



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS



Estudo de ressonâncias no movimento orbital de satélites artificiais

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

**INPE
São José dos Campos
Julho de 2011**



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS



Estudo de ressonâncias no movimento orbital de satélites artificiais

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBIC/CNPq/INPE)

**André Luís Cassiano Lino (FATEC-SJC, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: andrelcl_007@hotmail.com**

**Dr. Jorge Kennety da Silva Formiga (DEM/INPE-FATEC-SJC, Orientador)
E-mail: jkennety@yahoo.com.br**

Julho de 2011

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe e a todos que me apoiaram para realização desse trabalho, e também ao professor Jorge Kennety da Silva Formiga pela oportunidade e pelas revisões realizadas durante o trabalho. Aproveito a oportunidade para agradecer ao CNPQ por conceder a bolsa que tornou possível a realização desse trabalho.

RESUMO

Após uma sequência de transformações canônicas chegamos a um sistema dinâmico que sua integração é capaz de descrever o movimento orbital. Onde o movimento sofre perturbações devido ao geopotencial terrestre e ressonância proveniente da comensurabilidade do movimento orbital do satélite artificial com o movimento rotacional da Terra. O movimento do satélite foi analisado nas regiões próximas da ressonância 2:1 nas simulações foi considerado como potencial perturbador o harmônico $J_2 + J_{22}$ e em simultaneamente considerando o harmônico $J_2 + J_{32}$. O espaço e fase do sistema foram estudados considerando um ângulo fixo. Simulações apresentadas entre o tempo e os elementos orbitais do satélite artificial.

STUDY OF RESONANCE IN THE ORBITAL MOVEMENT TO ARTIFICIAL SATELLITES

ABSTRACT

A suitable sequence of canonical transformations reduces the system of differential equations describing the orbital motion to an integrable dynamic system. Through this dynamic system, the motion of an artificial satellite subject to geopotential perturbations and resonances between the frequencies of the mean orbital motion and the Earth rotational motion is analyzed. The behavior of the motion of the satellite is analyzed in the neighborhood of the 2:1 resonances it was considered first the simultaneous influence of the harmonics J_2+J_{22} and thus the simultaneous influence of the harmonics $J_2+ J_{32}$. The phase space of the resulting system is studied considering that one resonant angle is fixed. Simulations are presented showing the time-behavior of the orbital elements of artificial satellites.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	17
Figura 2	17
Figura 3	18
Figura 4	19
Figura 5	19
Figura 6	20
Figura 7	20
Figura 8	21
Figura 9	23
Figura 10	25
Figura 11	25
Figura 12	26

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	8
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	11
EQUACIONAMENTO DO MOVIMENTO	12
RESULTADOS NUMÉRICOS.....	16
CONCLUSÃO	27
BIBLIOGRAFIA.....	28

INTRODUÇÃO

O tema deste trabalho consiste no efeito de ressonância orbital de satélites artificiais em relação ao movimento rotacional terrestre. Neste estudo será considerado apenas o potencial gravitacional terrestre em que para se obter resultados mais preciso é necessário considerar outras perturbações como por exemplo: arrasto atmosférico para satélites com baixa altitude, lunisolar, gravitacional, pressão da radiação solar que não serão abordadas nesse trabalho.

Justifica-se a escolha desse tema porque desde o início, nos lançamentos dos primeiros satélites até hoje pode se observar um grande avanço tecnológico espacial, pois, cada vez mais o homem vem utilizando os satélites para diversos fins.

Alguns satélites são enviados para observações terrestres, monitoramento do clima, estudo da atmosfera e do campo gravitacional terrestre. A precisão dos dados estabelecida para cada tipo de missão a qual ele foi designado, porém com alguns satélites ocorrem à necessidade de executar manobras no espaço para corrigir suas coordenadas que são alteradas devido a perturbações sofridas. Nesta abordagem é necessário considerar alguns fatores quando se estuda o movimento translacional e o movimento rotacional dos satélites. Um destes fatores surge quando existe comensurabilidade entre o movimento orbital dos satélites juntamente com o movimento rotacional dos planetas. Este efeito é chamado de ressonância orbital de satélites.

O objetivo deste estudo é aplicar uma teoria já desenvolvida para estudos de ressonância e verificar as variações dos elementos kleperianos devido ao efeito do potencial gravitacional. E também realizar varias simulações variando os elementos kleperianos nas condições iniciais com intuito de obter uma orbita mais estável e eliminar os efeitos causados pela ressonância considerando alguns harmônicos esféricos.

Fenômenos de ressonância em satélites

Inicialmente podemos conhecer alguns fenômenos de ressonância que ocorrem em satélites, entre satélites, em relação ao movimento translacional do satélite e o movimento de rotação do planeta.

Em teoria de satélites, o fenômeno de ressonância pode ser observado quando ocorre uma comensurabilidade, entre diversas frequências envolvidas no fenômeno considerado. Quando observado o fenômeno de ressonância em satélites devem ser corrigidos, pois, provocam oscilações nos elementos orbitais e se persistindo por vários dias (Formiga, 2009). Estas se propagam quando são considerados perturbações tais como: arrasto atmosférico, perturbações gravitacionais, pressões da radiação solar podem fazer com que o satélite venha a escapar de sua órbita. Segundo Formiga (2009) podemos citar;

A) Ressonância do movimento translacional do satélite com o movimento rotacional do planeta

Esse fenômeno existe quando ocorre uma comensurabilidade entre a frequência que o satélite percorre sua órbita e a frequência que o planeta gira em torno do seu próprio eixo, ou seja, do seu movimento rotacional. Esta configuração de ressonância pode ser vista na Figura 1.

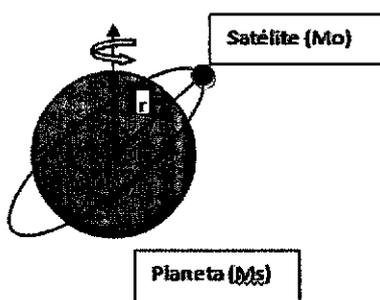


Figura 1-Movimento rotacional do planeta

B) Ressonância Heliossíncrona

Sabemos que o movimento da Terra ao redor do sol é de aproximadamente 365,25 dia, com isso, o seu deslocamento angular é de 0,9856 graus /dia. Considerando um satélite com

órbita circular, ou seja, com $e = 0$ em órbita da Terra, devido a perturbações em sua órbita ocorre o que chamamos de precessão de nodo ascendente (Ω), que é o deslocamento da órbita do satélite em volta do eixo longitudinal da Terra. Quando esse deslocamento é igual à velocidade média da órbita da Terra em torno do Sol, dizemos que ocorre o fenômeno de ressonância Heliossíncrona (Figura 3).

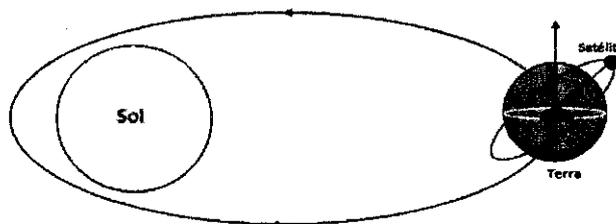


Figura 2- Ressonância Heliossíncrona

C) Ressonância spin-órbita

Esse fenômeno ocorre quando existe uma comensurabilidade do movimento do satélite em volta da Terra com seu movimento em volta de seu próprio eixo (Figura 3).

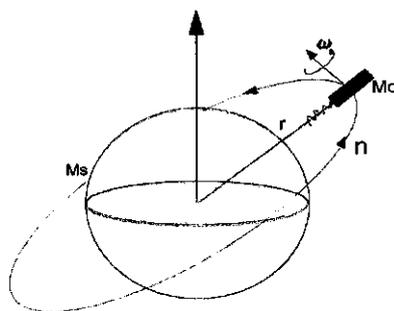


Figura 3- Ressonância spin-órbita

BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo dos efeitos da ressonância sobre órbitas de satélites artificiais tem sido considerado desde a década de 60 (Morando,1963; Allan,1963; Blitzer,1963; Cook,1963).

Lima Junior (1998) a partir da formulação geral do geopotencial que envolve anomalia média e os coeficientes de Hansen (função excentricidade) procurou um núcleo integrável para as equações do movimento do sistema dinâmico com ressonância. Através de algumas hipóteses aplicadas ao geopotencial obteve duas integrais primeiras que tornaram o sistema de equações integrável. Com os resultados obtidos, notou grande possibilidade de se trabalhar analiticamente com sistemas ressoantes em altas excentricidades.

Baseado na idéia de Lima Junior (1998), o uso de transformações canônicas para o estudo de perturbações orbitais devidos aos efeitos de ressonância tem sido explorado para ressonância 2:1 por Vilhena de Moraes et al., 2000; Lima Junior; Vilhena de Moraes; Fernandes, 2001; Vilhena de Moraes et al, 2003.

Formiga (2009), baseado na teoria apresentada por Lima Jr.(1998) apresenta os harmônicos esféricos envolvidos nas ressonâncias bem como regiões onde ocorre o efeito da ressonância para diversos tipos de ressonâncias: 2:1, 15:1 e 8:1. Mostrou que este efeito provoca uma variação de aproximadamente 12 km na altitude de sua orbita alterando a configuração do movimento orbital.

EQUACIONAMENTO DO MOVIMENTO

A equação do potencial perturbador é representada pela função inclinação, e a expressão relacionada com a excentricidade apresentada por Osório (1973) para o potencial gravitacional terrestre, em termos dos coeficientes de Hansen, $H_q^{(\ell+1),(\ell-2p)}(e)$, da função inclinação do Kaula, $F_{\ell mp}(i)$, e da anomalia média, M . Este potencial é válido para qualquer órbita com $0 < e < 1$:

$$U = \frac{\mu}{2a} + \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{a} \left(\frac{a_e}{a} \right)^{\ell} J_{\ell m} F_{\ell mp}(i) H_q^{-(\ell+1),(\ell-2p)}(e) \cos \varphi_{\ell mp q}(M, \omega, \Omega, \Theta) \quad (1)$$

em que

$$\varphi_{\ell mp q}(M, \omega, \Omega, \Theta) = qM + (\ell - 2p)\omega + m(\Omega - \Theta - \lambda_{\ell m}) + (\ell - m)\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

onde $J_{\ell m}$, são os harmônicos esféricos que estão relacionados com o ângulo $\varphi_{\ell mp q}$ através dos coeficientes ℓ e m ; $\Theta = \omega_e t$ é o tempo sideral (ângulo), ω_e é a velocidade angular da terra; $\lambda_{\ell m}$ é a longitude do semi-eixo maior de simetria do harmônico esférico (ℓ, m) ; a , e , i , Ω , ω , M , são respectivamente o semi eixo maior da órbita, excentricidade, inclinação, longitude do nodo ascendente, argumento do perigeu e anomalia média.

A expressão do potencial perturbador, apresentada por Osório (1973), foi desenvolvida com ênfase dada aos termos ressonantes a fim de se aplicar à teoria apresentada anteriormente. Estendendo a Equação (1) para ressonância 2:1 os coeficientes são expressos por

$$\begin{aligned}
U = & -\frac{\mu}{a} \left\{ J_{2,2} \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 [H_1^{-3,2}(e) F_{2,2,0}(i) \cos(M + 2\omega + 2(\Omega - \Theta - \lambda_{2,2})) + \right. \\
& H_1^{-3,0}(e) F_{2,2,1}(i) \cos(M + 2(\Omega - \Theta - \lambda_{2,2})) + \\
& \left. H_1^{-3,-2}(e) F_{2,2,0}(i) \cos(M - 2\omega + 2(\Omega - \Theta - \lambda_{2,2})) \right] + \\
& J_{3,2} \left(\frac{a_e}{a} \right)^3 [H_1^{-4,3}(e) F_{3,2,0}(i) \text{sen}(M + 3\omega + 2(\Omega - \Theta - \lambda_{3,2})) + \\
& H_1^{-4,1}(e) F_{3,2,1}(i) \text{sen}(M + \omega + 2(\Omega - \Theta - \lambda_{3,2})) + \\
& H_1^{-4,-1}(e) F_{3,2,2}(i) \text{sen}(M - \omega + 2(\Omega - \Theta - \lambda_{3,2})) + \\
& \left. H_1^{-4,-3}(e) F_{3,2,3}(i) \text{sen}(M - 3\omega + 2(\Omega - \Theta - \lambda_{3,2})) \right] \}
\end{aligned}$$

Utilizando as variáveis de Delaunay com intuito de realizar mudanças de variáveis, dos elementos Kleperianos para as canônicas, obtemos uma Hamiltoniana onde será possível analisar o efeito de ressonância.

$$\begin{aligned}
L &= \sqrt{\mu a} & G &= \sqrt{\mu a(1-e^2)} & H &= \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i \\
l' &= M & g &= \omega & h &= \Omega
\end{aligned} \tag{3}$$

Para eliminar a dependência do tempo estende-se o espaço e fase, e introduz uma nova variável θ conjugada a $\Theta(t) = \omega_e t$ em que ω_e e velocidade angular da Terra. Tem-se a seguinte Hamiltoniana

$$\mathbb{H}(X, Y, Z, x, y, z) = \frac{\mu^2}{2X^2} + \omega_e + R'_{lmpq} \tag{4}$$

em que

$$R'_{lmpq} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\mu^{l+2}}{X^{2l+2}} a_e^l J_{lm}^l F_{lmpq}(X, Y, Z) \tag{5}$$

$$H_q^{-(l+1), (l-2p)}(X, Y) \cos \varphi_{lmpq}(x, y, z, \Theta)$$

e o argumento é dado por:

$$\varphi_{lmpq}(x, y, z, \Theta) = (qx - m\Theta) + (l - 2p - q) + \tag{6}$$

$$+ y(m - l + 2p)z - m\lambda_{lm} + (l - m) \frac{\pi}{2}$$

O sistema dinâmico que representa o movimento de um satélite artificial considerando o geopotencial é dada por:

$$\frac{d(X, Y, Z, \Theta)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial (x, y, z, \theta)} \quad \frac{d(x, y, z, \theta)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial (X, Y, Z, \Theta)} \quad (7)$$

A Equação (4) é apresentada de forma explicita por Lima Junior (1998). A condição de ressonância obtida através do período orbital do satélite com o período de revolução da Terra é expresso por:

$$qn - m\omega_e = 0 \quad (8)$$

Sendo n o movimento médio orbital, ω_e a velocidade angular da Terra, q e m são números inteiros relacionados respectivamente com o numero de rotações do planeta e o movimento orbital do satélite. No nosso estudo será considerada a ressonância 2:1 onde $q=2$ e $m=1$, ou seja, enquanto o satélite completa 2 voltas a Terra realiza 1.

Por fim é obtida uma nova Hamiltoniana critica onde se extrai um sistema de equações diferenciais nas variáveis angulares e periódicas Ω , ω , M , e com uma igualdade nas frequências de movimento.

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= - \sum_{p=s}^{\infty} B_{(2p+k)mp(am)}(X_1, C_1, C_2) \text{sen} \varphi_{(2p+k)mp(am)}(x_1, \Theta_1) \\ \frac{d\varphi_{(2p+k)mp(am)}}{dt} &= m\alpha \frac{\mu^3}{X_1^3} - m\omega_e - m\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial B_{2j,0,j,0}(X_1, C_1, C_2)}{\partial X_1} \\ &\quad m\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial B_{(2p+k)mp(am)}(X_1, C_1, C_2)}{\partial X_1} \text{cos} \varphi_{(2p+k)mp(am)}(x_1, \Theta_1) \end{aligned} \quad (9)$$

Após a introdução das variáveis de Delaunay e algumas transformações canônicas podemos obter um sistema dinâmico, que através de sua solução é possível verificar a variação dos elementos Kleperianos em relação às variáveis de Delaunay.

A relação $B_{(2p+k)m_p(\alpha m)}(X_1, C_1, C_2)$ e $F_{i m p q}(X_1, C_1, C_2)$ com os elementos kleperianos é apresentada na literatura por Lima Junior (1998) e por Formiga (2005) onde podemos encontrar a variação dos elementos keplerianos através da equação:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{X_1^2}{\mu} \\
 e &= \sqrt{1 - \frac{(kX_1 - C_1)^2}{m^2 \alpha^2 X_1^2}} \\
 i &= \cos^{-1} \left[\frac{mX_1 + C_1}{kX_1 - C_2} \right]
 \end{aligned} \tag{10}$$

são as integrais primeiras obtidas a partir das condições iniciais: a, e, i onde

$$C_1 = \sqrt{\mu a} \left(\sqrt{1 - e^2} \cos i - \frac{1}{\alpha} \right) \text{ e } C_2 = \sqrt{\mu a} \left(k - m \alpha \sqrt{1 - e^2} \right) \tag{11}$$

RESULTADOS NUMÉRICOS

Para se obter o sistema dinâmico na variável X_1 , representado pelas equações (9), na ressonância abordada foram considerados os seguintes coeficientes: $\mathbf{k}=2$, $\mathbf{m}=2$, $\mathbf{q}=1$, $\mathbf{p}=0$, $\ell=2$. Dessa forma obtemos:

$$\bullet \frac{dX_{1,2,2,0,1}}{dt} = \frac{-381 J_{2,2} a_e^2 \mu^4 (C_1 - C_2 + 4X_1)^2 (C_2^2 - 4C_2 X_1 + 3X_1^2)}{32X_1^8 (C_2 - 2X_1)^2} \sin \varphi_{2,2,0,1}^* \quad (12)$$

$$\bullet \frac{d\varphi_{2,2,0,1}^*}{dt} = \frac{\mu^2}{X_1^3} - 2\omega_e + \frac{3J_2 a_e^2 \mu^4}{4(C_2 - 3X_1)^6 X_1^4} \left[C_2^3 - 8C_2^2 X_1 - 8C_1 (C_2 - 7X_1) X_1 + \right. \\ \left. 16C_2 X_1^2 + 32X_1^3 + C_1^2 (-3C_2 + 16X_1) \right] + \frac{381 J_{3,2} a_e^2 \mu^4}{16(C_2 - 3X_1)^3 X_1^9} \quad (13)$$

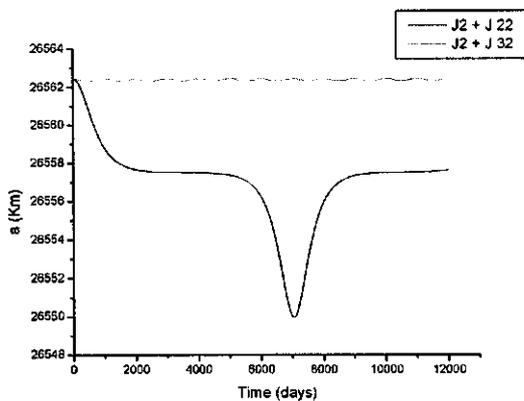
$$\left[(4C_2^5 - 52C_2^4 X_1 + 261C_2^3 X_1^2 - 628C_2^2 X_1^3 + 712C_2 X_1^4 - 288X_1^5 + \right. \\ \left. + C_1^2 (4C_2^3 - 24C_2^2 X_1 + 45C_2 X_1^2 - 24X_1^3) - \right.$$

$$\left. 2C_1 (4C_2^4 - 38C_2^3 X_1 + 129C_2^2 X_1^2 - 182C_2 X_1^3 + 84X_1^4) \right] \cos \varphi_{2,2,0,1}^*$$

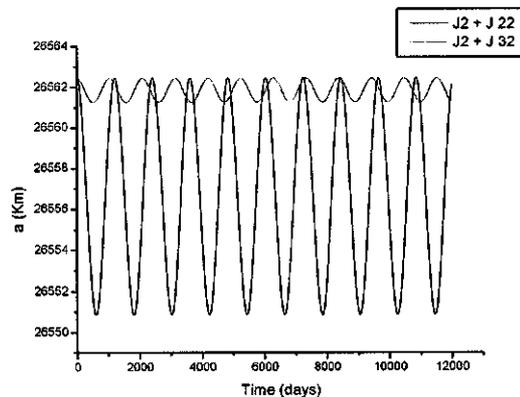
em que

$$\varphi_{2,2,0,1}^* = x_1 - 2\Theta_1 - 2\lambda_{22} \quad (14)$$

Através do sistema dinâmico (9) e com o auxílio de um manipulador numérico foi possível realizar várias integrações numéricas variando os elementos keplerianos para diversas condições iniciais. Foi considerado o harmônico zonal J_2 e o tesserais J_{22} e J_{32} , dados JGM3, com objetivo de verificar regiões nas vizinhanças da ressonância para os diferentes harmônicos.



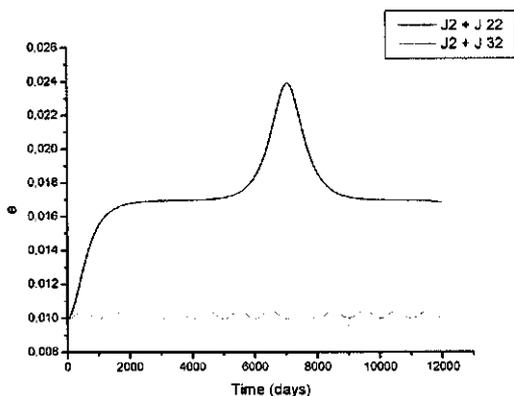
(a) $e = 0,01$



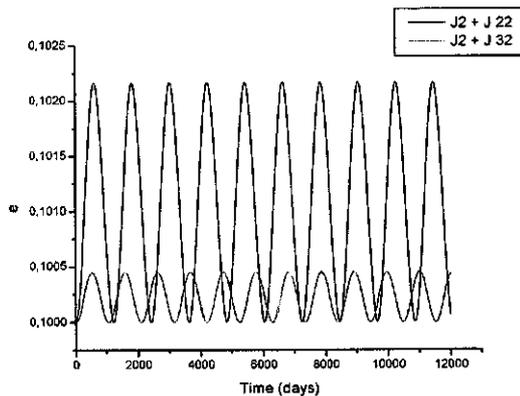
(b) $e = 0,1$

Figura 1- Semi-major axis Vs time for $J_2 + J_{22}$ and $J_2 + J_{32}$ considering: $a = 26562,48$ km, $i = 4^\circ$.

Na Figura 1 pode se observar que na condição (a), com excentricidade igual a 0,01, ocorre uma variação no semi-eixo maior da orbita quando considerado $J_2 + J_{22}$ causada pelo efeito de ressonância que não ocorre quando consideramos $J_2 + J_{32}$. Neste caso podemos notar que o efeito da ressonância foi minimizado quando consideramos o J_{32} . Ainda na mesma figura, quando consideramos a condição (b) com excentricidade igual a 0,1, podemos observar que a mudança da excentricidade modificou a região de ressonância.



(a) $e = 0,01$



(b) $e = 0,1$

Figure 2- Eccentricity Vs time for $J_2 + J_{22}$ and $J_2 + J_{32}$ considering: $a = 26562,48$ km, $i = 4^\circ$.

As regiões de ressonâncias para os diferentes harmônicos podem ser vistas também na Figura 2 para a variação da excentricidade. Nesta figura nota-se a também o comportamento estável visto na Figura 1 quando consideramos o harmônico J_{32} . Apesar dos efeitos da ressonância está presente quando $J_2 + J_{22}$ mantendo o mesmo comportamento nas Figuras 1 e 2, na variação da inclinação podemos observar (figura 3) ao efeito da ressonância com menos intensidade.

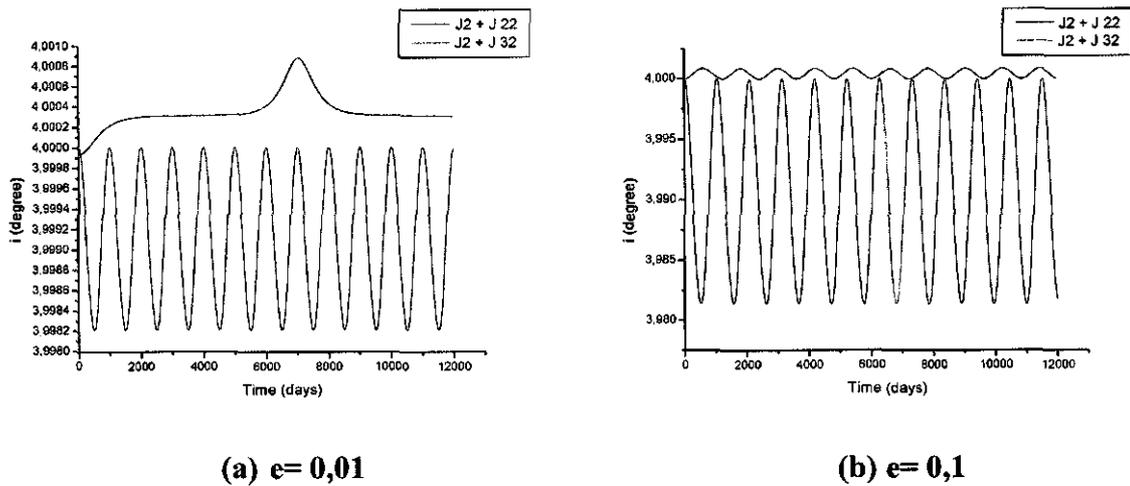
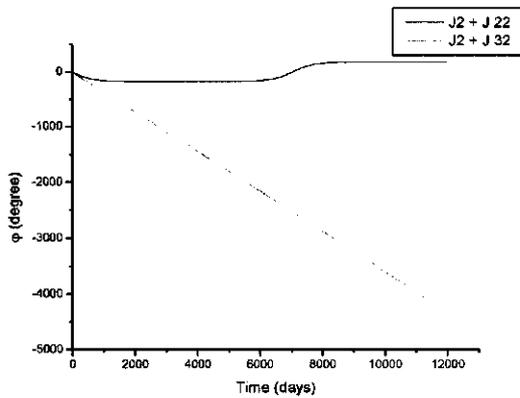
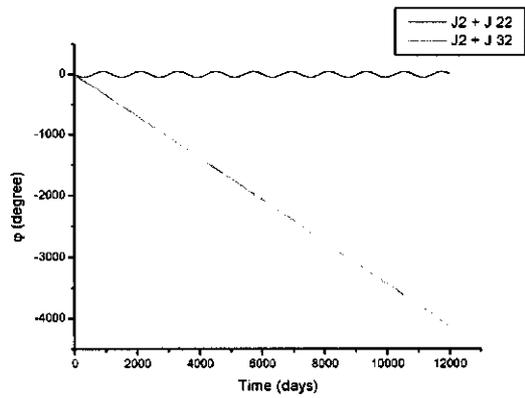


Figure 3 - Inclination Vs time for $J_2 + J_{22}$ and $J_2 + J_{32}$ considering: $a=26562,48$ km, $i=4^\circ$.

A Figura 4 nos mostra a variação do ângulo de fase para os casos mostrados na Figura 1 e 2. Na Figura 1(a) a variação do ângulo fora da ressonância (em vermelho) e nas vizinhanças da ressonância (em preto). Esta estabilidade apresentada nesta figura considerando $J_2 + J_{22}$, mostra uma estabilidade orbital próxima da separatriz. Este comportamento de estabilidade pode ser vista no plano de fase apresentado na Figura 9 (c).



(a) $e = 0,01$

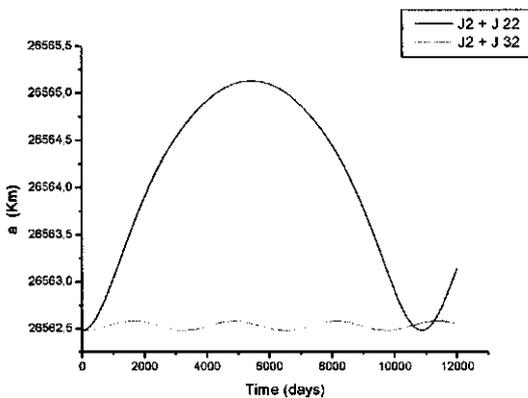


(b) $e = 0,1$

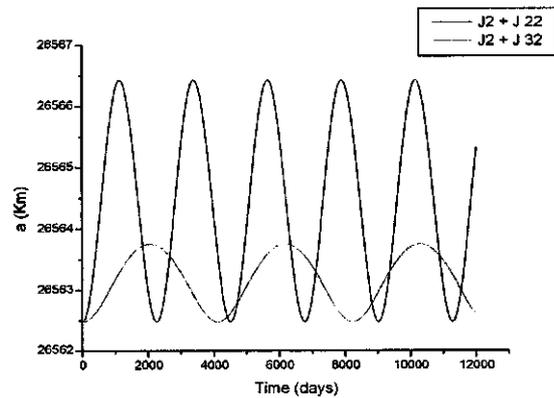
Figure 4- ϕ Vs time for $J_2 + J_{22}$ and $J_2 + J_{32}$ considering: $a = 26562,48$ km, $i = 4^\circ$.

Observado o ângulo ϕ podemos verificar que na simulação considerando $J_2 + J_{32}$ o ângulo ϕ esta saindo de uma situação onde ocorreu uma libração fora das vizinhanças da ressonância. Já na Figura 4-(a) observamos para $J_2 + J_{22}$ que a excentricidade de 0,01 faz o ângulo ϕ librar próximo a separatriz.

Na segunda simulação alteramos a inclinação utilizada na primeira simulação. A ideia principal é analisar os efeitos desses harmônicos nas vizinhanças em orbitas polares.

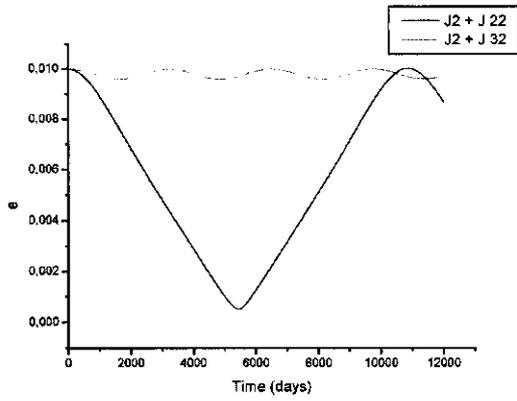


(a) $e = 0,01$

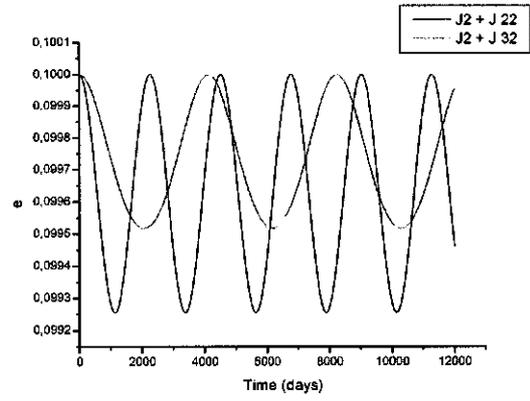


(b) $e = 0,1$

Figure 5 - Semi-major axis Vs time for $J_2 + J_{22}$ and $J_2 + J_{32}$ considering: $a = 26562,48$ km, $i = 87^\circ$.

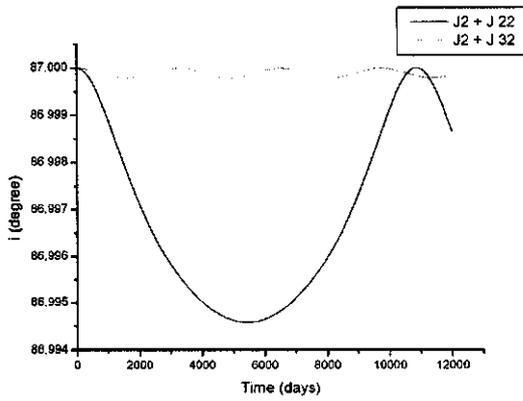


(a) $e = 0,01$

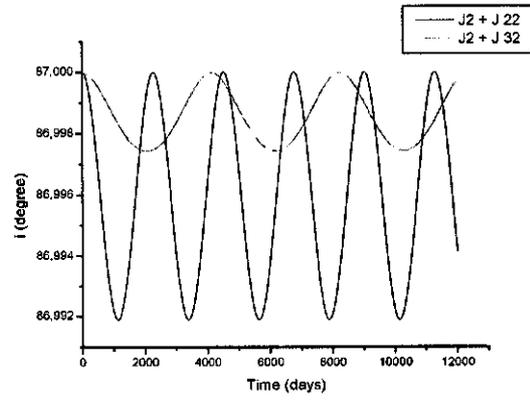


(b) $e = 0,1$

Figure 6 - Eccentricity Vs time for $J_2 + J_{22}$ and $J_2 + J_{32}$ considering: $a = 26562,48$ km, $i = 87^\circ$.

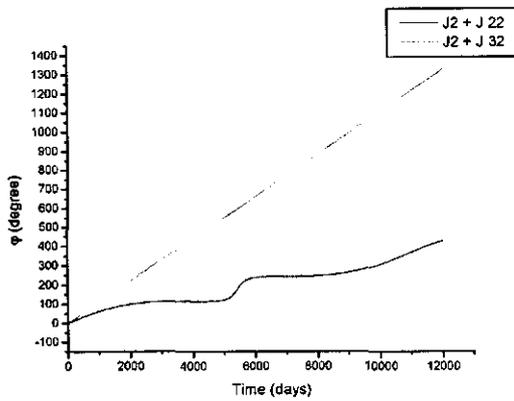


(a) $e = 0,01$

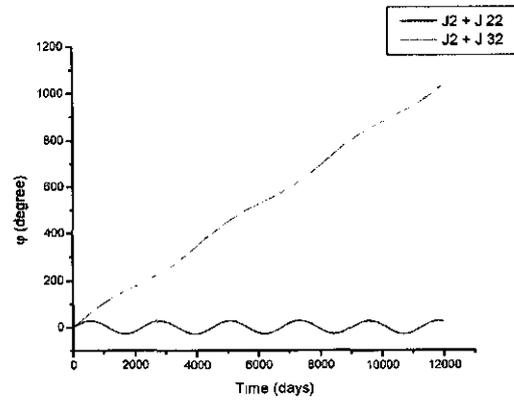


(b) $e = 0,1$

Figure 7 - Inclination Vs time for $J_2 + J_{22}$ and $J_2 + J_{32}$ considering: $a = 26562,48$ km, $i = 87^\circ$.



(a) $e = 0,01$



(b) $e = 0,1$

Figure 8 - ϕ Vs time for $J_2 + J_{22}$ and $J_2 + J_{32}$ considering: $a = 26562,48$ km, $i = 87^\circ$.

Nas figuras 5-8 nota-se que mesmo depois de alterado à inclinação para 87° e mantendo a excentricidade de 0,01 continuam a ocorrer variações nos elementos keplerianos provenientes do efeito de ressonância nas regiões próximas de $J_2 + J_{22}$, que não é observado quando mudamos a excentricidade para 0,1 ou quando consideramos $J_2 + J_{32}$.

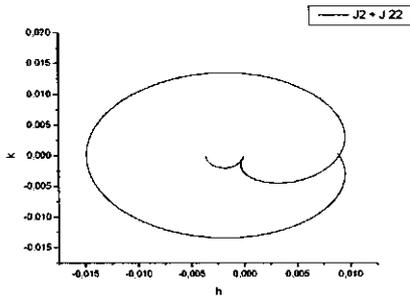
Espaço de fase e visão geral das amplitudes

A fim de se construir o espaço de fase h versus κ para diversos valores de semi-eixo, o semi-eixo maior (X_1) foi normalizado em que o valor inicial na ressonância exata é 1. Os resultados foram obtidos através da equação:

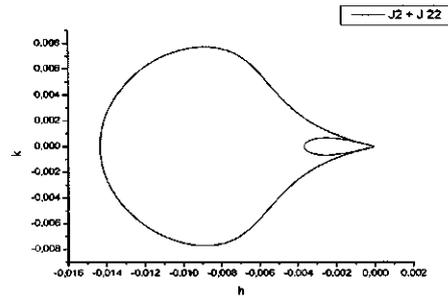
$$\begin{aligned}h &= -\sqrt{(-X_1 + X_2)} \cos(\varphi^* - m\lambda_{tm}) \\ \kappa &= \sqrt{(-X_1 + X_2)} \sin(\varphi^* - m\lambda_{tm})\end{aligned}\tag{12}$$

em que X_2 é uma constante que está relacionada com o semi-eixo maior da condição de ressonância exata, $\varphi^* = x_1 - m\Theta$ é o ângulo crítico e m um número inteiro relacionado ao número de voltas do satélite em torno da Terra. Esta representação do espaço de fase nos fornece uma melhor visão do comportamento das equações do movimento com a variação do semi-eixo maior.

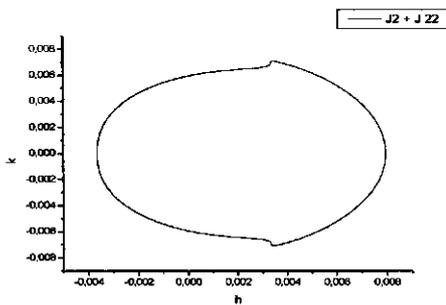
Na Figura 9, podemos observar com mais detalhe a sensibilidade das condições iniciais nas vizinhanças da ressonância onde ocorrem as librações. Para estas condições a mudança na inclinação da órbita é suficiente para modificar a região de ressonâncias.



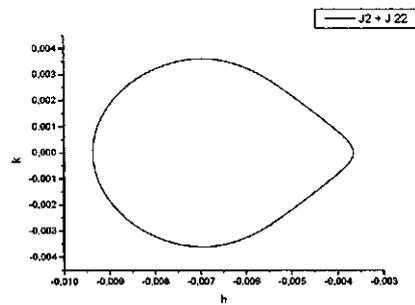
(a) $a=26562,48$, $i=4^\circ$ and $e=0,01$.



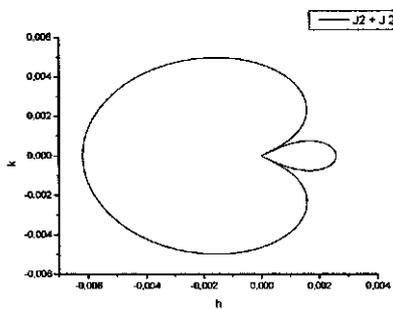
(b) $a=26562,48$, $i=4^\circ$ and $e=0,1$.



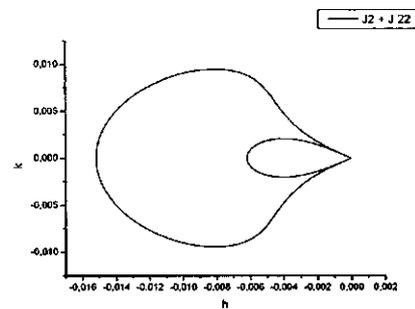
(c) $a=26563,8$ km, $i=87^\circ$ and $e=0,01$.



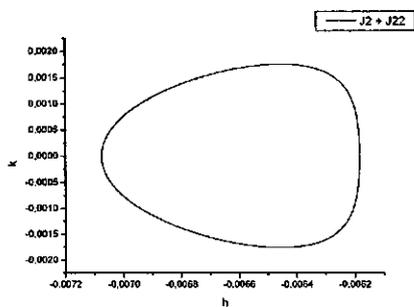
(d) $a=26563,8$ km, $i=87^\circ$ and $e=0,1$.



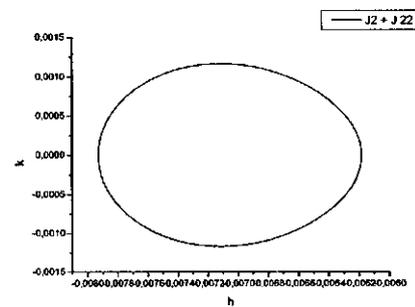
(e) $a=26563,8$ km, $i=4^\circ$ and $e=0,01$.



(f) $a=26563,8$ km, $i=4^\circ$ and $e=0,1$.



(g) $a=26563,8$ km, $i=87^\circ$ and $e=0,01$.



(h) $a=26563,8$ km, $i=87^\circ$ and $e=0,1$.

Figura 9- Regiões de liberação gerada para k Vs h considerando $J_2 + J_{22}$.

Uma análise geral das simulações foi construída a fim de observar o efeito da ressonância 2:1 para diferentes condições iniciais considerando os harmônicos abordados neste trabalho. Este estudo foi realizado e os resultados estão dispostos na Tabela 1.

As Figuras 10-12 foram construídas com os dados da Tabela 1. Os números nos eixos o horizontais destas figuras representam as simulações identificadas na tabela nas respectivas condições iniciais.

Tabela 1 - Amplitudes de variações à ressonância considerando $J_2 + J_{22}$

Posição	Características orbitais		$J_2 + J_{22}$			
	a (Km)	e	i (°)	Δa max	Δe max	Δi max (°)
1	26562.48	0.01	4°	12.501	1.389E-02	8.87E-04
2	26562.48	0.1	4°	11.268	2.166E-03	8.39E-04
3	26562.48	0.01	87°	2.651	9.949E-02	5.43E-03
4	26562.48	0.1	87°	3.947	7.455E-04	7.96E-03
5	26563.8	0.01	4°	2.389	3.782E-03	2.00E-04
6	26563.8	0.1	4°	14.268	2.651E-03	8.25E-04
7	26563.8	0.01	87°	0.630	1.263E-03	1.29E-03
8	26563.8	0.1	87°	1.307	2.460E-04	2.69E-03

Tabela 2 - Amplitudes de variações à ressonância considerando $J_2 + J_{32}$

$J_2 + J_{32}$						
1	26562.48	0.01	4°	0.117	4.271E-04	1.79E-03
2	26562.48	0.1	4°	1.204	4.513E-04	1.87E-02
3	26562.48	0.01	87°	0.102	9.040E-02	2.06E-04
4	26562.48	0.1	87°	1.280	4.816E-04	2.57E-03
5	26563.8	0.01	4°	0.101	3.802E-04	1.58E-03
6	26563.8	0.1	4°	1.031	3.868E-04	1.60E-02
7	26563.8	0.01	87°	0.201	7.800E-04	4.01E-04
8	26563.8	0.1	87°	3.025	1.142E-03	6.05E-03

As discrepâncias entre as variações estudadas até aqui podem ser vistas com mais detalhes nas figuras (10)-(12). Estes gráficos foram construídos baseados nos resultados apresentados na Tabela-1 e na Tabela-2. Para cada simulação realizada é possível observar a razão que existe entre as variações para os harmônicos esféricos abordados. Apesar dos resultados serem esperados, aqui é possível observar o quão é significativa a consideração destes harmônicos.

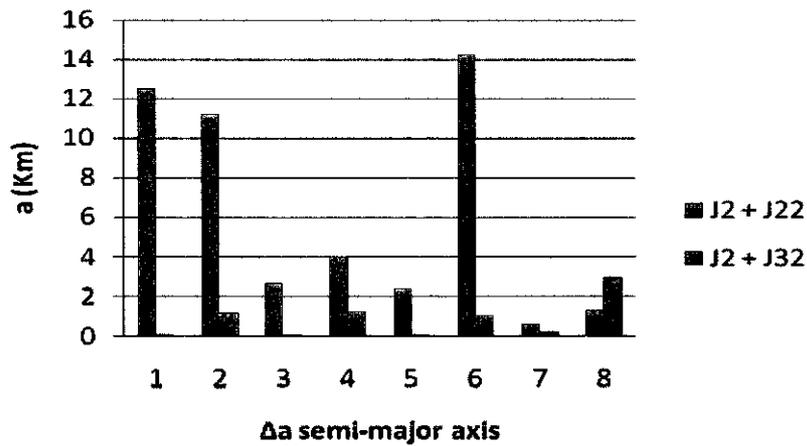


Figura 10- amplitude máxima do semi-eixo maior para $J_2 + J_{22}$ e $J_2 + J_{32}$.

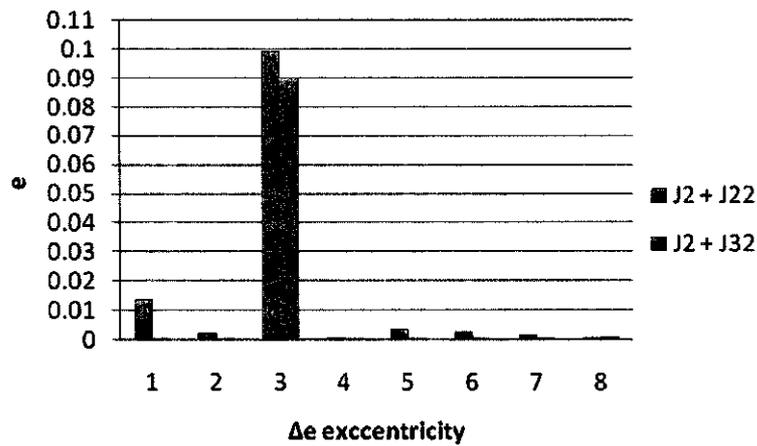


Figura 11- Amplitude máxima da exccentricidade para $J_2 + J_{22}$ e $J_2 + J_{32}$.

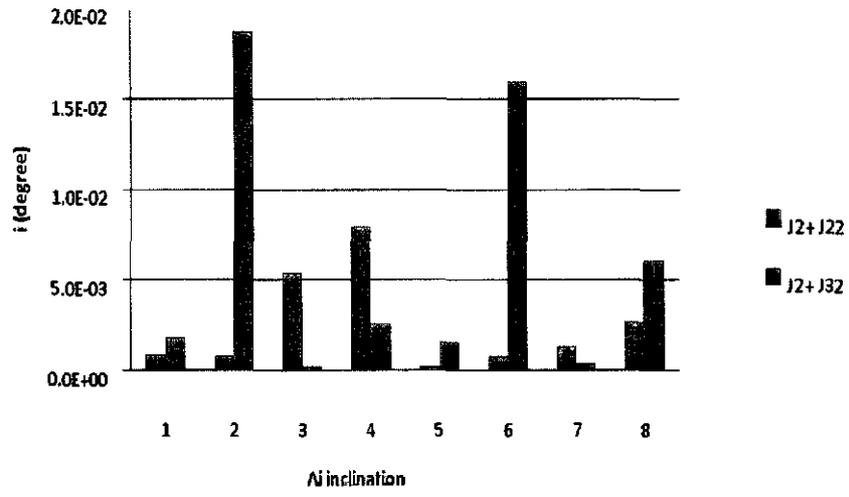


Figura 12- Amplitude máxima da excentricidade para $J_2 + J_{22}$ e $J_2 + J_{32}$.

CONCLUSÃO

Inicialmente foram apresentados resultados para ressonância 2:1. A escolha desta ressonância, apesar de ter sido abordada por vários autores, se fez necessária para se verificar a confiabilidade do programa desenvolvido como também o efeito desta ressonância em regiões distintas que ainda não foram estudadas. Foi notada uma pequena diferença nos resultados apresentados neste trabalho com o apresentado por Lima Junior.(1998) para a ressonância abordada. Esta diferença pode ter ocorrido devido a precisão dos termos escolhidos, entre eles, dos harmônicos esféricos ou na precisão do algoritmo elaborado.

Com base nas equações desenvolvidas neste trabalho foi verificar o efeito de ressonância em diversas simulações considerando como perturbação o potencial terrestre onde restringimos efeito considerando apenas o $J_2 + J_{22}$ e $J_2 + J_{32}$. Os resultados evidenciam a ocorrência do efeito de ressonância somente quando considerado como potencial perturbador $J_2 + J_{22}$ para os casos simulados. Porém quando considerado o potencial perturbador $J_2 + J_{32}$ foi possível observar que as regiões de ressonâncias apresentadas nos estudos do $J_2 + J_{22}$ foram modificadas, o qual gerou pequenas oscilações nestas regiões.

Para o semi-eixo inicial, verifica-se nas ressonâncias abordadas, que as regiões na vizinhança da ressonância exata são sensíveis a pequenas alterações. Efetuando uma variação de alguns metros acima do semi-eixo inicial, nota-se uma diminuição brusca na variação dos elementos orbitais. Por outro lado, abaixo desta região fixada, verifica-se uma diminuição nas variações dos elementos. Entretanto verifica-se a influência da ressonância ainda por alguns quilômetros. Estas variações na região abaixo da ressonância exata eram esperadas devido ao efeito do potencial gravitacional.

BIBLIOGRAFIA

FORMIGA, J. K. S.; Estudo de Ressonância no Movimento Orbital de Satélites Artificiais. 2005 Tese (mestrado 2005) Universidade Estadual Paulista Guaratinguetá 2005

LIMA JUNIOR P. H. C. L. Sistemas ressonantes e altas excentricidades no movimento de satélites artificiais. 1998. Tese (Doutorado em 1998), Instituto tecnológico de aeronáutica São José dos Campos, 1998.

OSÓRIO, J. P. Perturbações de órbitas de satélites no estudo do campo gravitacional terrestre. Porto Imprensa Portuguesa, 1973.

BELETSKII W. 1975. Resonance Phenomena at Rotations of Artificial and Natural Celestial Bodies. In GIACAGLIA GEO (Ed) Satellites dynamics. Berlin. Verlang CELESTRAK, 2004 "NORAD 2-line Elements". 10 Ago. 2004, <<http://www.celestrak.com>>.

FERRAZ MELO S, 1979 Periodic orbits in a region of instability created by independent small divisors, In NAGOZY E & FERRAZ MELO S (Eds). Natural and artificial satellite motion, Austin: University of Texas Press, p 283-292.

HAMILL PJ & BLITZER L. 1974 Spin-orbit coupling: a unified theory of orbital and rotational resonance. Celestial mechanics, 9: 127-146.

HUGGES S. 1980 Earth satellite Orbits with resonant Lunisolar Perturbations. Resonances dependent only inclination Proceedings of the Royal society of London series A. London, 372(1745): 243-264

GEDEON, G. S.; DDOUGLAS, B. C.; PALMINTER, M. T. Resonance effects on eccentric satellites orbits. Journal of the astronautical sciences, v.9, n.4, p.147-157, 1967