e 11 referem-se à densidade de partículas $n = 1.4 \cdot 10^9 \text{ partículas} / \text{cm}^3$ e $n = 1.8 \cdot 10^9 \text{ partículas} / \text{cm}^3$, respectivamente.

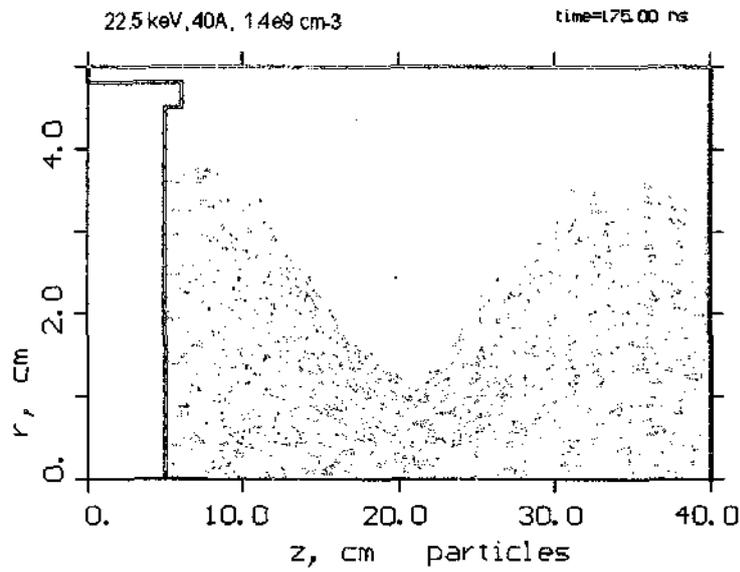


Fig. 10: Simulação de feixe de elétrons em ambiente de plasma para $f_e = 2.2$.

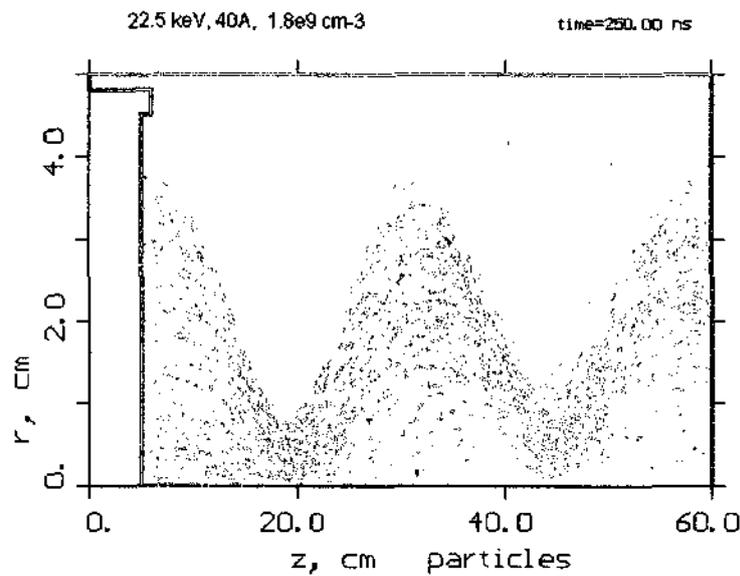


Fig. 11: Simulação de feixe de elétrons em ambiente de plasma para $f_e = 2.85$.

4.2 Tubo orientado fechado

Considerando o caso anterior com as paredes do tubo finitas, ou seja, com os elétrons chocando-se com as paredes do condutor metálico, temos os seguintes resultados para

$n = 0.6 \cdot 10^9$, $n = 0.7 \cdot 10^9$ e $n = 1.4 \cdot 10^9$ partículas/cm³ temos:

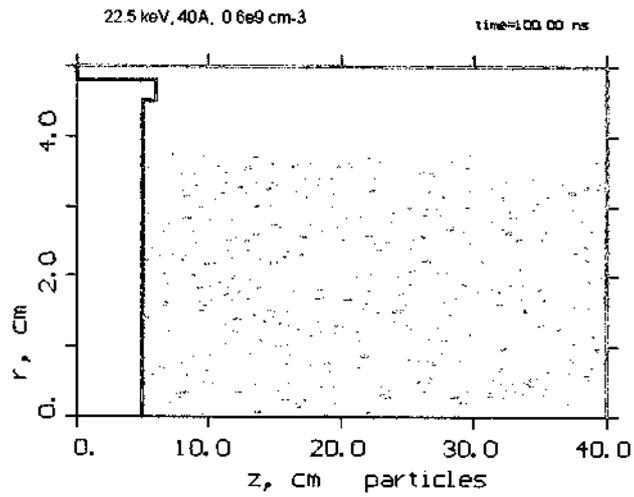


Fig. 12: Simulação de feixe de elétrons em ambiente de plasma para $f_e \approx \frac{1}{\gamma^2}$.

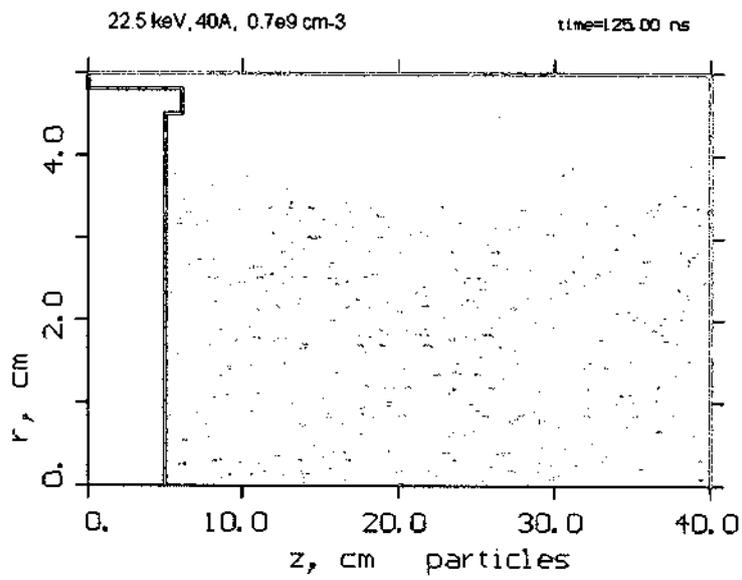


Fig. 13: Simulação de feixe de elétrons em ambiente de plasma para $f_e = 1.1$.

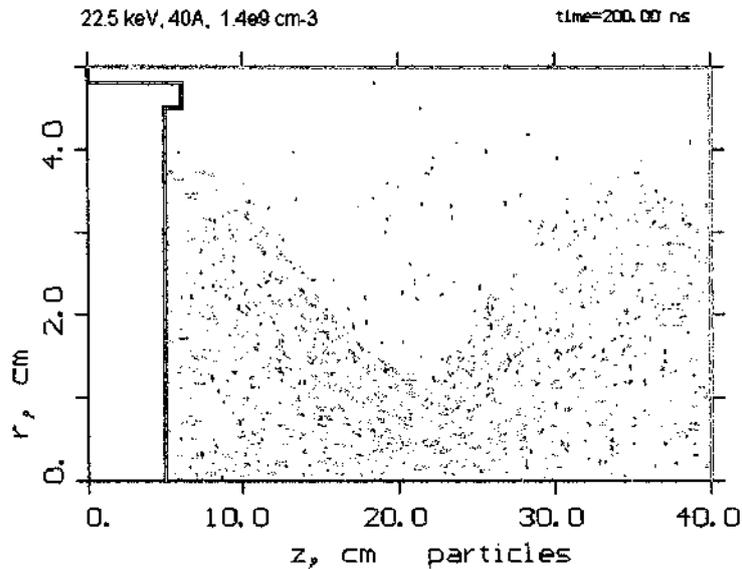


Fig. 14: Simulação de feixe de elétrons em ambiente de plasma para $f_e = 2.2$.

Podemos observar que para valores f_e próximos de $\frac{1}{\gamma^2}$, o feixe praticamente não sofre alteração, continuando sua trajetória paralelamente ao eixo do tubo. Este resultado é o mesmo independentemente do tubo ser aberto ou fechado, e é condizente com os resultados numéricos encontrados (Fig. 6).

Para o caso de $f_e = 2.2$ podemos perceber que o ponto de convergência do feixe aparentemente não se altera com o aparecimento da parede metálica. Analisando a distribuição de potencial das partículas do feixe (Fig. 14), podemos observar que a aceleração sofrida pelas partículas do feixe no início de suas trajetórias é semelhante a da Fig. 9, mas ao contrário do que ocorre anteriormente, o feixe passa a ter uma desaceleração devido à queda de potencial que surge resultante do aparecimento da parede metálica. Embora para o exemplo da Fig. 14 não tenhamos percebido nenhuma alteração na distância de focalização do feixe, podemos afirmar que para um tubo menor, com comprimento

próximo da distância de convergência do feixe, teremos alteração para o ponto de focalização do feixe resultante da desaceleração que o feixe sofre no final da trajetória.

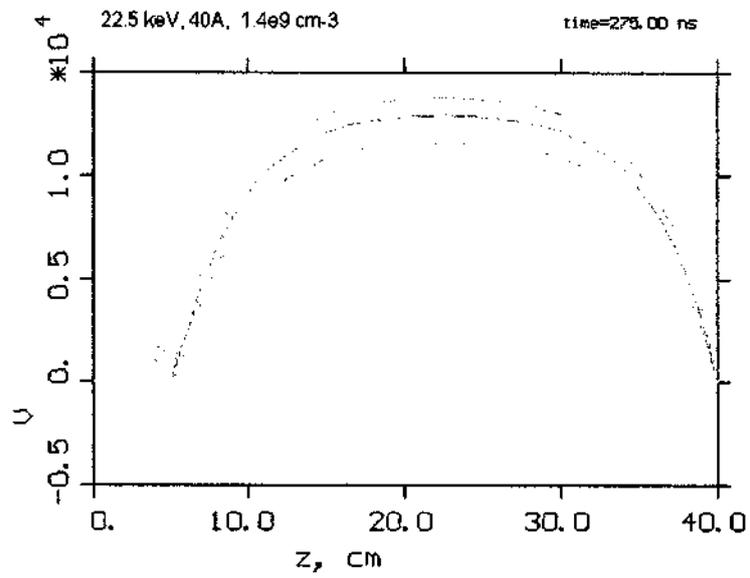


Fig. 15: Variação do potencial das partículas do feixe com relação ao anodo ($f_e = 2.2$).

4.3 Tubo orientado com coletor e elétrons acelerados

Iremos passar agora para a análise do caso que realmente nos interessa. Nosso objetivo é utilizar a energia concentrada dos elétrons focalizados para o tratamento térmico de superfícies, logo precisamos de um tubo com comprimento bem próximo da posição de focalização do feixe, onde podemos colocar um coletor para os elétrons que chegam com alta energia. Um segundo fator que precisamos considerar é o de que os elétrons partem com velocidade inicial nula, ao contrário dos casos anteriores em que os elétrons já saem com velocidade inicial correspondente à energia de $22.5keV$. A Fig. 15 ilustra essa situação.

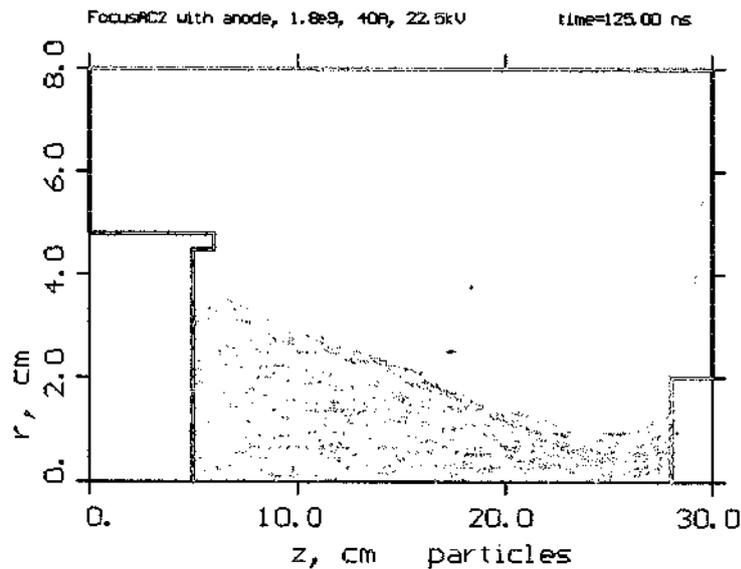


Fig. 16: Simulação de feixe de elétrons acelerados com coletor ($f_e = 2.85$).

A Fig. 16 nos mostra a variação do potencial ao longo do tubo e podemos perceber que semelhantemente aos casos anteriores, temos um aumento rápido do potencial ao longo do tubo até que o potencial fica constante e, no final, decresce rapidamente devido à presença do coletor como foi comentado anteriormente. Podemos ver, no entanto, que a região de aceleração das partículas é bem maior que a do caso anterior, pois os elétrons

saem com velocidade nula ao invés de serem injetados no tubo. Desconsiderando a região em que as partículas estão sendo aceleradas, podemos encontrar a distância de focalização do feixe através das equações de movimento apresentadas anteriormente com uma aproximação bastante razoável.

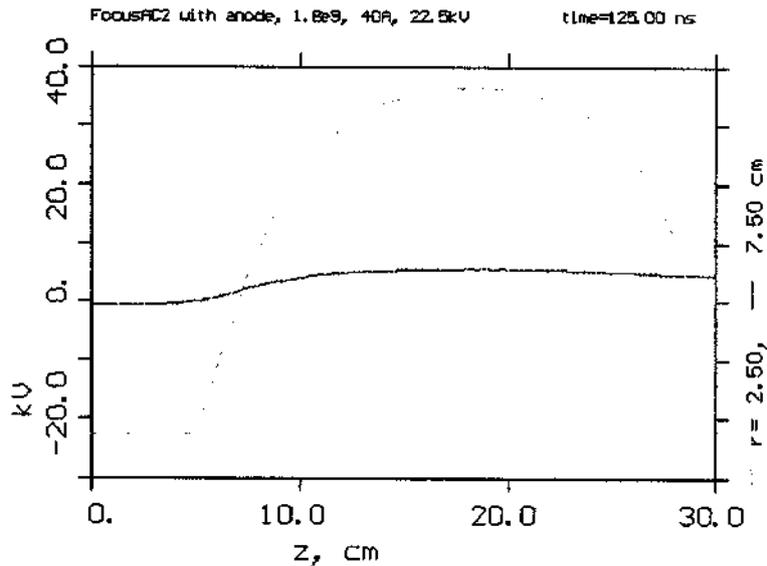


Fig. 17: Variação do potencial das partículas do feixe ao longo do tubo $f_e = 2.85$.

Outro ponto interessante a ser analisado é a influência do formato do anodo na focalização dos elétrons para o caso em que estes estão sendo acelerados. Para os casos em que os elétrons são injetados no tubo com velocidade inicial diferente de zero, a geometria do anodo não influencia significativamente na trajetória dos elétrons, pois estes já saem em alta velocidade. Mas quando estes elétrons possuem velocidade inicialmente nula, a geometria do anodo influencia na disposição das linhas equipotenciais na superfície do anodo funcionando como uma lente convergente. Este efeito fica claro quando analisamos os resultados obtidos para duas situações com condições idênticas mas com anodos com geometrias diferentes.

A Fig. 18 nos mostra as linhas de campo elétrico sendo deformadas pela presença de um degrau nas bordas do anodo. Como as linhas de potencial são perpendiculares às linhas de campo elétrico, podemos verificar as deformações das linhas equipotenciais resultantes da deformação do campo elétrica na superfície do anodo na Fig. 19.

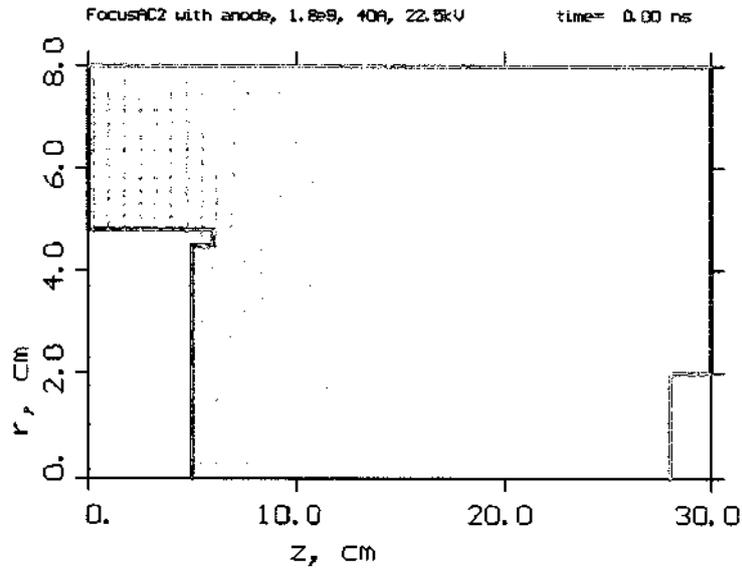


Fig. 18: Linha de campo elétrico nas proximidades do anodo ($f_e = 2.85$).

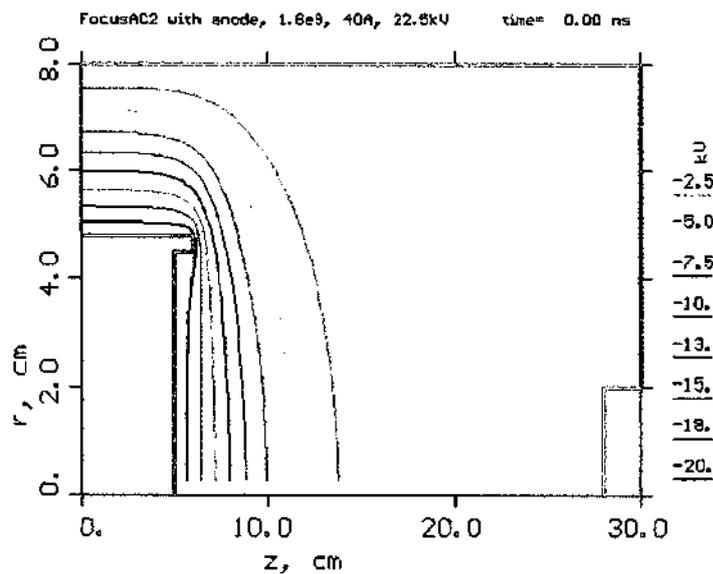


Fig. 19: Linhas equipotenciais nas proximidades do anodo ($f_e = 2.85$).

As Fig. 20 e 21 ilustram o caso em que o anodo não possui o degrau no contorno. Podemos perceber que a distância de convergência continua praticamente inalterada mas inicialmente o feixe tende a divergir. Podemos atribuir este fenômeno ao fato da intensidade do campo magnético gerado pelo feixe crescer com o aumento da corrente, ou seja, com o aumento da velocidade das partículas do feixe.

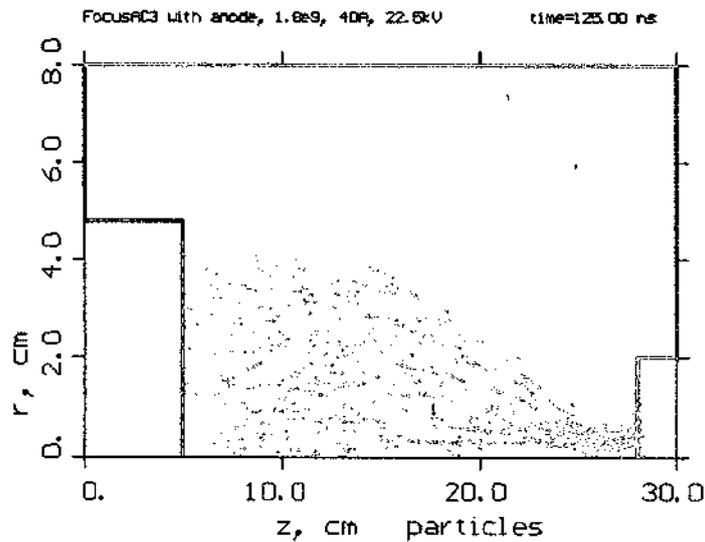


Fig.21: Simulação de feixe de elétrons acelerados sem degrau nas bordas do anodo ($f_e = 2.85$).

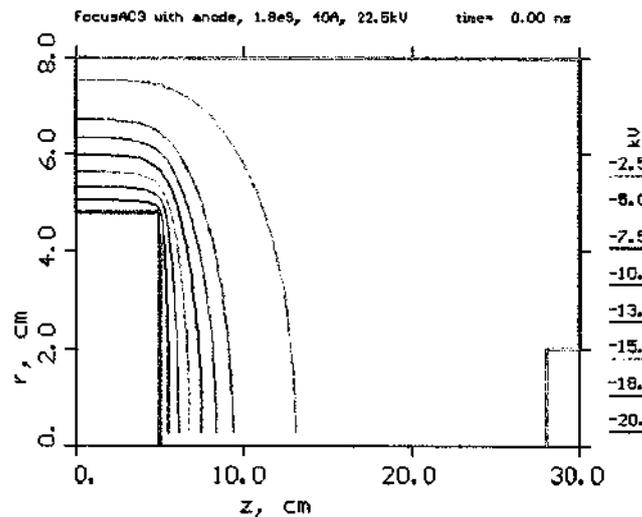


Fig.22: Linhas equipotenciais para anodo sem degrau nas bordas do anodo ($f_e = 2.85$).

5. Conclusão

A autofocalização de elétrons em um sistema de plasma pode ser de grande utilidade para o tratamento térmico de superfícies e outras aplicações. O modelamento matemático que apresentamos neste trabalho mostrou-se muito útil para a compreensão do sistema em estudo. A partir dele pudemos estabelecer parâmetros em que podemos obter a autofocalização do feixe de elétrons, condição de autofocalização de Budker, além de obtermos aproximações bastante significativas para a posição de autofocalização dos feixes de elétrons.

As análises realizadas são de fundamental importância para as etapas posteriores do trabalho, nas quais projetaremos e colocaremos em funcionamento um canhão de elétrons autofocalizados, pois a partir do nosso modelo simplificado, pudemos avaliar várias situações paralelas, o que nos possibilitou compreender as particularidades no comportamento do sistema até chegarmos na análise da situação que iremos implementar na prática. Para o caso de interesse em que temos elétrons partindo do anodo com velocidade inicial nula, nossas análises permitiram verificar a convergência dos elétrons de alta energia no coletor acoplado ao final do tubo em que o feixe se propaga e nos possibilitou estimar a distância de focalização do feixe, bem como a otimização do processo de focalização a partir da geometria do anodo, o que se constitui um resultado bastante favorável e que simplifica nossos trabalhos futuros.

6. Bibliografia

H. P. Ranea-Sandoval, N. Reesor, B. T. Szapiro, C. Murray, and J. J. Rocca, "Study of intense electron beams produced by high-voltage pulsed glow discharges, *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 15(4), pp. 361-374, August 1987.

R. J. Adler, "Production of focused electron beams in a plasma implantation system", *Surface Coatings Technology*, Vol. 136, pp. 40-42, 2001.

J. I. Etcheverry, N. Mingolo, J. J. Rocca, and O. E. Martinez, *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 25(3), pp. 427-432, June 1997.

V. P. Tarakanov, User's Manual for Code KARAT, Springfield, VA, Berkeley Research Associates Inc., 1994.